Artículo
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 10, Nº 1. 2009

# Análisis de las conceptualizaciones erróneas en conceptos de geometría y sistemas de ecuaciones: un estudio con estudiantes universitarios de primer ingreso

Greivin Ramírez
gramirez@itcr.ac.cr
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Jeffry Chavarría
jchavarria@itcr.ac.cr
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Cruz Barahona
Cbarahona8516@gmail.com
Colegio Científico Costarricense

Marianela Mora
mmcnela@gmail.com
Liceo Occidental de Cartago

## Resumen

En el presente artículo se reportan los resultados de una investigación que clasifica las conceptualizaciones que tienen estudiantes de primer ingreso universitarios de Costa Rica en temas de geometría y sistemas de ecuaciones mediante el modelo SOLO Taxonómico (propuesto por Biggs & Collis, 1982). Inicialmente los estudiantes se ubican en los primeros niveles de razonamiento en los temas de geometría y en niveles intermedios en sistemas de ecuaciones, al final los estudiantes mostraron mejoría después de un curso introductorio de matemáticas.

## Abstract

In this article we report the results of research that classifies the conceptualization that students of first-admission University have in topics of geometry and equations systems using the SOLO taxonomy model (proposed by Biggs & Collis, 1982). Students are initially placed in the fist levels of reasoning in topics of geometry and intermediate levels in equations systems, at the end the students showed a slight improvement after the introductory course in mathematics

**Palabras claves**: formas de razonamiento, errores en matemática, geometría y sistemas de ecuaciones.

## 1.1 Introducción

En este artículo se exponen los resultados de una investigación, realizada en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, en la que se analizan y clasifican las formas de razonamiento mostradas por algunos estudiantes de primer ingreso universitarios en problemas de geometría y sistemas de ecuaciones. A pesar de que los estudiantes recibieron durante la secundaria formación en dichos temas y después de un semestre de instrucción básica en un curso introductorio universitario, se muestra que ante situaciones similares, algunos estudiantes presentan obstáculos que han perdurado después del proceso. Esta noción de obstáculo epistemológico lo desarrolla Bachelard (1976) "un obstáculo epistemológico se incrusta en el conocimiento no formulado. Costumbres intelectuales que fueron útiles y sanas, pueden después de un tiempo obstaculizar".

Es importante recalcar que los obstáculos no son, los errores que ocurren al azar, sino más bien, conocimientos que fueron válidos en una situación pero en otro contexto producen error. Desde el punto de vista de Godino, citado en Ruiz (2006):

> Un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un conocimiento posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones. (*Ibid., p. 15*)

Nos interesa responder la pregunta ¿cuáles son las formas de razonamiento que muestran estudiantes de primer ingreso universitarios en problemas de geometría y sistemas de ecuaciones? Se muestra situaciones en las que los sujetos generalizan algunos resultados, sin percatarse de que se tratan de conceptos aplicables a escenarios específicos.

## 1.2 MARCO CONCEPTUAL

En las últimas tendencias en la investigación acerca del razonamiento, pensamiento y cultura algebraica y geométrica, el desarrollo de niveles o jerarquías para describir el desarrollo cognitivo de los sujetos ha llegado a ser un objetivo importante de estudio.

Adoptamos el interés de Socas (1997) por clasificar las formas de razonamiento de los estudiantes para explicar los errores que estos cometen:

> El análisis de los errores tiene un doble interés: por una parte, sirve para ayudar a los profesores a organizar estrategias generales y específicas para conducir mejor la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y por otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias de corrección de los mismos. (*Ibid., p.30*)

Concordamos con el punto de vista de Godino, Batanero y Font (2003) quienes indican que "Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar".

Entre los diversos modelos que se han propuesto para jerarquizar el desarrollo cognitivo, se encuentra el modelo taxonómico SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) desarrollado por Biggs & Collis (1982). SOLO es un modelo que permite describir procesos involucrados en el aprendizaje, estableciendo categorías por orden de complejidad. El modelo categoriza la actividad mental que realizan los sujetos cuando se enfrentan a una tarea escolar, considerando tanto aspectos cuantitativos como cualitativos.

El modelo consta de cuatro categorías o niveles, las cuales se describen a continuación:

1. Preestructural: La tarea no es abordada adecuadamente, ya que los estudiantes poseen información aislada que no tiene organización ni sentido.
2. Uniestructural: Los estudiantes se enfocan en un aspecto relevante, realizan conexiones simples y obvias pero no tienen una comprensión de los conceptos.
3. Multiestructural: Los estudiantes se enfocan en más de un aspecto de la tarea, pero son tratados en forma independiente, no realizan conexiones entre conceptos.

4. Relacional: Los estudiantes integran diversos aspectos como un todo coherente con estructura y significado.

Aplicando el modelo anterior al caso de sistemas de ecuaciones tenemos lo siguiente:

1. Preestructural: Los estudiantes poseen información aislada de los conceptos que intervienen en la solución de un problema a través de un sistema de ecuaciones, tales como la definición de las variables, la interpretación del lenguaje, formulación de las ecuaciones, pero no comprenden la forma en que están relacionados. Sus respuestas no las justifican o lo hacen incorrectamente.
2. Uniestructural: Los estudiantes relacionan en forma correcta algunos de los conceptos de sistemas de ecuaciones. Sin embargo, en ítemes similares donde se modifica alguna variable de la tarea, muestran falta de una compresión adecuada. Utilizan un lenguaje impreciso. Tratan de resolver el problema con una sola ecuación. Por ejemplo, en el ítem 4

   4. Considere el siguiente problema:
   La edad de María excede en 4 años a la edad de Carlos y la suma de sus edades es 32 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?
   Si "$x$" representa la edad de María, y "$y$" la edad de Carlos, plantee un sistema de ecuaciones que permite resolver el problema anterior.

   los estudiantes toman únicamente a $y$ como $x+4$ o bien $y=4x$ ó $x=4y$.
3. Multiestructural: Los estudiantes relacionan en forma correcta conceptos envueltos en la solución del problema a través de un sistema de ecuaciones justificando adecuadamente sus respuestas. Aunque se observan algunas inconsistencias en sus razonamientos. Formulan el sistema de ecuaciones pues saben que deben encontrar dos variables. O bien en una sola ecuación sustituyen el valor de y tomado. Sin embargo, no autoevalúan su respuesta según el contexto del problema.
4. Relacional: Los estudiantes son capaces de identificar las variables del problema, interpretar el problema, construir las ecuaciones, relacionar los conceptos que intervienen, resolver el sistema de manera adecuada y autoevaluar su respuesta en el contexto del problema.

Aplicando el modelo anterior al caso de Geometría tenemos lo siguiente:

1. Preestructural: Los estudiantes poseen información aislada de los conceptos como lo son el teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos, por lo que no

saben aplicarlos en la resolución de ejercicios. Se realizan conjeturas como decir que dos segmentos tienen la misma medida sin justificar el por qué, además indican medidas asumiendo que los triángulos son isósceles o que $\overline{DE}$ biseca a $\overline{AB}$, inclusive no exponen ningún cálculo pero si escriben la medida de algún segmento.

2. Uniestructural: El estudiante utiliza el teorema de Pitágoras y no tiene claro el concepto de semejanza. Por ejemplo en el ítem 6

6. Considere el $\triangle ABC$ con ángulo recto en $B$. Sabiendo que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $AC = 15$ cm, $DE = 3$ cm y $AB = 12$ cm; determine las medidas de $\overline{BC}$ y $\overline{DB}$. (3 puntos)

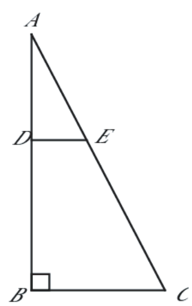



**Figura 1.1**

los estudiantes indican la medida del segmento $\overline{BD}$ sin justificar cómo obtienen el valor. Para encontrar la medida del segmento $\overline{BC}$ el estudiante realiza ecuaciones que en realidad son una razón, o busca volver a aplicar el teorema de Pitágoras para continuar con el ejercicio.

3. Multiestructural: El estudiante después de encontrar por medio del teorema de Pitágoras la medida del segmento $\overline{BC}$, realiza la semejanza de triángulos buscando encontrar la medida del segmento $\overline{AD}$ pero no justifica por qué los triángulos son semejantes. El estudiante escribe que la medida del segmento $\overline{BD}$ es 4 cuando en realidad es la medida de $\overline{AD}$.

4. Relacional: Los estudiantes son capaces de encontrar las medidas de los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$, ya que tienen claro los conceptos del teorema de Pitágoras, la semejanza de triángulos e inclusive justifican por medio del criterio correspondiente el procedimiento que es utilizado y si no justifican, reconocen la medida de los ángulos y además resuelven el problema mediante la ley de senos.

## 1.3 Metodología

La investigación es cualitativa y corresponde a un estudio de casos, aunque inicialmente se llevó a cabo un análisis cuantitativo con 1102 estudiantes recién ingresados a distintas carreras universitarias y que matricularon cursos introductorios durante el primer semestre de 2008. La siguiente tabla muestra algunas características de los sujetos de estudio:

| Curso | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| Matemática Básica | 217 | 19,7 |
| Matemática Discreta | 260 | 23,6 |
| Matemática General | 625 | 56,7 |
| Total | 1102 | 100,0 |

**Tabla 1.1** Frecuencia de estudiantes por curso

Los principales instrumentos de recolección de información fueron:

a) un cuestionario diagnóstico con 9 ítemes de desarrollo que se diseñó con el propósito de explorar la comprensión que tienen los sujetos de estudio sobre conceptos algebraicos y geométricos (Aplicado a los 1102 estudiantes).

b) análisis de errores cometidos por los estudiantes en dos ítemes (a un 10% de la población) para la clasificación de los mismos usando el modelo SOLO taxonómico.

c) aplicación de entrevistas video grabadas (tres estudiantes por ítem) una vez que finalizaron el curso introductorio para evaluar las conceptualizaciones mostradas después de la instrucción.

Específicamente, el diseño de los reactivos tuvo en cuenta que permitieran investigar acerca de los siguientes conceptos algebraicos y geométricos:

a) Simplificación y factorización de expresiones algebraicas.

b) Solución de Ecuaciones e inecuaciones.

c) Solución de problemas que llevan a sistemas de ecuaciones.

d) Semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras.

Además, en la entrevista se evaluaron conceptos similares a los del diagnóstico según los errores que tuviera cada estudiante, con el fin de interpretar las formas de razonamiento que mostraba al enfrentarse a situaciones similares en las que ya había errado un semestre atrás.

Los sujetos a los que se les analizaron sus respuestas fueron seleccionados de manera aleatoria, correspondiente a un 10% aproximadamente de cada curso introductorio, inclusive se analizaron los errores de 30 estudiantes del curso de Cálculo Diferencial e Integral que también se les aplicó el examen con fines meramente de confiabilidad de la prueba (230 estudiantes aplicaron el examen). La siguiente tabla muestra la distribución de estudiantes analizados por curso:

| Curso | Frecuencia |
|---|---|
| Matemática Básica | 20 |
| Matemática Discreta | 25 |
| Matemática General | 39 |
| Cálculo Diferencial e Integral | 30 |
| Total | 114 |

**Tabla 1.2** Frecuencia de estudiantes analizados por curso

Los sujetos entrevistados fueron seleccionados por conveniencia, pues de los estudiantes que cometían los errores más frecuentes en cada ítem, se les pedía que colaboraran de forma voluntaria en una entrevista con carácter de investigación.

## 1.4 Resultados

Los resultados serán discutidos en dos niveles: un nivel descriptivo, obtenido de los sujetos de estudio en el examen de diagnóstico para toda la población, el cual nos proporciona una idea de su comprensión acerca de los conceptos investigados; y un segundo nivel, donde los sujetos son ubicados en categorías determinadas por los niveles de comprensión que exhibieron después de un semestre de instrucción. Se presenta el análisis completo de dos ítemes correspondientes a los temas de sistemas de ecuaciones y geometría, pues fue donde los estudiantes presentaros mayores dificultades.

### 1.4.1 El examen de diagnóstico

Los objetivos de aplicar este examen fueron:

a) Evaluar los conocimientos previos básicos y puntuales en matemática que debería tener el estudiante que ingresa al Instituto Tecnológico de Costa Rica.

b) Buscar la correlación entre la calificación del examen diagnóstico y la promoción en el curso.

c) Identificar la población en riesgo académico de nuevo ingreso, con el fin de ofrecerles talleres de nivelación de Matemática General.

d) Crear un banco de ítemes validados.

***1.4.1.1 Resultados generales*** El examen consta de 9 ítemes y se aplicó a 1102 estudiantes. El promedio de la nota obtenida fue de $55.28$ con una desviación estándar de $18.55$. Los resultados por curso se muestran en la tabla siguiente:

| Curso | Frecuencia | Promedio | Desviación estándar |
|---|---|---|---|
| Matemática Básica | 217 | 47,6 | 19,08 |
| Matemática Discreta | 260 | 57,41 | 18,51 |
| Matemática General | 625 | 57,06 | 17,7 |

**Tabla 1.3** Comparación de calificaciones por curso

***1.4.1.2 Análisis de dificultad de los ítemes*** Dadas las características de la prueba de Matemática se realizó un análisis de la dificultad utilizando el siguiente procedimiento:

a) Se obtuvo el valor promedio de la puntuación obtenida en el ítem, y

b) se obtuvo un índice que es el producto del valor promedio de cada ítem dividido entre el valor de la pregunta.

En la siguiente tabla se representan algunas medidas descriptivas y los índices de dificultad de los ítemes 4 y 6 que serán los que nos interesa reportar en esta investigación:

| Medidas | it4 | it6 |
|---|---|---|
| Promedio | 1,20 | 1,30 |
| Desviación Estándar | 0,85 | 0,96 |
| Índice de Dificultad | 0,6 | 0,43 |

**Tabla 1.4** Medidas descriptivas de los ítemes de la prueba de diagnóstico

Ambos ítemes tienen una dificultad normal.

#### *1.4.1.3 Discriminación de los ítemes*

El valor del índice de discriminación de cada ítem se obtiene por medio de la correlación del ítem con el puntaje final obtenido en la prueba. Los resultados indican que todos los ítemes presentan valores de Discriminación muy superiores a $0,30$ (valor mínimo aceptado). En la siguiente tabla se representan los índices de discriminación de los ítemes:

| | it4 | it6 |
|---|---|---|
| Correlación de Pearson | 0,43 | 0,49 |

**Tabla 1.5** Índices de discriminación de los ítemes de la prueba de diagnóstico

Ambos ítemes presentan una discriminación aceptable.

#### *1.4.1.4 Análisis de confiabilidad*

El Análisis de confiabilidad de la prueba de diagnóstico se realizó por medio de la técnica “Alfa de Cronbach”, con un total de 9 ítemes y 1102 casos. El resultado obtenido es de $0.80$, valor que indica que la prueba es confiable.

***1.4.1.5 Análisis de validez*** La validez de criterio predictiva se obtiene correlacionando las puntuaciones en la prueba de Diagnóstico con el rendimiento académico obtenido en los cursos de Matemática General, Matemática Básica, y Matemática Discreta. El coeficiente de regresión simple obtenido entre la puntuación en la prueba de diagnóstico y la nota obtenida en estos cursos de matemática presenta una magnitud de $0,378$; con una varianza explicada de un $14,2\%$. La ecuación de regresión $(y' = a + b(x))$ es donde $a = 27,360$ y $b = 0,528$, lo que indica que el puntaje predictor en la prueba de Matemática para un rendimiento académico de 70 puntos en el curso corresponde a una puntuación de $80,76$.

Se presenta a continuación la probabilidad que tiene un estudiante de obtener un rendimiento académico igual o superior a 70 puntos en el curso, según el puntaje que obtuvo en la prueba de diagnóstico. Para tal fin se desarrolla una tabla de contingencia y un gráfico utilizando las puntuaciones (en rangos) de la prueba de diagnóstico con las puntuaciones (en rangos) del rendimiento obtenido en los cursos. El siguiente gráfico sintetiza los resultados obtenidos.

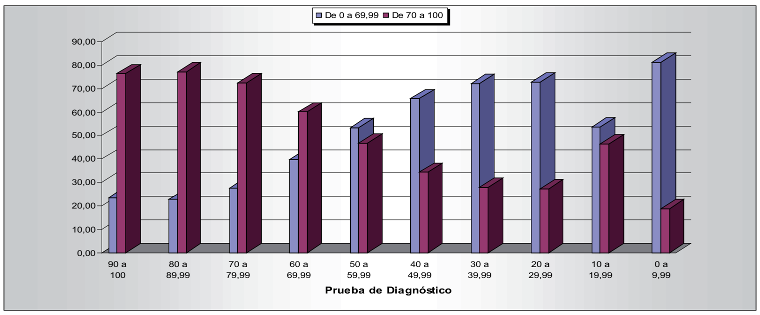



**Figura 1.2** Gráfico 1. Probabilidad condicional entre las puntuaciones de la prueba de diagnóstico en matemática aplicada en el primer semestre y la nota obtenida en el curso según valores porcentuales para toda la población $(N = 1053)$.

Solo el $11,9\%$ de todos los estudiantes evaluados, con una puntuación en la prueba igual o superior a $70$, pierden el curso. En contraposición, solo el $5,83\%$ de los/as estudiantes con puntuaciones inferiores a $30$ en la prueba ganan el curso.

### 1.4.2 Análisis de niveles de comprensión de los sujetos por ítem

Para Socas (*op. cit.*) son dos las principales causas de los errores en el aprendizaje de las matemáticas:

> Errores que tiene su origen en un obstáculo y errores que tiene su origen en una ausencia de significado. Estos últimos, tendrían dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetivos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático, y otra, relacionada con las dificultades asociadas

a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

A continuación se presenta el análisis de los principales errores cometidos por los estudiantes en el ítem 4 (sistemas de ecuaciones) y en el ítem 6 (geometría):

#### 1.4.2.1 Item 4

4. Considere el siguiente problema:
La edad de María excede en 4 años a la edad de Carlos y la suma de sus edades es 32 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?
Si “$x$” representa la edad de María, y “$y$” la edad de Carlos, plantee un sistema de ecuaciones que permite resolver el problema anterior.

Esta pregunta tiene como objetivo investigar si los sujetos perciben correctamente el significado de que la edad de una persona exceda en 4 años a la otra. Además de simbolizar matemáticamente a través de dos ecuaciones los enunciados que permiten resolver el problema.

A pesar de que los estudiantes dedican en secundaria un semestre para resolver sistemas de ecuaciones y aplicaciones, las respuestas al ítem presentaron, en la muestra tomada, principalmente los siguientes errores:

a) Toma $y = x + 4$

b) Interpreta incorrectamente que la suma de sus edades es 32 años

c) Trata de resolver el problema con una sola ecuación

d) Toma la expresión excede en 4 como ó x=4y

e) Plantea una ecuación de una variable de manera incorrecta.

En cuanto a la clasificación de los niveles de razonamiento utilizando el modelo SOLO, se obtuvieron los siguientes resultados:

| Nivel | Curso Introductorio | Cálculo Diferencial e Integral | Total |
|---|---|---|---|
| Preestructural | 1 | 1 | 2 |
| Uniestructural | 15 | 1 | 16 |
| Multiestructural | 22 | 10 | 32 |
| Relacional | 46 | 18 | 64 |
| Total | 84 | 30 | 114 |

**Tabla 1.6** Clasificación de los sujetos de estudio por categorías del modelo SOLO según las respuestas dadas a la pregunta 4 del cuestionario de diagnóstico

Se puede observar que la mayoría de estudiantes se encuentran en un nivel relacional; sin embargo, casi el $27\%$ (22 de 82) de los estudiantes del curso introductorio se ubican en el nivel multiestructural, entre tanto, el $18\%$ se encuentran en el nivel uniestructural.

Debido a que en el examen de diagnóstico el estudiante número 50 (en adelante D) y el estudiante número 1075 (en adelante A) del curso introductorio presentaron dos de los principales errores en el ítem, los cuáles los ubican a ambos en el nivel uniestructural, se les entrevistó después de recibir instrucción durante un semestre en un curso remedial universitario de Matemática General para comparar sus conceptualizaciones con respecto al examen de diagnóstico.

En el examen de diagnóstico la respuesta brindada por A fue:

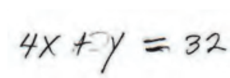



**Figura 1.3**

Entre tanto, la respuesta brindada por D fue:

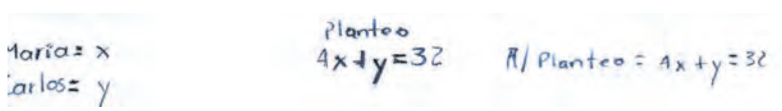



**Figura 1.4**

Ambos interpretan incorrectamente que María excede en 4 años a la edad de Carlos y plantean una sola ecuación con dos variables para resolver el problema.

En la entrevista se le plantearon los siguientes problemas

1) Yo tengo 5 años más que la edad de ella (Cruz), y juntos sumamos 47 años. Si mi edad es $z$, que significa que yo tenga 5 años más que ella, en términos de $z$, ¿qué edad tiene ella?

   Cuyo objetivo era determinar si el estudiante interpretaba algebraicamente lo que significa que la edad del entrevistador exceda en 5 a la edad de Cruz.

2) Ahora, ¿cómo planteo la o las ecuaciones que me permitan resolver el problema?

   Cuyo objetivo era que represente matemáticamente la ecuación o las ecuaciones que le permitirían resolver el problema.

3) Resuelva este problema

   Tres adultos y tres niños visitan un zoológico. El costo de la entrada para niño es la mitad que el valor para adultos, si entre los seis pagan $\subset 20700$ por las entradas, ¿cuánto cuesta cada entrada para niño?

   Cuyo objetivo es evaluar el nivel de razonamiento mostrado en problemas similares a los del examen de diagnóstico y vistos en el curso remedial después de un semestre de instrucción, con el fin de comparar esos niveles.

El estudiante A reaccionó de la siguiente manera en la entrevista:

**E:** Entrevistador

**Problemas 1 y 2**

**A:** [Trabaja en hoja de papel]

Hace

$$5x + x = 47$$
$$5z + z = 47$$
$$6z = 47$$
$$z = \frac{47}{6}$$
$$z =$$

Uniestructural: toma a la edad mía como 5x en vez de 5+x. Usa la variable x en vez de z.

**A:** Me dio algo raro [una vez que hace el cálculo de $z$ en la calculadora].

Bueno, yo lo razono, bueno, no sé si será lo correcto, pero yo digo. Yo tengo 5 años, viéndolo en términos de $x$

Yo sería $x$, verdad. Yo tengo cinco años más que Cruz, entonces, sería $5x$ y $x$ sería Cruz.

Entonces juntos sumamos 47, entonces esto es igual a 47.

Y dice, qué significa que yo tenga 5 años más que ella, en términos de $z$, ¿ qué edad tiene ella? Y sería calcular esto [señalando lo que escribió en la pizarra] en términos de $z$. Sería $5z+z=47$, Diay esto me dio siete punto algo, pero no creo que esté bien, porque no puede dar decimales.

Hace en el pizarrón:

$$5X + x = 47$$
$$5z + z = 47$$
$$= 7.8$$

Uniestructural: insiste en tomar la edad mía como 5x en vez de 5+x

**E:** Ok, ¿no puede dar decimales o ella no tendría 7 años? No, porque el problema es de la vida real, o sea, eso quiere decir, que ella tiene $7.8$ años [señalando la pizarra] y cuántos tendrías vos si vos, tenés cinco más?

**A:** Diay, esto [señalando el $7.8$ años] por cinco.

**E:** Y vos no tenés cinco por siete, 35 años. Veámoslo así, que tal si, si vos decís que ella tiene $x$, es su variable $x$ verdad, ella tiene $x$ y vos tenés cinco más que ella.

**A:** Ahh, bueno, es que aquí es cinco más $x$ [Señalando la pizarra donde tenía $5x$], ok ok.

**E:** Si la multiplicás por cinco sería cinco veces.

**A:** Sí, sí, cinco más $x$. Entonces sería cinco más dos equis, igual a 47 [resuelve la ecuación]. Es como 21.

Hace en el pizarrón

$$5+x + x = 47$$
$$5+2x = 47$$
$$x = 21$$

Relacional: se autoevalúa y corrige.

**A:** Sí, antes fue un más que me comí.

**Problema 3**

**A:** Dice que el costo de los adultos es $2x$ y el de los niños es $x$, y entre los seis pagan. Entonces sería esto [señalando la pizarra] por tres, esto por tres, igual a $\subset 20700$.

Hace en el pizarrón

$$3 \cdot 2x \quad 3 \cdot x = 20\,700 ₡$$

Multiestructural: otra vez toma el producto de los factores. Relaciona bien las ecuaciones de costo $x$ y $2x$.

Luego hace

$3 \cdot 2X + 3X = 20\,700$₡
$6x + 3x = 20700$₡
$9x = 20700$₡
$x = 2300$

Relacional: corrige en forma adecuada y resuelve el problema correctamente.

¿Qué me pide? ¿Cuánto cuesta la entrada para un niño? Sí, sería $2300$ colones

Al final se concluye que el estudiante se ubica en un nivel multiestructural, superando el nivel uniestructural ubicado en el diagnóstico, pues con un poco de guía, autoevalúa sus procedimientos y se percata de los errores cometidos que lo ubicaban inicialmente en un nivel uniestructural. Este estudiante reprobó el curso obteniendo como calificación un 30 (con base 100).

D reaccionó de la siguiente manera en la entrevista:

### Problema 1

**D:** Digamos que ella tendría $x$. Entonces sería, ¿qué dice, la suma es $47$? Sería $z+5$ [Señalando la edad de Greivin] Bueno ella es $z$ [Señalando la edad de Cruz].

Resuelve en la pizarra.

Greivin
Z años $z+5$
Cruz
$z$

$z+5+z=47$
$2z=42$
$z=21$

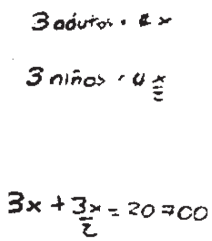
Relacional: obtiene de manera correcta la ecuación que resuelve el problema. Toma a $x$ en vez de $z$.

Él sería 26 años y ella 21.

### Problema 2

**D:** [Resuelve el problema sin hablar].

Resuelve en la pizarra 12 : 00 min.




Relacional: plantea bien el problema.

**D:** Bueno los datos, tres niños y tres adultos [señalando la pizarra]. Digamos que la entrada para adulto cuesta $x$ colones, y la de los niños es la mitad de los adultos $\frac{x}{2}$. Entonces sumamos, digamos, $x$ es de cada adulto, entonces sería $x$ por los tres adultos para sacar, después igual para los niños; y sumo, digamos las, digamos que serían las seis, las seis ...

**E:** Ok

**D:** Despejar a ver cuánto me quedaría $x$.

D supera su nivel de razonamiento uniestructural del examen de diagnóstico. Ahora se ubica en un nivel de razonamiento relacional. D aprueba el curso con la nota mínima 70.

#### 1.4.2.2 Ítem 6

6. Considere el $\triangle ABC$ con ángulo recto en $B$. Sabiendo que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $AC = 15$ cm, $DE = 3$ cm y $AB = 12$ cm; determine las medidas de $\overline{BC}$ y $\overline{DB}$. (3 PUNTOS)

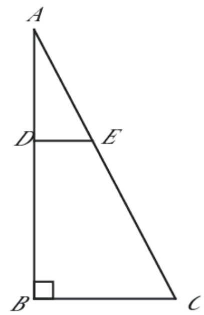



**Figura 1.5** Ítem 6

Esta pregunta tiene como objetivo investigar si los sujetos pueden utilizar el teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos para encontrar las medidas de dos segmentos.

Los estudiantes de secundaria, específicamente de octavo y noveno año, según el programa de estudios de matemática para tercer ciclo del Ministerio de Educación Pública le dedica aproximadamente tres meses en total a semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras, sin embargo las respuestas al ítem presentaron, en la muestra tomada, principalmente los siguientes errores:

a) Omitir el criterio por el cual los triángulos son semejantes.

b) Indicar las medidas de los ángulos A y/o C, asumiendo que los triángulos son isósceles.

c) Proponer las razones de manera incorrecta.

d) Calcular incorrectamente las sumas de Pitágoras.

e) Indicar la medida de los segmentos sin ningún cálculo anterior

f) Asumir que la medida de los segmentos y son iguales

En cuanto a la clasificación de los niveles de razonamiento utilizando el modelo SOLO, se obtuvieron los siguientes resultados:

| Nivel | Curso Introductorio | Cálculo Diferencial e Integral | Total |
|---|---|---|---|
| Preestructural | 26 | 7 | 33 |
| Uniestructural | 30 | 4 | 34 |
| Multiestructural | 26 | 18 | 44 |
| Relacional | 2 | 1 | 3 |
| Total | 84 | 30 | 114 |

**Tabla 1.7** Clasificación de los sujetos de estudio por categorías del modelo SOLO según las respuestas dadas a la pregunta 6 del cuestionario de diagnóstico

Se puede observar que la mayoría de estudiantes se encuentran en un nivel Multiestructural, sin embargo, casi el 36% (30 de 84) de los estudiantes del curso introductorio se ubican en el nivel Uniestructural, entre tanto, el 31% se encuentran en el nivel Preestructural.

Debido a que en el examen de diagnóstico el estudiante 200 (en adelante F) y el estudiante 54 (en adelante W) del curso Cálculo Diferencial e Integral y la estudiante 1072 (en adelante G) presentaron dos de los principales errores en el ítem, los cuáles ubican a F y G en un nivel Uniestructural y a W en un nivel Preestructural, se les entrevistó después de recibir instrucción durante un semestre en los cursos universitarios de Matemática General y Cálculo Diferencial e Integral para comparar sus conceptualizaciones con respecto al examen de diagnóstico.

En el examen de diagnóstico la respuesta brindada por F fue:

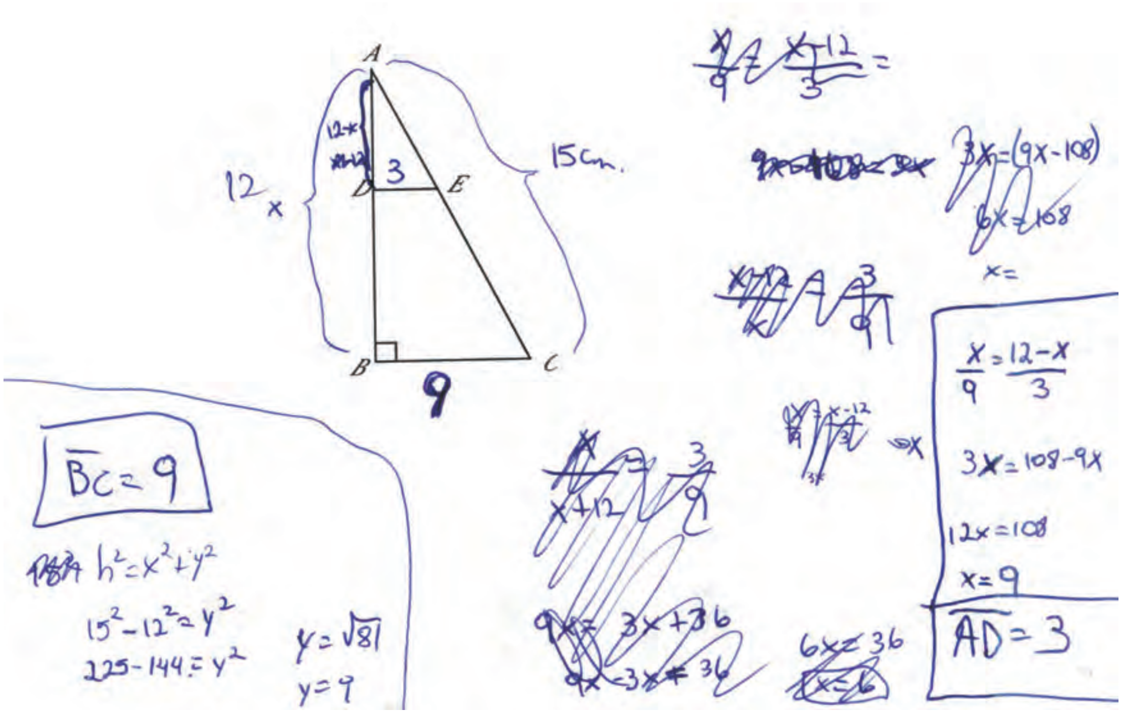



**Figura 1.6**

Entre tanto, la respuesta brindada por W fue:

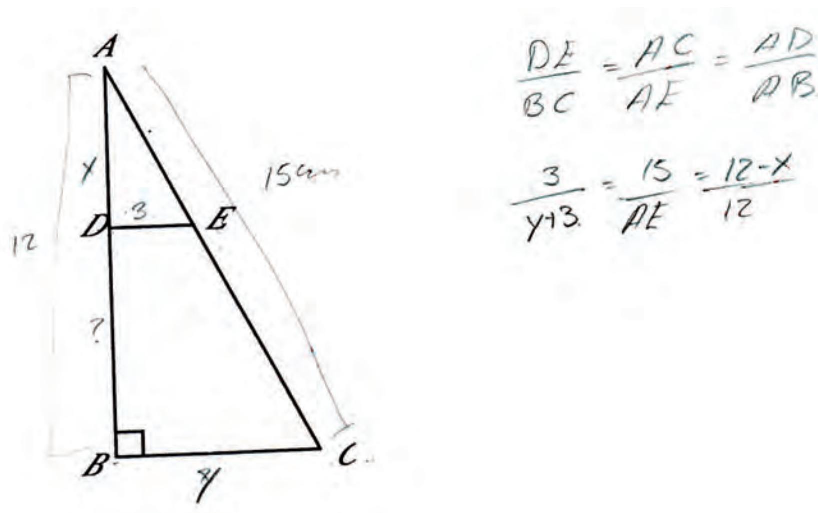



**Figura 1.7**

Y la respuesta brindada por G fue:

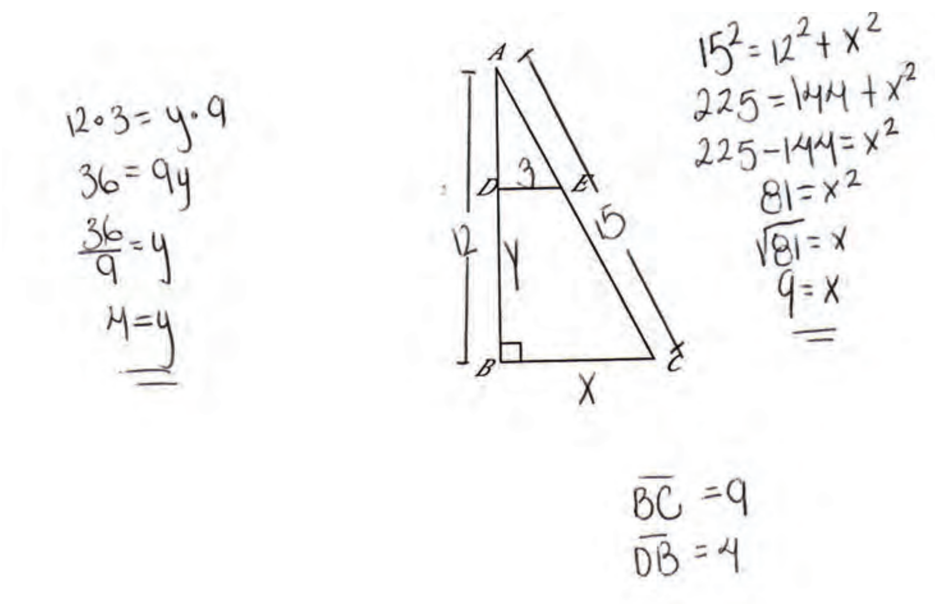



**Figura 1.8**

Los tres realizan incorrectamente las razones y no indican por cual criterio los triángulos son semejantes.

En la entrevista se le plantea el siguiente problema

1. Si el $\triangle ABP$ es semejante al $\triangle CDP$ y $m\overline{PA} = 18cm$, $m\overline{AB} = 24cm$, $m\overline{CD} = 8cm$ y $m\overline{PB} = 30cm$ ¿Calcule la medida del segmento $\overline{PD}$?

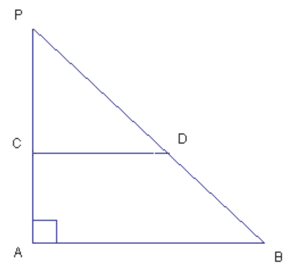



**Figura 1.9**

cuyo objetivo es evaluar el nivel de razonamiento mostrado en un problema similar a los del examen de diagnóstico y estos tipos de problemas son abordados en los cursos universitarios introductorios. A pesar de que se garantiza que los triángulos son semejantes, se les pide que justifique por qué lo son. La idea es comparar los dos niveles al inicio y al final en los cursos.

F reaccionó de la siguiente manera en la entrevista:

**F:** ¡No es una relación impar! [Escribe en el pizarrón]

$$\frac{8}{24} = \frac{18-x}{18}$$

**Figura 1.10**

**F:** $\left[\text{Borra } \frac{18-x}{18} \text{ y escribe } \frac{30-x}{30}\right]$

$$\frac{8}{24} = \frac{30-x}{30}$$

**Figura 1.11**

**F:** [Al segmento $\overline{DB}$ le asigna $y$]

**F:** $\left[\text{Borra } \frac{30-x}{30} \text{ y escribe en su lugar } \frac{30-y}{30}\right]$

**F:**

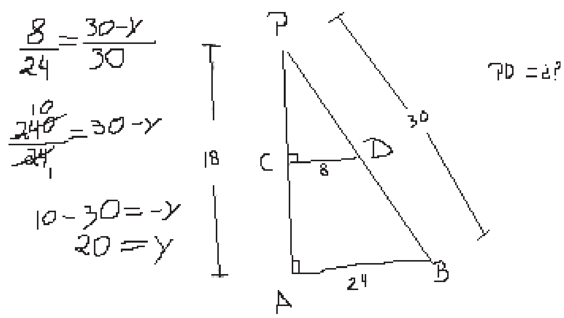



**Figura 1.12**

**E:** ¿Entonces cuál es la respuesta?

**F:** $\overline{BD}$ igual.

**E:** Ok.

**F:** [Escribe en la pizarra $x = 30 - y$]

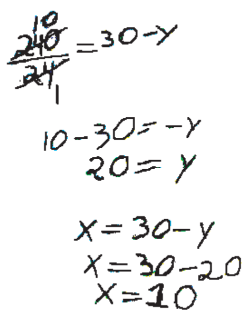



**Figura 1.13**

Multiestructural: ya que el estudiante logra realizar la correspondencia entre los lados de los triángulos de forma correcta pero no logra decir por qué los triángulos son semejantes, no lo justifica.

**E:** Ok, y una preguntita más,... ¿Qué significa que dos triángulos sean semejantes?

**F:** [...]

**F:** Sería propiedad, lo que importa es que tengan los lados.

G reaccionó de la siguiente manera en la entrevista:

**G:** [Hace en el pizarrón]

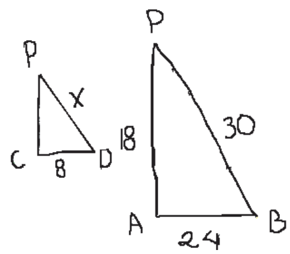



**Figura 1.14**

**E:** ¿Cuál es el objetivo de sacar los triángulos o ponerlos aparte?

**G:** Qué los triángulos son semejantes.

**E:** ¿Por qué son semejantes?

**G:** ¿Por qué? Por qué? Di porque sí

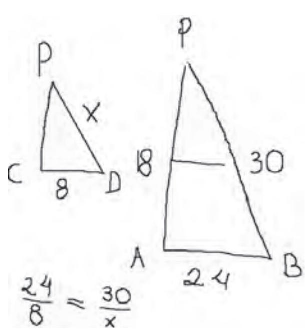



**Figura 1.15**

Multiestructural: ya que el estudiante logra realizar la correspondencia entre los lados de los triángulos de forma correcta pero no logra decir por qué los triángulos son semejantes, no lo justifica.

**E:** Una preguntita más, ¿Qué son triángulos semejantes?

**G:** Triángulos semejantes eh... diay a lo que yo entendía... que tienen como lados iguales.

W reaccionó de la siguiente manera en la entrevista:

**W:** Entonces si no me he equivocado y me recuerdo que era por semejanza hacíamos $8$ fuera a $24$ como $x$ era a $30$.

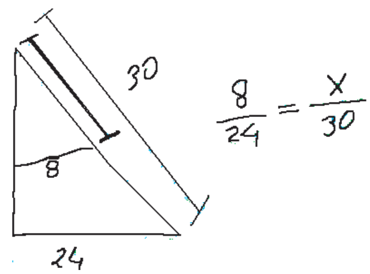



**Figura 1.16**

**W:** Aquí nada más de despejar $x$, aquí quedará $3$ por $8$ igual a $24$, $240$ igual a $24x$, $240$ entre $24$ igual a $x$ muhhhh. [Hace en el pizarrón]

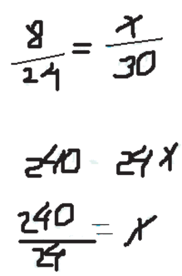



**Figura 1.17**

**E:** Nada más quiero hacerte una pregunta. ¿Por qué usas esto? [Señala con su mano derecha en la pizarra la expresión $\dfrac{8}{24} = \dfrac{x}{30}$ como encerrándola en un círculo].

**W:** Eeeeh, bueno hasta donde recuerdo de trigonometría, digamos esto se podría sacar por triángulos porque aquí hay un triángulo inscrito en el grande [Vuelve a marcar con el pailot el triángulo que tiene como dos de sus medidas $x$ y $18$.

**E:** ¡Semejanza!

**W:** ¡De triángulos!

**E:** Ajá.

**W:** Si hay, hay semejanza, me pareciera que sí.
Después de analizar lo hecho por los tres estudiantes se ubican en un nivel Multiestructural, superando F y G el nivel Uniestructural ubicado en el diagnóstico y W el Preestructural, pues con un poco de guía, logran obtener la medida del segmento $\overline{PD}$ pero nunca indican por cual criterio los triángulos son semejantes.

F y W reprueban el curso de Cálculo Diferencial e Integral con 35 y 55 respectivamente (con base en 100) como calificación en el curso y G reprueba el curso introductorio con 65 (con base en 100).

## 1.5 Conclusiones

Los estudiantes entrevistados lograron un crecimiento en sus niveles de razonamiento en ambos temas después del proceso de instrucción, sin embargo, no alcanzan el nivel relacional que se requiere para que integren diversos aspectos como un todo coherente con estructura y significado.

En el tema de sistemas de ecuaciones algunos estudiantes siguen teniendo errores al interpretar el lenguaje matemático y escribirlo en simbología matemática en expresiones como “el doble”, “el triple”, “cinco años más”, entre otros; esto podría explicarse por la presencia de obstáculos epistemológicos.

En el tema de Geometría los estudiantes tienen errores al omitir los criterios por los que los triángulos son semejantes, utilizan proporción entre sus lados sin probar dicha semejanza.

Los estudiantes deben ser sometidos a procesos metacognitivos en los que autorregulen su propio aprendizaje, de tal manera que busquen las conexiones que se requieren para alcanzar el nivel relacional. Así lo mencionan Del Puerto, Minnaard y Seminara (2004), ellos recomiendan, citando a Sócrates, que "es a través de la crítica racional y la autocrítica como podemos examinar y corregir los errores, para de esta forma lograr el conocimiento genuino". Agregan además que:

> En la actualidad el error es considerado parte inseparable del proceso de aprendizaje. Los investigadores en educación matemática sugieren diagnosticar y tratar seriamente los errores de los alumnos, discutir con ellos sus concepciones erróneas, y presentarles luego situaciones que les permitan reajustar sus ideas. (*Ibid. p.2*)

# Bibliografía

[1] A. Astorga. "Errores de los estudiantes en la construcción del conocimiento matemático a nivel de secundaria". Memorias del V CIEMAC. 2007.

[2] G. Bachelard *"La formación del espíritu científico"* México: Siglo Veintiuno, editores, S.A. 1976.

[3] J. B. Biggs; K. F., Collis *"Evaluating the quality of learning: The Solo Taxonomy"* Academic Press. 1982.

[4] S, Del Puerto; C, Minnaard; S, Seminara. "Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas". Revista Iberoamericana de Educación (ISSN: 1681-5653). 2004.

[5] J. Godino; C, Batanero; V, Font. "Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros". http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestro/. 2003.

[6] M. Pochulu. "Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad". Revista Iberoamericana de Educación (ISSN: 1681-5653). 2005.

[7] M. Socas. "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria". http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2095380. 1997.

[8] L. Rico. "Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas". Grupo Editorial Iberoamérica. 1995.

[9] A. Ruiz. 11Escuela francesa de didáctica de las Matemáticas y la construcción de una nueva disciplina científica". CIMM/UCR. 2006.