TEC | Tecnológico de Costa Rica

REPASO DE HABILIDADES DÉCIMO AÑO

TEMAS:

GEOMETRÍA, RELACIONES Y ÁLGEBRA

ELABORADO POR:

RICHARD CAMACHO ZAMORA

MICHELLE CHINCHILLA CHINCHILLA

ZULEYKA SUÁREZ VALDÉS-AYALA

2019

Índice

Como citar

Richard Camacho Zamora, Michelle Chinchilla Chinchilla y Zuleyka Suarez-Valdes Ayala. Repaso de habilidades decimo año. Geometr a, Relaciones y Algebra. Revista Digital matematica, educacion e internet. Vol 20, No 2. Marzo-Agosto, 2020.

1. Introducción

Con este folleto buscamos contribuir con una mejor formacion para los estudiantes de decimo año, tomando en cuenta las habilidades contempladas en el programa de Matematica vigente, segun el Ministerio de Educacion Publica en los temas de Geometr a y Relaciones y Algebra.

Los animamos a utilizar este material para reforzar las habilidades comprendidas en estos temas.

En cada uno de los temas se confeccionaron 25 preguntas: unas de seleccion unica y otras de respuesta cerrada.

Al nal se encuentran en forma detallada cada una de las soluciones a los ejercicios propuestos tomando en cuenta los conceptos que se requieren para una comprension adecuada.

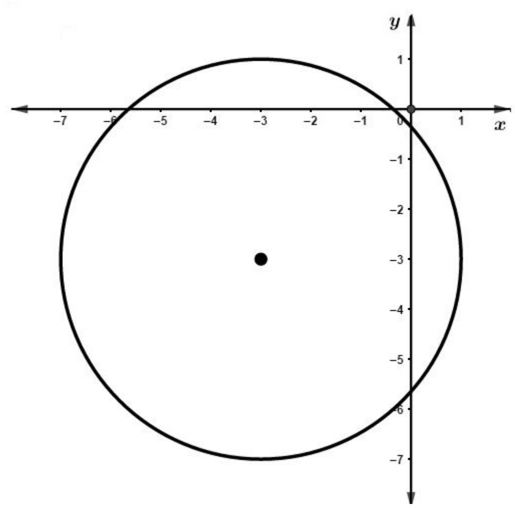
2. Agradecimientos

Se les agradece al Mag. Randall Blanco Benamburg y a la Lic. Mar a Del a Sigüenza Quintanilla por las sugerencias aportadas.

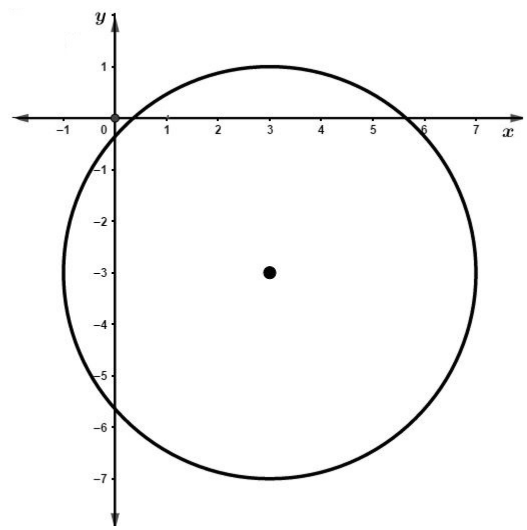
3. Geometría

Selección Única

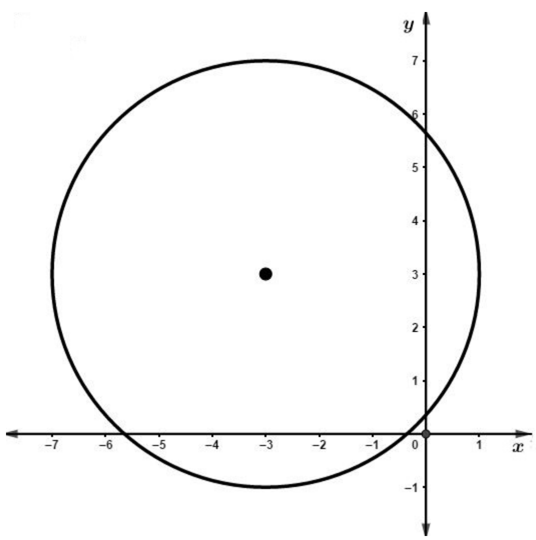
1. >Cual de las siguientes representaciones es una circunferencia de radio 4 cm y centro (3, 3)?



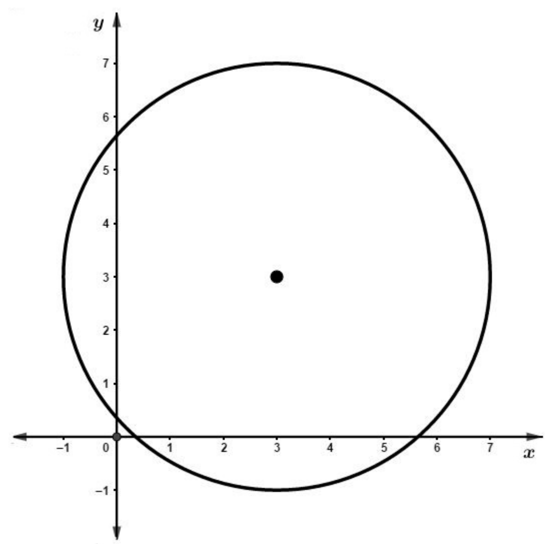
(a)



(c)



(b)



(d)

2. >Cual de las siguientes opciones representa la ecuacion de una circunferencia de centro $(5, \ \ 5)$ y radio 5?

   (a) $(x \ \ 5)^2 + (y + 5)^2 = 5$

   (b) $(x + 5)^2 + (y \ \ 5)^2 = 5$

   (c) $(x \ \ 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$

   (d) $(x + 5)^2 + (y \ \ 5)^2 = 25$

3. Al trasladar 5 unidades al sur y 13 unidades al oeste la circunferencia de ecuacion $(x \ \ 2)^2 + y^2 = 16$ se tiene como resultado la ecuacion

   (a) $(x \ \ 15)^2 + (y \ \ 5)^2 = 16$

   (b) $(x \ \ 11)^2 + (y \ \ 5)^2 = 16$

   (c) $(x + 15)^2 + (y + 5)^2 = 16$

   (d) $(x + 11)^2 + (y + 5)^2 = 16$

4. >Cual de los siguientes puntos se encuentra sobre la circunferencia de ecuacion $x^2 + y^2 = 25$?

   (a) $(1, 4)$

   (b) $(5, 1)$

   (c) $(0, 5)$

   (d) $(\ \ 1, \ \ 5)$

5. >Cual de las siguientes rectas es tangente a la circunferencia de centro $(2, \ \ 2)$ y radio 10 unidades?

   (a) $y = 12 + \frac{4x}{3}$

   (b) $x = 10$

   (c) $14x \ \ 14y = 84$

   (d) $y = 10$

6. La recta $y = 3x$ es secante a la circunferencia de ecuacion

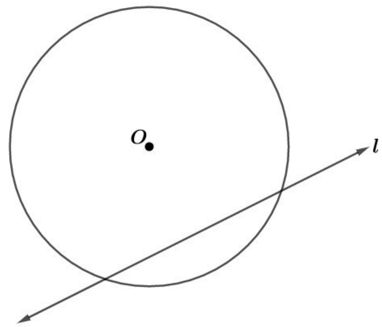
   (a) $(x \ \ 4)^2 + (y \ \ 2)^2 = 8$

   (b) $(x + 8)^2 + (y + 4)^2 = 40$

   (c) $x^2 + y^2 = 40$

   (d) $(x \ \ 4)^2 + (y \ \ 4)^26 = 4$

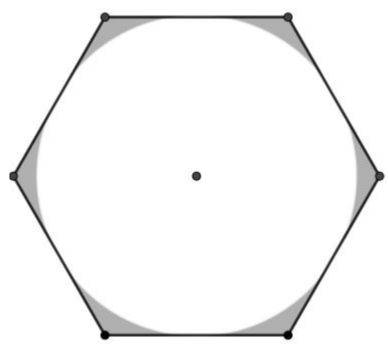
7. Observe la siguiente gura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Segun la imagen anterior, la recta l es con respecto a la circunferencia de centro O

(a) interior.
(b) exterior.
(c) tangente.
(d) secante.

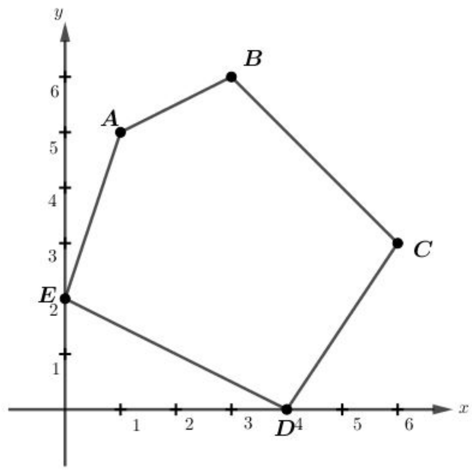
8. Observe la siguiente gura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Determine el area aproximada de la region sombreada de la gura anterior sabiendo que el diametro del c rculo es de 12 cm

(a) 5,09 cm^2
(b) 11,64 cm^2
(c) 77,09 cm^2
(d) 385,73 cm^2

9. Observe la siguiente gura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



El area de la gura anterior corresponde a

(a) 17,72 cm^2

(b) 18,5 cm^2

(c) 21 cm^2

(d) 32 cm^2

10. >Cual es la medida de la apotema de un triangulo equilatero sabiendo que esta inscrito en una circunferencia de radio 6 cm?

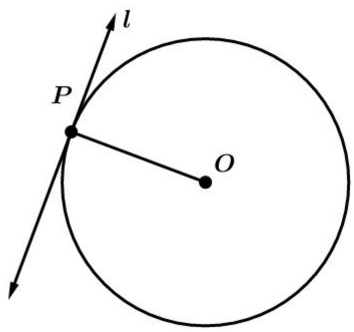
(a) 6 cm

(b) 3 cm

(c) 2 cm

(d) 1 cm

11. Observe la siguiente gura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita sabiendo que la recta l es tangente a la circunferencia de centro O.



Proposiciones

I. l ? $\overline{OP}$.

II. l k $\overline{OP}$.

III. l y $\overline{OP}$ son secantes.

>Cuales de las proposiciones anteriores son verdaderas tomando en cuenta que l es tangente a la circunferencia de centro O?

(a) I y II.

(b) II y III.

(c) I y III.

(d) Ninguna.

12. Dadas las rectas l_1 y l_2 de ecuaciones $l_1 : y = 3x + 2$ y $l_2 : 0 = \frac{x}{3} \quad y$, se puede asegurar que las rectas

(a) son paralelas.

(b) son perpendiculares.

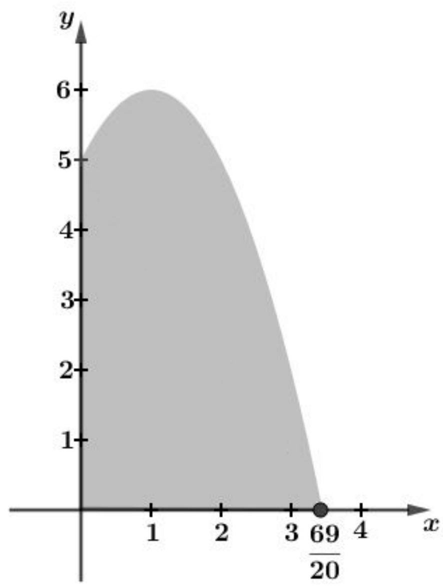
(c) se intersecan en el punto (0,0).

(d) no se intersecan.

Respuesta cerrada

13. Si se sabe que un pentagono de lado 8 cm y apotema 5,5 cm esta inscrito en una circunferencia >Cual es la medida del radio de la circunferencia?

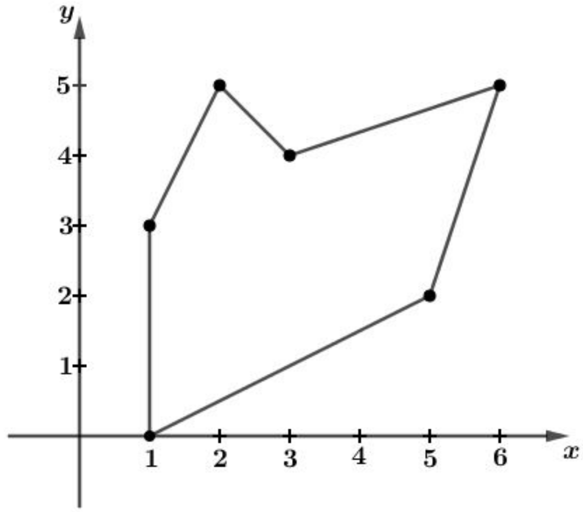
14. Observe la siguiente gura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



>Cual es el area aproximada de la gura anterior?

15. Dado un pol gono regular de 18 lados, >cual es la medida de un angulo externo y la medida de un angulo interno de este pol gono?

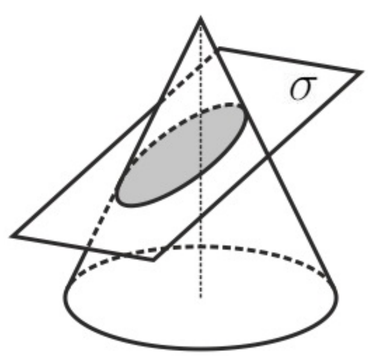
16. Observe la siguiente gura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



>Cual es aproximadamente el per metro de la gura anterior?

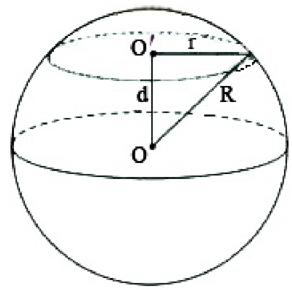
17. Si se sabe que la medida del angulo externo de un pol gono regular es de 40 y el lado del pol gono mide 6 cm >Cual es el per metro de dicho pol gono?

18. Observe la siguiente gura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



La gura que se forma al intersecar el cono anterior con el plano σ recibe el nombre de

19. Observe la siguiente gura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



>Cual es la medida del radio de la esfera sabiendo que $r = 7\,cm$ y que el corte se hizo a una distancia de $5\,cm$ del centro de la esfera?

20. >Cual es el area de la gura que se forma al intersecar un cilindro con un plano π paralelo a sus bases sabiendo que el radio de la base mide $5\,cm$?

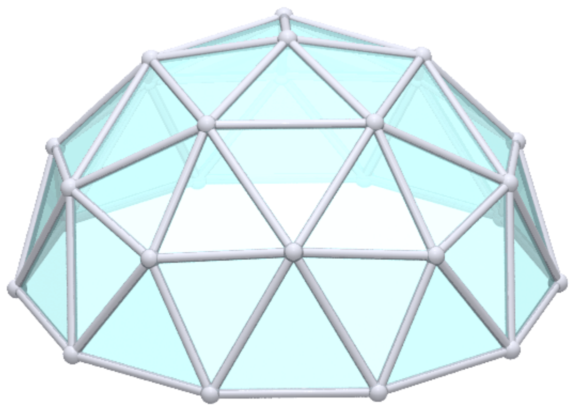
21. Si se tiene un cilindro de diametro $14\,cm$ y altura $20\,cm$ al cual se le hace un corte perpendicular a la base pasando por el centro del cilindro. >Cual es el per metro de la super cie formada al hacer el corte?

22. Si se tiene una esfera de radio $9\,cm$ y se interseca con un plano δ, sabiendo que δ no pasa por el centro de la esfera, pero es secante a la esfera >que gura se forma en dicha interseccion?

23. Carlos quiere saber cuantas vueltas da la llanta de su bicicleta al recorrer 100 metros en una calle plana. Si se sabe que los rayos de la bicicleta miden $28\,cm$ cada uno, >cuantas vueltas da la llanta de la bicicleta de Carlos?

24. El Observatorio Vulcanologico y Sismologico de Costa Rica (OVSICORI) desea saber cual es el area afectada despues del temblor ocurrido en Puntarenas sabiendo que la onda de expansion fue en forma circular y que el epicentro fue en el centro de dicha provincia y la zona mas lejana afectada segun reportes fue Alajuela a 85 km del epicentro. >Cual es aproximadamente el area afectada por el temblor?

25. Observe la siguiente gura la cual muestra una cupula geodesica y conteste lo que se le solicita.



El director del colegio desea pintar el exterior del vivero con forma de cupula geodesica como se muestra en la gura anterior, si se sabe que se tienen 50 triangulos equilateros de lado 50 cm formando completamente el techo del vivero y que un tarro de pintura alcanza para pintar 1000 cm^2. >Cuantos tarros de pintura se necesitan para pintar todo el vivero?

4. Relaciones y Álgebra

Selección Única

1. Considere los conjuntos $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y las siguientes proposiciones:

   I. $A \cap B \neq \emptyset$

   II. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

   De las proposiciones mencionadas anteriormente se puede afirmar que con certeza son verdaderas

   (a) solo la I.

   (b) solo la II.

   (c) ambas.

   (d) ninguna.

2. Considere el conjunto $M = \{2x + 3 / x \in \mathbb{N}\}$ y las siguientes proposiciones:

   I. $6 \in M$

   II. $\{7, 9, 11\} \subset M$

   De las proposiciones mencionadas anteriormente se puede afirmar que con certeza son verdaderas

   (a) solo la I.

   (b) solo la II.

   (c) ambas.

   (d) ninguna.

3. Considere el conjunto $T = \{a + b / a, b \in \mathbb{N}\}$ y las siguientes proposiciones:

   I. $0 \in T$

   II. $\{-2, -1, 1, 2\} \subset T$

   De las proposiciones mencionadas anteriormente se puede afirmar que con certeza son verdaderas

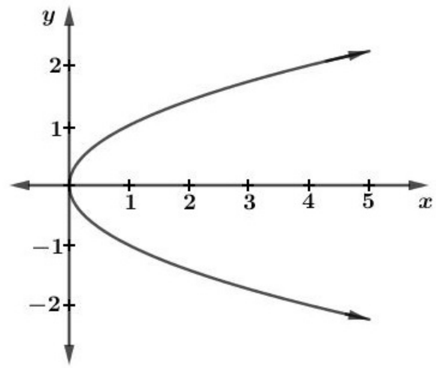
   (a) solo la I.

   (b) solo la II.

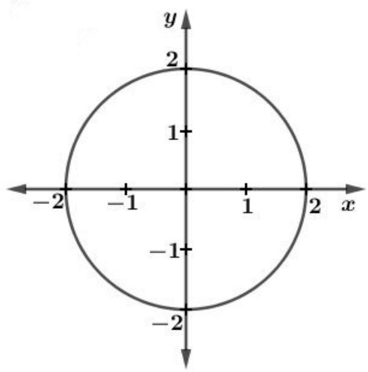
   (c) ambas.

   (d) ninguna.

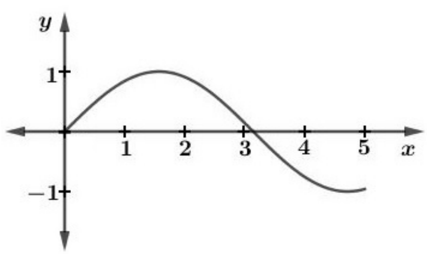
4. Observe las siguientes gra cas y de acuerdo con los datos de las mismas, conteste lo que se le solicita.



I.



II.



III.

De las gra cas mostradas anteriormente, se puede a rmar con certeza que no corresponden a una funcion

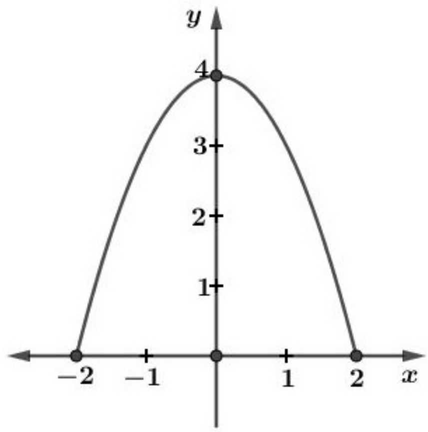
(a) solo la I y III.

(b) solo la I y II.

(c) solo la II y III.

(d) todas.

5. Observe la gra ca de la funcion h : [$2, 2$] ! [$0, 4$]



Con base en la gra ca de la funcion h, un intervalo donde la funcion es creciente corresponde a

(a)]$0, 4$[

(b)] $2, 4$[

(c)] $2, 0$[

(d)]$0, 2$[

6. Observe la siguiente tabla de una relacion y conteste lo que se le solicita.

x	2	3	4	4	5
$f(x)$	1	5	6	8	11

Con base en los datos de la tabla se puede a rmar que

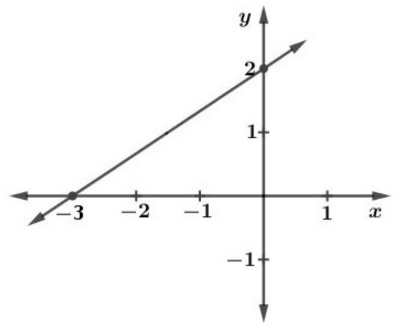
(a) la relacion es una funcion.

(b) la relacion no es una funcion.

(c) el 3 se relaciona con el 2.

(d) el 1 se relaciona con el 5.

7. Observe la siguiente gra ca y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Con los datos de la gra ca anterior la ecuacion de la recta corresponde a

(a) $y = \frac{2x}{3} + 2$

(b) $y = \frac{3x}{2} \quad 2$

(c) $y = \frac{3x}{2} + 2$

(d) $y = \frac{2x}{3} + 2$

8. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 13x + 5y = 2 \\ 65x + 25y = 33 \end{cases}$$

Se puede a rmar que el sistema anterior

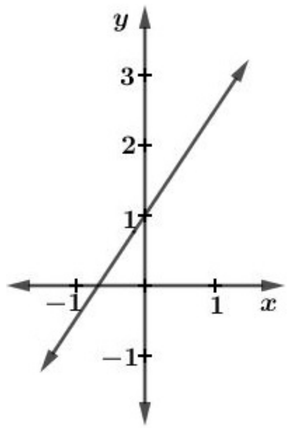
(a) tiene como solucion a $\left\{\left(\frac{23}{130}, \frac{3}{50}\right)\right\}$.

(b) tiene como solucion a $\left\{\left(\frac{3}{50}, \frac{23}{130}\right)\right\}$.

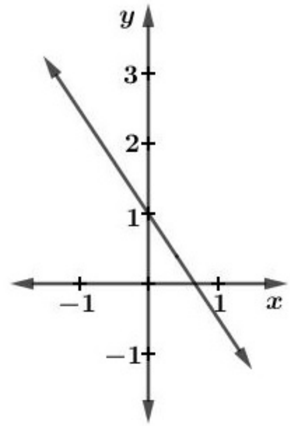
(c) tiene in nitas soluciones.

(d) no tiene solucion.

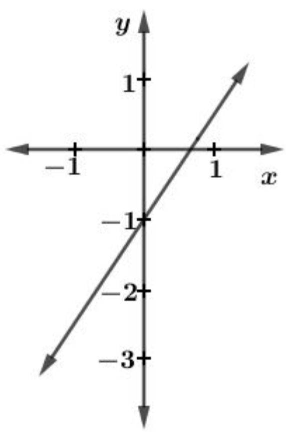
9. Considere la funcion f cuyo criterio es $f(x) = \frac{3x}{2} + 1$, la gra ca de f corresponde a



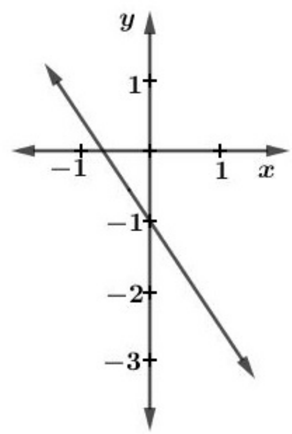
(a)



(c)



(b)



(d)

10. Considere la funcion $f(x) = x^2 + 4x \quad 18$ y las siguientes proposiciones:

    I. f es concava hacia abajo

    II. El eje de simetr a de f esta en la recta de ecuacion $x = \quad 2$

    De las proposiciones anteriores con certeza son verdaderas

    (a) solo la I.

    (b) solo la II.

    (c) todas.

    (d) ninguna.

11. Considere la funcion g : R ! R cuyo criterio es $g(x) = 4x^2 \quad 15x \quad 12$ y las siguientes proposiciones:

    I. El *4* > 0

    II. El intervalo donde g crece corresponde a $\left] \quad 1 \, , \frac{15}{8} \right[$

    De las proposiciones anteriores con certeza son verdaderas

    (a) solo la I.

    (b) solo la II.

    (c) todas.

    (d) ninguna.

12. Considere la funcion $f(x) = ax^2 + bx$ con $a, b > 0$ y las siguientes proposiciones:

    I. f alcanza el punto m nimo en $\left(\frac{b}{2a}, 0 \right)$

    II. f es concava hacia arriba

    De las proposiciones anteriores con certeza son verdaderas

    (a) solo la I.

    (b) solo la II.

    (c) todas.

    (d) ninguna.

13. En un supermercado las manzanas tienen un costo de 250 colones la unidad y las peras tienen un costo de 300 colones la unidad, si en total se compraron 30 frutas entre manzanas y peras y se pagaron 8350 colones. Con base en el problema anterior,un sistema de ecuaciones que permite encontrar la cantidad que se compro de cada fruta corresponde a

(a) $\left\{\begin{aligned} 250x + 300y &= 30 \\ x + y &= 8350 \end{aligned}\right.$

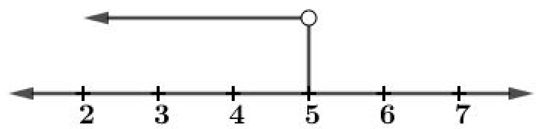
(b) $\left\{\begin{aligned} 300x + 250y &= 8350 \\ x + y &= 30 \end{aligned}\right.$

(c) $\left\{\begin{aligned} 30x + 30y &= 8350 \\ 250x + 300y &= 30 \end{aligned}\right.$

(d) $\left\{\begin{aligned} 300x + 250y &= 8350 \\ 300x + 250y &= 30 \end{aligned}\right.$

Respuesta cerrada

14. Observe la siguiente imagen la cual corresponde a la representacion gra ca de un conjunto y conteste lo que se le solicita.

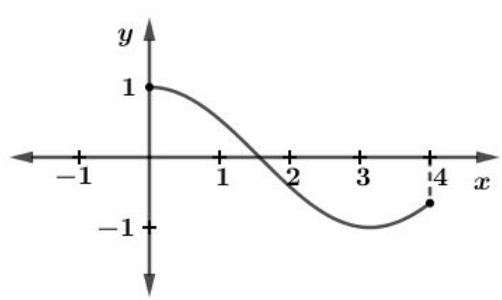


Segun la imagen anterior una posible representacion del conjunto en notacion por comprension corresponde a

15. Considere el conjunto P = $f2x/x$ 2 Ng que contiene a todos los numeros pares. Si el universo es R, el complemento del conjunto P en notacion por comprension corresponde a

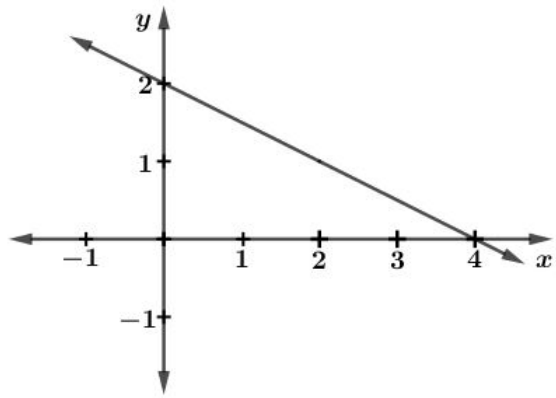
16. Considere la funcion f : R ! R con $f(x)$ = 4x 1, la preimagen de -2 corresponde a

17. Observe la gra ca de la funcion h y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Si el dominio de la funcion h es $[0, 4]$ el ambito de la funcion corresponde a

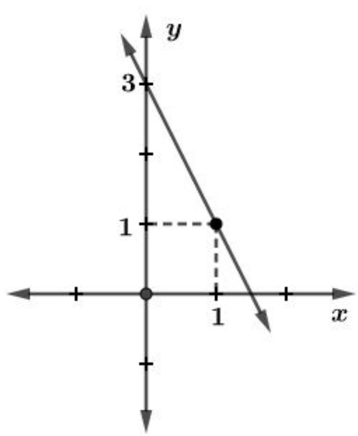
18. Observe la gra ca de la funcion g y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



La pendiente de la gra ca g corresponde a

19. Considere a las funciones g y f con $g(x) = \dfrac{x^2+3}{x}$ y $f(x) = 2x + 1$, la composicion $(gof)(x)$ corresponde a

20. Observe la gra ca de la funcion h y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Con certeza se puede a rmar que la funcion h corta al eje x en el punto

21. Sea la funcion f : R ! R cuyo criterio viene dado por $f(x) = x^2 \quad \frac{x}{2} \quad 5$, >en que puntos la funcion f corta al eje de las ordenadas y al eje de las abscisas respectivamente?

22. El el TEC unos ingenieros lanzan desde el suelo un cohete, el mismo forma un movimiento parabolico representado por la siguiente funcion:

$$f(x) = \quad 15x^2 + 60x$$

Donde x representa la cantidad recorrida en metros y $f(x)$ representa la altura del cohete durante su recorrido en metros. El cohete alcanza la altura maxima en el punto.

23. En la llantera \El exito" se sabe que la ganancia (en miles de colones), en funcion de una cantidad x de llantas vendidas vienen dada por la formula:

$$h(x) = \quad 2x^2 + 800x + 400$$

La cantidad de llantas que se necesitan vender para alcanzar la ganancia maxima corresponde a

24. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 8y & = \quad 12 \\ 7x + \quad 12y & = \quad 4 \end{cases}$$

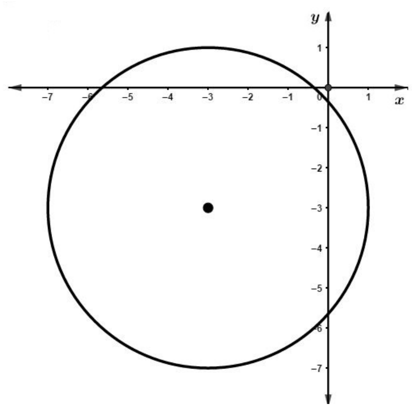
El conjunto de soluciones para el sistema anterior corresponde a

25. En el CTP Cartago el profesor de matematicas fue a comprar marcadores de pizarra, cada marcador de tinta azul tiene un valor de 1250 colones y cada marcador de tinta negra tiene un valor de 1150 colones, en total pago 18150 colones y se llevaron un total de 15 marcadores. Si A representa la cantidad de dinero pagada por los marcadores de tinta azul y N respresenta la cantidad de dinero pagada por los marcadores de tinta negra. La diferencia $A \quad N$ equivale a

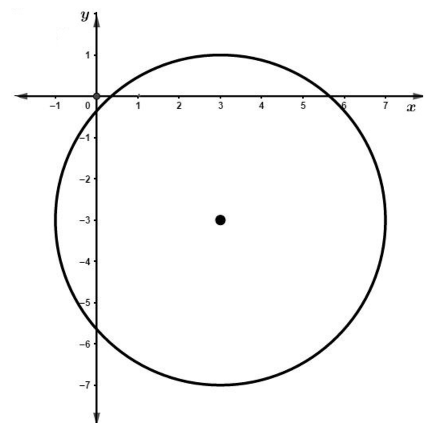
5. Solución de Geometría

Selección Única

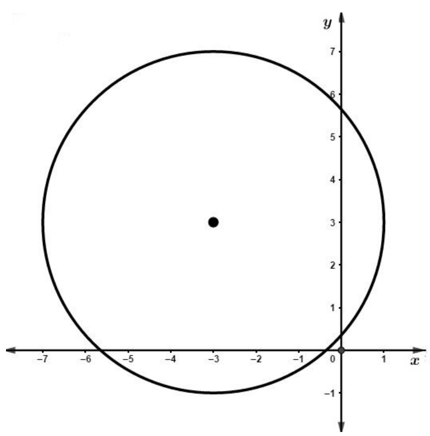
1. >Cual de las siguientes representaciones es una circunferencia de radio 4 cm y centro ($3, 3$)?



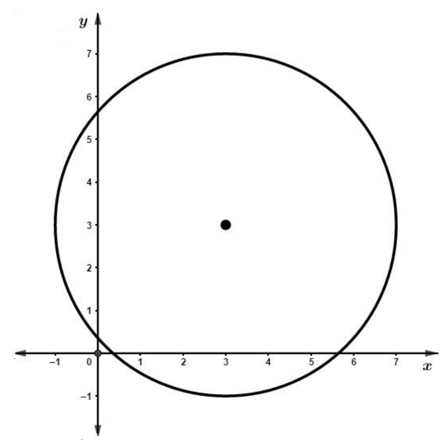
(a)



(c)



(b)



(d)

Solución:
Recordemos que las entradas de un par ordenado son (x, y) donde x corresponde al eje horizontal y y al eje vertical.
Como tenemos el par ordenado ($3, 3$), estamos ubicados en el segundo cuadrante por lo cual la respuenta correcta es la opcion (b).

2. >Cual de las siguientes opciones representa la ecuacion de una circunferencia de centro $(5, \quad 5)$ y radio 5?

   (a) $(x \quad 5)^2 + (y + 5)^2 = 5$

   (b) $(x + 5)^2 + (y \quad 5)^2 = 5$

   (c) $(x \quad 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$

   (d) $(x + 5)^2 + (y \quad 5)^2 = 25$

   Solución:
   Recordemos que la ecuacion canonica de una circunferencia es $(x \quad h)^2 + (y \quad k)^2 = r^2$ donde (h, k) es el centro de la circunferencia y r es el radio de la circunferencia.
   Al sustituir el centro y el radio en la ecuacion tenemos que

   $$(x \quad 5)^2 + (y \qquad 5)^2 = (5)^2$$

   $$) \ (x \quad 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$$

   Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (a).

3. Al trasladar 5 unidades al sur y 13 unidades al oeste la circunferencia de ecuacion $(x \quad 2)^2 + y^2 = 16$ se tiene como resultado la ecuacion

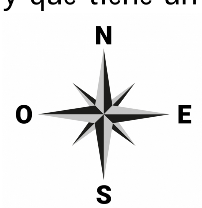
   (a) $(x \quad 15)^2 + (y \quad 5)^2 = 16$

   (b) $(x \quad 11)^2 + (y \quad 5)^2 = 16$

   (c) $(x + 15)^2 + (y + 5)^2 = 16$

   (d) $(x + 11)^2 + (y + 5)^2 = 16$

   Solución:
   De la ecuacion sabemos que el centro de la circunferencia corresponde al punto $(2, 0)$ y que tiene un radio de 4 unidades, ademas, recordemos los puntos cardinales.

   Como debemos trasladarnos 5 unidades al sur ubicandonos segun los puntos cardinales, estar amos moviendonos 5 unidades hacia abajo lo cual nos dice que debemos restarle 5 a la coordenada y del centro, con lo que efectuar amos la siguiente operacion

   0 5 = 5

   Pero tambien nos estamos moviendo 13 unidades al oeste, ubicandonos segun los puntos cardinales, estar amos moviendonos 13 unidades hacia la izquierda lo cual nos dice que debemos restarle 13 a la coordenada x del centro, con lo que efectuar amos la siguiente operacion

   2 13 = 11

De lo cual podemos concluir que el centro de la Circunferencia trasladada es $(\quad 11, \quad 5)$

Note que como estamos trasladando la circunferencia, su radio no debe cambiar.

Finalmente sustituyendo en la formula canonica de la circunferencia tenemos

$(x \qquad 11)^2 + (y \qquad 5)^2 = 16$

) $(x + 11)^2 + (y + 5)^2 = 16$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (d).

4. >Cual de los siguientes puntos se encuentra sobre la circunferencia de ecuacion $x^2 + y^2 = 25$?

   (a) $(1, 4)$

   (b) $(5, 1)$

   (c) $(0, 5)$

   (d) $(\quad 1, \quad 5)$

   Solución:
   Recordemos que para saber si un punto es interior a una circunferencia, la distancia del centro de la circunferencia al punto debe ser menor que el radio de la circunferencia, para que sea exterior, la distancia del centro de la circunferencia al punto debe ser mayor que el radio de la circunferencia y para que este sobre la circunferencia, la distancia del centro de la circunferencia al punto debe ser igual al radio de la circunferencia. Como buscamos que el punto este en la circunferencia, necesitamos que al evaluar los valores de x y de y la distancia sea igual al radio

   Opcion A:

   Al sustituir el punto $(1, 4)$ tenemos

   $(1)^2 + (4)^2 = 17$

   Como $r^2 = 25$ y $17 < 25$ el punto es interior a la circunferencia

   Opcion B:

   Al sustituir el punto $(5, 1)$ tenemos

   $(5)^2 + (1)^2 = 26$

   Como el $r^2 = 25$ y $25 < 26$ el punto es exterior a la circunferencia

   Opcion C:

   Al sustituir el punto $(0, 5)$ tenemos

   $(0)^2 + (5)^2 = 25$

   Como el $r^2 = 25$ y $25 = 25$ el punto esta en la circunferencia

   Opcion D:

   Al sustituir el punto$(\quad 1, \quad 5)$ tenemos

   $(\quad 1)^2 + (\quad 5)^2 = 26$

   Como el $r^2 = 25$ y $25 < 26$ el punto es exterior a la circunferencia

   Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (c).

5. >Cual de las siguientes rectas es tangente a la circunferencia de centro $(2, \;\; 2)$ y radio 10 unidades?

   (a) $y = 12 + \dfrac{4x}{3}$

   (b) $x = 10$

   (c) $14x \quad 14y = 84$

   (d) $y = 10$

   Solución:
   Recordemos que una recta es tangente a una circunferencia si al resolver el sistema de ecuaciones conformados por la ecuacion de la recta y la ecuacion de la circunferencia nos da una unica solucion , si al resolver el sistema de ecuaciones conformados por la ecuacion de la recta y la ecuacion de la circunferencia nos da dos soluciones es porque la recta es secante y si no tiene soluciones es porque la recta es exterior a la circunferencia.

   Ademas sabemos que el centro de la circunferencia es $(2, \;\; 2)$ y el radio es de 10 unidades, al sustituir en la ecuacion tenemos

   $(x \quad 2)^2 + (y \qquad 2)^2 = (10)^2$

) $(x \quad 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$

   Opcion A:

   Al resolver el sistema de ecuaciones por el metodo de sustitucion, se despejara la variable y en la ecuacion de la recta $y = 12 + \dfrac{4x}{3}$ y se sustituira en la ecuacion de la circunferencia

   $(x \quad 2)^2 + \left(12 + \dfrac{4x}{3} + 2\right)^2 = 100$

) $(x \quad 2)^2 + \left(\dfrac{4x}{3} + 14\right)^2 = 100$

   Desarrollando las formulas notables tenemos que

) $(x^2 \quad 4x + 4) + \left(\dfrac{16x^2}{9} + \dfrac{112x}{3} + 196\right) = 100$

) $\dfrac{25x^2}{9} + \dfrac{100x}{3} + 200 = 100$

) $\dfrac{25x^2}{9} + \dfrac{100x}{3} + 200 \quad 100 = 0$

) $\dfrac{25x^2}{9} + \dfrac{100x}{3} + 100 = 0$

   Para saber cuantas soluciones tiene se calcula el discriminante el cual debe cumplir lo siguiente:

   < 0 si la ecuacion no tiene soluciones en el conjunto de los numeros reales

   > 0 si la ecuacion tiene dos soluciones distintas en el conjunto de los numeros reales
   $= 0$ si la ecuacion tiene una unica solucion en el conjunto de los numeros reales

Ademas, recuerde que $= b^2 \quad 4ac$

$$= \left(\frac{100}{3}\right)^2 \quad 4 \quad \left(\frac{25}{9}\right) \quad (100)$$

$$= \frac{10000}{9} \quad \frac{10000}{9}$$

$= 0$

Por lo tanto, la recta es tangente a la circunferencia

Opcion B:

Al resolver el sistema de ecuaciones por el metodo de sustitucion, se despejara la variable x en la ecuacion de la recta $x = 10$ y se sustituira en la ecuacion de la circunferencia

$(10 \quad 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$

$) \ (8)^2 + (y + 2)^2 = 100$

Desarrollando la formula notable tenemos

$) \ 64 + (y^2 + 4y + 4) = 100$

$) \ y^2 + 4y + 68 = 100$

$) \ y^2 + 4y + 68 \quad 100 = 0$

$) \ y^2 + 4y \quad 32 = 0$

$= (4)^2 \quad 4 \ (1) \ (\ 32)$

$= 16 + 128$

$= 144$

Por lo tanto, la recta es secante a la circunferencia

Opcion C:

Al resolver el sistema de ecuaciones por el metodo de sustitucion, se despejara la variable y en la ecuacion de la recta $14x \quad 14y = 84$ y se sustituira en la ecuacion de la circunferencia

$14x \quad 14y = 84$

$$) \ y = \frac{14x \quad 84}{14}$$

$$(x \quad 2)^2 + \left(\frac{14x \quad 84}{14} + 2\right)^2 = 100$$

$$) \ (x \quad 2)^2 + \left(\frac{14x \quad 112}{14}\right)^2 = 100$$

$$) \ (x \quad 2)^2 + \left(\frac{14(x \quad 8)}{14}\right)^2 = 100$$

$) \ (x \quad 2)^2 + (x \quad 8)^2 = 100$

Desarrollando las formulas notables tenemos

) $(x^2 \quad 4x + 4) + (x^2 \quad 16x + 64) = 100$

) $2x^2 \quad 20x + 68 = 100$

) $2x^2 \quad 20x + 68 \quad 100 = 0$

) $2x^2 \quad 20x \quad 32 = 0$

$= (\quad 20)^2 \quad 4 \quad (2) \quad (\quad 32)$

$= 400 + 256$

$= 656$

Por lo tanto, la recta es secante a la circunferencia

Opcion D:

Al resolver el sistema de ecuaciones por el metodo de sustitucion, se despejara la variable y en la ecuacion de la recta $y = 10$ y se sustituira en la ecuacion de la circunferencia

$(x \quad 2)^2 + (10 + 2)^2 = 100$

) $(x \quad 2)^2 + (12)^2 = 100$

Desarrollando la formula notable tenemos

) $(x^2 \quad 4x + 4) + 144 = 100$

) $x^2 \quad 4x + 148 = 100$

) $x^2 \quad 4x + 144 \quad 100 = 0$

) $x^2 \quad 4x + 44 = 0$

$= (\quad 4)^2 \quad 4 \quad (1) \quad (44)$

$= 16 \quad 176$

$= \quad 160$

Por lo tanto, la recta es exterior a la circunferencia

Por lo que, la respuesta correcta es la opcion (a).

6. La recta $y = 3x$ es secante a la circunferencia de ecuacion

(a) $(x \quad 4)^2 + (y \quad 2)^2 = 8$

(b) $(x + 8)^2 + (y + 4)^2 = 40$

(c) $x^2 + y^2 = 40$

(d) $(x \quad 4)^2 + (y \quad 4)^2 = 4$

Solución:
Para resolver esta pregunta se procedera a despejar la variable y de la ecuacion de la recta y se sustituira en la ecuacion de la circunferencia, si al resolver esta ecuacion se obtienen 2 soluciones, es porque la recta es secante a la circunferencia.

Opcion A:

Al sustituir $y = 3x$ en la ecuacion $(x \quad 4)^2 + (y \quad 2)^2 = 8$ se tiene

$(x \quad 4)^2 + (3x \quad 2)^2 = 8$

Desarrollando las formulas notables se tiene

) $(x^2 \quad 4x + 16) + (9x^2 \quad 12x + 4) = 8$

) $10x^2 \quad 16x + 20 = 8$

) $10x^2 \quad 16x + 20 \quad 8 = 0$

) $10x^2 \quad 16x + 12 = 0$

$= (\quad 16)^2 \quad 4 \quad (10) \quad (12)$

$= 256 \quad 480$

224

Por lo tanto, la recta es exterior a la circunferencia

Opcion B:

Al sustituir $y = 3x$ en la ecuacion $(x + 8)^2 + (y + 4)^2 = 40$ se tiene

$(x + 8)^2 + (3x + 4)^2 = 40$

Desarrollando las formulas notables se tiene

) $(x^2 + 16x + 64) + (9x^2 + 24x + 16) = 40$

) $10^2 + 40x + 80 = 40$

) $10^2 + 40x + 80 \quad 40 = 0$

) $10^2 + 40x + 40 = 0$

$= (40)^2 \quad 4 \quad (10) \quad (40)$

$= 1600 \quad 1600$

$= 0$

Por lo tanto, la recta es tangente a la circunferencia

Opcion C:

Al sustituir $y = 3x$ en la ecuacion $x^2 + y^2 = 40$ se tiene

$x^2 + (3x)^2 = 40$

) $x^2 + (9x^2) = 40$

) $10x^2 = 40$

) $x^2 = \frac{40}{10}$

) $x^2 \quad 4 = 0$

$= (0)^2 \quad 4 \quad (1) \quad (\quad 4)$

$= 0 + 16$

$= 16$

Por lo tanto, la recta es secante a la circunferencia

Opcion D:

Al sustituir $y = 3x$ en la ecuacion $(x \quad 4)^2 + (y \quad 4)^2 = 4$ se tiene

$(x \quad 4)^2 + (3x \quad 4)^2 = 4$

Dasarrollando las formulas notables se tiene

) $(x^2 + 8x + 16) + (9x^2 + 24x + 16) = 4$

) $10^2 + 32x + 32 = 4$

) $10^2 + 32x + 32 \quad 4 = 0$

) $10^2 + 32x + 28 = 0$

$= (32)^2 \quad 4 \; (10) \; (28)$

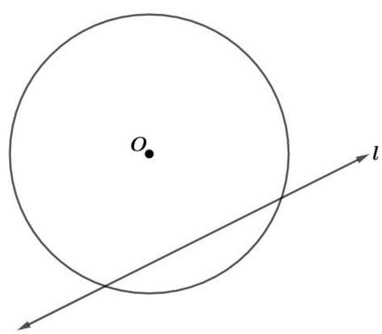
$= 1024 \quad 1120$

$= \quad 96$

Por lo tanto, la recta es exterior a la circunferencia

Por lo que, la respuesta correcta es la opcion (c).

7. Observe la siguiente gura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Segun la imagen anterior, la recta l es con respecto a la circunferencia de centro O

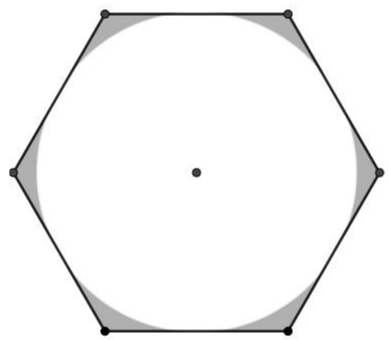
(a) interior.
(b) exterior.
(c) tangente.
(d) secante.

Solución:
Recordemos los conceptos de rectas secantes, tangentes y exteriores a una circunferencia.

- Secante: Una recta es secante a una circunferencia si la corta en dos puntos diferentes.
- Tangente: Una recta es tangente a una circunferencia si la corta en un unico punto.
- Exterior: Una recta es exterior a una circunferencia si no corta a la circunferencia.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (d).

8. Observe la siguiente gura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Determine el area aproximada de la region sombreada de la gura anterior sabiendo que el diametro del c rculo es de 12 cm

(a) 5,09 cm^2

(b) 11,64 cm^2

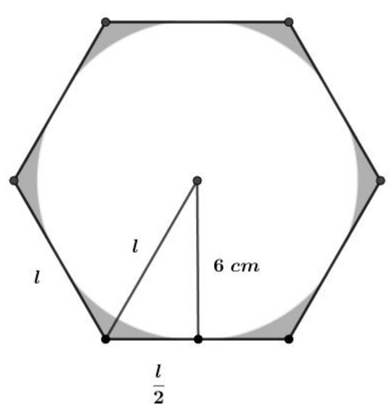
(c) 77,09 cm^2

(d) 385,73 cm^2

Solución:
Recordemos que en un hexagono regular la medida del radio es igual a la medida del lado, ademas, que la formula del area de un hexagono regular es $A = \dfrac{P \quad a}{2}$.

Calculemos el lado del hexagono utilizando el teorema de Pitagoras, para ello entiendase que si el diametro es de 12 cm el radio sera de 6 cm.

Observe la siguiente gura



Llamemos l a la medida del lado del pol gono, pero como sabemos que una propiedad del hexagono regular es que su radio mide igual que su lado, el radio del hexagono va a medir l.

$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 6^2 = l^2$

$) \ 6^2 = l^2 \quad \frac{l^2}{4}$

$) \ 36 = \frac{3l^2}{4}$

$) \ \frac{36 \quad 4}{3} = l^2$

$) \ \sqrt{48} = \sqrt{l^2}$

$) \ 4\sqrt{3} = l \quad 6,92$

Calculemos el per metro del hexagono

$P = 6 \quad l$

$P = 6 \quad 6,93$

$P = 41,58$

Calculemos el area del hexagono, recordemos que como la circunferencia esta inscrita en el hexagono entonces el radio de la circunferencia es igual a la apotema del hexagono.

$A = \frac{P \quad a}{2}$

$A = \frac{(41,58) \quad (6)}{2}$

$A = 124,74$

Ahora calculemos el area del c rculo cuya formula viene dada por

$A_c = \pi r^2$

$A_c = \pi(6)^2$

$A_c = 36\pi$

$A_c = 113,10$

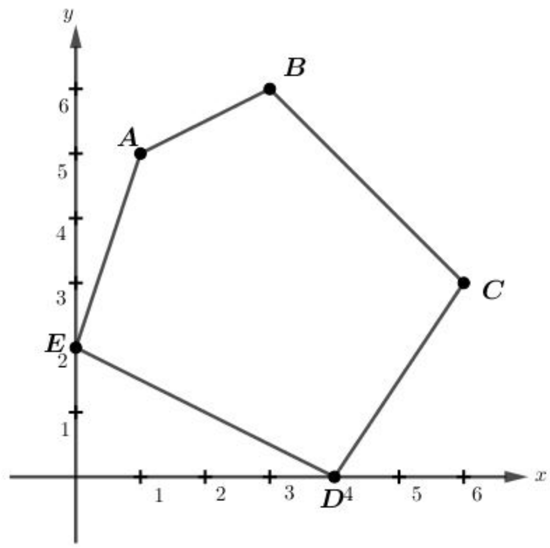
Para calcular el area de la region sombreada se debe hacer la resta del area del hexagono menos el area del c rculo

$A_T = 124,74 \quad 113,10$

$A_T = 11,64$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (c).

9. Observe la siguiente gura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



El area de la gura anterior corresponde a

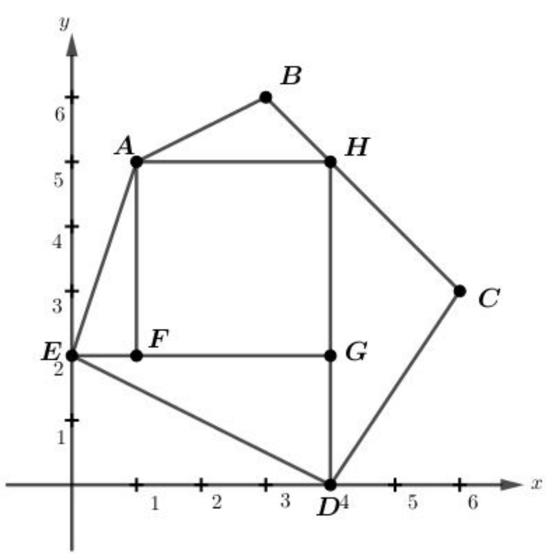
(a) 17,72 cm^2

(b) 18,5 cm^2

(c) 21 cm^2

(d) 32 cm^2

Solución:
La mejor manera de calcular el area de guras no regulares es descomponiendola en guras que ya conozcamos y luego se suman sus areas, una forma es como se muestra en la siguiente gura



$A_1 = {}_4ABH$

$) \ A_1 = \frac{3 \ \ 1}{2} = \frac{3}{2}$

$A_2 = {}_4HDC$

$) \ A_2 = \frac{5 \ \ 2}{2} = 5$

$A_3 = {}_4EGD$

$) \ A_3 = \frac{4 \ \ 2}{2} = 4$

$A_4 = {}_4EFA$

$) \ A_4 = \frac{3 \ \ 1}{2} = \frac{3}{2}$

$A_5 = \square AHFG$

$) \ A_5 = 9$

Por lo que le area de la gura es la suma de las areas anteriores

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

$) \ A = \frac{3}{2} + 5 + 4 + \frac{3}{2} + 9$

$) \ A = 21cm^2$

Por lo que el area es de $21cm^2$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (c).

10. >Cual es la medida de la apotema de un triangulo equilatero sabiendo que esta inscrito en una circunferencia de radio 6 cm?

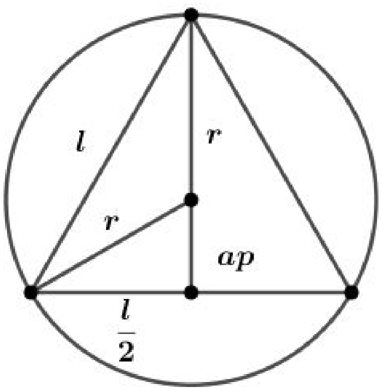
(a) $6\,cm$

(b) $3\,cm$

(c) $2\,cm$

(d) $1\,cm$

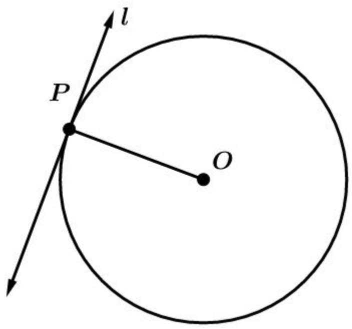
Solución:
La apotema de un triangulo equilatero mide la mitad del radio de la circunferencia circunscrita al triangulo equilatero.



Por lo que, la apotema mide 3 cm.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (b).

11. Observe la siguiente gura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita sabiendo que la recta l es tangente a la circunferencia de centro O.



Proposiciones

I. l?$\overline{OP}$.

II. l k $\overline{OP}$.

III. l y $\overline{OP}$ son secantes.

>Cuales de las proposiciones anteriores son verdaderas tomando en cuenta que l es tangente a la circunferencia de centro O?

(a) I y II.

(b) II y III.

(c) I y III.

(d) Ninguna.

Solución:
Recordemos que hay una propiedad que dice que el radio de una circunferencia es perpendicular a una recta tangente en su punto de tangencia por lo que la primera proposicion es verdadera.
La segunda proposicion es falsa debido a que l y $\overline{OP}$ son perpendiculares, por lo tanto, no pueden ser paralelas.
La de nicion de rectas secantes es que dos rectas distintas se cortan en algun punto, notemos que la recta l corta al segmento $\overline{OP}$ en el punto P por lo que la tercera proposicion es verdadera.

Por lo anterior concluimos que, la respuesta correcta es la opcion (c).

12. Dadas las rectas l_1 y l_2 de ecuaciones $l_1 : y = 3x + 2$ y $l_2 : 0 = \frac{x}{3} \quad y$, se puede asegurar que las rectas

(a) son paralelas.

(b) son perpendiculares.

(c) se intersecan en el punto (0,0).

(d) no se intersecan.

Solución:
Recordemos que si dos rectas son paralelas tienen la misma pendiente y que no se intersecan, si dos rectas son perpendiculares se cumple que $m_1 \quad m_2 = \quad 1$.

Despejando la segunda ecuacion de la forma $y = mx + b$ la expresamos de la siguiente manera $y = \frac{x}{3}$.

Por lo tanto, la pendiente de la primera recta es 3 y la pendiente de la segunda recta es $\frac{1}{3}$.

Si multiplicamos las pendientes tenemos

$3 \quad \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = \quad 1$ por lo tanto, las rectas son perpendiculares.

La opcion d se descarta porque las rectas son perpendiculares, entonces las rectas s se intersecan.

Probemos que las rectas no se intersecan en el (0,0)

Para saber si dos rectas se intersecan se debe resolver el sistema de ecuaciones generado por las dos ecuaciones de las rectas, se procedera por el metodo de sustitucion despejando la variable y de la recta l_2 y sustituyendo en la ecuacion de la recta l_1

$3x + 2 = \frac{x}{3}$

) $3(3x + 2) = \quad x$

) $9x + 6 = \quad x$

) $9x + x = \quad 6$

) $10x = \quad 6$

) $x = \frac{6}{10}$

) $x = \frac{3}{5}$

Como tenemos que $x = \frac{3}{5}$ evaluamos x en una de las ecuaciones y tenemos el valor de y

$\frac{3}{5} + 2 = \frac{7}{5}$

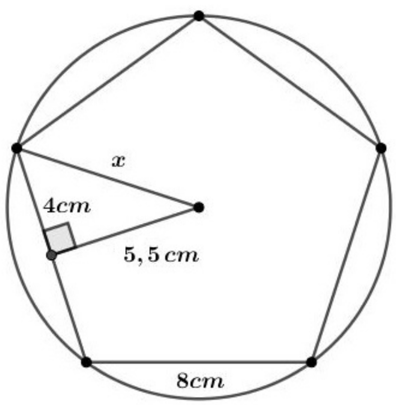
Por lo el punto de interseccion de las dos rectas es $\left(\frac{3}{5}, \frac{7}{5}\right)$

Por lo anterior concluimos que, la respuesta correcta es la opcion (b).

Respuesta cerrada

13. Si se sabe que un pentagono de lado 8 cm y apotema 5,5 cm esta inscrito en una circunferencia >Cual es la medida del radio de la circunferencia?

Solución:
Notemos que el pentagono esta inscrito en la circunferencia como se muestra en la gura



Como se forma un triangulo rectangulo podemos aplicar el teorema de Pitagoras por lo que tenemos

$(4)^2 + (5,5)^2 = x^2$

$\Rightarrow\ 16 + 30,25 = x^2$

$\Rightarrow\ 46,25 = x^2$

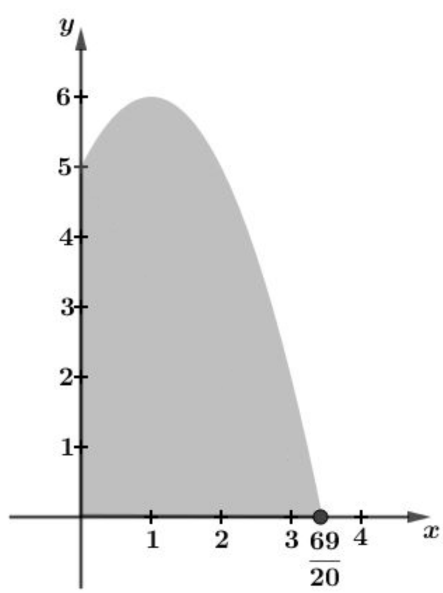
$\Rightarrow\ \sqrt{46,25} = \sqrt{x^2}$

$\Rightarrow\ \sqrt{46,25} = x$

Por lo que, el radio de la circunferencia es de $\sqrt{46,25} \approx 6{,}80\,cm$.

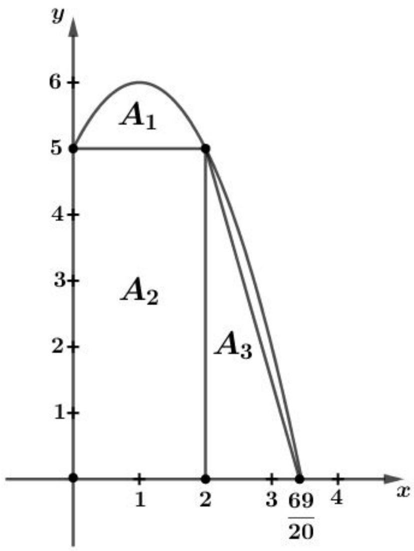
$$\boxed{\sqrt{46,25} \approx 6{,}80\,cm}$$

14. Observe la siguiente gura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



>Cual es el area aproximada de la gura anterior?

Solución:
La mejor forma de calcular el area de la gura es aproximarla descomponiendola en guras conocidas, una opcion es la que se muestra a continuacion.



A_1 es similar a la mitad de una circunferencia de radio 1 cm por lo que el area es

$A_1 = \pi r^2$

) $A_1 = \pi(1)^2 \quad 3{,}14\,cm^2$

A_2 es un rectangulo de lados 2 cm y 5 cm por lo que el area es

$A_2 = b \quad h$

) $A_2 = 2 \quad 5 = 10\,cm^2$

A_3 es un triangulo rectangulo de base 1,45 cm y 5 cm de altura

$A_3 = \dfrac{b \quad h}{2}$

) $A_3 = \dfrac{1{,}45 \quad 5}{2} = \dfrac{29}{8}\,cm^2$

Por lo que, el area aproximada de la gura es la suma de las areas anteriores

$A = A_1 + A_2 + A_3$

) $A = 3,14 + 10 + \dfrac{29}{8}$

) $A = 16,76\,cm^2$

Por lo tanto, el area aproximada es de $16,76\,cm^2$.

$$\boxed{A \quad 16,76\,cm^2}$$

15. Dado un pol gono regular de 18 lados, >cual es la medida de un angulo externo y la medida de un angulo interno de este pol gono?

Solución:
Recordemos que la formula de la medida de los angulos externos de un pol gono regular es $\dfrac{360}{n}$ donde n es el numero de lados de la gura por lo que tenemos

$\dfrac{360}{18} = 20$

Por lo que, la medida del angulo externo es de 20

Y para calcular el angulo interno recordemos que el angulo externo y el angulo interno de un pol gono son suplementarios por lo que la suma de las medidas de los angulos es de 180

$180 = 20 + x$ donde x es el angulo interno del pol gono

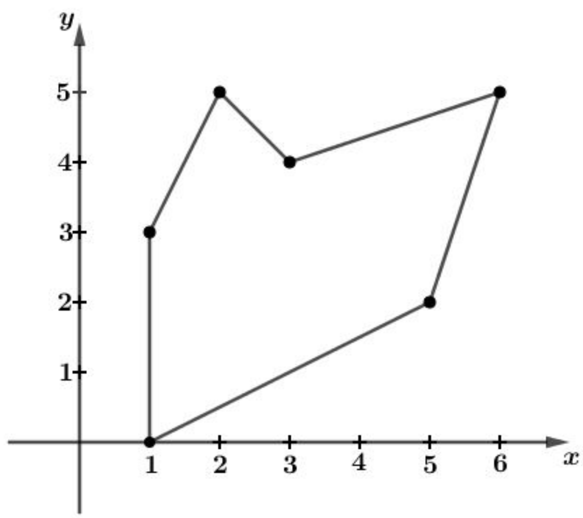
$\Rightarrow 180 - 20 = +x$

$\Rightarrow 160 = x$

Por lo tanto el angulo interno del pol gono es de 160 .

Un angulo externo 20 y un angulo interno 160

16. Observe la siguiente gura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



>Cual es aproximadamente el per metro de la gura anterior?

Solución

Para calcular el per metro de la gura anterior se debe conocer la medida de los lados, para eso se utiliza la formula de distancia entre puntos la cual es

$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ donde $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$

Por lo que, los lados miden

$d(A, B) = \sqrt{(1 - 1)^2 + (0 - 3)^2} = 3$

$d(B, C) = \sqrt{(1 - 2)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$

$d(C, D) = \sqrt{(2 - 3)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

$d(D, E) = \sqrt{(3 - 6)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{10} \approx 3, 16$

$d(E, F) = \sqrt{(6 - 5)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{10} \approx 3, 16$

$d(F, A) = \sqrt{(5 - 1)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$

Por lo tanto, el per metro de la gura es la suma de las distancias anteriores

$P = d(A,B) + d(B,c) + d(C,D) + d(D,E) + d(E,F) + d(F,A)$

$\Rightarrow P \approx 3 + 2{,}24 + 1{,}41 + 3{,}16 + 3{,}16 + 4{,}47$

$\Rightarrow P \approx 17,44\,cm$

Por tanto, el per metro aproximado de la gura es de $17,44\,cm$.

$$\boxed{P \approx 17,44\,cm}$$

17. Si se sabe que la medida del angulo externo de un pol gono regular es de 40° y el lado del pol gono mide $6\,cm$ ¿Cual es el per metro de dicho pol gono?

Solución:

Recordemos que la formula de la medida de los angulos externos de un pol gono regular es de $\frac{360}{n} = \alpha$ donde n es la cantidad de lados de un pol gono y α la medida del angulo por lo que tenemos

$\frac{360}{n} = 40$

$\Rightarrow \frac{360}{40} = n$

$\Rightarrow 9 = n$

Por lo que, el pol gono regular tiene 9 lados y como cada lado mide $6\,cm$ se tiene

$P = l \cdot 9$

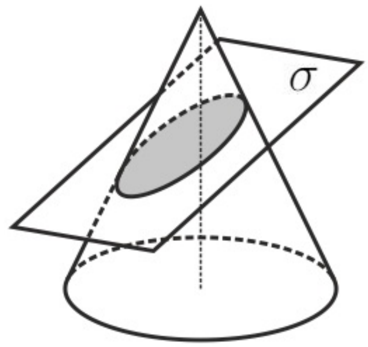
$\Rightarrow P = 6 \cdot 9$

$\Rightarrow 54$

Por lo tanto, el per metro de este pol gono regular mide $54\ cm$.

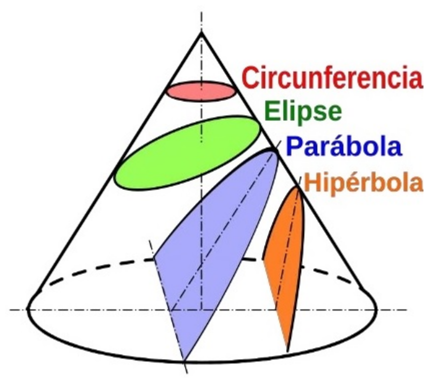
$$\boxed{54\,cm}$$

18. Observe la siguiente gura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



La gura que se forma al intersecar el cono anterior con el plano σ recibe el nombre de

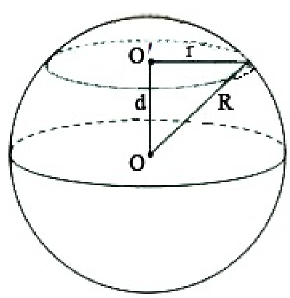
Solución:
Recordemos las diferentes intersecciones que pueden darse entre un plano y un cono



Como se muestra en la gura la interseccion de la super cie del cono con el plano σ es una elipse.

elipse

19. Observe la siguiente gura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



>Cual es la medida del radio de la esfera sabiendo que $r = 7\,cm$ y que el corte se hizo a una distancia de $5\,cm$ del centro de la esfera?

Solución:
Note que entre la distancia del corte y ambos radios se forma un triangulo rectangulo por lo que se cumple que

$d^2 + r^2 = R^2$ donde d es la distancia del centro al corte

$\Rightarrow (5)^2 + (7)^2 = R^2$

$\Rightarrow 25 + 49 = R^2$

$\Rightarrow 74 = R^2$

$\Rightarrow \sqrt{74} = \sqrt{R^2}$

$\Rightarrow \sqrt{74} = R$

Por lo que, $R = \sqrt{47} \quad 8{,}60\,cm$.

$$\boxed{R = \sqrt{47} \quad 8{,}60\,cm}$$

20. >Cual es el area de la gura que se forma al intersecar un cilindro con un plano π paralelo a sus bases sabiendo que el radio de la base mide $5\,cm$?

Solución:
Note que la gura que se forma al interseca el plano π es un c rculo que tiene las mismas dimensiones que sus bases por lo que tenemos

$A = \pi r^2$

$\Rightarrow A = \pi(5)^2$

$\Rightarrow A = 25\pi$

$\Rightarrow A \quad 78{,}54\,cm^2$

Por lo que, el area de la gura es de $78{,}54\,cm^2$ aproximadamente.

$$\boxed{A \quad 78{,}54\,cm^2}$$

21. Si se tiene un cilindro de diametro $14\,cm$ y altura $20\,cm$ al cual se le hace un corte perpendicular a la base que pasa por el centro del cilindro. >Cual es el per metro de la super cie formada al hacer el corte?

Solución:
Note que al hacer el corte perpendicular a la base la gura que se forma es un rectangulo de lados $14\,cm$ de ancho y $20\,cm$ de largo por lo que el per metro de esa super cie es

$P = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$

$\Rightarrow P = 14 + 14 + 20 + 20$

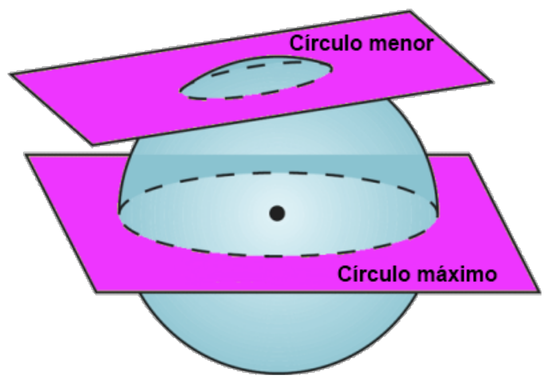
$\Rightarrow P = 68\,cm$

Por lo que, el per metro de la super cie formada es de $68\,cm$.

68 cm

22. Si se tiene una esfera de radio 9 cm y se interseca con un plano δ, sabiendo que δ no pasa por el centro de la esfera, pero es secante a la esfera >que gura se forma en dicha interseccion?

Solución:
Recordemos que cuando un plano es secante a una esfera, la seccion generada siempre sera un c rculo cuyo tamaño depende de su distancia al centro de la esfera.



Por lo que, la respuesta es un c rculo.

c rculo

23. Carlos quiere saber cuantas vueltas da la llanta de su bicicleta al recorrer 100 metros en una calle plana. Si se sabe que los rayos de la bicicleta miden 28 cm cada uno, >cuantas vueltas da la llanta de la bicicleta de Carlos?

Solución:
Como Carlos quiere saber cuantas vueltas da la llanta de la bicicleta, debemos saber cual es el per metro de la misma, por lo que tenemos

$P = 2 \quad \pi \quad r$

$) \; P = 2 \quad 28 \quad \pi$

$) \; P = 56\pi$

$) \; P \quad 175{,}92\,cm$

Como la distancia esta de nida en metros se hara una conversion para que quede en cent metros por lo que tenemos

$100\,m \; ! \; 10000\,cm$

Para saber la cantidad de vueltas que da la llanta de la bicicleta, se debe dividir la distancia entre el per metro de la llanta por lo que tenemos

$\dfrac{10000}{175{,}92} \quad 56{,}84$

Por lo tanto, la llanta da 57 vueltas aproximadamente.

$$\boxed{57}$$

24. El Observatorio Vulcanologico y Sismologico de Costa Rica (OVSICORI) desea saber cual es el area afectada despues del temblor ocurrido en Puntarenas sabiendo que la onda de expansion fue en forma circular y que el epicentro fue en el centro de dicha provincia y la zona mas lejana afectada segun reportes fue Alajuela a 85 km del epicentro. >Cual es aproximadamente el area afectada por el temblor?

Solución:
Como se sabe, la zona afectada tiene forma circular con un radio de 85 km y como debemos calcular el area tenemos

$A = \pi r^2$

) $A = \pi(85)^2$

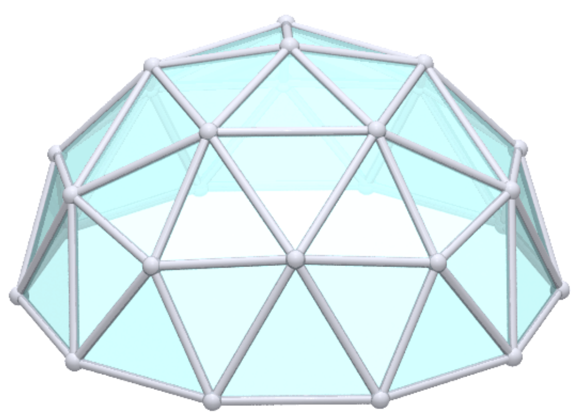
) $A = 7225\pi$

) $A \quad 22698\, km^2$

Por lo que, el area afectada por el temblor es de 22698 km^2 aproximadamente.

$$\boxed{A \quad 22698\, km^2}$$

25. Observe la siguiente gura la cual muestra una cupula geodesica y conteste lo que se le solicita.



El director del colegio desea pintar el exterior del vivero con forma de cupula geodesica como se muestra en la gura anterior, si se sabe que se tienen 50 triangulos equilateros de lado 50 cm formando completamente el techo del vivero y que un tarro de pintura alcanza para pintar 1000 cm^2. >Cuantos tarros de pintura se necesitan para pintar todo el vivero?

Solución:
Como ya se sabe, el vivero esta formado por triangulos equilateros, por lo cual calcularemos el area de uno de los triangulos.

Recordemos que la formula de la altura de un triangulo equilatero es $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

por lo que la altura del triangulo es $25\sqrt{3}\,cm$.

Por lo tanto el area de uno de los triangulos corresponde a $\frac{50 \cdot 25\sqrt{3}}{2} cm^2 = 1082{,}53\,cm^2$

Pero como son 50 triangulos, debemos multiplicar el area obtenida por 50 obteniendose

$A_T = 50 \cdot 1082{,}53 = 54127\,cm^2$

Pero tambien sabemos que con un tarro de pintura se pueden pintar $1000\,cm^2$, por lo que hay que dividir el area total entre la cantidad que cubre un tarro de pintura,entonces tenemos

$\frac{54127}{1000} = 54,13$

Se necesitan 55 tarros de pintura aproximadamente.

$\boxed{\text{55 tarros de pintura}}$

6. Solución de Relaciones y Álgebra

Selección Única

1. Considere los conjuntos $A = \{0,2,4,6,8\}$ y $B = \{1,3,5,7,9\}$ y las siguientes proposiciones:

   I. $A \cap B \neq \emptyset$

   II. $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

   De las proposiciones mencionadas anteriormente se puede afirmar que con certeza son verdaderas

   (a) solo la I.

   (b) solo la II.

   (c) ambas.

   (d) ninguna.

   Solución:

   Para resolver este ejercicio es necesario recordar los conceptos de union e interseccion de conjuntos.

   La union de dos o mas conjuntos da como resultado un nuevo conjunto, siendo este ultimo el que contiene a cada uno de los elementos de ambos conjuntos, en caso de tener elementos repetidos solo se coloca una unica vez.

   En el ejercicio anterior tenemos el conjunto $A = \{0,2,4,6,8\}$ y el conjunto $B = \{1,3,5,7,9\}$, la union de ambos conjuntos representada por $A \cup B$ da como resultado un nuevo conjunto que contiene todos los elementos de A y todos los elementos de B, por lo que $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Así, la proposicion II es verdadera.

   La interseccion de dos o mas conjuntos da como resultado un nuevo conjunto el cual contiene unicamente a los elementos que tengan en comun los conjuntos que se quieren intersecar.

   En el ejercicio anterior tenemos el conjunto $A = \{0,2,4,6,8\}$ y el conjunto $B = \{1,3,5,7,9\}$, la interseccion de ambos conjuntos representada por $A \cap B$ da como resultado un nuevo conjunto que contiene todos los elementos comunes de los conjuntos A y B respectivamente, en este caso no tienen elementos en comun por lo que la inteseccion es $\emptyset$, así $A \cap B = \emptyset$, y se concluye que la proposicion I es falsa.

   Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (b).

2. Considere el conjunto $M = \{2x + 3 / x \in \mathbb{N}\}$ y las siguientes proposiciones:

   I. $6 \in M$

   II. $\{7, 9, 11\} \subset M$

   De las proposiciones mencionadas anteriormente se puede afirmar que con certeza son verdaderas

   (a) solo la I.

   (b) solo la II.

   (c) ambas.

   (d) ninguna.

   Solución:

   Para resolver el ejercicio se requiere recordar los conceptos de pertenencia la cual se denota por $\in$, y de subconjunto el cual se representa por $\subset$.

   En el ejercicio anterior tenemos al conjunto $M = \{2x + 3 / x \in \mathbb{N}\}$, para verificar si la proposicion I es falsa o verdadera, habría que verificar si existe un numero natural x que al multiplicarlo por 2 y sumarle 3 de como resultado 6, o bien resolver dicha ecuacion y que el valor de x sea un numero natural. Resolviendo la ecuacion:

   $2x + 3 = 6$

   $\Rightarrow\ 2x = 6 - 3$

   $\Rightarrow\ 2x = 3$

   $\Rightarrow\ x = \frac{3}{2}$

   Así, tenemos que $x = \frac{3}{2}$ no esta en el conjunto de los numeros naturales, por lo que se concluye que $6 \notin M$, teniendo como resultado que la proposicion I es falsa.

   El concepto de subconjunto se suele relacionar con el termino “esta contenido en”, es decir si queremos saber si un conjunto A es un subconjunto de B, habría que ver si A esta contenido en B y esto se reduce a verificar si todos los elementos de A estan en B.

   En el ejercicio anterior tenemos al conjunto $M = \{2x + 3 / x \in \mathbb{N}\}$, para verificar si la proposicion II es falsa o verdadera, habría que verificar si los elementos del conjunto $\{7, 9, 11\}$ estan todos en el conjunto M.

   Como los valores que x puede tomar son solo numeros naturales, los valores que se pueden tomar serían, $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4....$, tomando esos primeros valores tenemos que los primeros elementos de M son:

   Si $x = 0$

   $M_1 = 2(0) + 3$; $M_1 = 3$

   Si $x = 1$

   $M_2 = 2(1) + 3$; $M_2 = 5$

   Si $x = 2$

   $M_3 = 2(2) + 3$; $M_3 = 7$

Si $x = 3$

$M_4 = 2(3) + 3$; $M_4 = 9$

Si $x = 4$

$M_5 = 2(4) + 3$; $M_5 = 11$

Así tenemos que los primeros elementos de M son $3, 5, 7, 9, 11$, por lo que al preguntarse si todos los elementos de $\{7, 9, 11\}$ estan en M, la respuesta es sí, por lo que la proposicion II es verdadera.

Nota: Esta segunda parte de subconjuntos puede probarse planteando una ecuacion por cada elemento que se desea saber si pertenece o no a M, tal y como se hizo en la proposicion I.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (b).

3. Considere el conjunto $T = \{a + b/a, b \in \mathbb{N} \wedge a \neq b\}$ y las siguientes proposiciones:

   I. $0 \in T$

   II. $\{-2, -1, 1, 2\} \subseteq T$

   De las proposiciones mencionadas anteriormente se puede afirmar que con certeza son verdaderas

   (a) solo la I.

   (b) solo la II.

   (c) ambas.

   (d) ninguna.

   Solución:

   Para esta pregunta se necesitan los conceptos de pertenencia y subconjuntos, los mismos dados en la pregunta anterior.

   Note que T es el conjunto de los numeros que pueden expresarse como suma de dos naturales, ambos diferentes.

   Los dos menores numeros naturales son 0 y 1, así que la menor suma posible es 1. Cualquier otro numero natural se puede expresar como la suma de 0 con el mismo y como la suma de dos numeros naturales siempre es otro numero natural, T es el conjunto de los numeros naturales excluyendo al 0.

   Razonando de la misma manera que en la pregunta anterior, si 0 pertenece a T tiene que suceder que:

   $a + b = 0$

   $\Rightarrow a = -b$

   Lo cual no puede suceder pues, si $b \in \mathbb{N} \Rightarrow -b \notin \mathbb{N}$, así la proposicion I es falsa.

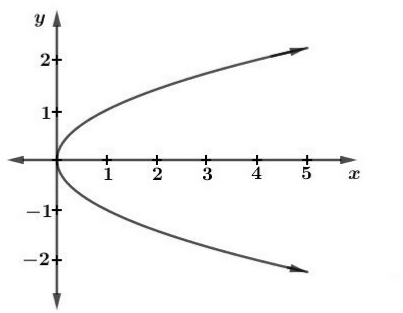
   De manera similar se probara si $\{-2, -1, 1, 2\}$ esta contenido en T, tomando el primer elemento del conjunto, se tiene que:

$a + b = -2$, lo cual no puede suceder, ya que dado dos numeros positivos su suma da como resultado un numero positivo, como $a, b \in \mathbb{N}$ son numeros positivos su suma tiene que dar un numero positivo, no puede dar como resultado -2.

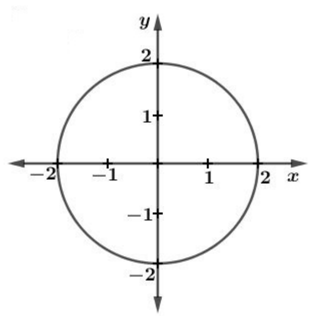
Con este resultado, se tiene que un elemento del conjunto $\{-2, -1, 1, 2\}$ no esta contenido en T, asi, como no se cumple la definicion de subconjunto, se concluye que $\{-2, -1, 1, 2\} \not\subseteq T$, por lo que la proposicion II es falsa.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (d).

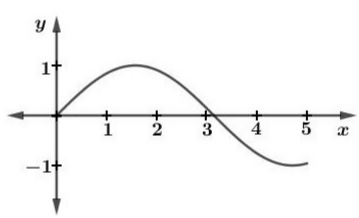
4. Observe las siguientes figuras y de acuerdo con los datos de las mismas, conteste lo que se le solicita.



I.



II.



III.

De las graficas mostradas anteriormente, se puede afirmar con certeza que no corresponden a una funcion

(a) solo la I y III.

(b) solo la I y II.

(c) solo la II y III.

(d) todas.

Solución:

Para resolver este tipo de ejercicios se toman las gra cas una por una y se aplica el concepto de funcion el cual dice que una preimagen no puede tener mas de una imagen, por lo tanto, si se trazan rectas verticales por los valores del dominio y alguna de ellas interseca a la gra ca mas de una vez (o ninguna vez) entonces la gra ca no corresponde a una funcion.

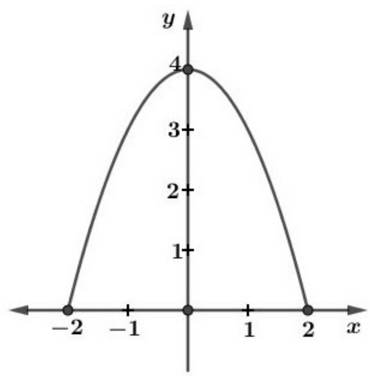
En el ejercicio anterior, en la gra ca I se logra observar que hay l neas verticales que cortan en 2 ocasiones a la funcion, por lo que la gra ca I no corresponde a una funcion.

De manera similar para la gra ca II, se concluye que la misma no corresponde a una funcion.

En la gra ca III se puede observar que por mas que se tracen l neas verticales, las mismas nunca cortan en 2 ocasiones a la gra ca de la funcion, por lo que se concluye que la gra ca III es una funcion.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (b).

5. Observe la gra ca de la funcion h : [2, 2] ! [0, 4]



Con base en la gra ca de la funcion h, un intervalo donde la funcion es creciente corresponde a

(a)]0, 4[

(b)] 2, 4[

(c)] 2, 0[

(d)]0, 2[

Solución:

Es importante recordar que el crecimiento o decrecimiento de una funcion se lee de izquierda a derecha, la respuesta sera el intervalo en el eje x donde la funcion crece o de decrece segun sea el caso.

En el ejercicio anterior debemos buscar donde la funcion es creciente, entonces de izquierda a derecha buscamos el intervalo correspondiente, el dominio de h es de [-2,2] el punto mas a la izquierda del eje x que se puede tomar es x=-2, si se inicia desde ese punto se observa que de izquierda a derecha la funcion crece hasta el punto maximo, donde empieza a decrecer,este punto maximo corresponde a x=0 por lo que el intervalo de crecimiento viene dado por]-2,0[.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (c).

6. Observe la siguiente tabla de una relacion y conteste lo que se le solicita.

x	2	3	4	4	5
$f(x)$	1	5	6	8	11

Con base en los datos de la tabla se puede a rmar que

(a) la relacion es una funcion.

(b) la relacion no es una funcion.

(c) el 3 se relaciona con el 2.

(d) el 1 se relaciona con el 5.

Solución:

Recuerde que x representa a cada una las preimagenes y $f(x)$ representa a la imagen de x.

Para que esta relacion sea una funcion, ninguna preimagen puede tener 2 imagenes distintas, se revisan cada uno de los pares ordenados, $(2, 1)$, $(3, 5)$, $(4, 6)$, $(4, 8)$ y $(5, 11)$.

Al observar la tabla se puede veri car que para el valor $x = 4$ existen dos valores de $f(x)$ diferentes, por lo que no cumple el concepto de funcion. Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (b).

Opcion A:

Se descarta pues no puede suceder que una preimagen tenga 2 imagenes diferentes.

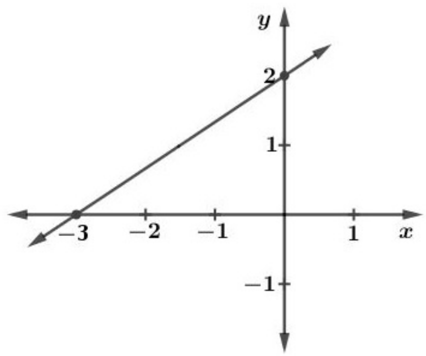
Opcion C:

Note que en la relacion dada, el 3 se relaciona con el 5 no con el 2.

Opcion D:

Note que el 1 no esta en el dominio.

7. Observe la siguiente gra ca y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Con los datos de la gra ca anterior la ecuacion de la recta corresponde a

(a) $y = \ \frac{2x}{3} + 2$

(b) $y = \frac{3x}{2} \quad 2$

(c) $y = \ \frac{3x}{2} + 2$

(d) $y = \frac{2x}{3} + 2$

Solución:

Para este ejercicio es necesario recordar que dado dos puntos se puede trazar una unica recta, ademas, se puede encontrar la ecuacion de la misma la cual tiene la forma $y = mx + b$. Es decir dados los puntos P y Q en la recta, con $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, podemos determinar la pendiente $m = \frac{y_1 \quad y_2}{x_1 \quad x_2}$ y la constante $b = y_1 \quad mx_1$ o $b = y_2 \quad mx_2$.

En el enunciado anterior la gra ca de la funcion tiene los puntos ($\ 3, 0$) y $(0, 2)$, as , se tiene que:

$$m = \frac{y_1 \quad y_2}{x_1 \quad x_2}$$

$$) \ m = \frac{0 \quad 2}{\ 3 \quad 0}$$

$$) \ m = \frac{2}{3}$$

De la gra ca se observa que $b = 2$ pues el corte con el eje y es en el punto (0,2).

Por lo que la ecuacion nos dar a como resultado $y = \frac{2}{3}x + 2$.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (d).

Nota:

Es importante tener en cuenta que la pendiente es la diferencia entre los valores de y dividido por la diferencia entre los valores de x. Ademas, el valor de la constante b se puede hallar con cualquiera de los 2 puntos que pertenecen a la recta, en este caso se uso el primer par ordenado pero se puede usar el segundo par odenado y la respuesta sigue siendo la misma.

8. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 13x + 5y = 2 \\ 65x + 25y = 33 \end{cases}$$

Se puede a rmar que el sistema anterior

(a) tiene como solucion a $\left\{\left(\frac{23}{130}, \frac{3}{50}\right)\right\}$.

(b) tiene como solucion a $\left\{\left(\frac{3}{50}, \frac{23}{130}\right)\right\}$.

(c) tiene in nitas soluciones.

(d) no tiene solucion.

Solución:

Para resolver esta pregunta es necesario recordar el concepto de sistema de dos ecuaciones con dos incognitas.

Un sistema de ecuaciones puede tener una solucion, in nitas soluciones o ninguna solucion.

Para los casos de in nitas soluciones tiene que suceder que las rectas correspondientes a cada ecuacion sean iguales, para que un sistema de ecuaciones no tenga ninguna solucion tiene que suceder que ambas rectas sean paralelas y para que el sistema de ecuaciones tenga una solucion debe suceder que las rectas sean oblicuas, es decir se corten una vez entre s .

En el sistema anterior se tiene que:

$$\begin{cases} 13x + 5y = 2 \\ 65x + 25y = 33 \end{cases}$$

Si sacamos un 5 a factor comun en el lado izquierdo de la segunda ecuacion tenemos que:

$$\begin{cases} 13x + 5y = 2 \\ 5(13x + 5y) = 33 \end{cases}$$

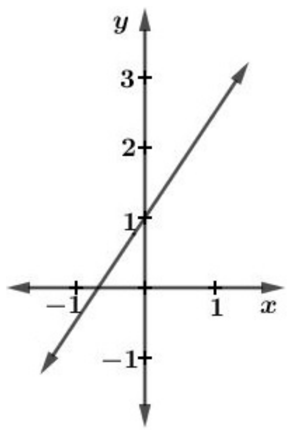
$$) \begin{cases} 13x + 5y = 2 \\ 13x + 5y = \frac{33}{5} \end{cases}$$

As , se concluye que ambas rectas tienen la misma pendiente, falta veri car que el lado derecho de la igualdad sea igual en ambas ecuaciones o diferente. Si llegaran a ser iguales, se concluye que ambas rectas son la misma, por lo que el sistema tendr a in nitas soluciones.

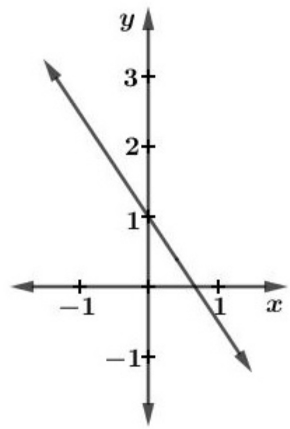
Si llegaran a ser diferentes, se concluye que las rectas son paralelas por lo que tendr a solucion vac a. En este caso se puede observar que las rectas son paralelas por lo que el sistema no tiene solucion.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (d).

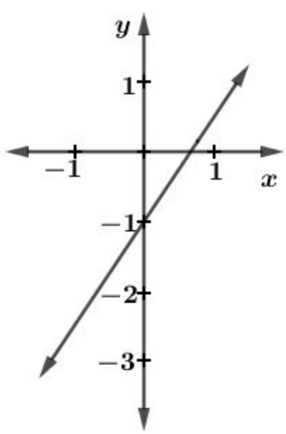
9. Considere la funcion f cuyo criterio es $f(x) = \frac{3x}{2} + 1$, la gra ca de f corresponde a



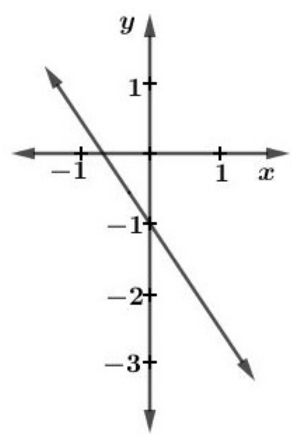
(a)



(c)



(b)



(d)

Solución:

Para esta pregunta se tienen que recordar los conceptos de crecimiento y decrecimiento de una funcion lineal y del corte con las abscisas y las ordenadas.

Una funcion lineal es creciente cuando su pendiente es positiva y es decreciente si su pendiente es negativa. La funcion lineal cuyo criterio es $y = mx + b$, corta al eje de las ordenadas en el punto $(0, b)$ y corta al eje de las abscisas en el punto $\left(\frac{b}{m}, 0\right)$.

En el enunciado anterior tenemos que la funcion tiene como criterio $y = \frac{3x}{2} + 1$, por lo que es una funcion creciente pues su pendiente $m = \frac{3}{2}$ es positiva, ademas, corta al eje de las ordenadas en $(0, 1)$.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (a).

10. Considere la funcion $f(x) = x^2 + 4x \quad 18$ y las siguientes proposiciones:

   I. f es concava hacia abajo

   II. El eje de simetr a de f esta en la recta de ecuacion $x = \quad 2$

   De las proposiciones anteriores con certeza son verdaderas

   (a) solo la I.

   (b) solo la II.

   (c) todas.

   (d) ninguna.

   Solución:

   Para esta pregunta se requiere recordar los conceptos de concavidad de una funcion cuadratica.

   Una funcion cuadratica cuyo criterio es $f(x) = ax^2 + bx + c$ es concava hacia arriba si $a > 0$ y es concava hacia abajo si $a < 0$. El eje de simetr a de la gra ca de la funcion viene dado por $x = \frac{b}{2a}$.

   En el enunciado anterior se tiene la ecuacion $x^2 + 4x \quad 18$ como el $a > 0$ se tiene que la funcion es concava hacia arriba por lo que la proposicion I es falsa.

   El eje de simetr a viene dado por:

   $x = \frac{b}{2a}$

) $x = \frac{4}{2 \quad 1}$

) $x = \quad 2.$

   As la proposicion II es verdadera.

   Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (b).

11. Considere la funcion $g : \mathrm{R} \; ! \; \mathrm{R}$ cuyo criterio es $g(x) = 4x^2 \quad 15x \quad 12$ y las siguientes proposiciones:

   I. El *4* > 0

   II. El intervalo donde g crece corresponde a $\left] \quad 1 , \frac{15}{8} \right[$

   De las proposiciones anteriores con certeza son verdaderas

   (a) solo la I.

   (b) solo la II.

   (c) todas.

   (d) ninguna.

Solución:

Para este ejercicio se tienen que recordar los conceptos de discriminante de una funcion cuadratica, as como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una funcion cuadratica.

El discriminante de una funcion cuadratica cuyo criterio es $y = ax^2 + bx + c$ esta dado por la siguiente formula *4* $= b^2 \quad 4ac$, el intervalo de crecimiento esta dado segun su concavidad, si la funcion es concava hacia abajo la funcion crece en el intervalo $]\quad 1\,, \frac{b}{2a}[$ y decrece en el intervalo $]\frac{b}{2a}, +1\,[$, si la funcion es concava hacia arriba se invierten los intervalos.

En el enunciado anterior se tiene una funcion de ecuacion: $g(x) = 4x^2 \quad 15x \quad 12$, aplicando la formula del discriminante se tiene que:

4 $= b^2 \quad 4ac$

) *4* $= (\quad 15)^2 \quad 4 \quad 4 \quad 12$

) *4* $= 225 + 192$

) *4* $= 417$

As , se puede concluir que la proposicion I es verdadera.

Como la funcion es concava hacia arriba, pues, $a > 0$ la funcion crece en el intervalo $\left]\frac{b}{2a}, +1\right[$.

Calculemos $\frac{b}{2a}$

) $\frac{(\quad 15)}{2 \quad (4)}$

) $\frac{15}{8}$

Por lo que la funcion crece en el intervalo $\left]\frac{15}{8}, +1\right[$, as se puede concluir que la proposicion II es falsa.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (a).

12. Considere la funcion $f(x) = ax^2 + bx$ con $a, b > 0$ y las siguientes proposiciones:

I. f alcanza el punto m nimo en $\left(\frac{b}{2a}, 0\right)$

II. f es concava hacia arriba

De las proposiciones anteriores con certeza son verdaderas

(a) solo la I.

(b) solo la II.

(c) todas.

(d) ninguna.

Solución:

En el enunciado anterior se tiene una funcion de ecuacion $f(x) = ax^2 + bx$, con $a, b > 0$, as se tiene que la funcion tiene una gra ca concava hacia arriba, por lo que la proposicion II es verdadera.

El punto m nimo de la funcion estar a dado por el vertice, el mismo es el punto $V = \left(\frac{b}{2a}, f\left(\frac{b}{2a}\right)\right)$

Primero se calculara la coordenada en x, es decir se tiene que el valor de la coordenada en $x = \frac{b}{2a}$

ahora $f\left(\frac{b}{2a}\right)$ es igual a:

$$y = a \quad \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + b \quad \left(\frac{b}{2a}\right)$$

$$)\ y = a \quad \frac{b^2}{4a^2} \quad \frac{b^2}{2a}$$

$$)\ y = \frac{b^2}{4a} \quad \frac{b^2}{2a}$$

$$)\ y = \frac{2ab^2 \quad 4ab^2}{8a^2}$$

$$)\ y = \frac{2ab^2}{8a^2}$$

$$)\ y = \frac{b^2}{4a}$$

As el punto del vertice ser a $V = \left(\frac{b}{2a}, \frac{b^2}{4a}\right)$, por lo que la proposicion I es falsa.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (b).

13. En un supermercado las manzanas tienen un costo de 250 colones la unidad y las peras tienen un costo de 300 colones la unidad, si en total se compraron 30 frutas entre manzanas y peras y se pagaron 8350 colones. Con base en el problema anterior,un sistema de ecuaciones que permite encontrar la cantidad que se compro de cada fruta corresponde a

(a) $\begin{cases} 250x + 300y = 30 \\ x + y = 8350 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 300x + 250y = 8350 \\ x + y = 30 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 30x + 30y = 8350 \\ 250x + 300y = 30 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 300x + 250y = 8350 \\ 300x + 250y = 30 \end{cases}$

Solución:

Para formar un sistema de ecuaciones es necesario entender los datos que proporciona el problema, en esta ocasion los datos son:

a) precio de cada $manzana = 250\, colones$

b) precio de cada $pera = 300\, colones$

Si le asignamos la variable y a la cantidad de manzanas que se compran, y le asignamos la x a las peras, podemos plantear una de las ecuaciones:

$250y + 300x = 8350$, ya que los datos dicen que por el total de manzanas y peras se pago un total de 8350 colones.

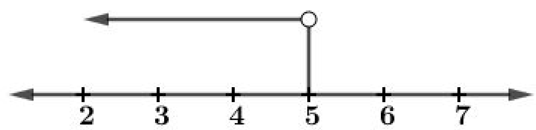
Si se lee con atencion de nuevo el problema se puede obtener otra ecuacion:

$x + y = 30$, ya que el problema dice que en total entre las manzanas y las peras se llevan 30.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opcion (b).

Respuesta cerrada

14. Observe la siguiente imagen la cual corresponde a la representacion gra ca de un conjunto y conteste lo que se le solicita.



Segun la imagen anterior una posible representacion del conjunto en notacion por comprension corresponde a

Solución:

La notacion por comprension de un conjunto viene dada por la escritura de una variable que tome todos los valores que esten en este conjunto, por ejemplo en el ejercicio anterior todos los numeros menores que 5 estan en el conjunto, por lo tanto, la respuesta correcta corresponde a

f$x < 5/x$ 2 Rg

Nota:

Es importante ver que elementos pertenecen al conjunto, en este caso el 5 no esta en el conjunto, por lo que se escribe con un menor estricto.

$$\boxed{\text{f}x < 5/x \text{ 2 Rg}}$$

15. Considere el conjunto P = f2x/x 2 Ng que contiene a todos los numeros pares. Si el universo es R, el complemento del conjunto P en notacion por comprension corresponde a

Solución:

Para responder a esta pregunta es necesario recordar el signi cado de complemento de un conjunto.

El complemento de un conjunto viene dado por todos los elementos del conjunto universo que no pertenecen al conjunto en el que se esta trabajando. El complemento de un conjunto A viene representado por $\overline{A}$ o A^c.

En este caso el ejercicio habla sobre un conjunto que contiene a todos los numeros pares, por lo que su complemento viene dado por todos los numeros impares. Para dar la respuesta, falta recordar como se puede escribir de manera general un numero impar, lo cual se aprecia del enunciado del ejercicio, si un numero par viene dado por $2x$ entonces un numero impar viene dado por $2x + 1$.

Por lo tanto, la respuesta correcta corresponde a $\overline{P}$ = f$2x + 1/x$ 2 Ng.

$$\boxed{\overline{P} = \text{f}2x + 1/x \text{ 2 Ng}}$$

16. Considere la funcion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 4x - 1$, la preimagen de -2 corresponde a

Solución:

Para esta pregunta es necesario recordar como obtener una preimagen a partir de un criterio dado.

Para calcular la imagen sustituye el valor de la variable por la correspondiente preimagen y resuelve la operacion. En cambio una preimagen se obtiene al sustituir $f(x)$ en la ecuacion por el valor que se da y despejar la incognita. En esta ocasion el ejercicio pide que se averigue la preimagen de -2 por lo que se sustituye $f(x)$ por -2 y se resuelve la ecuacion.

$4x - 1 = -2$

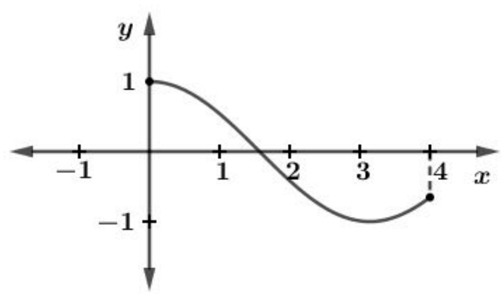
$\Rightarrow 4x = -2 + 1$

$\Rightarrow 4x = -1$

$\Rightarrow x = \frac{-1}{4}$ Por lo tanto, la preimagen de -2 corresponde a $\frac{-1}{4}$

$\boxed{\text{La preimagen de -2 corresponde a } \frac{-1}{4}}$

17. Observe la grafica de la funcion h y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Si el dominio de la funcion h es $[0, 4]$ el ambito de la funcion corresponde a

Solución:

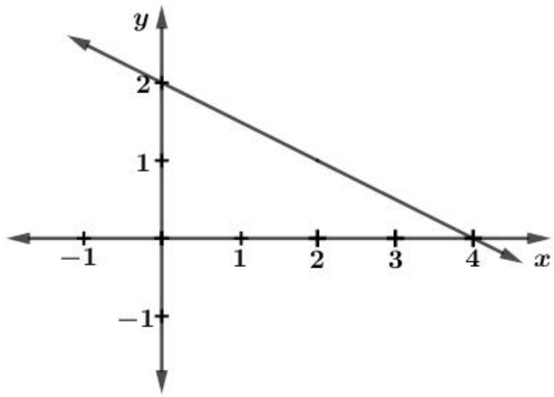
Para resolver esta pregunta es necesario recordar el concepto de ambito de una funcion.

El ambito de una funcion se lee de abajo hacia arriba en el eje de las ordenadas es decir el eje y, dicho de otra manera es observar en donde se encuentra el punto mas bajo de la funcion con respecto al eje y y luego buscar el punto mas alto donde llega la funcion con respecto al eje y. En caso de que la funcion no exista en ciertos intervalos del eje y se deben excluir estos del ambito. Dicho de otra manera si la funcion no es continua en todo su dominio se deben quitar los intervalos en donde la funcion no este definida.

En este caso si se observa la grafica, la funcion es continua y esta definida en el eje y en el intervalo $[-1, 1]$, por lo tanto ese sera el ambito de la funcion.

$\boxed{\text{Ambito} = [-1, 1]}$

18. Observe la gra ca de la funcion g y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



La pendiente de la gra ca g corresponde a

Solución:

Para resolver esta pregunta es necesario recordar el concepto de pendiente dado en la pregunta 7 de Relaciones y Algebra.

Observando la gra ca, tenemos los puntos $(0,2)$ y $(4,0)$, as :

$$m = \frac{2 \quad 0}{0 \quad 4}$$

$$) \quad m = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la pendiente es $\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{La pendiente es } \frac{1}{2}}$$

19. Considere a las funciones g y f con $g(x) = \frac{x^2+3}{x}$ y $f(x) = 2x + 1$, la composicion $(gof)(x)$ corresponde a

Solución:

La composicion de las funciones g y f viene dada por:

$(gof)(x) = g(f(x))$

$\Rightarrow g(f(x)) = g(2x + 1)$

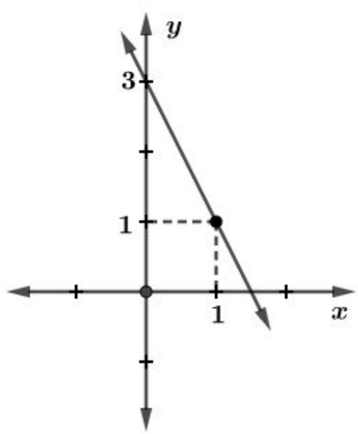
$\Rightarrow g(f(x)) = \frac{(2x+1)^2+3}{2x+1}$

Por lo tanto, la composicion $(gof)(x)$ corresponde a:

$(gof)(x) = \frac{(2x+1)^2+3}{2x+1}$

$$\boxed{(gof)(x) = \frac{(2x+1)^2+3}{2x+1}}$$

20. Observe la grafica de la funcion h y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Con certeza se puede afirmar que la funcion h corta al eje x en el punto

Solución:

Para poder responder la pregunta primero es necesario obtener el criterio de la funcion, luego recordar que para hallar el corte con el eje x se debe igualar el criterio de la funcion a 0 y despejar la incognita x.

Para hallar el criterio de la funcion se tienen los dos puntos que pertenecen a la recta: $(1, 1)$ y $(0, 3)$

Así se tiene que:

$m = \frac{3-1}{0-1}$

$\Rightarrow m = -2$

De manera similar se tiene que:

$b = 3 \quad 0(\quad 2)$

$) \ b = 3$

As el criterio de la funcion viene dado por:

$y = \quad 2x + 3$

Para encontrar el corte con el eje x igualemos el criterio a 0

$0 = \quad 2x + 3$

$) \ 2x = 3$

$) \ x = \frac{3}{2}$

As , se tiene como respuesta que el corte con las abscisas corresponde a $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

$$\boxed{\left(\frac{3}{2}, 0\right)}$$

21. Sea la funcion $f : \mathbb{R} \ ! \ \mathbb{R}$ cuyo criterio viene dado por $f(x) = x^2 \quad \frac{x}{2} \quad 5$, >en que puntos la funcion f corta al eje de las ordenadas y al eje de las abscisas respectivamente?

Solución:

Recordemos que una funcion cuadratica de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ corta al eje de las ordenadas en el punto $(0, c)$ por lo que la respuesta a la primer pregunta es $(0, \quad 5)$.

Para hallar los cortes con el eje de las abscisas es necesario igualar el criterio de la funcion a 0 y despejar la incognita x. En este caso se resolvera utilizando la formula general.

Recordemos que dada la ecuacion cuadratica $ax^2 + bx + c = 0$ las soluciones por medio de la formula general vienen dadas por:

$x_1 = \frac{b + p\overline{4}}{2a} \quad \_ \quad x_2 = \frac{b \quad p\overline{4}}{2a}$, donde $4 = b^2 \quad 4ac$

En este ejercicio al igualar la funcion a 0 queda la ecuacion cuadratica

$x^2 \quad \frac{x}{2} \quad 5 = 0$

Se averiguara 4

$4 = b^2 \quad 4ac$

$) \ 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad 4 \ 1 \quad 5$

$) \ 4 = \frac{1}{4} + 20$

$) \ 4 = \frac{81}{4}$

Sustituyendo los valores de las variables en las soluciones de la formula general se tiene que

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{81}{4}}}{2} \quad \_ \quad x_2 = \frac{\frac{1}{2} \quad \sqrt{\frac{81}{4}}}{2}$$

$$) \quad x_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{9}{2}}{2} \quad \_ \quad x_2 = \frac{\frac{1}{2} \quad \frac{9}{2}}{2}$$

$$) \quad x_1 = \frac{\frac{10}{2}}{2} \quad \_ \quad x_2 = \frac{\frac{8}{2}}{2}$$

$$) \quad x_1 = \frac{5}{2} \quad \_ \quad x_2 = \quad 2$$

Por lo que los cortes con el eje de las abscisas son $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ y (-2,0).

corte con el eje de las ordenadas (0,   5) y el corte con el eje de las abscisas $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$,(-2,0)

22. El el TEC unos ingenieros lanzan desde el suelo un cohete, el mismo forma un movimiento parabolico representado por la siguiente funcion:

$$f(x) = \quad 15x^2 + 60x$$

Donde x representa la cantidad recorrida en metros y $f(x)$ representa la altura del cohete durante su recorrido en metros. El cohete alcanza la altura maxima en el punto.

Solución:

Esta funcion representa a una parabola concava hacia abajo por lo tanto el punto maximo de la funcion se encuentra en el vertice que viene dado por $\left(\frac{b}{2a}, f\left(\frac{b}{2a}\right)\right)$

Por lo que primero se procedera a hallar $\frac{b}{2a}$

$$\frac{b}{2a} = \frac{60}{2 \quad 15}$$

$$) \quad \frac{b}{2a} = 2$$

As el punto maximo del cohete en la coordenada y viene dado por:

$$f(2) = \quad 15(2)^2 + 60(2)$$

$$) \quad f(2) = 60$$

Por lo tanto, el cohete alcanza la altura maxima en el punto $(2, 60)$.

$(2, 60)$

23. En la llantera \El exito" se sabe que la ganancia (en miles de colones), en funcion de una cantidad x de llantas vendidas vienen dada por la formula:

$$h(x) = \quad 2x^2 + 800x + 400$$

La cantidad de llantas que se necesitan vender para alcanzar la ganancia maxima corresponde a

Solución:

De manera similar al ejercicio anterior se pide hallar el punto de la ganancia maxima, pero en este caso el problema solo pide hallar la cantidad de llantas que se necesitan vender, es decir la coordenada en x.

As se busca hallar la solucion de $\frac{b}{2a}$.

$\frac{b}{2a} = \frac{800}{2 \quad 2}$

) $\frac{b}{2a} = 200$

Por lo tanto, se necesitan vender 200 llantas.

200 llantas

24. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 8y & = \quad 12 \\ 7x + \quad 12y & = \quad 4 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones para el sistema anterior corresponde a

Solución:

Para resolver el sistema de ecuaciones hay multiples maneras, se procedera con la mas comun que es sustitucion, la cual consiste en despejar una de las ecuaciones y sustituir en la otra.

Se despejara en la primer ecuacion la variable x, de manera que:

$x = \frac{12 \quad 8y}{3}$, sustituyendo la x en la segunda ecuacion se tiene que:

$7\frac{(\; 12 \quad 8y)}{3} \quad 12y = 4$

) $\frac{84 \quad 56y}{3} \quad 12y = 4$

) $\frac{84 \quad 56y \quad 36y}{3} = 4$

) $84 \quad 92y = 12$

) $92y = 96$

) $y = \frac{96}{92}$

) $y = \frac{24}{23}$

El paso a seguir es sustituir el valor de y en la ecuacion que se despejo para obtener el valor de x. De esa manera se tiene lo siguiente

$x = \frac{12 \quad 8y}{3}$

) $x = \frac{12 \quad 8 \; \frac{24}{23}}{3}$, al resolver la operacion nos da como resultado que

$x = \frac{28}{23}$

Por lo tanto, el conjunto de solucion esta dado por

$S = \left\{ \left(\frac{28}{23}, \frac{24}{23} \right) \right\}$

$$\boxed{S = \left\{ \left(\frac{28}{23}, \frac{24}{23} \right) \right\}}$$

25. En el CTP Cartago el profesor de matematicas fue a comprar marcadores de pizarra, cada marcador de tinta azul tiene un valor de 1250 colones y cada marcador de tinta negra tiene un valor de 1150 colones, en total pago 18150 colones y se llevaron un total de 15 marcadores. Si A representa la cantidad de dinero pagada por los marcadores de tinta azul y N respresenta la cantidad de dinero pagada por los marcadores de tinta negra. La diferencia $A \quad N$ equivale a

Solución:

Para resolver este problema, la manera optima es creando un sistema de ecuaciones.

Siendo x = cantidad de marcadores azules y y = cantidad de marcadores negros, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1250x + 1150y = 18150 \\ x + y = 15 \end{cases}$$

Despejando la x de la segunda ecuacion se tiene lo siguiente:

$x = 15 \quad y$, al sustituir x en la primera ecuacion se tiene que:

$1250(15 \quad y) + 1150y = 18150$

) $18750 \quad 1250y + 1150y = 18150$

) $\quad 100y = \quad 600$

) $y = 6$, luego se sustituye el valor de y en la ecuacion que se despejo al inicio para obtener el valor de x.

As :

$x = 15 \quad 6$

) $x = 9$

Como A representa la cantidad de dinero pagada por los marcadores de tinta azul se tiene que:

$A = 1250 \quad 9$

$) \; A = 11250$

De manera similar como N representa la cantidad de dinero pagada por los marcadores de tinta negra se tiene que:

$N = 1150 \quad 6$

$) \; N = 6900$

De esta manera se tiene que la diferencia $A \quad N$ corresponde a

$A \quad N = 11250 \quad 6900$

$) \; A \quad N = 4350$

$$\boxed{A \quad N = 4350}$$

7. Habilidades según el programa vigente de Matemática del Ministerio de Educación Pública

Geometría

1. Representar gra camente una circunferencia dado su centro y su radio.
2. Representar algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio.
3. Aplicar traslaciones a una circunferencia.
4. Resolver problemas relacionados con la circunferencia y sus representaciones.
5. Determinar gra ca y algebraicamente si un punto se ubica en el interior o en el exterior de una circunferencia.
6. Determinar si una recta dada es secante, tangente o exterior a una circunferencia.
7. Representar gra ca y algebraicamente rectas secantes, tangentes y exteriores a una circunferencia.
8. Analizar geometrica y algebraicamente la posicion relativa entre rectas en el plano desde el punto de vista del paralelismo y la perpendicularidad.
9. Aplicar la propiedad que establece que una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio de la circunferencia en el punto de tangencia.
10. Determinar la medida de per metros y areas de pol gonos en diferentes contextos.
11. Determinar las medidas de los angulos internos y externos de pol gonos en diversos contextos.
12. Determinar la medida de la apotema y el radio de pol gonos regulares y aplicarlo en diferentes contextos.
13. Calcular per metros y areas de pol gonos no regulares utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.
14. Resolver problemas que involucren pol gonos y sus diversos elementos.
15. Estimar per metros y areas de guras planas no poligonales utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.
16. Identi car el radio y el diametro de una esfera.
17. Identi car la super cie lateral, las bases, la altura, el radio y el diametro de un cilindro circular recto.
18. Determinar que guras se obtienen mediante secciones planas de una esfera o un cilindro y caracter sticas metricas de ellas.
19. Reconocer elipses en diferentes contextos.

Relaciones y Álgebra

1. Analizar subconjuntos de los numeros reales.
2. Utilizar correctamente los s mbolos de pertenencia y de subconjunto.
3. Representar intervalos numericos en forma gra ca, simbolica y por comprension.
4. Determinar la union y la interseccion de conjuntos numericos.
5. Determinar el complemento de un conjunto numerico dado.
6. Identi car si una relacion dada en forma tabular, simbolica o gra ca corresponde a una funcion.
7. Evaluar el valor de una funcion dada en forma gra ca o algebraica, en distintos puntos de su dominio.
8. Analizar una funcion a partir de sus representaciones.
9. Calcular la composicion de dos funciones.
10. Representar gra camente una funcion lineal.
11. Determinar la pendiente, la interseccion con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gra ca o algebraica.
12. Determinar la ecuacion de una recta utilizando datos relacionados con ella.
13. Analizar gra ca y algebraicamente la funcion cuadratica con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$.
14. Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.
15. Relacionar la representacion gra ca con la algebraica.
16. Analizar sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incognitas.
17. Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incognitas.

8. Bibliografía

MEP. (2012). Programas de estudio de Matematica. San Jose, Costa Rica