Artículo
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 10, Nº 1. 2009

Sobre la raíz digital de los números primos.

Pablo R. Hernández V.
phernandezv@unet.edu.ve
Departamento de matemática y física
Experimental del Táchira (Unet). Venezuela.

Resumen

Los únicos valores posibles de la raíz digital (dr) de los números primos p diferentes de 3, son: $1, 2, 4, 5, 7$u 8. Sin embargo, no se ha demostrado exactamente, cual es la frecuencia de cada uno de estos valores de $\mathrm{dr}(p)$. En este sentido, se planteó el objetivo principal de determinar dicha frecuencia, para lo cual se elaboró un programa computacional con el propósito de generar los primeros 348512 primos diferentes de 3, junto con sus $\mathrm{dr}(p)$; y se le aplicó la prueba Chi-cuadrado, concluyéndose que los valores posibles de $\mathrm{dr}(p)$ tienen la misma probabilidad de ocurrencia (igual a $1/6$), es decir, $\mathrm{dr}(p)$ presenta distribución uniforme.

Palabras claves: Números primos, raíz digital, distribución uniforme.

1.1 Introducción.

$\mathrm{dr}(n)$ es la raíz digital de un natural n, y se obtiene sumando los dígitos de n, luego se suman los dígitos de la suma digital anterior, y así sucesivamente hasta obtener un sólo dígito, ver [3,4]. Por ejemplo, $\mathrm{dr}(96) = \mathrm{dr}(9+6) = \mathrm{dr}(15) = \mathrm{dr}(1+5) = 6$. La raíz digital es equivalente al resto de dividir por nueve, salvo cuando el resto de dividir por nueve, salvo cuando el resto de dividir por 9 a un número diferente de cero, es igual a cero, en este caso se toma $\mathrm{dr}(n) = 9$. También es equivalente al algoritmo de "eliminación de los nueves", donde

se eliminan del número n, los dígitos $0, 9$, y los grupos de dígitos cuya suma de 9, dejando al final un sólo grupo de dígito cuya suma resulte del 1 al 9, lo cual corresponde al valor de dr(n). Esta función aplicada a los números primos p diferentes de 3, presenta la imagen dr(p) $\in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$. Como se ve, ningún primo, excepto el 3, puede presentar dr(p) múltiplo de 3, esto se deduce del criterio de divisibilidad por 3, ver [9]. En este sentido, y debido principalmente al desconocimiento de la distribución de los primos dentro de los enteros, ver [1], no se ha demostrado exactamente cuál es la distribución de la frecuencia de cada uno de los seis valores posibles de dr(p). Aunque al respecto, Tomas Dence (1982), analizó estadísticamente una muestra correspondiente a los 500 primeros primos diferentes de 3, junto con sus dr(p). Él aplicó la prueba Chi-cuadrado, obteniendo una discrepancia de 0.42, lo cual le permitió concluir que es razonable aceptar que los seis valores posibles de dr(p) tienen la misma probabilidad de ocurrencia ($1/6$). Sin embargo, se sabe que si se trabaja con muestras de mayor tamaño los resultados de las pruebas estadísticas serán más confiables, especialmente si la población es infinita, como es el caso de los números primos. Además, aplicando la prueba Chi-cuadrado en nuevas muestras, se pueden comparar las discrepancias obtenidas en cada una de ellas. En virtud de lo anterior, en el presente trabajo se planteó el objetivo principal de estudiar la distribución de la frecuencia de cada uno de los seis valores posibles de dr(p), sobre una muestra significativamente mayor a la tomada por Dence. Para tal fin, se elaboró un programa computacional en lenguaje C$++$, que genera de manera creciente y ordenada los números primos junto con sus raíces digitales, hasta un extremo (valor de parada) “arbitrario” (entre comillas ya que depende de la capacidad del hardware empleado). En este caso, utilizando un equipo portátil con 2 Gb de memoria RAM, y un procesador de 1.8 GHz, core-dual, se pudo generar una muestra correspondiente a los primeros 348512 primos diferentes de 3, pero, no deja de ser pertinente e interesante intentar generar muestras mayores, con la finalidad de comparar los resultados obtenidos.
En la sección 2 se presenta el análisis estadístico realizado sobre la mencionada muestra; luego, en la sección 3, se exponen las conclusiones y recomendaciones; y, por último, se muestran las referencias bibliográficas.

1.2 Desarrollo

Como se dijo en la sección anterior, se elaboró un programa computacional en lenguaje C$++$ para generar los primeros 348512 primos diferentes de 3, junto con sus respectivas dr(p), obteniéndose la siguiente tabla de frecuencia:

dr(p)	Of	Ef
1	58023	58085,3333
2	58168	58085,3333
4	58054	58085,3333
5	58068	58085,3333
7	58113	58085,3333
8	58086	58085,3333

Tabla 1.1

Of es la frecuencia observada en la muestra, y Ef es la frecuencia esperada al conjeturar (Hipótesis nula: H_0) distribución uniforme de la dr(p), es decir, $Ef = \dfrac{348512}{6} = 58085,3333$. Por consiguiente, al aplicar la prueba Chi-cuadrado, se obtuvo un Chi-cuadrado$= 0.22$, y al compararlo con el Chi-cuadrado teórico 11.07 al 5% con 5 grados de libertad, permitió concluir que es razonable aceptar Ho. En otras palabras, es razonable asegurar que cada valor de dr(p) tiene la misma probabilidad de ocurrencia, e igual a $1/6$.

Cabe destacar que, la discrepancia obtenida en esta muestra de los primeros 348512 primos, es un 47.62% menor a la obtenida por Dence en la muestra de los 500 primeros primos, ver [5]. Por consiguiente, siempre y cuando la capacidad tecnológica lo permita, es conveniente seguir trabajando con muestras mayores de primos, con la finalidad de comprobar estos resultados. Ahora bien, todavía se espera por una demostración exacta (algebraica, por ejemplo) de la mencionada hipótesis.

1.3 Conclusiones

Los valores posibles de dr(p) tienen la misma probabilidad de ocurrencia e igual a $1/6$, es decir, dr(p) se distribuye uniformemente. La discrepancia obtenida con la muestra analizada en el presente trabajo, es menor a la conseguida por Dence, por lo tanto, se confirman los resultados presentados por él. Siempre y cuando la capacidad tecnológica lo permita, se recomienda seguir trabajando con muestras mayores, con la finalidad de comprobar los resultados de esta y anteriores investigaciones[1].

[1] **Nota del Editor:** En *MATHEMATICA*, la raíz digital se calcula con el comando (*Vid.* [10])

Bibliografía

[1] Apóstol, T. M. (November 1996). “What is the most surprising result in mathematics?”. Math Horizons, pp.8-15.

[2] Apóstol, T. M. (Febraury 1997). “What is the most surprising result in mathematics? Part II”. Math Horizons, pp.26-31.

[3] Asadulla, S. (1984). “Digital roots of Mersenne Primes and even perfect numbers”. The College Mathematical Journal, Vol. 15, No. 1. pp.53-54.

[4] Brooke, Maxey. (Nov-Dec, 1960). “On the digital roots of perfect numbers”. Mathematics Magazine, Vol. 34, No.2, p.100+124.

[5] Dence, T. (1982). “The digital root function”. Two- year collage mathematics readings, Mathematical Association of American, Washington DC, pp.96-103.

[6] Gardiner, A. (Oct., 1982). “Digital Roots, Rings and Clock Arithmetic”. The Mathematical Gazette, Vol. 66, No. 437, pp.184-188.

[7] Gray, Alexander. (Mar., 2000). “Digital Roots and Reciprocals of Primes”. The Mathematical Gazette, Vol. 84, No. 499, p.86.

[8] Kahan, S. (2002-2003). “Powerful digital roots”. J. of Recreational Math. Vol. 31: 104-107.


```
DigitalRoot[n_Integer?Positive] :=FixedPoint[Plus @@ IntegerDigits[\#] \&, n]
```

El código para calcular las frecuencias y Chi-cuadrado para, digamos cien millones de primos (>3), sería:

```
DigitalRoot[n_Integer?Positive] :=FixedPoint[Plus @@ IntegerDigits[#] &, n]
fr = {0, 0, 0, 0, 0, 0}; (*Frecuencia observada*)
n = 100 000 000;
Do[
  Switch[
   DigitalRoot[Prime[i]],1, fr[[1]]++, 2, fr[[2]]++, 4, fr[[3]]++,
                          5, fr[[4]]++, 7, fr[[5]]++, 8, fr[[6]]++]
  ,{i, 3, n}];
X = n/6.0;
```

$$\texttt{Chi2=}\sum_{\texttt{i=1}}^{6}\frac{(\texttt{fr[[i]]}-\texttt{X})^2}{\texttt{X}}\texttt{ ;(*Salida: *) \{fr, Chi2 \}}$$

La salida es

```
{16666361, 16666781, 16665731, 16667558, 16666645, 16666922,   0.1105269599}
```

[9] Peterson, Ivars. (Week of Aug. 17, 2002). "Testing for dividibility". Science News, MAA online 2002. Vol.162, No.7.

[10] Weisstein, Eric W. "Digital root". From Mathworld—a wolfram web resource. http://mathworld.wolfram.com/digitalroot.html.