



Conflictos Semióticos en un Contexto Algebraico: Un Análisis de las Producciones de los Estudiante

Pedro Javier Rojas Garzón

pedroedumat@udistrital.edu.co

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

DIE-UD, Bogotá-Colombia

Resumen.

La noción de conflicto semiótico, introducida por Godino, Batanero & Font (2007) se ha mostrado como un instrumento conceptual poderoso para analizar procesos de aprendizaje de los objetos matemáticos; esta noción permite superar las nociones de obstáculo epistemológico, obstáculo didáctico, error conceptual, entre otras; situando la problemática del aprendizaje en una actividad de carácter fuertemente semiótico atravesada por diversos tipos de tensiones, una de las cuales es la relación entre lo individual y lo sociocultural. En este escrito se propone y usa una metodología de análisis de las producciones matemáticas de estudiantes que se están formando para ser profesores (duval, 1995/1999), que permite tipificar la manifestación o aparición de conflictos semióticos cuando se usa el registro algebraico en la solución de un problema relacionado con la función lineal. Se concluye que para estos estudiantes, existen distintos registros algebraicos en uso que distan del registro algebraico institucional promovido por la comunidad matemática, hecho que permite reconocer la presencia de los conflictos semióticos.

Palabras clave: Conflicto semiótico, análisis de textos, registros algebraicos, transformaciones semióticas.

Abstract.

The concept of semiotic conflict introduced by Godino, Batanero & Font (2007) has been shown to be a powerful conceptual tool for analyzing learning processes of mathematical objects. This notion allows surpassing the notions about epistemological obstacle, didactic obstacle, conceptual error, among others. The semiotic conflict places the learning issue in an activity of character semiotic strongly across for different types of tensions, one of which is the relationship between the individual and the socio-cultural. This paper suggests and uses a methodology for the analysis of mathematics productions by the students who will become teachers (duval, 1995/1999), which permits to typify the manifestation or apparition of semiotic conflict when using the algebraic register in the solution of a problem with the linear function. It is concluded that for these students, exist different algebraic registers in use which are far from the algebraic register institutional promoted by the mathematical community, fact that evidences the presence of semiotic conflict.

KeyWords: Semiotic conflict, text analysis, algebraic register, semiotic transformations.

1.1 Introducción

En este escrito se presenta un análisis de las producciones de dos estudiantes para profesor (EPP) de matemáticas, orientado a ubicar *conflictos semióticos* (Godino, Batanero & Font, 2007) en el proceso de resolución de un problema en un contexto algebraico. El análisis de los textos de la producción individual y del texto de la producción grupal de las dos EPP, se realiza con base en la interacción entre los procesos inductivo y deductivo de comprensión de textos. Desde los planteamientos de Duval (1995/1999, p. 279), los diferentes procesos para la comprensión de textos se pueden sintetizar así:

Procesos	Comprensión inductiva	Comprensión deductiva
Segmentación	Funcional (según funciones de la lengua: referencial, apofántica, metalingüística)	Cognitiva (Elementos respuesta a una rejilla de preguntas)
Recontextualización	Redaccional selectiva (relaciones entre las unidades segmentadas)	Cognitiva sistemática (el contexto es una organización de conocimientos relativos al mundo descrito o evocado en el texto)

El análisis de segmentación, en el proceso de comprensión inductiva, se centra en dos procedimientos de nominación diferenciados, dependiendo de la función de la lengua que entra en juego para la nominación: la función referencial o la función apofántica. En el primer caso se trata de una nominación por *designación* y, en el segundo, de una nominación por *descripción determinativa*. Por su parte, en un contexto algebraico, la designación se realiza para objetos individuales y puede darse de tres maneras: por asociación directa, por asociación mediante un sistema semiótico y funcionalmente. La descripción determinativa se realiza para relaciones entre objetos y puede darse mediante la descripción de una relación o por equivalencia referencial. El análisis de recontextualización, se centra en las transformaciones semióticas de *tratamiento* y *conversión*. En tal sentido, las unidades segmentadas corresponden a diversas representaciones realizadas por las dos EPP en relación con el problema abordado.

En el proceso de comprensión deductiva de los textos, la segmentación se orienta por preguntas relacionadas con los conflictos semióticos expresados en los textos y la manera de determinar dichos conflictos a través de los registros. Respecto a la recontextualización, se toma como referente la construcción de distintos registros algebraicos por diferentes culturas.

1.1.1 Datos y convenciones.

Los datos corresponden a tres textos escritos, dos individuales y uno como grupo-colaborativo, que contienen las soluciones presentadas por las EPP al siguiente problema que les fue propuesto:

En el tablero hay dibujados tres recipientes de forma cilíndrica, de la misma altura, pero con anchos diferentes.

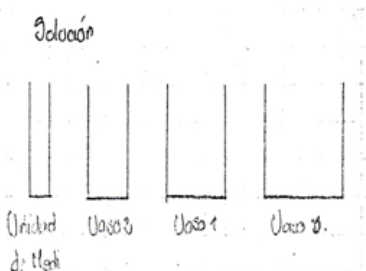
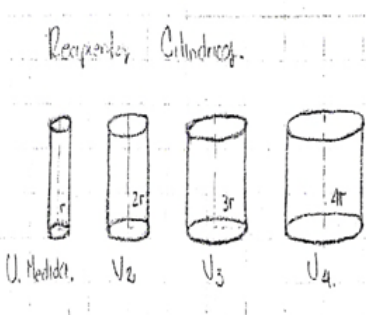


-Dibujar una gráfica para la relación número de vasos de agua-altura del agua con respecto a cada recipiente
 -Encontrar la fórmula para esa relación.

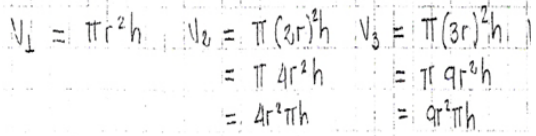
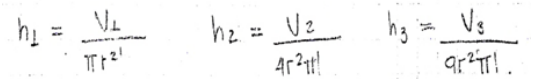
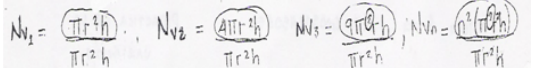
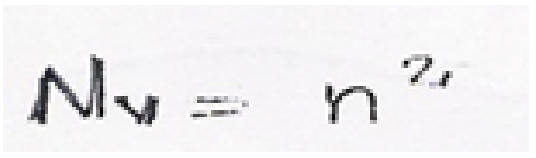
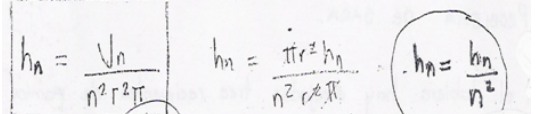
Para describir la diversidad de registros semióticos utilizados por las EPP, se utilizó la siguiente codificación básica adaptada de la propuesta por D'Amore (2006). Así, $R_j^i(O_q)$ representa la j -ésima representación del objeto O_q en el registro i -ésimo, donde el subíndice j se asigna según el orden de apareamiento en el respectivo trabajo, mientras que al supraíndice i se le asigna un orden según la siguiente lista: gráficos, denotados R^1 (visualizando dos dimensiones, $2D/2D$) y R^2 (visualizando tres dimensiones, $3D/2D$), aritméticos, denotado R^3 , algebraicos R^4 , cartesiana R^5 , lengua natural R^6 y tabular R^7 . Para el registro algebraico (R^4), y con el propósito de encontrar los diferentes procedimientos de designación e interpretación de la letra y el uso de diversos universos numéricos, de manera específica se utilizan las siguientes convenciones: $R^{4-k,h}$: el índice k refiere el universo numérico (1 para los números naturales, 2 para los enteros, 3 para los números con expresión decimal finita y 4 para los reales) y h refiere un uso específico de la letra (1 para letra evaluada, 2 para incógnita, 3 para número generalizado y 4 para variable, con base en la caracterización dada por Küchemann, 1981).

1.2 Análisis y Resultados




En un primer momento, cada discurso fue segmentado teniendo en cuenta las diferentes representaciones usadas. Por ejemplo, respecto al trabajo de una de las estudiantes (E_1), la primera segmentación es la siguiente:

	Representación	Descripción	Notación
1		Modifica la representación dada y establece un orden correspondiente con los tamaños de los radios, e introduce una unidad. La unidad de medida es de la misma forma, la misma altura, pero de radio menor.	R_1^1 : Primera representación (subíndice 1) en registro gráfico de dos dimensiones (supraíndice 1).
2		Visualiza tres dimensiones y designa los radios y los volúmenes de cada uno de los recipientes, utilizando subíndices; el orden de los nombres de los recipientes no corresponde con el orden dado por el subíndice de los volúmenes [se empieza a evidenciar cómo prefigura un proceso de generalización] Establece una relación entre radios (múltiplos del radio unidad). Resalta gráficamente la altura pero no la designa.	R_1^2 : Primera representación (subíndice 1) en registro gráfico donde visualiza tres dimensiones (supraíndice 2).

En un segundo momento, con esta segmentación del discurso, se describe de manera específica tanto la función de la lengua (referencial o apofántica) como el objeto nominado en cada segmento del trabajo.

	Representación	Función de la lengua	Objeto nominado
3		Referencial (respecto a la secuencia) Apofántica (respecto a los individuos)	Secuencia finita de fórmulas Fórmula del Volumen de cada recipiente
4	<p>Por la altura</p> 	Referencial (respecto a la secuencia) Apofántica (respecto a los individuos)	Secuencia finita de fórmulas (por extensión) Fórmula del Volumen de cada recipiente
5	<p>$N_v = \text{número de vasos.}$</p> 	Apofántica	Secuencia de fórmulas (por comprensión)
6		Apofántica	Secuencia de fórmulas (cuantificador implícito)
7		Apofántica	Término general de la secuencia (por comprensión)

En un tercer momento, se realizó una segmentación del texto explicitando los diversos procedimientos de nominación de los objetos, incorporando a su vez una recontextualización redaccional, para lo cual se introducen las siguientes convenciones:

Transformación de Tratamiento: 
 Transformación de Conversión: 
 Cuasi-transformación: 

	Objeto	Nominación	Tipo de aprehensión de los objetos / Función de la lengua	Tipo de objeto
1	Secuencia de magnitudes (diámetros)	Unidad de Medida, Vaso2, Vaso1, Vaso3	Designación directa/ Referencial	Dominio de individuos para ser nombrados
2a	Secuencia de magnitudes (radios)	$r, 2r, 3r, 4r$	Designación funcional / Referencial	Dominio de individuos para ser nombrados
2b	Secuencia de cantidades (volúmenes)	U. Medida, V_2, V_3, V_4	Designación funcional / Referencial	Dominio de individuos para ser nombrados
2c	Relación entre magnitudes (radios) y cantidades (volúmenes)	$r, 2r, 3r, 4r$ U. Medida, V_2, V_3, V_4	No hay designación (Ocurre de manera perceptual)	Relación de correspondencia (entre dominios de individuos para ser nombrados)
3a	Secuencia de fórmulas (volumen máximo de cada recipiente en función de la secuencia de radios)	$V_1 = \pi r^2 h$ $V_2 = \pi (2r)^2 h$ $V_3 = \pi (3r)^2 h$	Designación funcional sobre una equivalencia referencial / Apofántica	Dominio de "segundo nivel" de individuos para ser nombrados
3b	Secuencia de relaciones (volumen de cada recipiente con radio y altura)	$V_2 = 4\pi r^2 h$ $V_3 = 9\pi r^2 h$	Equivalencia referencial/ Apofántica	Dominio de individuos
3c	Secuencia de relaciones (volumen de cada recipiente con radio y altura)	$V_2 = 4\pi r^2 h$ $V_3 = 9\pi r^2 h$	Equivalencia referencial	Dominio de individuos
4	Secuencia de relaciones (altura del agua en cada recipiente, el volumen respectivo y el radio)	$h_1 = V_1 / \pi r^2$ $h_2 = V_2 / 4\pi r^2$ $h_3 = V_3 / 9\pi r^2$	Equivalencia referencial	Dominio de individuos
5	Secuencia de relaciones (número de vasos, volumen de cada recipiente y volumen del vaso unidad)	$Nv_1 = \pi r^2 h / \pi r^2 h$ $Nv_2 = 4\pi r^2 h / \pi r^2 h$ $Nv_3 = 9\pi r^2 h / \pi r^2 h$ $Nv_n = n^2 (\pi r^2 h) / \pi r^2 h$	Equivalencia referencial	Dominio de individuos
6	Fórmula	$Nv = n^2$	Condensación (sobre la clase de objetos)	Clase de objetos
7a	Fórmula	$h_n = V_n / n^2 r^2 \pi$	Equivalencia referencial	Relación
7b	Fórmula	$h_n = \pi r^2 h_n / n^2 r^2 \pi$	Equivalencia referencial	Relación
7c	Fórmula	$h_n = h_n / n^2$	Equivalencia referencial	Relación

La recontextualización redaccional indica los vínculos entre las unidades segmentadas. Si bien se podría hacer un análisis detallado, explicitando la diversidad de vínculos entre el tipo de aprehensión de objetos y los objetos, el análisis aquí realizado se limitará a indicar el vínculo dado por el tipo de transformación entre representaciones utilizadas.

En la tabla anterior, se puede visualizar un "conflicto" en el vínculo entre las unidades de las filas (3) y (4). Mientras en (3) se utiliza una fórmula para el volumen de cada uno de los recipientes de altura fija h , en (4) se acude a esta fórmula para "despejar" las alturas alcanzadas en cada uno de los

recipientes al verter en ellos el vaso unidad de agua. Si la expansión discursiva se da por deducción, el objeto designado en (4) no sería una transformación de tratamiento ni una de conversión del objeto referido en (3). Si se tratara de una instanciación, podría obtenerse por tratamiento de la expresión $V = \pi r^2 h$ (para todo V, r, h), pero éste no es el caso pues tal expresión no es usada por la estudiante E_1 ; se trata pues de una “cuasi-transformación”, en tanto en (4) se introduce un nuevo objeto, intentando mantener la nominación dada en (3), más aún, asumiéndola como una transformación de tratamiento.

1.2.1 Comprensión deductiva.

Para ejemplificar la segmentación cognitiva se utilizará el siguiente texto producido por la estudiante E_2 :

Representación	Notación	Descripción
	$R_3^{4-4,2}(O_6)$ $R_4^{4-4,2}(O_6)$	Representación 3, en registro algebraico (R^4) en el conjunto de los números reales (4), interpretación de la letra como incógnita (2), de la relación entre volumen-altura-radio del vaso unidad (O_6) : $U = \pi 2r^2h$ Representación 4, en registro algebraico (R^4) en el conjunto de los números reales (4), interpretación de la letra como incógnita (2), de la relación entre volumen-altura-radio del vaso unidad (O_6) : $h = U/\pi 2r^2$.
	$R_6^{4-1,1}(O_8)$	Representación 6, en registro algebraico (R^4) en el conjunto de los números naturales (1), interpretación de la letra como evaluada (1), altura 10 y radio de los recipientes 3, 6, 9, 12 (O_8)
	$R_7^{4-4,1}(O_6)$ $R_8^{4-3,1}(O_6)$	Representación 7, en registro algebraico (R^4) en el conjunto de los números reales (4), interpretación de la letra como evaluada (1), de la relación entre volumen-altura-radio del vaso unidad (O_6) : $V = \pi(2.3)^2 10, V = \pi(2.6)^2 10, \dots$ Representación 7, en registro algebraico (R^4) en el conjunto de los números reales (4), interpretación de la letra como evaluada (1), de la relación entre volumen-altura-radio del vaso unidad (O_6) : $V = 1130.4, V = 4521.6, \dots$

La anterior segmentación fue generada por la siguiente rejilla de preguntas: ¿qué tipo de registro algebraico se utiliza?, ¿qué posibles conflictos semióticos se detectan en cada texto?, ¿de qué manera se pueden determinar tales conflictos?

Entre los aspectos a resaltar del texto elaborado por E_2 , está que para trabajar con el número π , la estudiante debe pasar a un registro de números con coma en base diez (usualmente llamados números decimales), es decir, sistemáticamente no opera con dicho número (lo hace con el número 3.14); los números con coma que usa no son de más de dos dígitos y la operatoria sobre la letra la realiza evaluándola; además, a diferencia de E_1 , quien intenta trabajar con colecciones de objetos, E_2 usa una expresión algebraica distinta para cada objeto designado. Comportamientos como los aquí reportados, respecto a las interpretaciones de los numerales y las letras, fueron estudiados por el Grupo Pretexto (Rojas y otros, 1997)

1.3 Elementos para la recontextualización cognitiva.

Dentro de los diversos enfoques teóricos del conocimiento desde una perspectiva cultural, el enfoque propuesto por Radford (2004), por la sencillez de su formulación y la posibilidad de instrumentarlo, permite generar elementos para recontextualizar, es decir para comprender los elementos segmentados gracias a las preguntas elaboradas:

[...] El conocimiento se relaciona con la cultura en el preciso sentido de que los objetos de conocimiento (números, figuras geométricas, ecuaciones) son el *producto* del pensamiento humano. El pensamiento es *generado* a través de la actividad sociocultural. La forma en la cual el conocimiento es generado y la verdadera naturaleza del contenido del conocimiento son relativas a las formas sensoriales de esas actividades y a las creencias y a la inteligencia histórica corporizada y capturadas en ellas (2004, p.511).

Aunque la existencia de álgebras distintas puede parecer una idea extraña, en realidad ha sido dilucidada hace tiempo. En la primera obra histórica acerca del álgebra escrita en Europa, por ejemplo, Wallis (1685/2007) reconoce dos álgebras diferenciadas según la presencia o no de marcas o signos que refieren ya no cantidades específicas sino especies y sus operaciones. En palabras de Wallis (p. 132):

Después de que aquella *Álgebra*, como se dijo antes, había sido considerada y cultivada en *Europa*, y se había trabajado hasta alcanzar toda clase de *Ecuaciones Cuadráticas*, y en buena medida también las *Ecuaciones Cúbicas* [...] *Franciscus Vieta* (aproximadamente en el Año 1590), le añadió una gran mejora, introduciendo lo que nosotros llamamos *Aritmética Especiosa*; que proporciona Marcas o Signos, no sólo para las Cantidades *Desconocidas*, sino también para las *Cantidades Conocidas*; y desarrolla todas las Operaciones de Aritmética con tales Signos y Marcas como fueron antes desarrolladas con las Figuras Numerales comunes.

Autores como Radford & Puig (2007), documentan la existencia de tratados de tipos de problemas con cantidades desconocidas: en tablillas procedentes de la Mesopotamia de 2500 a.c., y en *The concise book of the calculation of al-jabr and al-muqābala* (de al-Khwārizmī) del siglo IX d.c. Asumen con Hoyrup que son manifestaciones de verdaderas álgebras. En los dos últimos casos así como en el primero el significado de los cálculos fue asegurado mediante transformaciones geométricas

visuales. En el álgebra del renacimiento, a medida que el simbolismo ganó terreno, el soporte geométrico se diluyó. Radford y Puig (2007) plantean que dicho cambio se centró sobre las *cantidades*, produciendo a su vez cambios respecto a la manera de dotar con significado los signos. Por otra parte, los autores antes referidos incorporan un punto de vista cultural que posibilita explicar y legitimar la existencia de diferentes formas de álgebra (Radford & Puig 2007, p. 148): “[L]os contextos dentro de los que pensamos están anclados en un estrato ubicuo constituido históricamente de actividad cognitiva a partir de la cual nosotros nos dibujamos de manera fundamental – aun si no conscientemente”.

1.4 Conclusiones y discusión

El uso del método propuesto por Duval (1995/1999) para la comprensión de textos, junto con la teoría sobre los diversos procedimientos de designación de los objetos (Duval, 2002), se mostró útil para comprender la actividad cognitiva de los estudiantes en un proceso de resolución de problemas algebraicos. Godino, Batanero & Font (2007) han propuesto el análisis de las prácticas matemáticas personales e institucionales para dar cuenta del aprendizaje de un individuo como la diferencia entre esos dos tipos de prácticas e introduce la noción de conflicto semiótico para analizar los procesos de aprendizaje de los objetos matemáticos, sin tener que recurrir a las nociones de obstáculo epistemológico, error conceptual, con lo cual se sitúa la problemática del aprendizaje de las matemáticas en una actividad de carácter semiótico atravesada por diversos tipos de tensiones como la presente entre lo individual y lo sociocultural.

Combinar estas dos perspectivas para analizar las prácticas matemáticas de los estudiantes participantes en este estudio, permitió identificar y explicar la presencia de un conflicto semiótico de tipo interaccional, entre lo que el registro algebraico institucional le exige a un individuo y aquello que él puede producir. Más aún, permitió situar la producción de los estudiantes desde una perspectiva teórica en la cual la producción personal puede ser leída dentro de la diversidad de registros algebraicos, sin acudir a la presencia o no de obstáculos epistemológicos.

Así pues, reconocer la diversidad de registros algebraicos, introduce una perspectiva sociocultural del aprendizaje al reconocer que, si bien es cierto, es desde y dentro de una cultura particular, que es posible explicar la producción matemática de los estudiantes, entender la matemática de esa cultura particular convoca el reconocimiento de las matemáticas de otras culturas. Desde este punto de vista, la escogencia o producción de determinada representación no es neutra (D’Amore, 2006) y muestra una cierta ubicación del resolutor respecto del problema; además ubica el problema dentro de una clase específica de problemas, ubicándolo respecto a propósitos específicos, metas y procedimientos.

Reconocimiento. A los profesores Jaime H. Romero C. y Martha A. Bonilla E. –compañeros y amigos del Grupo MESCUD–, por sus comentarios y aportes a este escrito. A la Universidad Distrital Francisco José de Caldas por el apoyo ofrecido para realizar estudios doctorales en educación.

Bibliografía

- [1] D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En: *Relime*, Número especial, 177-196.
- [2] Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle. (Original publicado en 1995).
- [3] Duval, R. (2002). L'apprentissage de l'algebre et le probleme cognitive de la designation des objets. In: Drouhard, J. & Maure, M. (Eds.). *Actes des SFIDA 13-16*, Vol. XIII, 67-94, Nice: IREM de Nice.
- [4] Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- [5] Küchemann, D. (1981). Algebra. pp. 102-119. En: HART, K. (Ed.). *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*. London: John Murray.
- [6] Radford, L. (2004). The cultural-epistemological conditions of emergence of algebraic symbolism. In F. Furinghetti, S. Kaitjser, C. Tzanakis (Eds.). *Proceedings of the 2004 History and Pedagogy of Mathematics Conference & ESU4*, Upsala, Sweden, 509-524 (Plenary Lecture).
- [7] Radford, L. & Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms In: *Educational Studies in Mathematics* (66), 145-164.
- [8] Rojas, P., Romero, J., Rodríguez, J. Mora, O. & Castillo, E. (1997). *Transición aritmética-álgebra*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Grupo Pretexto).
- [9] Wallis, J. (2007). *Tratado de Álgebra, histórico y práctico*. (O. Mora, Trad.) Material no publicado, Universidad Distrital, Bogotá. (Original publicado en 1685)