



Regularización por variación total, para reconstruir imágenes con dominios perdidos

| Total variation regularization, for reconstruct images inpainting. |

 **Silvia Reyes Mora**

sreyes@mixteco.utm.mx

Universidad Tecnológica de la Mixteca.
Huajuapán de León, Oaxaca, México.

 **Yessenia Hernández Pérez**

yess7_feb14@hotmail.com

Universidad Tecnológica de la Mixteca.
Huajuapán de León, Oaxaca, México.

Recibido: 14 febrero 2022

Aceptado: 31 Marzo 2022

Resumen: En el procesamiento digital de imágenes se aplican técnicas numéricas cuyo objetivo es mejorar la calidad de la imagen, eliminar objetos en ella o extraer algún tipo de información; entre las técnicas más utilizadas se encuentra la reconstrucción de partes perdidas que consiste en modificar una imagen para reconstruir zonas deterioradas o eliminadas de la misma. En la actualidad, los algoritmos de reconstrucción de imágenes ocupan un amplio campo de investigación y desarrollo; en este artículo se analiza, describe, plantea y resuelve el problema de reconstrucción de imágenes con regiones faltantes, desde un punto de vista teórico y práctico; se obtiene un modelo matemático que representa al problema, el cual se demuestra que es un problema inverso mal planteado en sentido de Hadamard. Para resolver el problema, se usa el método de variación total que se deduce a partir de la representación variacional del método de regularización de Tikhonov; se muestra que la solución del problema también resuelve el problema de Neumann para la ecuación de Euler-Lagrange, el cual se resuelve numéricamente. Finalmente, se valida la propuesta de solución en algunas imágenes con dominios perdidos. Lo novedoso del trabajo, es que el método empleado permite implementarse numéricamente y mostrar la influencia del parámetro de regularización.

Palabras Clave: Problema inverso mal planteado, inpainting, regularización.

Abstract: Digital image processing uses numerical techniques aimed at improving image quality, deleting objects in the image or extracting information; among the most used techniques is the reconstruction of lost parts that consists of modifying an image to rebuild deteriorated or deleted areas of it. Currently, image reconstruction algorithms occupy a wide field of research and development; this article analyzes, describes, poses and solves the problem of image reconstruction with missing regions, from a theoretical and practical point of view; you get a mathematical model that represents the problem, which is shown to be a poorly posed inverse problem in the sense of Hadamard. To solve the problem, the total variation method that is deduced from the variational representation of the Tikhonov regularization method is used; it is shown that the solution of the problem also solves the Neumann problem for the Euler-Lagrange equation, which is solved numerically. Finally, the solution proposal is validated in some images with lost domains. The novelty of the work is that the method used allows the implementation numerically and show the influence of the regularization parameter.

Keywords: ill-posed inverse problem, inpainting, regularization.

1. Introducción

El problema de reconstrucción de imágenes con dominios perdidos, también conocido como inpainting, consiste en restaurar imágenes mediante alguna técnica numérica, que permita eliminar elementos, recuperar partes deterioradas e incluso completar partes perdidas de una imagen digital (ver [5], [16], [17]). Las aplicaciones de la reconstrucción de imágenes con dominios perdidos, son diversas y provienen de distintas áreas en las que se necesita tener imágenes claras y confiables como por ejemplo, imágenes médicas, satelitales, imágenes que se usan en cámaras de vigilancia, e incluso en imágenes con fines recreativos como para eliminar los ojos rojos en las fotografías, para recuperar las partes faltantes de fotografías viejas, para mejorar el brillo o el color de una imagen ([5],[7]).

El proceso de reconstrucción de imágenes, que en apariencia es simple, resulta ser un problema difícil de resolver y costoso computacionalmente, ya que se requieren técnicas matemáticas de alto nivel así como de algoritmos estables que provengan de métodos regularizados; es decir, para resolver el problema de la restauración, se necesita construir algoritmos que permitan recuperar las regiones dañadas o perdidas de la imagen, a partir de información disponible en su entorno; estos algoritmos de reconstrucción de imágenes, deben tener un sustento matemático que garantice su estabilidad, además se deben implementar computacionalmente. A la fecha, existe una gran cantidad de algoritmos que resuelven el problema, por ejemplo en [9], [13], [11] y [16]; sin embargo, en la mayoría de los algoritmos presentados se carece de los detalles del desarrollo matemático e implementación computacional, que permita poner de manifiesto el mal planteamiento del problema en sentido de Hadamard ([9]) y la regularización que se utiliza para resolverlos ([17]); ahora bien, uno de los métodos más usados es la regularización por variación total, que en sus inicios estaba dirigido a eliminar el ruido de la imagen bajo ruido gaussiano ([14]); sin embargo, se ha convertido en uno de los mejores métodos para remover ruido en imágenes debido a que tiene la propiedad de conservar los contornos (consulte [2] y [18] para obtener detalles más específicos en los que se realiza un análisis extenso de las propiedades de este tipo de regularización). Uno de los problemas abiertos para la regularización por variación total, y que escapa del objetivo de este trabajo, consiste en determinar el parámetro de regularización que optimice el método para recuperar imágenes más claras, ante la presencia de ruido en la imagen original con regiones faltantes ([12]); sin embargo, en este trabajo se muestra la modelación matemática del problema, haciendo notar la influencia de dicho parámetro en la obtención de las imágenes reconstruidas.

El trabajo se presenta como sigue: en la sección 2, se presentan definiciones, resultados y notación de imágenes digitales y de la teoría matemática que se usará a lo largo del trabajo. En la sección 3, se plantea el problema a resolver, se obtiene el modelo matemático de inpainting, se demuestra que es un problema mal planteado en sentido de Hadamard, se aplica el método de regularización por variación total y se reduce el problema a la ecuación de Euler Lagrange. En la sección 4, se resuelve numéricamente la ecuación de Euler-Lagrange por un método de descenso de gradiente, se realiza la implementación numérica del método de solución a algunas imágenes con dominios perdidos y se presentan los resultados obtenidos.

2. Conceptos básicos

Se presentan los conceptos básicos acerca de las imágenes digitales y los conceptos de matemáticas que se utilizan para el desarrollo de las secciones posteriores.

2.1. Conceptos básicos de imágenes digitales

En términos generales, un píxel es la superficie homogénea más pequeña de las que componen una imagen digital, contiene información de color, saturación, brillo y su tamaño depende del dispositivo de captura; ya que al momento de tomar una fotografía, un píxel de la imagen contiene información de la energía de un punto de la imagen detectada por el sensor del equipo, de manera que una imagen se puede representar como una función de x, y, t, λ , en la que el par ordenado (x, y) ubica un elemento de la imagen, t es el momento de la captura, y λ es la longitud de onda de la luz del dispositivo ([13]).

De lo anterior, las imágenes digitales pueden ser descritas matemáticamente como matrices, donde cada píxel es representado por un elemento de la matriz. Por ejemplo, si se tiene una imagen de 1024×683 píxeles, se puede representar por una matriz de tamaño 1024×683 . Más aún, si se tiene una imagen en blanco y negro, en cada píxel se tiene asignado un número entero entre 0 y 255, que representa un color en escala de grises que va desde el cero para el color negro hasta el número 255 para el color blanco, llamado tonalidad; mientras que para las imágenes a color se tienen tres matrices, una para los tonos de color rojo, otra para los tonos verdes y otra para los colores azules, al combinar las matrices, se obtienen las imágenes a color ([4]).

Por ejemplo, en la Figura 1 se presenta una imagen en escala de grises, cuyo tamaño representativo en píxeles es de 38×14 , lo que significa que la imagen se ha particionado en 38 columnas y 14 filas, donde la intersección de la columna 29 y la fila 12 (ver la nota¹), corresponde a un píxel cuyo valor asignado es un entero del conjunto P , que contiene su tono de gris.

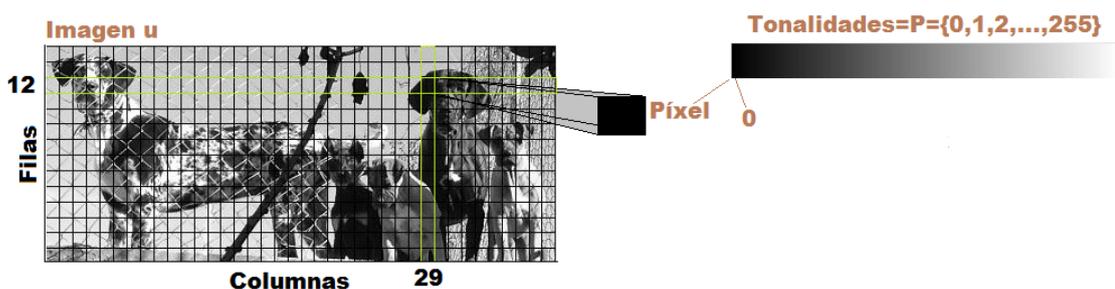


Figura 1: Imagen digital en escala de grises que muestra lo que es un píxel de la imagen.

Otra forma de definir a una imagen digital, es mediante una función de dos variables u cuyo dominio es un conjunto cerrado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y cuya imagen es el conjunto de las distintas tonalidades en la escala de grises $P = \{0, 1, 2, \dots, 255\}$; es decir, una imagen bidimensional u es una función de dos variables (x, y) tal que $u(x, y) = a$ donde $a \in P$. Esto permite concluir que:

- $0 \leq u(x, y) < \infty$, para cada par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\int_{\mathbb{R}^2} u(x, y) dx dy$ existe.

Aunque en este trabajo se tratan principalmente imágenes monocromáticas, los procedimientos aquí descritos también aplican para imágenes a color, puesto que estos solo se diferencian en que la intensidad de cada color se almacenan en matrices independientes ([7, 3]). Si se desea conocer más información sobre imágenes digitales, se recomienda revisar [7] y [3].

¹Las filas se numeran de abajo hacia arriba y las columnas de izquierda a derecha; ya que el píxel se hace corresponder con el punto $(x,y)=(29,12)$.

2.2. Delta de Dirac

La delta de Dirac es una distribución o función generalizada que define un funcional en forma de integral sobre un cierto espacio de funciones integrables. Se escribe como $\delta(x)$ y satisface la siguiente definición ([8]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a),$$

donde f es una función integrable definida en a . Observe que $\delta(x)$ no es una función de x , ya que para ello, debe tener un valor definido en cada punto de su dominio; sin embargo, a veces informalmente, se expresa la delta de Dirac como el límite de una sucesión de funciones que tiende a cero en todo punto del espacio excepto en un punto para el cual divergiría hacia infinito; de ahí la expresión informal en la que se define a la $\delta(x)$ como sigue:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & \text{si } x = 0; \\ 0, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Como se ha mencionado anteriormente, existen diferentes sucesiones de funciones cuyo límite permite representar a la delta de Dirac, una de ellas se mostrará en el ejemplo 1.

Ejemplo 1

Considere la sucesión de funciones siguiente:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n, & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2n}, \quad n > 0; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como se ve en la Figura 2, cuanto más grande es el valor de n , el área bajo la curva de la función siempre es igual a uno y corresponde al área de un rectángulo con base cada vez más angosta y de mayor altura.

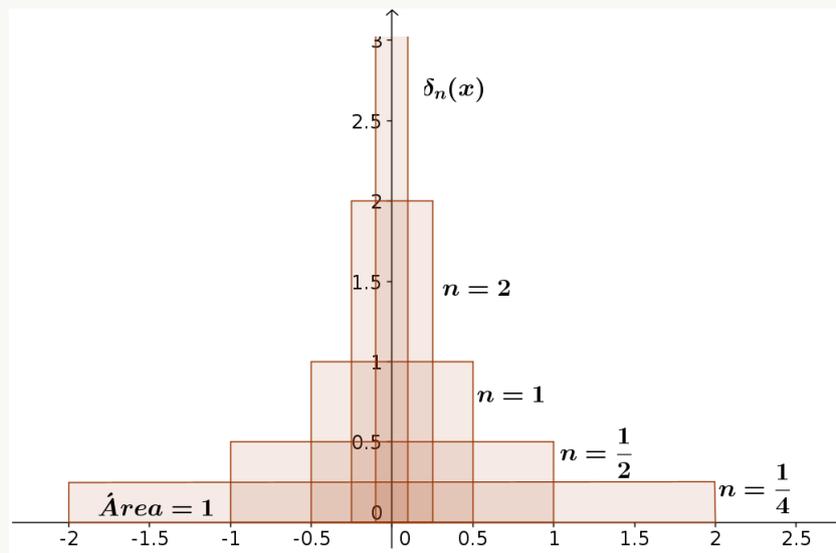


Figura 2: Representación para n funciones de la δ_n .

De esta forma, la distribución delta de Dirac satisface:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n} \right) = 1, \quad n > 0.$$

De lo anterior, se obtiene (informalmente) a la distribución delta de Dirac como límite de la sucesión de funciones:

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x).$$

Entre otras aplicaciones, esta distribución permite expresar magnitudes singulares en un punto como límite de magnitudes continuas, y comúnmente se usa para representar la distribución de densidad de una masa unidad concentrada en un punto. La importancia de la delta de Dirac está en que puede tomar valores grandes en un intervalo muy pequeño, permitiendo modelar diferentes fenómenos; por ejemplo, la presión originada al aplicar una fuerza sobre un punto, al momento de golpear una pelota con un bate, en el instante que actúa una fuente de luz sobre un elemento de la imagen, entre otros. Particularmente, la delta de Dirac es empleada en el procesamiento de imágenes, debido a que puede representar de manera matemática, una fuente de luz puntual que ocupa una región pequeña, la cual actúa en un instante sobre un punto de la imagen.

En este trabajo, se utiliza la delta de Dirac en su forma bidimensional, para obtener el modelo matemático en su forma operacional. Algunas referencias muy completas que hablan acerca de esta distribución son [8] y [15].

2.3. Cálculo de variaciones.

El cálculo variacional estudia los métodos que permiten encontrar los valores mínimos de un funcional J continuo definido sobre un espacio de funciones. De igual manera que en el cálculo elemental, se usa la derivada para calcular extremos de funciones, en el cálculo variacional se usa las variaciones de los funcionales para el cálculo de sus extremos. Por ello, es necesario definir lo que es una variación, ya que se utiliza para minimizar el funcional de variación total para el problema de dominios perdidos.

Definición 1

Sean X un espacio de funciones, $u, \omega \in X$ y $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional. Se define y denota la n -ésima variación del funcional J en el punto u y en la dirección $\omega \in X$ a la derivada:

$$\delta^{(n)} J(u; \omega) = \frac{d^n}{d\varepsilon^n} J(u + \varepsilon\omega)|_{\varepsilon=0},$$

si esta derivada existe.

Particularmente, cuando $n = 1$ se tiene la primera variación del funcional que está dado por el límite dado en (1):

$$\delta J(u; \omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon\omega), \quad (1)$$

si este límite existe. Como en el cálculo fundamental, la anulación de la primera variación será condición necesaria para la existencia de un extremo. Se recomienda revisar [6] y [10], para ampliar información acerca de la minimización de funcionales así como del cálculo de la primera variación y las restricciones que debe cumplir las funciones solución. En este trabajo, se utilizará la primera variación del funcional.

2.4. Problemas inversos y mal planteados

El interés en los diversos fenómenos del entorno se presentan problemas en los que se conocen las causas y se necesita conocer las consecuencias; pero también se presentan problemas en los que se

necesita conocer las causas a partir de los efectos observados; en este contexto, se presentan los llamados problemas directos y los problemas inversos, los cuales no tienen una definición estricta, pero tienen un concepto general en la comunidad científica. Se concibe que, dada una formulación operacional del problema, un problema directo consiste en hallar un resultado o un efecto y , a partir del conocimiento de una causa x y del proceso o modelo K . De esta forma, cada problema directo sugiere dos problemas inversos:

- El problema inverso de causalidad, que consiste en hallar la causa x a partir del conocimiento del efecto y y del modelo K . En este trabajo, se estudia este tipo de problema inverso.
- El problema inverso de identificación del modelo, que consiste en hallar el modelo K , a partir del conocimiento de una cantidad considerable de causas y efectos.

Ahora bien, a los problemas inversos o a los problemas directos, se les puede clasificar como problemas bien planteados o problemas mal planteados en sentido de Hadamard [9]. Matemáticamente se formula la definición de buen planteamiento como sigue:

Definición 2

Sean X, Y espacios normados y $K : X \rightarrow Y$ un operador (que puede ser lineal o no lineal). El problema de hallar x a partir del conocimiento de K e y , que se escribe como $Kx = y$, es bien planteado si satisface:

1. $\forall y \in Y$, existe un único $x \in X$ tal que $Kx = y$, (existencia y unicidad);
2. La solución x depende continuamente de y , es decir para cada sucesión $\{x_n\} \subset X$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} Kx_n = Kx$, se cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, (estabilidad).

Si el problema no cumple al menos una de estas propiedades, el problema es llamado mal planteado ([9]).

En el ejemplo 2 se presenta un problema mal planteado, ya que su solución no depende continuamente de los datos de entrada.

Ejemplo 2

Considere la ecuación de Fredholm de primer tipo definida como:

$$\int_c^d k(x, y)u(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (2)$$

donde $k : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y conocida, f es una función continua en $[a, b]$ y u es una función continua en $[c, d]$; el problema consiste en determinar una función u que satisfaga la ecuación (2), a partir de los datos conocidos k y f . Considerando la relación $Kx = y$, dada en la definición de buen planteamiento se tiene que $K : X \rightarrow Y$ es el operador integral que relaciona el espacio $X = C[c, d]$ y el espacio $Y = C[a, b]$, donde X e Y están dotados de la norma infinito:

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad \|u\|_\infty := \max_{y \in [c, d]} |u(y)|.$$

Una forma de verificar que el problema no satisface la condición de estabilidad, es mostrando la existencia de una sucesión de datos que sea convergente $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $\|f_n - f_0\|_\infty \rightarrow 0$; pero cuyas soluciones $\|u_n - u_0\|_\infty \not\rightarrow 0$. Sea la siguiente sucesión de datos:

$$f_n(x) = \int_c^d k(x, y)u_n(y)dy, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

cuyas soluciones están dadas por:

$$u_n(y) = u_0(y) + n \cos(n^2 y), \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Observe que se cumple:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_0(x)| &= \left| \int_c^d k(x, y) u_n(y) dy - \int_c^d k(x, y) u_0(y) dy \right| \\ &= \left| \int_c^d k(x, y) (u_n(y) - u_0(y)) dy \right| \\ &= \left| \int_c^d k(x, y) (u_0(y) + n \cos(n^2 y) - u_0(y)) dy \right| \\ &= \left| \int_c^d k(x, y) n \cos(n^2 y) dy \right| \end{aligned}$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} &= \left| \left[\frac{1}{n} k(x, y) \operatorname{sen}(n^2 y) \right]_c^d - \frac{1}{n} \int_c^d \frac{\partial k(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \left([k(x, y) \operatorname{sen}(n^2 y)]_c^d - \int_c^d \frac{\partial k(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right) \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| [k(x, y) \operatorname{sen}(n^2 y)]_c^d - \int_c^d \frac{\partial k(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right|. \end{aligned}$$

Así:

$$\|f_n - f_0\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} \frac{1}{n} \left| [k(x, y) \operatorname{sen}(n^2 y)]_c^d - \int_c^d \frac{\partial k(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right|,$$

luego:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} \frac{1}{n} \left| [k(x, y) \operatorname{sen}(n^2 y)]_c^d - \int_c^d \frac{\partial k(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| k(x, d) \operatorname{sen}(n^2 d) - k(x, c) \operatorname{sen}(n^2 c) - \int_c^d \frac{\partial k(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right|, \end{aligned}$$

por desigualdad triangular:

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(|k(x, d) \operatorname{sen}(n^2 d)| + |k(x, c) \operatorname{sen}(n^2 c)| + \left| \int_c^d \frac{\partial k(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right| \right),$$

como k es continuo sobre un compacto, existe un número M tal que $|k(x, y)| \leq M$, $\forall (x, y)$, también se sabe que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, por lo tanto se concluye que:

$$|k(x, d) \operatorname{sen}(n^2 d)| \leq c_1 \quad \text{y} \quad |k(x, c) \operatorname{sen}(n^2 c)| \leq c_2,$$

donde c_1 y c_2 son constantes. Luego, se tiene que:

$$\left| \int_c^d \frac{\partial k(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right| \leq \left| \int_c^d \frac{\partial k(x, y)}{\partial y} dy \right|,$$

por una parte, se cumple $\left| \frac{\partial k(x,y)}{\partial y} \right| \leq N$ luego,

$$\left| \int_c^d \frac{\partial k(x,y)}{\partial y} dy \right| \leq N(d-c).$$

Así, se concluye que:

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(|k(x,d) \operatorname{sen}(n^2 d)| + |k(x,c) \operatorname{sen}(n^2 c)| + \left| \int_c^d \frac{\partial k(x,y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right| \right), \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (c_1 + c_2 + N) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} V = 0, \end{aligned}$$

donde $V = c_1 + c_2 + N$ es una constante, así, para n suficientemente grande f_0 y f_n están cerca. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(y) - u_0(y)\|_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{y \in [c,d]} |n \cos(n^2 y)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n |\cos(n^2 y)| \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Como se puede observar, un pequeño error en los datos, produce un gran error en la solución exacta u ; luego, el problema inverso es inestable y, por lo tanto, dicho problema es mal planteado.

Una forma de resolver este tipo de problemas es por medio de una estrategia de regularización, donde la idea principal es aproximar el problema mal planteado mediante una familia de problemas bien planteados ([9]); así, el objetivo es encontrar una familia de operadores acotados $R_\alpha : Y \rightarrow X$, que aproxime puntualmente al operador inverso $K^{-1} : \mathcal{R}(K) \rightarrow X$. En este trabajo, se muestra que el problema de reconstrucción de imágenes en dominios perdidos es un problema mal planteado en sentido de Hadamard.

2.5. Regularización por variación total

Es conocido que muchos de los problemas inversos pueden ser planteados operacionalmente como:

$$Kx = y, \tag{3}$$

donde $K : X \rightarrow Y$ es un operador (que puede ser lineal o no lineal), y X, Y son espacios normados, luego el objetivo de implementar una estrategia de regularización es encontrar una aproximación x^γ , a la solución exacta x ; donde y^γ es una perturbación de y , con un error pequeño γ tal que:

$$\|y - y^\gamma\| \leq \gamma.$$

Así, el objetivo es resolver la ecuación “perturbada”:

$$Kx^\gamma = y^\gamma.$$

Esto implica poder calcular una aproximación x^γ a la solución exacta x de la ecuación (3); es decir, se desea que x^γ dependa de manera continua de y^γ . Formalmente, una estrategia de regularización se define como sigue.

Definición 3

Una estrategia de regularización es una familia de operadores lineales y acotados

$$R_\alpha : Y \longrightarrow X, \quad \alpha > 0,$$

tales que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha Kx = x, \quad \forall x \in X;$$

es decir, el operador $R_\alpha K$ converge puntualmente al operador identidad ([9]).

Cabe mencionar que esta convergencia es puntual y no uniforme como lo indica el siguiente teorema.

Teorema 1

Sea R_α una estrategia de regularización para un operador compacto $T : X \rightarrow Y$ donde la $\dim X = \infty$. Entonces se concluye:

- Los operadores R_α no son uniformemente acotados con respecto a α ; esto es, existe una sucesión de $\alpha_j \rightarrow 0$ tal que $\|R_{\alpha_j}\| \rightarrow \infty$ cuando $j \rightarrow \infty$.
- La familia de operadores $R_\alpha T x$ no converge uniformemente sobre subconjuntos acotados de X ; es decir, no existe una convergencia $R_\alpha T$ a la identidad en la norma del operador.

Si se desea conocer más sobre esta teoría, se recomienda revisar [9]. En este trabajo se mostrará que el problema de reconstrucción de imágenes con pérdida de información es un problema mal planteado, por lo que es necesario definir una estrategia de regularización, que permita construir una solución aproximada estable. En este sentido, se utilizará el método de regularización por variación total, debido a su capacidad para recuperar las discontinuidades de la imagen, lo que justifica su uso en diferentes campos del procesamiento de imágenes como la eliminación de ruido, el flujo óptico, la restauración de imágenes, reconstrucción de imágenes en dominios perdidos o remover objetos señalados en la imagen, para HSI (tono, saturación, intensidad) se utiliza al momento de descomprimir una imagen, para cubrir los detalles perdidos al momento descomprimir una imagen hiperespectral², reconstrucción de superficie, segmentación, entre otros.

En la regularización por variación total, aparece el siguiente funcional que proviene de la estrategia de regularización de Tikhonov:

$$VT(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)| dx, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ abierto,}$$

donde u se define sobre el dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Observe que la variación total tiene propiedades de semi-continuidad, convexidad y homogeneidad, lo cual es útil al definir su minimización. Las características más importantes de la regularización por variación total son ([18]):

- Preserva las ubicaciones de los bordes.
- El cambio de intensidad es inversamente proporcional a la escala de las características locales, razón por la cual la variación total puede eliminar el ruido en regiones pequeñas sin alterar las características de una escala mayor, pues es independiente de la intensidad original y es directamente proporcional al parámetro de regularización.

²Son las imágenes en las que se mide un espectro continuo para cada píxel, que consiste en recopilar y procesar información a lo largo de todo el espectro electromagnético.

- Afecta de manera local las características de la imagen, lo que implica el desarrollo de algoritmos numéricos eficientes, lo cual disminuye los costos computacionales.

En la siguiente sección, se desarrollará el método de variación total como un método de regularización del problema de dominios perdidos, empezando con la explicación de lo que es la reconstrucción de dominios perdidos de imágenes y cuales imágenes son las que abarca el problema, posteriormente se planteará el problema y se resolverá utilizando los conceptos revisados en esta sección.

3. Reconstrucción de dominios perdidos en imágenes

En esta sección se desarrolla el análisis del problema de reconstrucción de dominios perdidos en imágenes, lo cual conduce al problema de la ecuación de Euler-Lagrange con condición de frontera de Neumann.

3.1. Imágenes con dominios perdidos

El problema de la reconstrucción de imágenes con dominios perdidos, comúnmente conocido como el problema de inpainting, consiste en estimar las partes dañadas o faltantes, a partir de la información disponible en la imagen digital conocida. Dicho problema se encuentra en la restauración de las pinturas, en una estructura, una fotografía, entre otras, las cuales pueden perder información de alguna o varias de sus regiones, generada por diversos factores como: el tiempo, al dejar caer algún líquido o escribir sobre ellas, al agrietarse o al agregar o quitar objetos. La Figura 3 muestra un conjunto de imágenes con el problema de inpainting: en (1) aparecen partes en blanco, en (2) aparece una franja en color negro provocada por el factor de captura, en (3) las partes en desgaste de una pintura generadas por el deterioro con el tiempo, en (4) se necesita quitar a las personas y la valla para recuperar la imagen del edificio, en (5) se presenta el deterioro por desgaste de una estructura, en (6) las partes faltantes de la malla ciclónica, y en (7) se debe quitar el texto en la imagen.



Figura 3: Imágenes con regiones faltantes que se deben completar o con objetos superpuestos que se deben eliminar.

En el problema de dominios perdidos, no existe información dentro del área dañada, por lo que una manera de recuperar la información, es a través de su frontera; por esta razón, se emplea el método de variación total, ya que permite recuperar los bordes. Además, el problema de inpainting consiste en encontrar la geometría y textura faltante, razón por la cual los métodos de inpainting se clasifican en dos grupos: los basados en la textura y los basados en la geometría, que emplean métodos de ecuaciones diferenciales parciales o métodos variacionales para la solución del problema. Los métodos variacionales se utilizan más, debido a que se puede modelar a la imagen como una función con cierto grado de suavidad, expresado en términos de las curvas de nivel o de la variación total de la imagen; una característica es que de entre todos los datos disponibles de la imagen, solo se utiliza la información de la frontera del dominio de inpainting para su restauración.

Una imagen u_0 con el problema de inpainting se puede dividir en dos partes: la parte sin información D y la parte con información Ω/D , como se puede observar en la Figura 4, Ω representa el dominio de u_0 , D la región dañada o faltante en la imagen, que se conoce como el dominio de inpainting $D \subset \Omega$ y, F la frontera entre Ω/D y D .

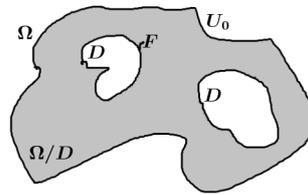


Figura 4: Representación de las regiones presentes en una imagen con el problema de dominios perdidos.

Los métodos matemáticos de inpainting generalmente emplean la discretización de un modelo continuo, y en general se realizan mediante una discretización puntual. De acuerdo con [1], un buen modelo de inpainting debe:

- I Ser local. Esto quiere decir que el dominio de inpainting puede ser recuperado solo con la vecindad del mismo y no requiere de un aprendizaje global.
- II Restaurar bordes rotos y suaves. Debido a que los bordes son importantes en el reconocimiento de objetos y en la segmentación de la imagen.
- III Evitar el ruido. Así es más fácil detectar características y restaurar la imagen.

3.2. Modelo matemático del problema de inpainting.

A partir de lo descrito anteriormente, en lo que sigue se obtendrá un modelo matemático del problema. Sean u y u_0 , imágenes digitales, donde u representa la imagen original y u_0 la imagen con regiones faltantes que se supondrá conocida y que de aquí en adelante representa el dato conocido del problema; así, el problema consiste en reconstruir la imagen u a partir del conocimiento de la imagen u_0 .

De manera general, no es posible conocer los factores que ocasionaron la pérdida de información en la imagen u ; así, para abstraer el problema, se considera que el operador T representa el efecto de la pérdida de información ocasionado sobre la imagen u , de tal forma que la imagen obtenida al aplicar el operador T sobre u sea la imagen u_0 con regiones faltantes. Teóricamente lo anterior se puede escribir como:

$$Tu = u_0. \quad (4)$$

Así, la ecuación (4) genera el planteamiento de dos problemas: un problema directo que consiste en obtener a u_0 a partir del conocimiento del operador T y de la imagen original u ; y un problema inverso el cual consiste en encontrar la imagen u , que satisfaga la ecuación (4), a partir del conocimiento de la imagen u_0 y del operador T .

En este trabajo, se resuelve el problema inverso, para ello, primero se hallará una expresión para el operador T . Como se ha presentado en los conceptos básicos de imágenes digitales, las imágenes digitales u y u_0 se pueden ver como funciones de dos variables $u(x, y)$ y $u_0(x, y)$, donde u pertenece al espacio normado X y u_0 pertenece al espacio normado Y , tal que el operador T relaciona los espacios de funciones X e Y . Observe que el operador T debe ser un operador lineal e invariante en el espacio, debido a lo siguiente: se conservan las características de las imágenes con pérdida de información; si se da un cambio de escala en la imagen u , es importante que al aplicar el operador T sobre u se obtenga

una imagen u_0 con el efecto de pérdida de información en la misma escala que la imagen original; no debe importar como se descompone a la imagen ya que el resultado de aplicar T a cada una de sus partes da como resultado la imagen con regiones perdidas; no debe afectar si se desplaza el origen (x, y) de la imagen original u , (α, β) unidades, al aplicar el operador T sobre la imagen desplazada $u(x - \alpha, y - \beta)$ se obtiene la imagen u_0 con el efecto de pérdida de información desplazada las mismas unidades, es decir no se modifican los valores de las tonalidades. Todas las características descritas del operador T se pueden escribir teóricamente de la forma siguiente: Propiedad de homogeneidad:

$$T \{au(x, y)\} = aT \{u(x, y)\}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Propiedad de aditividad:

$$T \{u_1(x, y) + u_2(x, y)\} = T \{u_1(x, y)\} + T \{u_2(x, y)\},$$

donde $u_1(x, y)$ y $u_2(x, y)$ son imágenes.

Propiedad de invarianza de desplazamiento:

$$T \{u(x - \alpha, y - \beta)\} = u_0(x - \alpha, y - \beta),$$

para cualquier (x, y) y cualquier (α, β) .

Una vez definidas las propiedades del operador T lo siguiente es obtener su expresión, para ello, se utiliza la distribución delta de Dirac en su forma bidimensional, la cual se define como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta = F(x, y), \quad (6)$$

para cualquier función continua $F(\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta) \in X$. La propiedad (6), permite expresar la imagen $u(x, y)$ en términos de la delta de Dirac como:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta. \quad (7)$$

Así, aplicando el operador T a la expresión $u(x, y)$ dada en (7) se tiene:

$$T \{u(x, y)\} = T \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \right\} = u_0(x, y),$$

dado que el operador T y el operador integral son lineales; por la propiedad de aditividad, se tiene:

$$u_0(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T \{u(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta)\} d\alpha d\beta, \quad (8)$$

luego $u(\alpha, \beta)$ es un escalar debido a que es independiente de x y y , y por la propiedad de homogeneidad, se tiene:

$$u_0(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha, \beta) T \{\delta(x - \alpha, y - \beta)\} d\alpha d\beta,$$

donde el término $T \{\delta(x - \alpha, y - \beta)\}$, indica cómo afecta el impulso en el punto (α, β) al aplicar el operador T , dando como resultado una función t , definida por:

$$T \{\delta(x - \alpha, y - \beta)\} = t(x - \alpha, y - \beta).$$

De esta manera, se puede escribir la ecuación (8) como:

$$u_0(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha, \beta) t(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta. \quad (9)$$

La cual permite obtener la imagen u_0 con regiones faltantes, además la ecuación (9) es una integral de Fredholm de primer tipo; y como se vio en el ejemplo 2, este es un problema mal planteado.

Como se ha mostrado, el operador T se puede escribir como:

$$Tu(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha, \beta)t(x - \alpha, y - \beta)d\alpha d\beta,$$

luego, se puede escribir la ecuación (9) de la forma:

$$Tu = u_0. \quad (10)$$

Así, lo que se ha obtenido hasta ahora, es el planteamiento operacional del problema de dominios perdidos en imágenes; que es un problema mal planteado en sentido de Hadamard. Se sabe que el problema de unicidad de la solución se puede resolver con buscar en subespacios de X , y el problema de existencia se puede resolver con buscar a la solución en espacios X' tales que $X \subset X'$. Sin embargo, los problemas de estabilidad no se pueden resolver mediante este tipo de consideraciones, razón por la que se debe analizar desde el punto de vista de la teoría de regularización. De aquí la necesidad de implementar una estrategia de regularización definida en la definición 3 y, de esta forma, obtener una solución aproximada a la solución del problema.

3.3. Regularización para el problema de inpainting

Sea $u_0 \in \text{Rango}(T)$ una imagen con datos perdidos, donde T es invertible, al aplicar T^{-1} en ambos lados de la ecuación (10) se obtiene la solución exacta:

$$u = T^{-1}u_0;$$

sin embargo, en la práctica u_0 contiene un ruido $r(x, y)$, así, al denotar a esta imagen con ruido como: $u_0^\gamma(x, y) = u_0(x, y) - r(x, y)$, el problema que se debe resolver es:

$$Tu = u_0^\gamma.$$

Observe que si $u_0^\gamma \in \text{Rango}(T)$, entonces se obtendría una solución $u^\gamma = T^{-1}u_0^\gamma$, pero debido a que el problema es mal planteado, entonces u^γ estaría alejada de la solución exacta u . Por ello, considerando el dato con error u_0^γ se necesita construir una estrategia de regularización R_α , que cumpla:

$$R_\alpha u^\gamma = u_0^\gamma, \quad (11)$$

y cuya solución dependa de manera continua de los datos, cuando los datos contienen un error a lo más γ ; es decir:

$$\|u_0 - u_0^\gamma\| \leq \gamma. \quad (12)$$

Por tanto, se debe encontrar operadores $R : Y \rightarrow X$, lineales y acotados, que sean invertibles y que R_α sea convergente al operador T^{-1} de manera puntual.

Observe que cualquier estrategia de regularización que se utilice, proporcionará una solución aproximada a la solución exacta. Así, si se considera que $u_\alpha^\gamma := R_\alpha u_0^\gamma$ es la mejor solución al problema (11), entonces el error de aproximación está acotado por:

$$\begin{aligned} \|u_\alpha^\gamma - u\| &= \|R_\alpha u_0^\gamma - u\| \\ &= \|R_\alpha u_0^\gamma - R_\alpha u_0 + R_\alpha u_0 - u\| \\ &= \|R_\alpha(u_0^\gamma - u_0) + R_\alpha u_0 - u\| \\ &\leq \|R_\alpha(u_0^\gamma - u_0)\| + \|R_\alpha u_0 - u\| \\ &\leq \|R_\alpha\| \|u_0^\gamma - u_0\| + \|R_\alpha T u - u\| \end{aligned}$$

Por lo tanto, de (12):

$$\|u_\alpha^\gamma - u\| \leq \gamma \|R_\alpha\| + \|R_\alpha T u - u\|,$$

que es la estimación fundamental. Así, el error total entre la solución exacta y la aproximada es la suma de dos errores, donde $\gamma \|R_\alpha\|$ es el error cometido en los datos, que por el Teorema 1, $\|R_\alpha\| \rightarrow \infty$ cuando $\alpha \rightarrow 0$, mientras que $\|R_\alpha T u - u\|$ es el error de la aproximación entre u_α^γ y u ; luego por definición de estrategia de regularización este término tiende a 0 cuando $\alpha \rightarrow 0$, como se puede observar en la Figura 5. Así, para obtener la mejor aproximación u_α^γ de u , se necesita un valor pequeño de α , pero al mismo tiempo se requiere un valor grande de α para lograr la estabilidad. Por lo tanto, se necesita un método para elegir $\alpha = \alpha(\gamma)$ de tal manera que el error total sea el menor posible, que como se puede observar en la Figura 5, correspondería a α^* que minimice $\gamma \|R_\alpha\| + \|R_\alpha T u - u\|$, y que es llamado el parámetro de regularización.

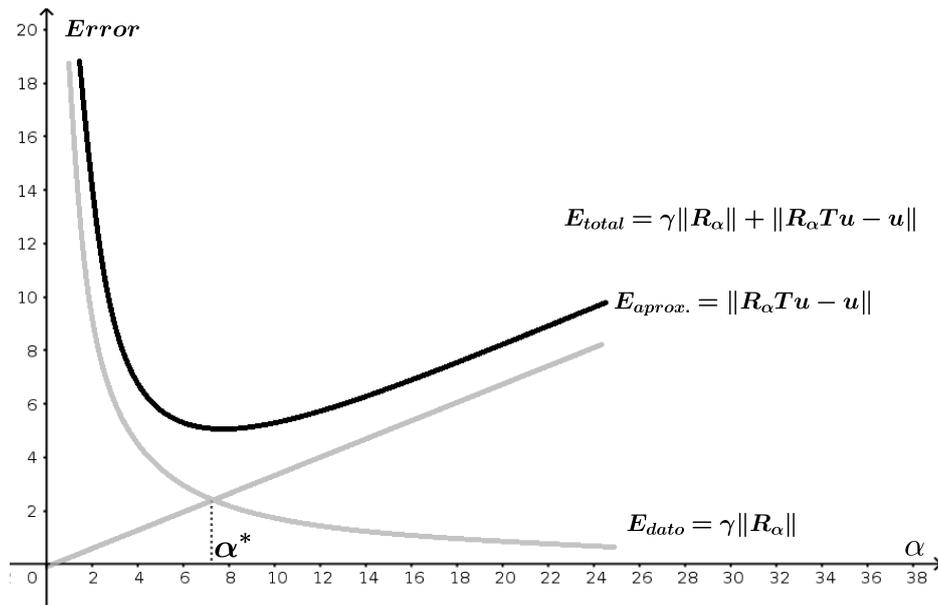


Figura 5: Representación del comportamiento del error total, como función de α .

Para el caso del tratamiento de imágenes, el método de solución más empleado es la regularización variacional, en el que la solución regularizada u_α^γ es la que minimiza el funcional definido por:

$$\mathcal{J}(u) = \mathcal{F}(Tu, u_\alpha^\gamma) + \alpha \mathcal{R}(u),$$

donde \mathcal{F} representa el error de la aproximación entre u_α^γ y u , $\alpha > 0$ es el parámetro de regularización y \mathcal{R} representa el término de regularización, que penaliza las propiedades de la imagen u , es decir es la influencia del ruido en los datos, de tal forma que se preserven las esquinas y bordes, lo cual dependerá de la elección de la norma.

Una de las estrategias de regularización más empleadas es la de Tikhonov ([9]), dada por:

$$J_\alpha(u) = \|Tu - u_0\|^2 + \alpha \|u\|^2. \tag{13}$$

La desventaja de emplear el funcional dado en (13), es que penaliza las discontinuidades de la imagen; por esta razón, y por las propiedades del gradiente, se cambia la norma $L^2(\Omega)$ en el término de regularización del funcional de Tikhonov por la norma de variación total mencionada en la sección 2.5, permitiendo plantear la minimización del funcional de regularización por variación total como:

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{2} \|Tu - u_0\|^2 + \alpha \|u\|_{VT},$$

que es la propuesta de Rudin, Osher y Fatemi, que se emplea en el problema de eliminación de ruido en una imagen y , en la solución del problema de dominios perdidos. Así, el funcional a minimizar es:

$$J_\alpha(u) = \frac{\lambda_D}{2} \|Tu - u_0\|_{L_2}^2 + \alpha \|u\|_{VT}, \quad (14)$$

donde λ_D se define como:

$$\lambda_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in D; \\ 1, & \text{si } x \in \Omega \setminus D. \end{cases}$$

Ω representa el dominio de la imagen, D la región faltante y $\Omega \setminus D$ la región con información de la imagen como se presenta en la Figura 4. Esta formulación permite plantear el problema solo en el dominio perdido y, al mismo tiempo, eliminar el ruido en toda la imagen. La ecuación (14) se puede describir en término de la definición de las normas como:

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_D |Tu - u_0|^2 dx dy + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy. \quad (15)$$

Por lo tanto, el problema consiste en encontrar u que minimice el funcional definido en la ecuación (15) y que es una estrategia de regularización ([9]).

3.4. Reducción del problema a la ecuación de Euler-Lagrange

Una vez planteado el funcional a minimizar, se hallará su mínimo calculando su primera variación (ver definición 1); para esto, sea $\omega(x, y)$ una función infinitamente diferenciable y con soporte compacto en Ω , que representa la dirección de movimiento y sea ε un escalar cualquiera.

La primera variación del funcional $J_\alpha(u)$ en el punto u y la dirección ω se define como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} J_\alpha(u + \varepsilon\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_D |T(u + \varepsilon\omega) - u_0|^2 dx dy + \alpha \int_{\Omega} |\nabla(u + \varepsilon\omega)| dx dy \right\} = 0,$$

Por un lado se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_D |T(u + \varepsilon\omega) - u_0|^2 dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_D}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{d\varepsilon} |T(u + \varepsilon\omega) - u_0|^2 dx dy \\ &= \frac{\lambda_D}{2} \int_{\Omega} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2(T(u + \varepsilon\omega) - u_0) \omega dx dy \\ &= \lambda_D \int_{\Omega} (Tu - u_0) \omega dx dy. \end{aligned}$$

y por otro que:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \alpha \int_{\Omega} |\nabla(u + \varepsilon\omega)| dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \alpha \int_{\Omega} \sqrt{(u_x + \varepsilon\omega_x)^2 + (u_y + \varepsilon\omega_y)^2} dx dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha \int_{\Omega} \frac{(u_x + \varepsilon\omega_x)\omega_x + (u_y + \varepsilon\omega_y)\omega_y}{\sqrt{(u_x + \varepsilon\omega_x)^2 + (u_y + \varepsilon\omega_y)^2}} dx dy \\ &= \alpha \int_{\Omega} \frac{u_x\omega_x + u_y\omega_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} dx dy \\ &= \alpha \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \omega}{|\nabla u|} dx dy. \end{aligned}$$

Considerando a campo vectorial $F = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ y a la función escalar $f = \omega$, de la identidad $div f F = f div F + F \cdot \nabla f$ se tiene:

$$div \left(\omega \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \omega div \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla \omega;$$

que al despejar y sustituir en la integral se obtiene:

$$\alpha \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \omega}{|\nabla u|} dx dy = \alpha \int_{\Omega} div \left(\omega \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) dx dy - \alpha \int_{\Omega} \omega div \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) dx dy. \quad (16)$$

Más aún, por el teorema de la divergencia aplicado a la primera integral en la expresión (16), se llega a:

$$\alpha \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \omega}{|\nabla u|} dx dy = \alpha \int_{\partial \Omega} \omega \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot n ds - \alpha \int_{\Omega} \omega div \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) dx dy. \quad (17)$$

Por definición se sabe que $\nabla u \cdot n = \frac{\partial u}{\partial n}$ luego, si se considera la condición:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial \Omega,$$

entonces la igualdad (17) se reduce a:

$$\alpha \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \omega}{|\nabla u|} dx dy = -\alpha \int_{\Omega} \omega div \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) dx dy;$$

por lo tanto la primera variación de J_{α} en el punto u y la dirección ω es:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} J_{\alpha}(u + \varepsilon \omega) = \int_{\Omega} \lambda_D (Tu - u_0) \omega dx dy - \alpha \int_{\Omega} \omega div \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) dx dy.$$

Una condición necesaria para que el funcional $J_{\alpha}(u)$ tenga un mínimo es que la primera variación en u sea igual a cero ([6]), es decir:

$$\int_{\Omega} \left(\lambda_D (Tu - u_0) - \alpha div \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) \omega dx dy = 0; \quad (18)$$

y como se cumple para cualquier región ω en Ω , de la expresión (18), se concluye que:

$$\lambda_D (Tu - u_0) - \alpha div \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0. \quad (19)$$

La ecuación (19) es la de Euler-Lagrange; por lo que, encontrar el mínimo del funcional $J_{\alpha}(u)$ es equivalente a encontrar la solución del problema de contorno llamado Problema de Neumann para la ecuación de Lagrange:

$$\lambda_D (Tu - u_0) - \alpha div \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0, \quad (20)$$

con la condición,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

En la siguiente sección, se desarrollará un método numérico para resolver el problema de Neumann para la ecuación de Euler Lagrange numéricamente.

4. Solución numérica

En esta sección se resolverá numéricamente la ecuación (20), aplicando el método iterativo explícito de Euler también conocido como: método de descenso de gradiente o método de marcha en el tiempo. Dicho método pertenece a los basados en el gradiente, donde la característica es la de emplear la información sobre la derivada permitiendo generar algoritmos eficientes. Para ello, primero se necesita discretizar la ecuación.

4.1. Discretización del problema de contorno

Para comenzar, se construye una malla del dominio Ω de la imagen con puntos discretos, donde cada nodo se define por las coordenadas (i, j) , $0 \leq i \leq M$ y $0 \leq j \leq N$. Por otra parte, considere el campo vectorial $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que aparece en la ecuación (20):

$$\phi = \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right),$$

que al aplicar el operador divergencia al campo, se obtiene:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Las derivadas parciales que aparecen en la expresión anterior, se aproximan por diferencias centradas en el punto (x_i, y_j) ([4]) como sigue:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x_{i+\frac{h}{2}}, y_j) - u(x_{i-\frac{h}{2}}, y_j)}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u(x_i, y_{j+\frac{h}{2}}) - u(x_i, y_{j-\frac{h}{2}})}{h}.$$

En lo que sigue, al valor de u en el punto (x_i, y_j) se denotará por $u_{i,j}$. Así, para el píxel correspondiente al par ordenado (i, j) , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} \right) &\approx \frac{\left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+\frac{h}{2},j} - \left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-\frac{h}{2},j}}{h} \\ &\approx \frac{\frac{1}{|\nabla u|_{i+\frac{h}{2},j}} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} - \frac{1}{|\nabla u|_{i-\frac{h}{2},j}} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}}{h} \\ &= \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{|\nabla u|_{i+\frac{h}{2},j}} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) - \frac{1}{|\nabla u|_{i-\frac{h}{2},j}} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \right). \end{aligned}$$

de forma similar, se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \approx \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{|\nabla u|_{i,j+\frac{h}{2}}} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) - \frac{1}{|\nabla u|_{i,j-\frac{h}{2}}} (u_{i,j} - u_{i,j-1}) \right).$$

Además, de la definición del módulo del gradiente, se tiene:

$$|\nabla u|_{i\pm\frac{h}{2},j} = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i\pm\frac{h}{2},j} \right)^2 + \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i\pm\frac{h}{2},j} \right)^2} \approx \sqrt{\left(\frac{u_{i\pm 1,j} - u_{i,j}}{h} \right)^2 + \left(\frac{u_{i,j\pm 1} - u_{i,j}}{h} \right)^2},$$

luego:

$$\frac{1}{|\nabla u|_{i\pm\frac{h}{2},j}} \approx \frac{h}{\sqrt{(u_{i\pm 1,j} - u_{i,j})^2 + (u_{i,j\pm 1} - u_{i,j})^2}}$$

y de forma similar,

$$\frac{1}{|\nabla u|_{i,j \pm \frac{h}{2}}} \approx \frac{h}{\sqrt{(u_{i,j \pm 1} - u_{i,j})^2 + (u_{i \pm 1,j} - u_{i,j})^2}},$$

Luego, se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{h} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2}} - \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\sqrt{(u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2}} \right)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{h} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2}} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\sqrt{(u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i,j-1})^2}} \right).$$

Finalmente se concluye:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \frac{1}{h} \left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j}}{\sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2}} - \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\sqrt{(u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2}} \right. \\ \left. - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\sqrt{(u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i,j-1})^2}} \right).$$

Por otra parte, la condición de frontera de Neumann $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, permite definir las condiciones que se deben cumplir en los píxeles del contorno de la imagen digital. Para ello, de la aproximación de la derivada normal dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h},$$

se sigue que el contorno formado por los píxeles de la forma $(0, j)$, $0 \leq j \leq N$ cumple:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{h} = 0 \quad \text{entonces} \quad u_{1,j} = u_{0,j}.$$

Análogamente, para la frontera inferior de la imagen, formada por el conjunto de píxeles de la forma $(i, 0)$, se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{h} = 0, \quad \text{entonces} \quad u_{i,1} = u_{i,0},$$

para el lado formado por el conjunto de píxeles (M, j) se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{M-1,j} - u_{M,j}}{h} = 0, \quad \text{entonces} \quad u_{M-1,j} = u_{M,j};$$

y para el contorno superior formado por el conjunto de píxeles (i, N) se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,N-1} - u_{i,N}}{h} = 0, \quad \text{entonces} \quad u_{i,N-1} = u_{i,N}.$$

Por lo anterior, la condición de frontera de Neumann se expresa como:

$$u_{1,j} = u_{0,j}, \quad u_{i,1} = u_{i,0}, \quad u_{M-1,j} = u_{M,j}, \quad u_{i,N-1} = u_{i,N}.$$

Así, se ha obtenido la discretización del problema de contorno (20), que se escribe como:

$$\lambda_D (Tu_{i,j} - u_0) - \alpha \operatorname{div}(\phi)_{i,j} = 0, \tag{21}$$

con la condición de frontera,

$$u_{1,j} = u_{0,j}, \quad u_{i,1} = u_{i,0}, \quad u_{M-1,j} = u_{M,j}, \quad u_{i,N-1} = u_{i,N}.$$

Se puede decir, que reconstruir una imagen con el problema de inpainting implica un proceso de cambio sobre la imagen, en un determinado tiempo, el cual inicia con la imagen dañada $u_0(x, y)$ y termina con la mejor aproximación de la imagen u . Esto implica construir un conjunto de imágenes $u^n(i, j)$ tal que $u^0(i, j) = u_0(i, j)$ es la imagen dañada, en nuestro caso es la imagen con regiones faltantes; luego $n = 0$ es el punto de partida, lo que significa que cada que aumente n se recupera información en la imagen, es decir si consideramos que u^n es la imagen con el problema de inpainting en el paso actual n , entonces la imagen siguiente es u^{n+1} de tal manera que en determinado momento se obtendrá la mejor solución a la forma dinámica de la ecuación (21), esto hace viable implementar un método iterativo para resolver el problema, donde n denota el número de iteraciones, por lo que se plantea la forma dinámica de la ecuación (21) como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_D (Tu_{i,j}^n - u_0) + \alpha \operatorname{div}(\phi)_{i,j}^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (22)$$

con la condición inicial

$$u_{i,j}^0 = u_0(i, j).$$

El objetivo es encontrar la solución u que satisfaga la ecuación (22), la cual será la mejor aproximación a la imagen original.

La ecuación (20) es igual a la ecuación (22) si y solo si $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, es decir se busca que la solución u obtenida mediante el método iterativo no tenga más cambios con respecto al tiempo, para que sea considerada como la solución al problema inicial.

Por otra parte, se tiene que una discretización para $\frac{\partial u}{\partial t}$ en el momento n es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{h},$$

luego la ecuación (22) se reescribe como:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{h} = \lambda_D (Tu_{i,j}^n - u_0) - \alpha \operatorname{div}(\phi)_{i,j}^n,$$

la cual es equivalente a:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + h \left(\lambda_D (Tu_{i,j}^n - u_0) - \alpha \operatorname{div}(\phi)_{i,j}^n \right)$$

con la condición de frontera:

$$u_{1,j}^n = u_{0,j}^n, \quad u_{i,1}^n = u_{i,0}^n, \quad u_{M-1,j}^n = u_{M,j}^n, \quad u_{i,N-1}^n = u_{i,N}^n.$$

Así, con cada iteración se obtiene la solución óptima la cual será:

$$u_{i,j}^{n+1} = u^{n+1}(x_i, y_j),$$

que es la solución al problema de dominios perdidos, lo que significa que es la mejor aproximación a la imagen original.

5. Resultados

Lo siguiente en este análisis, es presentar la implementación del método de descenso de gradiente para el problema, en el que los datos de entrada son: la imagen dañada, el parámetro de regularización, la especificación del dominio perdido lo que corresponde a la región sin información y el número de iteraciones que es el criterio de paro.

Código del programa.

```

1 % Imagen de entrada u_0
2 R = imread('nombre de la imagen.png'); % lee la imagen.
3 if (isa(R, 'uint8'))
4     C=rgb2gray(R); % convierte a escala de gris
5     A=im2double(C); % convierte a double
6 else
7     A=im2double(C);
8 end
9 [N,M]= size(A); % Dimensiones de la imagen (columna, fila).
10 u = A; % Imagen con ruido Tu.
11 F = zeros(N,M); % Imagen restaurada, (fila, columna).
12 z=10; % Define el número de iteraciones.
13 p=.7; % Define el parametro de regularización.
14 g = 0.05; % Constante positiva para evitar división por cero.
15 % Definir el valor para el dominio perdido.
16 v = 91/255; % el valor corresponde al seleccionar con rojo las regiones perdidas sobre
    la imagen.
17 t =.01; % paso de tiempo.
18 for k=1:z
19     for i=2:M-1
20         for j=2:N-1
21             a=1/(sqrt((u(j,i+1)-u(j,i))^2+(u(j+1,i)-u(j,i))^2+g^2));
22             b=1/(sqrt((u(j,i)-u(j,i-1))^2+(u(j+1,i)-u(j,i))^2+g^2));
23             c=1/(sqrt((u(j,i)-u(j,i-1))^2+(u(j,i)-u(j-1,i))^2+g^2));
24             % Se define la divergencia
25             div=(u(j,i+1)+u(j+1,i)-2*u(j,i))*a-((u(j,i)-u(j,i-1))*b)-((u(j,i)-u(j-1,i))*c);
26             % Se define la función característica
27             if u(j,i)==v
28                 l=0;
29             else
30                 l=1;
31             end
32             F(j,i)=u(j,i)+t*(l*(A(j,i)-u(j,i))-p*div); % Ecuación del problema
33         end
34     end
35 % Condición de frontera de Neumann donde u(0,i)=u(1,i); parte superior de la imagen en
    el programa (inferior en el plano)
36     for i=2:M-1
37         a=1/(sqrt((u(1,i+1)-u(1,i))^2+(u(2,i)-u(1,i))^2+g^2));
38         b=1/(sqrt((u(1,i)-u(1,i-1))^2+(u(2,i)-u(1,i))^2+g^2));
39         % definiendo la div
40         div=(u(1,i+1)+u(2,i)-2*u(1,i))*a-((u(1,i)-u(1,i-1))*b);
41         % definiendo la función característica
42         if u(1,i)==v
43             l=0;
44         else
45             l=1;
46         end
47     % ecuación del problema
48     F(1,i)=u(1,i)+t*(l*(A(1,i)-u(1,i))-p*div);
49     end
50 % u(j,0)=u(j,1); lado izquierdo de la imagen (derecho en el plano)
51     for j=2:N-1
52         a=1/(sqrt((u(j,2)-u(j,1))^2+(u(j+1,1)-u(j,1))^2+g^2));
53         c=1/(sqrt((u(j,1)-u(j,1))^2+(u(j,1)-u(j-1,1))^2+g^2));
54         div=(u(j,2)+u(j+1,1)-2*u(j,1))*a-((u(j,1)-u(j-1,1))*c);
55         if u(j,1)==v
56             l=0;
57         else
58             l=1;
59         end
60         F(j,1)=u(j,1)+t*(l*(A(j,1)-u(j,1))-p*div);
61     end
62 u(j,M-1)=u(j,M); lado derecho de la imagen (izquierdo en el plano)

```

```

63 for j=2:N-1
64     a=1/(sqrt((u(j,M)-u(j,M))^2+(u(j+1,M)-u(j,M))^2+g^2));
65     b=1/(sqrt((u(j,M)-u(j,M-1))^2+(u(j+1,M)-u(j,M))^2+g^2));
66     c=1/(sqrt((u(j,M)-u(j,M-1))^2+(u(j,M)-u(j-1,M))^2+g^2));
67     div=(u(j,M)+u(j+1,M)-2*u(j,M))*a-((u(j,M)-u(j,M-1))*b)-((u(j,M)-u(j-1,M))*c);
68     if u(j,M)==v
69         l=0;
70     else
71         l=1;
72     end
73     F(j,M)=u(j,M)+t*(l*(A(j,M)-u(j,M))-p*div);
74 end
75 u(N-1,i)=u(N,i); lado inferior de la imagen (superior en el plano)
76 for i=2:M-1
77     a=1/(sqrt((u(N,i+1)-u(N,i))^2+(u(N,i)-u(N,i))^2+g^2));
78     b=1/(sqrt((u(N,i)-u(N,i-1))^2+(u(N,i)-u(N,i))^2+g^2));
79     c=1/(sqrt((u(N,i)-u(N,i-1))^2+(u(N,i)-u(N-1,i))^2+g^2));
80     div=(u(N,i+1)+u(N,i)-2*u(N,i))*a-((u(N,i)-u(N,i-1))*b)-((u(N,i)-u(N-1,i))*c);
81     if u(N,i)==v
82         l=0;
83     else
84         l=1;
85     end
86     F(N,i)=u(N,i)+t*(l*(A(N,i)-u(N,i))-p*div);
87 end
88 u=F;
89 end
90 F1=im2uint8(F);
91 imtool(F1,[]); % muestra imagen restaurada.

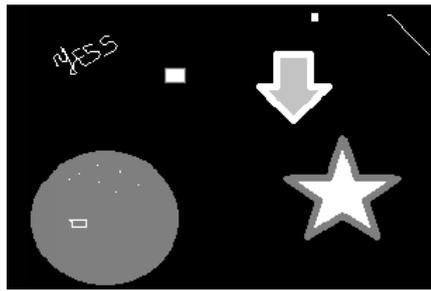
```

6. Reconstrucción y análisis de unas imágenes con dominios perdidos

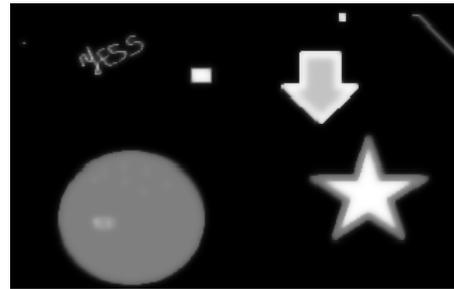
A continuación se muestra algunos resultados, obtenidos mediante la implementación del método para resolver el problema de dominios perdidos.

Se podría pensar en que si faltan más píxeles, la recuperación de una imagen tiene un error mayor; sin embargo, el objetivo del ejemplo de la Figura 6 cuyo tamaño es de 314×202 píxeles es mostrar que el error depende más de la geometría y la forma del dominio perdido que de su tamaño o área total. El inciso *a* de la Figura 6, muestra una imagen donde los píxeles de tonalidad blanca representan los dominios perdidos en la imagen; como se observa, los dominios perdidos en la imagen tienen diferentes áreas y formas. Por ejemplo, el área total del dominio perdido que forman las letras es igual al área del cuadrado junto a ellas; de igual forma, el área del cuadrado en la parte superior de la flecha, es igual al área del dominio perdido representado por el rayón, ubicado en la parte superior derecha de la imagen; en esta imagen, la forma más grande del dominio perdido es el interior de la estrella. El inciso *b*, muestra una restauración de la imagen del inciso *a* obtenida en 1.4 segundos; donde se observa que el método da una mejor aproximación a las tonalidades de los píxeles de formas angostas, lo que era de esperarse pues el error de aproximación del dominio perdido depende más de su forma y geometría que del tamaño o área total del dominio de inpainting, esto se pudo observar en la restauración de los dominios perdidos que tienen la misma área pero diferente forma. La imagen del inciso *c* muestra los valores de las tonalidades obtenidas para el cuadrado arriba de la flecha y el rayón, que tienen misma área pero diferente forma, permitiéndonos observar la restauración de estos dominios perdidos, cuyo valor de tonalidad en un inicio era 255, así, al observar los valores de las tonalidades, para la región angosta representada por el rayón, observamos una restauración más uniforme y cercana a la tonalidad oscura en comparación con las tonalidades obtenidas para el cuadrado. En este resultado no se consiguió una buena aproximación para el centro de la estrella, dado que los

valores de las tonalidades obtenidas siguen siendo blancas, lo cual se ejemplifica en el inciso *d*, que muestra una parte del centro de la estrella.



(a) Imagen dañada.

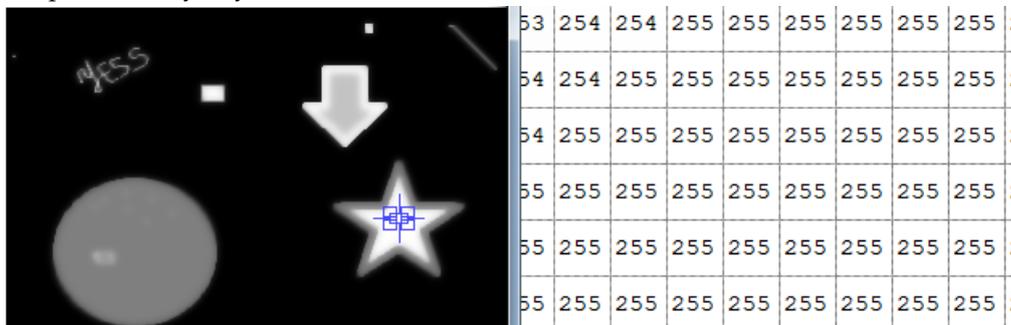


(b) Imagen restaurada, iteraciones 30, parámetro de regularización 0.7.

200	207	206	196	170
213	218	219	212	194
211	222	224	220	206
205	220	225	223	213
191	215	222	221	213
162	204	215	215	197

109	124	111	73	43	26	16	10	6	3	2
33	49	73	82	71	44	27	16	10	6	3
19	29	44	68	82	71	44	27	16	10	6
11	17	27	42	68	82	71	44	27	16	10
7	10	16	26	42	68	82	71	44	27	16
4	6	10	16	26	42	68	82	71	44	27
2	3	6	10	16	26	42	68	82	71	44

(c) Valores de las tonalidades obtenidas en la restauración de la imagen del inciso *b*, de una parte del rayón y del cuadrado de arriba de la flecha.



(d) Valor de las tonalidades del centro de la estrella.

Figura 6: Recuperación del dominio perdido para regiones de formas diferentes.

El inciso *a* de la Figura 7, se presenta la imagen original sin dominios perdidos de 809×356 píxeles. El inciso *b*, muestra la imagen con dominios perdidos, ruido tipo gaussiano y cuyo dominios perdidos son las partes faltantes de la malla ciclónica marcadas en color rojo. El inciso *c* de la misma Figura 7, es la imagen restaurada mediante el método de solución planteado, en la que se observa que el ruido se ha eliminado y se ha completado las regiones faltantes, en 20 iteraciones y a partir del parámetro de regularización fijo dado por .007. Se pudo observar que si se aumenta el número de iteraciones, en lugar de mejorar la imagen, se tiene una peor aproximación; este problema se genera por la distribución de la tonalidad de los píxeles en la imagen. Sin embargo, en la imagen del inciso *d* de la misma Figura 7, se ha cambiado el parámetro de regularización a .34, lo que provoca el aumento de ruido en la imagen recuperada; esto es de esperarse ya que, de acuerdo a la teoría de regularización, debe existir un parámetro óptimo para obtener la mejor aproximación a la solución; el tiempo para la restauración de la imagen fue de 1.8 segundos. Como se observa en este ejemplo, la elección del parámetro de regularización es fundamental para obtener una imagen restaurada similar a la original.

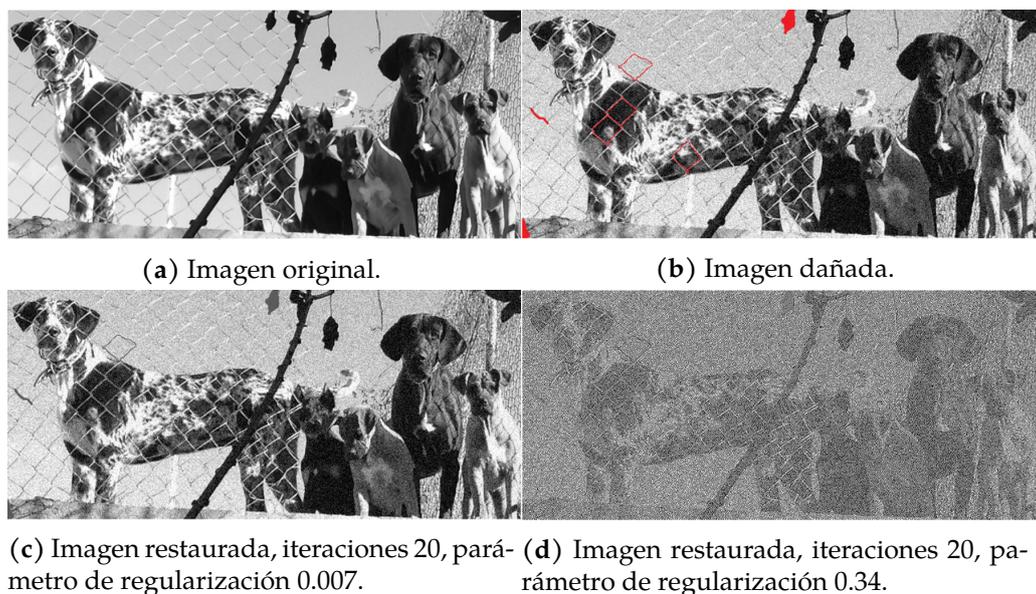


Figura 7: Influencia del parámetro de regularización en la restauración de imágenes con dominio perdido.

7. Conclusiones

Entre las conclusiones más importantes, se encontró que al aumentar el número de iteraciones, la imagen en general se pierde preservando solamente los bordes, lo cual es una característica del método de regularización por variación total; de igual forma, se comprobó que la elección del parámetro de regularización es importante en la restauración de las imágenes, por ello se debe trabajar en implementar métodos para elegir el parámetro óptimo. También se concluye que, dependiendo de las características deseadas en la imagen, se debe trabajar en elegir el número de iteraciones necesarias a realizar; de igual manera se observó que efectivamente las regiones faltantes pequeñas tienen una mejor recuperación, por lo que una imagen que no tenga información suficiente alrededor de los dominios perdidos no se restauraría.

Finalmente, debido a que las imágenes empleadas en los experimentos se cambiaron a escala de grises, y como se observó, no se afectan los resultados de inpainting. Lo que hace evidente que el análisis del trabajo se puede extender a imágenes a color.

8. Bibliografía

- [1] Chan, Tony F., and Jianhong Shen., *Image processing and analysis: Variational, PDE, Wavelet, and Stochastic Methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [2] Chan, T., Esedoglu, S., Park F., y Yip A., *Recent developments in total variation image restoration*, in *Handbook of Mathematical Models in Computer Vision*, Springer, New York, NY, USA, 2005.
- [3] Chris, S. and Breckon, T., *Fundamentals of Digital Image Processing: A Practical Approach with Examples in Matlab*, John Wiley & Sons, Ltd 2011.
- [4] Domínguez Sánchez, Federico C., y Nieves Hurtado Antonio., *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*, Grupo Editorial Patria, 2014.

- [5] Escalera, Sergio., Ayache, Stephane., Wan, Jun., Madadi, Meysam., Güçlü, Umut and Baró, Xavier., *Inpainting and Denoising Challenges*, Springer Science, 2019.
- [6] Fomin, S.V. and Gelfand, I.M.: *Calculus of Variations*, Dover Publ., 2000.
- [7] Gonzalez, Rafael C., and Richard E. Woods., *Digital Image Processing*, Prentice-Hall, Inc. 2006.
- [8] Hoskins. R.F., *Delta Functions Introduction to Generalised Functions*, Woodhead Publishing. 2009.
- [9] Kirsch, Andreas., *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, AVol. 120. Springer Science & Business Media, 2011.
- [10] Lebedev, L.P. and Cloud, M.J.: *The Calculus of Variations and Functional Analysis with Optimal Control and Applications in Mechanics*, World Scientific, 2003.
- [11] Luenberger, David G., and Yinyu Ye., *Linear and Nonlinear Programming Fourth Edition*, (2016).
- [12] Pan, H., Wen, Y.-W., & Zhu, H.-M. *A Regularization Parameter Selection Model for Total Variation Based Image Noise Removal*. *Applied Mathematical Modelling*. doi:10.1016/j.apm.2018.11.032, 2018.
- [13] Pratt, William K., *Introduction to Digital Image Processing*, CRC Press, 2013.
- [14] Rudin, L. I., Osher, S. and Fatemi, E., *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, *Physica D*, vol. 60, no. 1-4, pp. 259-268, 1992.
- [15] Ram P. Kanwal, *Generalized Functions Theory and Technique: Theory and Technique* Birkhäuser, 1998.
- [16] Scherzer, Otmar., *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*, Springer Science & Business Media, 2015.
- [17] Schönlieb, Carola-Bibiane., *Partial differential equation methods for image inpainting*, Cambridge University Press, 2015.
- [18] Strong, David, and Chan, Tony, *Edge-preserving and scale-dependent properties of total variation regularization*, *Inverse Problems*, (2003), 165-188: IOP Publishing Ltd.