Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 16, No 1. Setiembre − Febrero 2016. ISSN 1659 -0643

Análisis de los conocimientos probabilísticos del profesorado de Educación Primaria

Ángel Alsina
angel.alsina@udg.edu
Universidad Girona - España

Claudia Vásquez Ortiz
cavasque@uc.cl
Pontificia Universidad Católica de Chile

Recibido: Marzo 6, 2015 Aceptado: Junio 2, 2015

Resumen. Algunos profesores presentan dificultades para enseñar probabilidad, sobre todo en países en los que la incorporación de esta materia en el currículo es reciente y la preparación durante la formación inicial es escasa, como es el caso de Chile.

Para diseñar programas de intervención que den lugar a una enseñanza idónea, se realiza un estudio exploratorio sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad, fundamentado en el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). Con este propósito se ha administrado el Cuestionario CDM-Probabilidad a 93 profesores, cuyos resultados han puesto de manifiesto varios errores y dificultades, evidenciando la presencia de heurísticas y sesgos probabilísticos. Se concluye que es necesaria una mayor especialización del profesorado en todas las facetas de su conocimiento didáctico-matemático: conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado.

Palabras clave: probabilidad, didáctica de la probabilidad, profesorado, conocimiento didáctico-matemático.

Abstract. Some teachers find it difficult to teach probability, particularly in countries where the subject has only recently been introduced into the curriculum and where preparation during initial teacher training is scarce, as is the case in Chile.

An exploratory study was carried out on didactic mathematical knowledge of probability, based on the Didactic-Mathematical Knowledge (DMK) model, in order to design intervention programs that result in effective teaching. To this aim, the DMK-Probability questionnaire was completed by 93 teachers, with the results bringing to light various errors and difficulties, thus highlighting the presence of probabilistic biases and heuristics. It is concluded that teachers need to specialize more in all facets of didactic-mathematical knowledge: common knowledge of content, wider knowledge of content and specialized knowledge.

KeyWords: probability, didactics of probability, teachers, didactic-mathematical knowledge.

1.1 Introducción

En las últimas décadas se han realizado diversos estudios tanto en el contexto anglosajón como hispano que confirman que el profesorado, sobre todo de la etapa de Educación Primaria, presenta dificultades para enseñar probabilidad. Begg y Edward (1999), por ejemplo, al solicitar a un grupo de 22 profesores de primaria responder a tres situaciones relacionadas con ideas básicas de aleatoriedad, sucesos equiprobables e independencia, detectan una escasa comprensión. Y Watson (2001), al aplicar una encuesta a un grupo de 15 profesores en ejercicio de primaria y 28 de secundaria, expone que el profesorado de secundaria presenta un mayor nivel de confianza para enseñar probabilidad, mientras que los profesores de primaria muestran una preparación muy escasa que los lleva a emplear una mentalidad determinista, centrada en un enfoque clásico orientado al cálculo de probabilidades a priori, aspectos que han sido ratificados por Pereira-Mendoza (2002).

Algunos estudios con futuros profesores llegan también a conclusiones parecidas, como es el caso por ejemplo de Azcárate, Cardeñoso y Porlán (1998), que analizan las respuestas de 57 futuros profesores de primaria a un cuestionario sobre sucesos aleatorios, encontrando que éstos en su mayoría no reconocen la aleatoriedad. No obstante, perciben correctamente la multiplicidad de posibilidades y el carácter impredecible de los posibles resultados. Batanero, Godino y Cañizares (2005) aplican un cuestionario sobre probabilidad a 132 estudiantes para profesor, las respuestas evidencian la presencia de sesgos en el razonamiento probabilístico como la heurística de la representatividad (Tversky y Kahneman, 1982) y el sesgo de equiprobabilidad descrito por Lecoutre (1992) y Lecoutre y Durand (1988), así como el sesgo "outcome approach", es decir, interpretar un enunciado probabilístico en forma no probabilística (Konold, 1991). El estudio de Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006) con 102 futuros profesores, evidencia cierta mejora con respecto al estudio de Batanero y su equipo, aun cuando se observa una falta de razonamiento proporcional para la resolución de algunos problemas, así como la influencia de factores del problema que inducen a la asignación de probabilidades subjetivas.

De estos datos se desprende que es necesaria una mayor presencia de la didáctica de la probabilidad en la formación inicial del profesorado, teniendo en cuenta además que la probabilidad se ha incorporado con fuerza en el currículo de matemáticas, caracterizándose por presentar un enfoque más experimental que permita proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde las primeras edades (NCTM, 1989; NCTM, 2003; CCSSI, 2010; MEC, 2007; MINEDUC, 2012). Sin embargo, la incorporación de esta didáctica debe estar sustentada por estudios que diagnostiquen de forma precisa las principales dificultades que presenta el profesorado para poder diseñar a posteriori estrategias de intervención apropiadas que den lugar a una enseñanza idónea en las aulas, es decir, una enseñanza en la que "el profesor sea capaz de comprender lo que los estudiantes conocen y necesitan aprender y, en consecuencia, les desafía y apoya para aprender bien los nuevos conocimientos" (NCTM, 2003, p. 17).

Para llevar a cabo esta tarea, en este trabajo se asume el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) (Godino, 2009; Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2013; Pino-Fan, Font y Godino, 2013), que se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino et al., 2007). Para evaluar el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad que posee el profesorado en ejercicio se ha construido el Cuestionario CDM-Probabilidad (Vásquez y Alsina, en prensa), que puede consultarse en el Anexo 1.

Es desde esta perspectiva que se ha llevado a cabo el presente estudio con un grupo de 93 profesores, en el que se analiza su conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad.

1.2 El conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad

Las investigaciones actuales sobre formación del profesorado de matemáticas consideran principalmente tres temas: el conocimiento de los profesores, el dominio afectivo, y la identidad (Skott, Van Zoest y Gellert, 2013). En este trabajo nos centramos en el conocimiento de los profesores, y más concretamente en el conocimiento matemático para la enseñanza.

Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) realizan un análisis de los principales modelos sobre el conocimiento que necesita el profesor para enseñar matemática, identificando en ellos ciertas limitaciones, por lo que elaboran un modelo teórico integrador desde la mirada del EOS (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Para ello parten del modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza, conocido como MKT (Hill, Ball y Schilling, 2008), y de la noción de proficiencia en la enseñanza de las matemáticas (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). En este nuevo modelo, que denominan modelo del Conocimiento Matemático-Didáctico CDM, la expresión "conocimiento didáctico-matemático" se considera el conocimiento didáctico y las competencias profesionales que el profesor debe poner en juego en la enseñanza de las matemáticas para lograr aprendizajes en sus alumnos.

Posteriormente, Godino (2009; 2014) publica diversos trabajos desde el EOS en los que se revisa y refina el modelo CDM, proponiendo una reestructuración más acabada en las que queda de manifiesto el vínculo e interacción entre los componentes del MKT y las seis facetas o dimensiones del EOS implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Ilustración 1):
Con base en esta reestructuración, Pino-Fan, Godino y Font (2013) proponen las siguientes tres categorías globales de conocimiento sobre el contenido matemático:

1. Conocimiento común del contenido: se refiere a los conocimientos matemáticos, no necesariamente orientados a la enseñanza, que el profesor debe poner en juego para resolver situaciones-problemáticas en relación a un tema específico de las matemáticas, y se analiza a través de la faceta epistémica, que se refiere al grado de representatividad que tienen los significados institucionales implementados o pretendidos respecto a un significado de referencia.

2. Conocimiento ampliado del contenido: es también un conocimiento de tipo matemático que se refiere a que el profesor, además de saber resolver las situaciones problemáticas sobre un determinado tema y nivel, debe poseer conocimientos más avanzados del currículo respecto al tema o nivel en cuestión. Se analiza a través de la faceta epistémica.

3. Conocimiento especializado: se refiere al conocimiento adicional que diferencie al profesor de otras personas que saben matemáticas. Este conocimiento especializado, además de implicar conocimiento común y parte del conocimiento ampliado, "debe incluir la pluralidad de significados del objeto, la

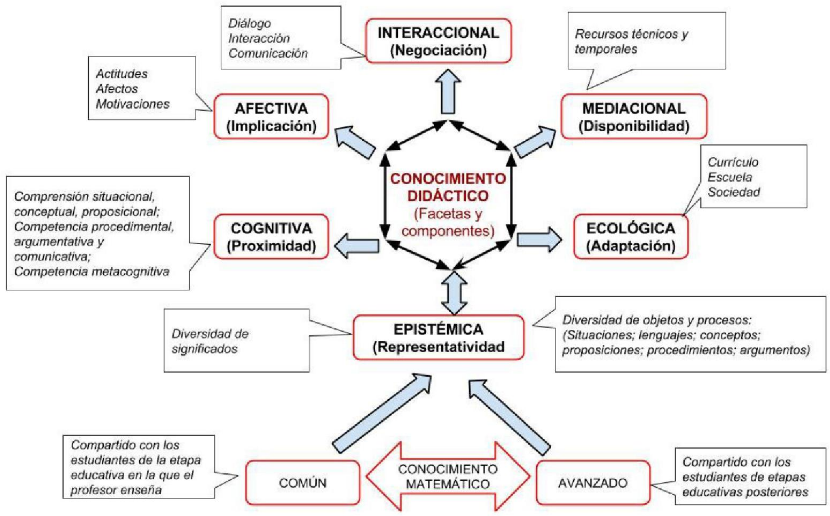


Figura 1.1: Conocimiento Didáctico-Matemático basado en el EOS (Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2014, pág. 52).

diversidad de configuraciones de objetos y procesos inherentes a tales significados y las necesarias articulaciones inherentes entre los mismos" (Pino-Fan et al., 2013, p. 6).

Este tipo de conocimiento es interpretado por medio de la faceta epistémica, e incluye cuatro subcategorías:

- Conocimiento del contenido especializado: se fundamenta en las distintas facetas implicadas en los procesos de instrucción matemática, y se refiere a que un profesor no solo debe ser capaz de resolver situaciones problemáticas en relación a un determinado contenido aplicando diversos significados parciales vinculados al objeto matemático en cuestión, diferentes tipos de representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, sino que además debe ser capaz de identificar los conocimientos puestos en juego (elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) en la resolución de un problema.

- Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes: se fundamenta en la faceta cognitiva y afectiva, y se refiere a la reflexión sistemática, por parte del profesor, sobre el aprendizaje de los estudiantes, lo que implica la capacidad del profesor para: describir los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos han desarrollado al resolver la situación problemática propuesta, describir los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de un cierto tipo de situaciones problemáticas, formular cuestiones que permitan explicitar los significados personales al resolver cierto tipo de situaciones problemáticas, así como describir estrategias que se pueden implementar para promover que los alumnos se involucren en la solución de situaciones problemáticas o en el estudio de un determinado tema (Godino, 2009).

- Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza: se fundamenta en la faceta interaccional y mediacional, y se refiere a la reflexión sistemática, por parte del profesor, sobre las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje, y la identificación de las consecuencias que pueden tener sobre el aprendizaje los modelos de gestión de la clase (Godino, 2009).

- Conocimiento del contenido en relación con el currículo: se fundamenta en la faceta ecológica y se refiere al contexto en el que se desarrolla la práctica de enseñanza y aprendizaje.

Para el análisis de estas categorías se emplean herramientas teóricas del EOS: para el conocimiento común del contenido, el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento del contenido especializado se puede usar la noción de configuración de objetos y procesos, por medio de la "Guía para el reconocimiento de objetos y procesos" (Godino, Gonzato y Fernández, 2010); mientras que las categorías restantes pueden ser analizadas mediante las herramientas teóricas y metodológicas que el EOS entrega para las distintas facetas: cognitiva y afectiva (conocimiento del contenido en relación a los estudiantes), interaccional y mediacional (conocimiento del contenido en relación a la enseñanza), y ecológica y epistémica (conocimiento del contenido en relación con el currículo y el contexto), sin olvidar que por medio de la "Guía para el enunciado de consignas" (Godino, 2009) es posible orientar la formulación de ítems de evaluación o propuestas de actividades que permiten obtener información sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesor.

Como puede apreciarse, la principal contribución del modelo CDM respecto a los modelos anteriores es que explicita algunos aspectos del conocimiento del profesor de matemáticas que todavía permanecían abiertos, como por ejemplo establecer criterios de evaluación del conocimiento matemático para la enseñanza, cómo desarrollar el conocimiento matemático para la enseñanza en los profesores o bien explicar la relación existente entre las distintas categorías, entre otros. En esta línea, Silverman y Thompson (2008) consideran que, aunque el conocimiento matemático para la enseñanza ha comenzado a ganar atención como un concepto importante en la comunidad de investigación sobre formación de profesores, hay una comprensión limitada de qué es, cómo se puede reconocer y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores (p. 499).

Desde este prisma, cabe señalar que los estudios sobre los conocimientos probabilísticos del profesorado son escasos, y más todavía los que analizan el conocimiento del profesorado en activo de Educación Primaria. Por esta razón, el International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) Study 18, "Statistics Education in School Mathematics, Challenges for Teaching and Teacher Education" ha impulsado una línea de investigación centrada en la formación de profesores para enseñar estadística y probabilidad. Ello ha implicado un aumento de los trabajos en dos líneas: las actitudes y creencias de los profesores frente a la probabilidad y su enseñanza, y el conocimiento didáctico y disciplinar.

Respecto al segundo grupo de trabajos, aunque no existen estudios específicos que hayan aportado datos sobre el profesorado chileno, las cifras internacionales revelan carencias en la educación en general y de manera particular en matemáticas. El informe 2010 de la OCDE, por ejemplo, manifiesta que Chile debe encauzar sus esfuerzos hacia la mejora de la formación de profesores en todos los niveles educativos, sobre todo en profesores de Educación Primaria puesto que "reciben una formación general, y los conocimientos que adquieren sobre las materias no resultan suficientes ni siquiera para los cursos iniciales" (OCDE, 2010, p.10). Asimismo, en el Reporte de Competitividad Global 2011-2012 del World Economic Forum, en un ranking de 142 países, Chile se encuentra en el número 87 en calidad general de la educación, y en el número 124 en calidad de la educación de matemáticas y ciencias.

Por esta razón, para poder diagnosticar el conocimiento didáctico-matemático del profesorado para enseñar probabilidad, como se ha indicado, se construye y valida el Cuestionario CDM-Probabilidad (Vásquez y Alsina, en prensa). Se trata de un cuestionario de respuesta abierta, ya que permite obtener una estimación de los conocimientos didáctico-matemáticos, así como de las distintas categorías que lo componen, conocimientos a los que no siempre es posible acceder por simple observación o encuesta (Dane, 1990; Barbero, 1993). El cuestionario está formado por 7 ítems, algunos de los cuales son de elaboración propia y otros han sido reformulados a partir de las investigaciones de Cañizares (1997), Fischbein y Gazit (1984) y Green (1983), y de las orientaciones curriculares chilenas e internacionales, así como el análisis de libros de texto de primaria chilenos. Los ítems, de acuerdo con Osterlind (1989), son una unidad de medida compuesta por un estímulo y una forma de respuesta, que proporciona información sobre la capacidad de quien responde en relación a un constructo.

1.3 Método

Se ha aplicado el Cuestionario CDM-Probabilidad a 93 profesores chilenos en ejercicio que asistieron a un curso de formación gratuito. Estos profesores imparten clases de matemáticas en distintos tipos de centros de Educación Primaria: municipales gratuitos (33,3%), particulares subvencionados (59,1%) y particulares pagados (7,5%). En cuanto a la distribución según el género, hay 68 mujeres (73,1%) y 25 hombres (26,9%).

Respecto al tipo de especialización que éstos poseen, 71 no tiene especialidad (76,3%), 14 tienen la especialidad en matemática (15,1%) y 8 tienen otra especialidad (8,6%). En lo que a años de experiencia se refiere, el 46,2% de los participantes tiene menos de 3 años de experiencia enseñando matemática en Educación Primaria, el 21,5% tiene entre 3 y 5 años, un 17,2% tiene entre 5 y 10 años y tan solo un 15,1% tiene más de 10 años de experiencia. Como se observa, este grupo de profesores en activo al cual se aplicó el cuestionario tiene características bastante heterogéneas, y constituye una muestra representativa de la población, lo que nos permitirá formarnos una idea adecuada en relación a cómo es el conocimiento didáctico-matemático que poseen los profesores de primaria en activo para enseñar probabilidad.

Una vez recogidos los datos, se codificaron según el grado de corrección de las respuestas, asignando las siguientes puntuaciones: "2" si la respuesta es correcta, "1" si es parcialmente correcta y "0" si es incorrecta, por lo que la puntuación total (44 puntos) se obtiene sumando todos los resultados parciales. Los criterios para definir a cuál de las tres categorías pertenece la respuesta se explicitaron por medio de una rúbrica que define a priori el tipo de respuesta que será considerada como correcta, parcialmente correcta e incorrecta. Cabe señalar que esta rúbrica fue sometida a un proceso de validación por medio del juicio de expertos en probabilidad y didáctica de la probabilidad, para asegurar de este modo la objetividad en el momento de categorizar y codificar las distintas respuestas. A partir de esta codificación se llevó a cabo un primer análisis de los resultados globales de acuerdo con las características de los sujetos para medir el efecto de las variables: "especialidad", "años de experiencia", "dependencia del establecimiento" y "género" en el conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad.

Para realizar este análisis se utilizó el análisis de varianza (ANOVA) con un factor, ya que éste busca explicar el efecto de una variable independiente sobre la variable dependiente. Es decir, en qué medida las variables "especialidad", "años de experiencia" y "dependencia del establecimiento" tienen un efecto sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad que manifiestan tener los profesores. En el caso de la variable "género" se realizó la prueba t-Student para analizar tal asociación, dado que contamos solo con dos categorías.

1.4 Resultados

En lo que sigue, se presentan los resultados globales obtenidos, que forman parte de un estudio de mayor envergadura en el marco de una tesis doctoral.

1.4.1 Efecto de la variable "especialidad"

El análisis de las distribuciones de las puntuaciones totales de cada grupo definido para la variable "especialidad" (sin especialidad, con especialidad matemática y con otra especialidad) permite aproximarnos al efecto de esta variable sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad. En la ilustración 2, que muestra la distribución de las puntuaciones obtenidas en una escala de 0 a 44, pues como se ha indicado 44 es el puntaje teórico máximo del cuestionario, se observa que el grupo con especialidad presenta menor variabilidad en sus puntuaciones totales ubicándose en valores superiores aproximadamente a la mediana del grupo sin especialidad y el tercer cuartil del grupo con otra especialidad.

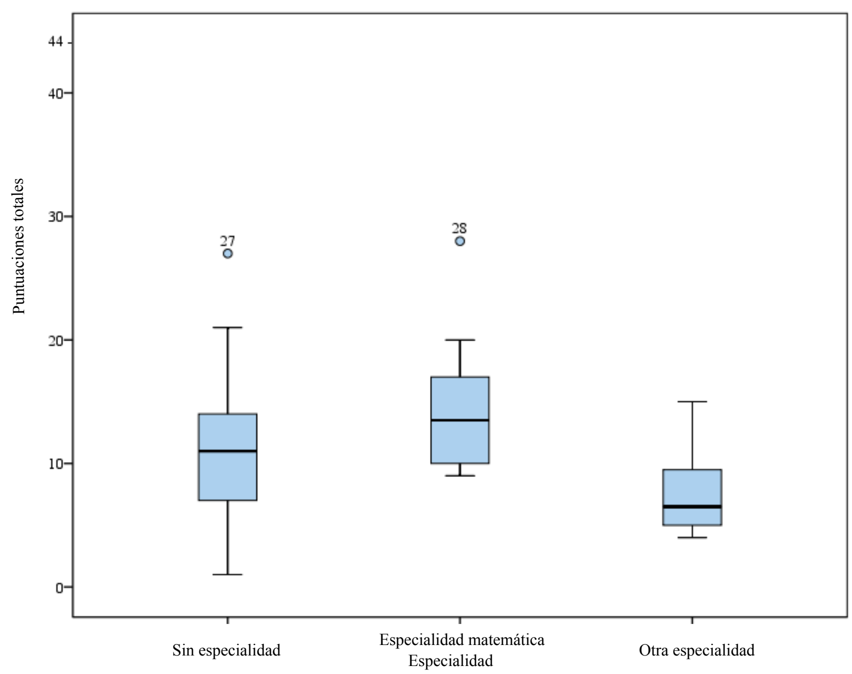


Figura 1.2: Gráfico Nº1: Distribución de las puntuaciones totales de los profesores participantes según especialidad.

Además, si nos centramos en los valores mínimos, podemos apreciar que los profesores con una especialidad distinta a la matemática presentan puntuaciones totales más bajas, mientras que los profesores con especialidad matemática tienen la puntuación mínima y máxima más alta.

El análisis anterior se ha complementado con el análisis de la varianza con un factor (ANOVA), resguardando que se cumplan las hipótesis iniciales, para analizar el efecto de la variable especialidad sobre las puntuaciones totales. Para ello, comprobamos la normalidad de las puntuaciones totales de acuerdo con la variable "especialidad" por medio de la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk según corresponda.

Tabla 1.1: Prueba de normalidad para las puntuaciones totales según especialidad.

Especialidad	**Kolmogorov-Smirnov con corrección de Lilliefors**			**Shapiro-Wilk**		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Sin especialidad	0,055	71	0,200	0,981	71	0,338
Con especialidad matemática	0,162	14	0,200	0,874	14	0,048
Con otra especialidad	0,193	8	0,200	0,880	8	0,190

A partir de los datos de la tabla 1 resulta aceptable, pues no hay evidencia de lo contrario, suponer que la distribución es normal puesto que el valor p es mayor que 0,05 en dos de los grupos que conforman la variable "especialidad" y en uno de ellos el nivel de significancia (0,048) se aleja de la normalidad, pero este alejamiento es muy leve por lo que se puede tolerar y aplicar de igual manera el análisis de varianza.

La tabla 2 muestra el estadístico de Levene, que permite contrastar la hipótesis de igualdad de varianzas poblacionales. Dado que el nivel crítico (Sig.) es mayor que 0,05 aceptamos la hipótesis de igualdad de varianzas, por lo que se concluye que en las poblaciones definidas para las tres categorías de la variable "especialidad", las varianzas de la variable puntuación total son iguales.

Tabla 1.2: Prueba de homogeneidad de varianzas.

Estadístico de Levene	**gl1**	**gl2**	**Sig.**
0,855	2	90	0,429

Sin embargo, dado que nos interesa saber si los grupos tienen o no medias iguales, se ha construido la tabla 3 que muestra el análisis de varianza (ANOVA) de un factor.

Tabla 1.3: ANOVA de un factor.

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	258,651	2	129,326	4,806	0,010
Intra-grupos	2421,822	90	26,909		
Total	2680,473	92			

En la tabla 3 se observa que el nivel crítico (Sig.) es menor que 0,05, por lo que se rechaza la igualdad de medias, es decir, existen diferencias significativas entre los distintos grupos de "especialidad" que muestran que las puntuaciones totales difieren según la especialidad de los profesores que han respondido el cuestionario.

1.4.2 Efecto de la variable "años de experiencia"

En la ilustración 3 se aprecia que existen dos observaciones extremas en el grupo de profesores con menos de tres años de experiencia, lo que significa que existen dos profesores que obtuvieron una puntuación total por encima del resto. Del mismo modo, se observa que las medianas de las puntuaciones totales de los profesores con más de 3 años de experiencia, son ligeramente mayores que la mediana de los profesores con menos de 3 años de experiencia. Por otra parte, se observa que a excepción de las puntuaciones totales de los profesores con 5 a 10 años de experiencia, en el resto de las distribuciones la mediana no se encuentra en el centro del diagrama de caja, por lo que la distribución de las observaciones no es simétrica. Además es posible apreciar que los valores de las puntuaciones totales, para los cuatro grupos, se encuentran más concentrados en la zona superior del diagrama de caja.

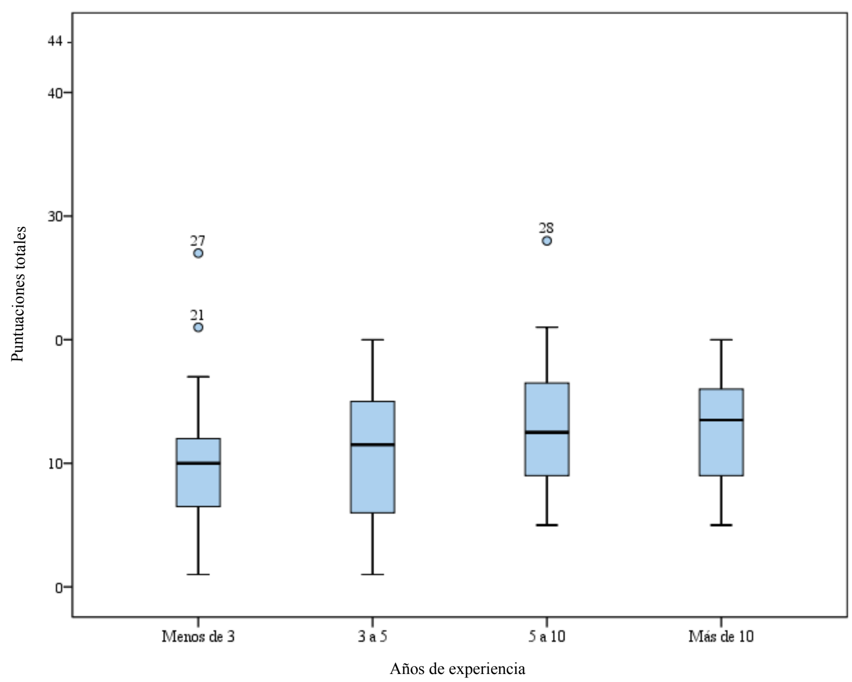


Figura 1.3: Gráfico Nº 2: Distribución de las puntuaciones totales de los profesores participantes según años de experiencia.

Se ha aplicado el mismo tipo de análisis que en la variable anterior para determinar si existen o no diferencias significativas entre los distintos grupos (menos de 3 años, entre 3 y 5 años, entre 5 y 10 años y más de 10 años). En la tabla 4 se muestran las resultados de la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk, en la que se acepta que la distribución es normal puesto que el valor p es mayor que 0,05.

Tabla 1.4: Prueba de normalidad para las puntuaciones totales según años de experiencia.

Años de experiencia	**Kolmogorov-Smirnov con corrección de Lilliefors**			**Shapiro-Wilk**		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Menos de 3 años	0,106	43	0,200	0,951	43	0,064
Entre 3 y 5 años	0,183	20	0,077	0,944	20	0,282
Entre 5 y 10 años	0,129	16	0,200	0,937	16	0,314
Más de 10 años	0,107	14	0,200	0,972	14	0,901

El estadístico de Levene de la tabla 5 pone de manifiesto que el nivel crítico (Sig.) es mayor que 0,05, por lo que se acepta que para las cuatro categorías de la variable "años de experiencia", las varianzas de la variable puntuación total son iguales.

Tabla 1.5: Prueba de homogeneidad de varianzas.

Estadístico de Levene	**gl1**	**gl2**	**Sig.**
0,446	3	89	0,721

Respecto al análisis de varianza (ANOVA) de un factor, en la tabla 6 se observa que si bien el nivel crítico (Sig.) es un poco mayor que 0,05, permite aceptar la igualdad de medias, es decir, no existen diferencias significativas entre los grupos de "años de experiencia" que muestren que las puntuaciones totales difieren según los años de experiencia de los profesores que han respondido el cuestionario.

Tabla 1.6: ANOVA de un factor.

	Suma de cuadrados	**gl**	**Media cuadrática**	**F**	**Sig.**
Inter-grupos	188,228	3	62,743	2,241	0,089
Intra-grupos	2492,245	89	28,003		
Total	2680,473	92			

1.4.3 Efecto de la variable "dependencia del establecimiento"

En la ilustración 4 se exponen las distribuciones de los puntajes totales según el tipo de establecimiento (municipal, particular subvencionado y particular pagado).

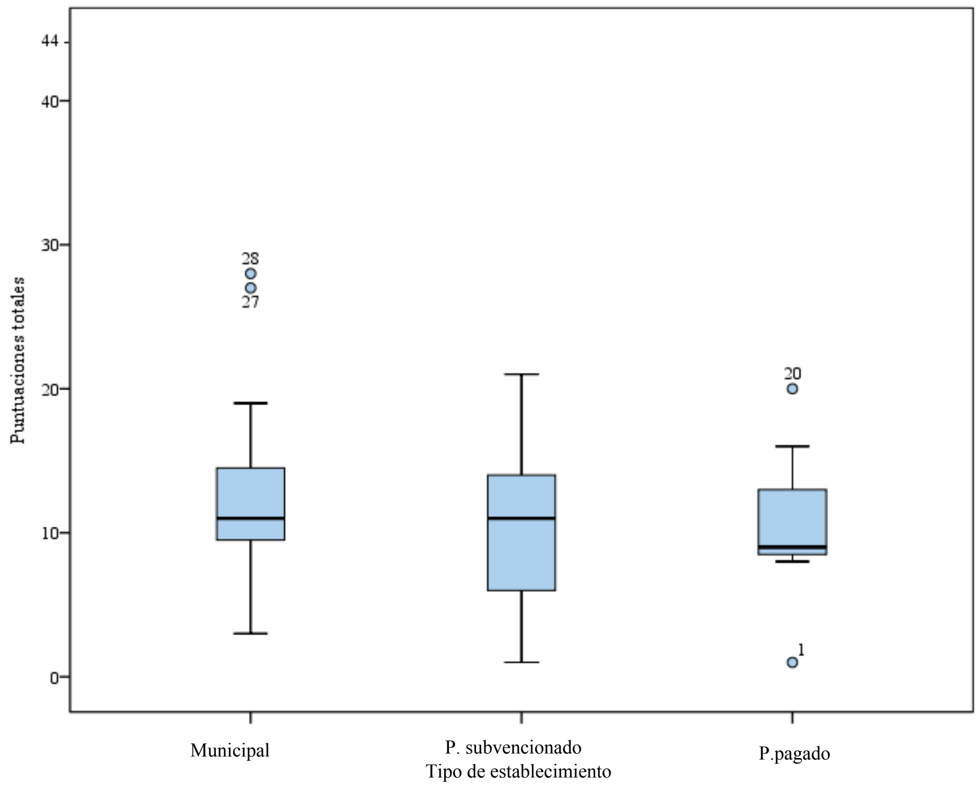


Figura 1.4: Gráfico Nº 3. Distribución de los puntajes totales de los profesores participantes, según tipo de establecimiento en el que se desempeña.

Se observa que la mediana de las puntuaciones de los profesores de establecimientos particulares subvencionados y particulares pagados se encuentran cercanas a la mediana de las puntuaciones obtenidas por los profesores de establecimientos municipales. Además, el 50% central de las puntuaciones totales de los profesores de establecimientos municipales se mueve en un intervalo de alrededor 5 puntos de ancho (entre aproximadamente los 10 y 15 puntos); en los establecimientos particulares subvencionados oscila alrededor de 8 puntos de ancho (entre los 6 y 14 puntos, aproximadamente); y en los establecimientos particulares pagado de 4 puntos de ancho (entre los 9 y 12 puntos aproximadamente). También se observa que la distribución de los puntajes de los profesores de establecimientos particulares subvencionados es bastante simétrica en torno a la mediana, no así para los profesores de establecimientos municipales o particulares pagados en los que las puntuaciones se encuentran concentradas, mayoritariamente, sobre la mediana.

Al igual que para las variables "especialidad" y "años de experiencia" se aplica el análisis de varianza (ANOVA). En la tabla 7 se muestran los resultados de la prueba de normalidad, que permite aceptar la normalidad de las puntuaciones totales según tipo de dependencia.

Tabla 1.7: Prueba de normalidad para las puntuaciones totales según tipo de dependencia.

Tipo de dependencia	**Kolmogorov-Smirnov con corrección de Lilliefors**			**Shapiro-Wilk**		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Municipal	0,152	31	0,065	0,897	31	0,060
Particular subconvencionado	0,100	55	0,200	0,967	55	0,142
Particular pagado	0,242	7	0,200	0,936	7	0,601

La tabla 8 muestra el estadístico de Levene, que al manifestar un nivel crítico (Sig.) mayor que 0,05, confirma que en las poblaciones definidas para los tres tipos de dependencia, las varianzas de la variable puntuación total son iguales.

Tabla 1.8: Prueba de homogeneidad de varianzas.

Estadístico de Levene	**gl1**	**gl2**	**Sig.**
0,399	2	90	0,672

Para saber si los grupos tienen o no medias iguales se ha construido la tabla 9 que muestra el análisis de varianza (ANOVA) de un factor.

Tabla 1.9: ANOVA de un factor.

	Suma de cuadrados	**gl**	**Media cuadrática**	**F**	**Sig.**
Inter-grupos	63,940	2	31,970	1,100	0,337
Intra-grupos	2616,533	90	29,073		
Total	2680,473	92			

En la tabla 9 se observa que el nivel crítico (Sig.) es mayor que 0,05 por lo que se acepta la igualdad de medias, es decir, no existen diferencias significativas entre los grupos de dependencia que muestren que las puntuaciones totales difieren según el tipo de dependencia del establecimiento en el cual los profesores que han respondido el cuestionario se desempeñan.

1.4.4 Efecto de la variable "género"

En la ilustración 5 se aprecia cómo se comportan las puntuaciones totales en mujeres y hombres. Además, se observan dos puntuaciones extremas, lo que significa que dos de ellas obtuvieron puntuaciones por encima de las obtenidas por su grupo.

Dado que la mediana de las puntuaciones obtenidas por las mujeres se encuentra levemente más cercana al primer cuartil, se deduce que los valores de las puntuaciones totales obtenidas por las mujeres se encuentran más concentrados en la zona inferior del diagrama de caja, lo que implica que las puntuaciones obtenidas se concentran en los valores bajos. Mientras que en el caso de los hombres, se

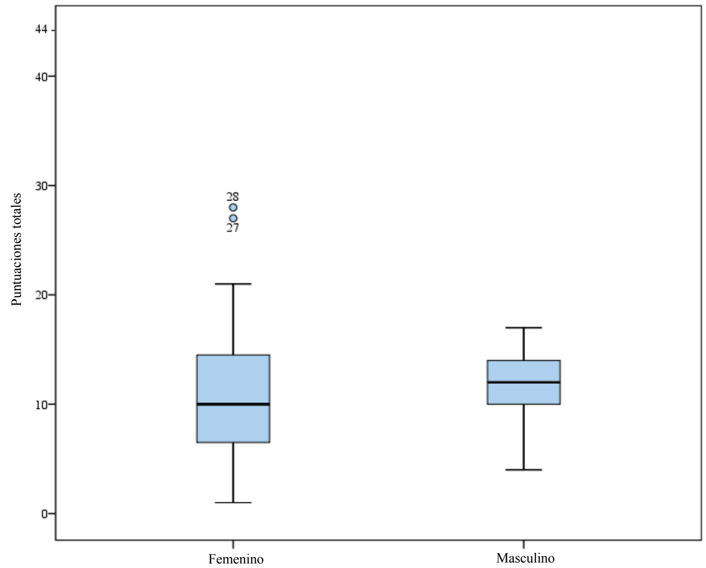


Figura 1.5: Gráfico Nº 4: Distribución de las puntuaciones totales de los profesores participantes según género.

observa que las puntuaciones totales se mueven en un rango menor de valores (menor variabilidad) y se encuentran más concentradas en torno a la mediana y de manera bastante simétrica. Lo anterior pone de manifiesto que los resultados obtenidos son muy preocupantes, pues sus puntuaciones son muy bajas, y por debajo del 50% teórico esperado que era de 22 puntos.

Para establecer si existen o no diferencias significativas entre los grupos que conforman la variable "género" se ha aplicado la prueba t-Student, por lo cual primeramente hemos resguardado que se cumplan los supuestos de normalidad y homocedasticidad. Para ello, comprobamos primeramente la normalidad de las puntuaciones totales de acuerdo con la variable "género" por medio de la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk según corresponda.

Tabla 1.10: Prueba de normalidad para las puntuaciones totales según género.

Especialidad	**Kolmogorov-Smirnov con corrección de Lilliefors**			**Shapiro-Wilk**		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Mujer	0,093	68	0,200	0,966	68	0,060
Hombre	0,150	25	0,148	0,929	25	0,082

En la tabla 10 se muestran los resultados de la prueba de normalidad, en la que se observa que la distribución es normal puesto que el valor p es mayor que 0,05.
La tabla 11 muestra que el nivel crítico (Sig.) del estadístico de Levene es menor que 0,05, por lo que rechazamos la hipótesis de igualdad de varianzas, concluyendo que en las poblaciones definidas para la variable "género" las varianzas de la variable puntuación total no son iguales en capacidad.

Tabla 1.11: Prueba de homogeneidad de varianzas.

Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
4,688	1	91	0,033

Puesto que además nos interesa saber si los grupos tienen o no medias iguales, para analizar si existe una diferencia significativa entre las medias de las categorías "mujer" y "hombre" de la variable "puntuaciones totales", se ha construido la tabla 12 que muestra la prueba t-Student.

Tabla 1.12: Prueba t-Student.

	t	gl	Sig.(bilateral)	Diferencia de medias	Error típico de diferencia	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
						Inferior	Superior
No se han asumido varianzas iguales	-0,724	65,459	0,472	-0,759	1,050	-2,855	1,336

Dado que no se han asumido varianzas iguales, se han tomado el valor y la significación de t=-0,724, ya que aporta una corrección consistente para calcular t con unas distribuciones recortadas de sus puntuaciones extremas, con la finalidad de atenuar la dispersión. Es por esta razón que se pierden grados de libertad y el valor t resulta ligeramente menor. De este modo, dado que el estadístico t=-0,724 (con 65,459 grados de libertad) y el valor p asociado es 0,472, que es mayor que 0,05, podemos afirmar que no hay asociación entre el género y las puntuaciones totales, es decir, no existen diferencias significativas entre los grupos de la variable "género" que muestren que las puntuaciones difieren según el género de los profesores que han respondido el cuestionario.

1.5 Conclusión

Los resultados globales obtenidos en este estudio confirman que el conocimiento del profesorado para la enseñanza de la probabilidad dista mucho de ser idóneo, en el sentido del NCTM (2003). Diversos trabajos previos habían aportado datos que señalaban en esta dirección, tanto en profesorado en ejercicio (Azcárate et al., 1998; Begg y Edward, 1999; Watson, 2001; Pereira-Mendoza, 2002) como en profesorado en formación (Batanero et al., 2005; Ortiz et al., 2006).
La principal novedad de nuestro estudio es que permite matizar que las limitaciones del profesorado para la enseñanza de la probabilidad se refieren tanto a su conocimiento didáctico como a su conocimiento disciplinar.

Otro aspecto novedoso de nuestro estudio se refiere al análisis del efecto de variables como la especialidad y los años de experiencia en el conocimiento didáctico-matemático del profesorado para la enseñanza de la probabilidad, junto con otras variables como el tipo de establecimiento en el que imparten docencia o el género. Los datos obtenidos a partir del Cuestionario CDM-Probabilidad señalan que la única variable que incide levemente en las puntuaciones totales de los profesores es la especialidad, puesto que los profesores con la especialidad de matemáticas han obtenido una mejor puntuación en relación a los demás grupos. Esta es otra evidencia que confirma la necesidad urgente de diseñar planes de formación para todos los profesores que consideren la didáctica de la probabilidad, para promover la integración de conocimientos didácticos y disciplinares que favorezcan una enseñanza idónea de esta disciplina en las aulas.

En futuros trabajos será necesario analizar con precisión los modelos de formación del profesorado que facilitan la incorporación de este tipo de conocimientos. Algunos estudios señalan que un modelo que se ha mostrado eficaz en la formación del profesorado de matemáticas es el aprendizaje reflexivo (Alsina, 2007, 2010), por lo que una línea de investigación futura va a consistir en integrar este modelo de formación del profesorado con el modelo CDM. En una primera aproximación consideramos que es necesario que este nuevo modelo debe entregar herramientas que promuevan la reflexión de los futuros profesores y del profesorado en activo con base en la observación de sus prácticas de aula. Estas herramientas deben promover una visión multidimensional del proceso de enseñanza con la finalidad de que a partir de ésta puedan enriquecer sus prácticas. Es decir, se trata de fomentar el análisis y reflexión en torno a un conjunto de capacidades fundamentales para la enseñanza, que si son empleadas con habilidad aumentarían la probabilidad de que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea efectivo (Ball & Forzani, 2009; Grossman, Hammerness, & McDonald, 2009).

Bibliografía

[1] Alsina, Á. (2007). "El aprendizaje reflexivo en la formación permanente del profesorado: un análisis desde la didáctica de la matemática". Educación Matemática, **19 (1), 99-126.**

[2] Alsina Á. (2010). "El aprendizaje reflexivo en la formación inicial del profesorado: un modelo para aprender a enseñar matemáticas". Educación Matemática, **22(1), 149-166.**

[3] Azcárate, P., Cardeñoso, J. M., & Porlán, R. (1998). "Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad". Enseñanza de las Ciencias, **16(1), 85-97.**

[4] Ball, D.L., Forzani, F. (2009). "The work of teaching and the challenge for teacher education". Journal of Teacher Education, **60(5), 497-511.**

[5] Barbero, M. (2003). *Psicometría II. Métodos de elaboración de escalas*. Madrid: UNED.

[6] Batanero, C., Godino, J. D., & Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference*. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

[7] Begg, A. & Edwards, R. (1999). Teachers' ideas about teaching statistics. *Proceedings of the 1999 combined conference of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education*. Melbourne: AARE & NZARE. Recuperado de `http://www.aare.edu.au/99pap/beg99082.htm.`

[8] Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

[9] Common Core State Standards Initiative (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Recuperado el 19 de julio de 2011 de `http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf`

[10] Dane, F. C. (1990). *Research methods*. Thompson. Pacific Grow. CA.

[11] Fischbein, & Gazit, (1984). "Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?". Educational Studies in Mathematics. **15, 1-24.**

[12] Godino, J. D. (2002). "Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática". Recherches en Didactique des Mathématiques **22(2/3), 237-284.**

[13] Godino, J. D. (2009). "Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas". UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, **20, 13-31.**

[14] Godino, J. D. Batanero, C., & Font, V. (2007). "The onto-semiotic approach to research in mathematics education". ZDM, The International Journal on Mathematics Education, **39(1-2), 127-135.**

[15] Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R., & Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.),*Joint ICMI/IASE Stud: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI & IASE.

[16] Godino, J. D., Gonzato, M., & Fernández, L. (2010). ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea matemática. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 341-352). Lleida: SEIEM.

[17] Godino, J. D., & Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. En B. Ubuz, Ç. Haser & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 3325-3326). Antalya, Turkey: CERME.

[18] Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada. Disponible en, `http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf.`

[19] Grossman, P., Hammerness, K., & McDonald, M. (2009). "Redefining teacher: Re-imagining teacher educatio". Teachers and teaching: Theory and practice, **15(2), 273-290.**

[20] Green, D. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*, 2, Teaching Statistics Trust. (pp. 766-783).

[21] Hill, H. C., Ball, D.L., & Schilling, S.G. (2008). "Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers? topic-specific knowledge of students". Journal for Research in Mathematics Education, textbf 39, 372-400.

[22] Konold. C. (1991). Understanding students? beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer.

[23] Lecoutre, M. P. (1992). "Cognitive Models and Problem spaces in "Purely Random" Situations". Educational Studies in Mathematics, **"** 23, 557-568.

[24] Lecoutre, M. P. y Durand, J. L. (1988). "Jugéments probabilistes et modéles cognitifs: étude d?une situation aléatoire". Educational Studies in Mathematics, **19, 357-368.**

[25] Ministerio de Educación. (2012).*Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática*. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

[26] Ministerio de Educación y Ciencia. (2007). *Boletín oficial del Estado. ORDEN ECI/2211/2007, del 20 de julio, por la que se establece el currículo y regula la ordenación de la Educación Primaria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

[27] National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

[28] National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

[29] Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L., & Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P, Bolea, M. J. Gonzáles & M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM.

[30] Osterlind, S. J. (1989). Constructing test items. Boston: Kluwer.

[31] Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for the education of primary teachers. En B. Phillips (Ed.),*Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics*. Hawthorn, VIC: International Statistical Institute.

[32] Pino-Fan, L., Font, V., & Godino, J. D. (2013). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, & L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 137-151). México, D.F.: Ediciones D.D.S. y Universidad Autónoma de Guerrero.

[33] Pino-Fan, L., Godino, J.D., & Font, V. (2013). "Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (Parte 1)". REVEMAT, **8(2), 1-49.**

[34] Schoenfeld, A. H., & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (eds.),*Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

[35] Silverman, J. & Thompson, P. (2008). "Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching". Journal of Mathematics Teacher Education, **11(6), 499-511.**

[36] Skott, J., Van Zoest, L., y Gellert, U. (2013). "Theoretical frameworks in research on and with mathematics teachers". ZDM - The International Journal on Mathematics Education **45(4), 501-505.**

[37] Tversky, A., & Kahneman, D. (1982). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge UniversityPress.

[38] Vásquez, C., & Alsina, Á. (en prensa). Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesorado de Educación Primaria sobre Probabilidad: Diseño, Construcción y Validación de un Instrumento de Evaluación. BOLEMA.

[39] Watson, J. M. (2001). "Profiling teachers competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data". Journal of Mathematics Teacher Education **4(4), 305-337.**

ANEXO 1: Cuestionario CDM-Probabilidad

Ítem 1: La profesora Gómez plantea la siguiente situación a sus alumnos de sexto año básico:

Una persona lanza 8 veces la misma moneda, obteniendo en orden, los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si lanza la moneda por novena vez, ¿qué es más probable que pase en el noveno lanzamiento?

Algunos de los alumnos de la profesora Gómez dan las siguientes respuestas:

Responda:

a. Resuelva el problema planteado por la profesora Gómez
b. ¿Cuál o cuáles de los alumnos ha dado con la respuesta correcta? ¿Por qué?
c. ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?
d. Describa las posibles dificultades, presentes en las respuestas incorrectas, que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea.
e. ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema? Fundamente su respuesta.

Ítem 2: La profesora María Eugenia presenta el siguiente juego a sus alumnos:

Deben sacar una bola de una de las cajas siguientes con los ojos cerrados. Ganan si obtienen una bola blanca. ¿De qué caja es preferible hacer la extracción?

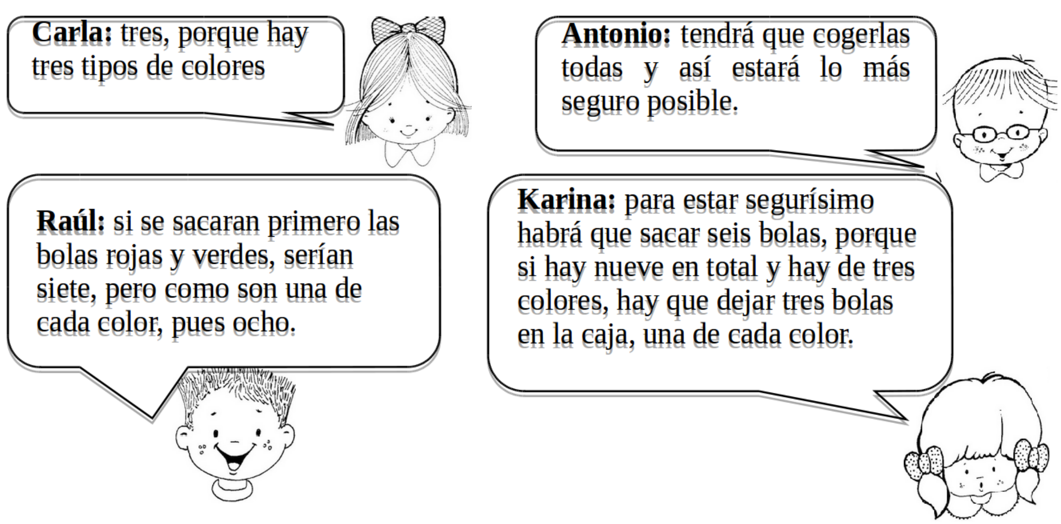
Responda:

a. Resuelva el problema
b. ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?
c. Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema.
d. ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema? Fundamente su respuesta.

Ítem 3: El profesor Ramírez plantea el siguiente problema a sus alumnos:

En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿Cuántas bolas se deben sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color?

Las respuestas obtenidas por parte de algunos de sus alumnos son las siguientes:



Responda:

a. ¿Qué respuestas debería aceptar el profesor como correctas? ¿Por qué?
b. ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?
c. ¿Qué estrategias utilizaría para que aquellos alumnos que han dado una respuesta errónea se den cuenta de su error y lo superen? Fundamente su respuesta.

Ítem 4: Usted se encuentra en quinto año básico y ha planteado el siguiente problema a sus alumnos:

En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada alumno escribe su nombre en un trozo de papel y todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar y pregunta a sus alumnos: ¿qué es más probable que suceda?
Uno de los alumnos da la siguiente respuesta:*"Es la suerte quien decide. Aunque haya más niñas, la suerte es igual. En parte podría ganar una niña".*

Responda:

a. ¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.
b. ¿Qué conceptos y/o propiedades deben usar los alumnos para dar una respuesta adecuada a este problema?
c. Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema.
d. ¿Qué estrategias utilizaría para que aquellos alumnos que han dado una respuesta errónea se den cuenta de su error y lo superen? Fundamente su respuesta.

Ítem 5: Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar por la siguiente razón:

"la lotería es un juego basado en la suerte, algunas veces gano, algunas veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima"
¿Cuál es su opinión sobre la explicación de Pedro?

Ítem 6: Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luís tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continua.

Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luís hay más bolas blancas que en la suya.
¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.

Ítem 7: Usted ha seleccionado el siguiente problema para sus alumnos de 6º básico:

Al lanzar un dado 10 veces han salido los siguientes valores: 3, 6, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 2. Si se lanza el dado otra vez, ¿qué número es más probable que salga?

Responda:

a. Resuelva el problema
b. ¿Qué objetivo cree usted que tiene, en relación al currículo, el abordar este tipo de problema?
c. ¿Qué tipo de recurso utilizaría para representar el problema? Explique cómo lo utilizaría. Justifique su elección.
d. ¿Con qué conceptos más avanzados del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en la resolución de este problema?