



Propuesta de evaluación aplicada al tema de Curvas y Superficies en el Espacio bajo el contexto de la virtualización por la pandemia de la COVID-19 en un curso de Geometría Analítica para la Enseñanza de la Matemática

| Evaluation Proposal for the Topic of Curves and Surfaces in Space in the Context of Virtualization during COVID-19 Pandemic in a Course of Analytical Geometry for the Teaching of Mathematics |

 **Jesús Rodríguez Rodríguez**
jesus.rodriguez@ucr.ac.cr
Universidad de Costa Rica
Costa Rica

 **Eduardo Alonso Arias Navarro**
eduardo.arias_n@ucr.ac.cr
Universidad de Costa Rica
Costa Rica

Recibido: 23 marzo 2022

Aceptado: 10 diciembre 2022

Resumen: En la siguiente investigación educativa se presentan los resultados obtenidos a partir de una propuesta de evaluación en el tema de superficies y curvas en el espacio mediante la construcción de modelos tridimensionales para las piezas de un tablero de ajedrez con superficies cuádricas en un curso de Geometría Analítica para la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Sede de Occidente de la Universidad de Costa Rica como parte de una estrategia didáctica adaptada al nuevo enfoque del modelo educativo de virtualización por lo acontecido con la declaratoria del COVID-19. Este estudio responde a una investigación experimental implementada por una prueba conceptual aplicada como pretest y posttest para validar la propuesta bajo modelos de aprendizaje como el factor de Bao & Redish así como el método dicotómico de Rasch. Además, se implementó un cuestionario para validar aspectos representativos expuestos por los estudiantes del curso que fueron esenciales para el proceso investigativo.

Palabras Clave: Geometría Analítica, COVID-19, virtualización, evaluación, curvas y superficies.

Abstract: In this educational research, the results obtained from an evaluation proposal on the subject of surfaces and curves in space are presented through the construction of three-dimensional models for chessboard pieces with quadric surfaces in an Analytical Geometry course for the mathematics teaching major at Sede de Occidente, University of Costa Rica as part of a didactic strategy in virtue of the adoption of virtual learning in the context of COVID-19. This study responds to an experimental investigation implemented by means of a conceptual test applied as pretest and posttest to validate the proposal under learning models such as the Bao & Redish factor as well as the Rasch dichotomous method. In addition, a questionnaire was implemented to validate salient aspects submitted by the students of the course who were of paramount importance in this investigative process.

Keywords: Analytical Geometry, COVID-19, virtualization, evaluation, curves and surfaces.

1. Introducción

Los efectos causados por el coronavirus Sars-cov-2 en el 2019 (COVID-19) produjo una serie de cambios en el modelo educativo, la Universidad de Costa Rica (UCR) no fue la excepción, debido a que tuvo que acoplar nuevas medidas y una de ellas fue potenciar la virtualización de los cursos.

En el 2009, mediante la Resolución VD-R-8458-2009, la Vicerrectoría de Docencia de la UCR establece como plataforma institucional de gestión de entornos virtuales a Mediación Virtual. Y para el 2016, mediante la Resolución VD-R-9374-2016, se establece el marco de referencia para el desarrollo de la docencia en entornos virtuales en la Universidad de Costa Rica.

Aunque, hace más de una década, la UCR viene generando esfuerzos para el desarrollo de un entorno virtual apropiado, la acogida de buena parte del profesorado ha sido parcialmente aceptada, como señala (Kirkut, 2020):

A pesar de que la institución cuenta con la plataforma Mediación Virtual¹ y que la Unidad Metics², desde hace ya varios años ofrece capacitación para que el personal académico transite hacia una mayor virtualización, no todo el profesorado lo había hecho y, en muchos casos, la plataforma solo era utilizada como repositorio de información (p. 18).

Ya en el 2020 y con la emergencia sanitaria de la COVID-19, la Vicerrectoría de Docencia, establece mediante la Resolución VD-11426-2020 que (León, 2020):

La comunidad docente podrá hacer uso de otros recursos de información y comunicación que tendrán un carácter de apoyo complementario, siempre y cuando se canalicen y se enlacen a través de la plataforma de mediación virtual como registro de actividad académica. Cabe destacar que el uso de estas plataformas complementarias en ningún caso podrá sustituir la oficialidad del sitio institucional: <http://mediacionvirtual.ucr.ac.cr> (p. 3).

Dadas las circunstancias de la emergencia sanitaria, buena parte del personal docente de la UCR se preparó a contra reloj para iniciar lecciones el 14 de abril de 2020, con poca o muy poca preparación para afrontar la enseñanza en formato virtual y con prácticamente ninguna experiencia en evaluación para esta modalidad. Lo que probablemente, fue el motivo de adecuar la evaluación, particularmente en el área de la Matemática, de adaptar las pruebas tradicionales a los recursos ofrecidos por la plataforma de Mediación Virtual configurados a un solo intento y se implementó por parte de los docentes exclusivamente aumentar el número de ítems en los bancos de preguntas para reducir el intento de prácticas fraudulentas.

Sin embargo, y a pesar de los esfuerzos por aumentar la cantidad de preguntas, esto hizo muy poco para evitar la percepción de que estaban ocurriendo todo tipo de malas prácticas dentro de los procesos de evaluación. Preocupación que es compartida y señalada por (Vargas, 2021):

La circunstancia actual de la pandemia obligó a la virtualización masiva de las asignaturas, en un plazo muy corto, lo que llevó a la intensificación del uso del internet y facilitó las malas prácticas de los estudiantes como la copia en los exámenes en línea, suplantación de identidades en la elaboración de pruebas, copia desmesurada de trabajos, entre otros (p. 81).

Ante este panorama educativo (Vargas, 2021) realiza diversas recomendaciones sobre cómo tratar las prácticas fraudulentas, entre las que se encuentra el establecimiento de políticas de cero tolerancias

¹Mediación Virtual es una plataforma de la UCR de trabajo en línea, que permite y facilita al docente la interacción con los estudiantes a su cargo.

²METICS es la Unidad de Apoyo a la Docencia Mediada con Tecnologías de la Información y la Comunicación.

y el replanteamiento de las actividades educativas adecuadas para estas circunstancias. Pero, sobre todo da especial énfasis al trabajo preventivo mediante el establecimiento de códigos de conducta, seminarios sobre plagios y escritura académica adecuada mientras que (Grande de Prado y otros, 2021) señalan que:

Uno de los riesgos en toda evaluación, incluida la online, se encuentra en las prácticas fraudulentas como la copia de respuestas de examen o los plagios. El uso de herramientas de análisis del plagio (como Turnitin, Compilatio, Urkund, etc.) y un buen diseño de pruebas, centrado en competencias en las que lo memorístico no sea el eje central, constituyen un buen punto de partida, aunque evidentemente existen diferentes materias que pueden presentar dificultades adicionales. La flexibilidad y creatividad deben aflorar en este momento, en el que a todas luces recrear tal cual la situación presencial de evaluación en el contexto online es una invitación al desastre (p. 56).

De esta manera, el escenario de la virtualización de la evaluación del proceso educativo y la forma de tratar las prácticas fraudulentas, podemos discernir principalmente dos posturas que no son excluyentes en sí mismas y de hecho ambas son deseables.

Una donde la responsabilidad de mantener prácticas éticas recae principalmente sobre el estudiantado y el profesorado se convierte en un tipo de vigía atento ante toda sospecha de malas prácticas. El problema de esta postura es la enorme cantidad de energía que debe invertir el docente en vigilancia y en llevar procesos académicos que en muchas ocasiones pueden dilatarse por varios semestres.

Y otra, donde el docente debe realizar un análisis previo de los objetivos y contenidos del curso, considerar el acceso y conocimientos que puedan tener los estudiantes sobre softwares, libros, solucionarios y ayudas externas, para luego diseñar una evaluación lo suficientemente creativa que permita minimizar, y si es posible eliminar, las prácticas fraudulentas más comunes. Los problemas de esta propuesta se encuentran principalmente en factores como la libertad que pueda tener el profesorado para proponer cambios en la evaluación del curso, así como la propia creatividad del docente.

Además, otros problemas percibidos por los docentes con la implementación de evaluaciones virtuales recaen en malas prácticas como conformación de grupos de estudiantes que a través de aplicaciones de mensajería comparten información y soluciones de los problemas requeridos en la aplicación de las pruebas y la suplantación de identidad. Así que, como iniciativa para contrarrestar estas situaciones fue necesario implementar una evaluación que no dependa fundamentalmente de exámenes, en cambio que se enfoque en la resolución de problemas que se alejen de los ejercicios más comunes que pueden ser encontrados en solucionarios o libros de texto y que fomente el trabajar en grupo y compartir información como algo deseable y no un problema; además, permitir a los estudiantes demostrar de primera mano los conocimientos adquiridos.

Por tanto, el trabajo colaborativo ha sido medular para ambientes de aprendizaje virtuales, donde (Lucero, 2003) define como:

El conjunto de métodos de instrucción y entrenamiento apoyados con tecnología, así como estrategias para propiciar el desarrollo de habilidades mixtas (aprendizaje y desarrollo personal y social), donde cada miembro del grupo es responsable tanto de su aprendizaje como del de los restantes miembros del grupo (p. 4).

Por ende, bajo esta segunda postura se desarrolló una propuesta didáctica para la evaluación del tema curvas y superficies en el espacio para el curso Geometría Analítica, sigla MA0451, de la Carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente, en la cual, los subgrupos de trabajo debían desarrollar modelos tridimensionales para las piezas de un tablero de ajedrez mediante superficies cuádricas utilizando un software de geometría.

2. Postulados teóricos

2.1. Curso Geometría Analítica (MA0451)

El curso de Geometría Analítica con sigla MA0451, está ubicado en el quinto ciclo del plan de estudio de la carrera 320243 Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Sede de Occidente de la Universidad de Costa Rica, y pretende iniciar al estudiante en las nociones fundamentales de la geometría analítica en el plano y el espacio, enfocando los conceptos hacia el cálculo vectorial y el análisis matemático en varias variables.

Los contenidos que se abordan en el curso se pueden agrupar en los siguientes tópicos:

1. Vectores, rectas y planos
2. Secciones Cónicas
3. Superficies y curvas en el espacio
4. Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

2.2. Superficies y Curvas en el Espacio

La mayor parte del estudio de superficies que se hace en el curso MA0451, se enfoca en analizar cuádricas sin términos mixtos, cuya ecuación cartesiana está dada por la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0,$$

mientras que las curvas son descritas generalmente como intersección de dos superficies cuádricas.

A pesar de que este tema se limita prácticamente al caso mencionado anteriormente, para la mayoría de los estudiantes esta es la primera vez que se enfrentan a la tarea de visualizar superficies y curvas descritas por ecuaciones no lineales de tres variables, lo cual no siempre resulta una tarea sencilla ya que es fácil confundir las diferentes ecuaciones de las superficies al cambiar los coeficientes numéricos en la ecuación cartesiana de las cuádricas.

Habitualmente, el estudio de las superficies se realiza mediante el método de trazas y curvas de nivel, lo cual permite repasar de manera constante los temas de rectas, planos y secciones cónicas, mientras que el estudio de diferentes parametrizaciones de una sección de una superficie o de una curva funciona como introducción a los temas de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas. Sin embargo, para apoyar el trabajo de estos conocimientos es cada vez más frecuente el apoyo de softwares como Winplot o Geogebra para realizar trabajos de verificación.

2.3. Software Winplot®

Winplot® es una aplicación de 32 bit de software gratuito y ejecutable en Windows para trazado de curvas y superficies, desarrollado por el profesor Richard Parris, el mismo se puede descargar en la página oficial ³.

Las razones principales por las que se propuso la utilización de esta aplicación en el curso fueron:

1. Es un software intuitivo y requiere un periodo muy corto de capacitación por parte del usuario.

³Richard Parris (1945-2012): puede consultar el recurso en: <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>.

2. Permite describir las ecuaciones de manera explícita, implícita, parametrizadas, así como el uso de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.
3. Requiere muy pocos recursos computacionales, lo cual lo hace ideal en caso de estudiantes con computadoras poco potentes.

2.4. Geogebra®

De acuerdo con el sitio oficial⁴, GeoGebra es un software de Matemáticas para todo nivel educativo. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo. GeoGebra, con su libre agilidad de uso, congrega a una comunidad vital y en crecimiento. En todo el mundo, millones de entusiastas lo adoptan y comparten diseños y aplicaciones de GeoGebra. Dinamiza el estudio. Armonizando lo experimental y lo conceptual para experimentar una organización didáctica y disciplinar que cruza Matemática, ciencias, ingeniería y tecnología (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics)

3. Metodología

La investigación centra su información en la presentación de una propuesta didáctica en el tema de superficies y curvas como estrategia de evaluación en el curso de Geometría Analítica para la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente.

3.1. Tipo de investigación

La investigación que se llevó a cabo responde a un enfoque cuantitativo, donde se tuvo control sobre las variables de estudio a fin de poder ser analizadas mediante los datos recopilados con modelos estadísticos que permitan posteriormente “realizar juicios científicos inteligentes frente a la incertidumbre y la variación” (Walpole et al., 2012, p. 1).

3.2. Diseño de investigación

El diseño se basó en una propuesta de investigación educativa de tipo experimental, que de acuerdo con (Ruiz, 2012) se pretendió manipular la variable independiente con diseños experimentales, que permitan hacer una predicción al tratamiento educativo bajo un criterio de serie temporal que se enfoca en ver el efecto de la variable dependiente mediada antes y después de la propuesta a un grupo de trabajo sin necesidad de disponer otro de control (Buendía et al., 1998). Para esto, el diseño experimental se centró en una investigación aplicada que busca desde el ámbito educativo mejorar propuestas de enseñanza basada en una intervención controlada que permite evidenciar un “impacto sobre el aprendizaje de los alumnos de un nuevo método para enseñar la lectoescritura o Matemáticas” (Martínez, 2020, p. 97).

Además, se contemplaron aspectos no experimentales que aportaron a la observación sobre el fenómeno analizado, de acuerdo con (Hernández et al., 2014) este diseño es válido dentro de la investigación experimental ya que no interfiere de forma directa con la(s) variable(s) independiente(s) de su efecto con la variable dependiente.

⁴GeoGebra: puede consultar el recurso en: <https://www.geogebra.org/about>.

3.3. Población y muestra

La muestra estuvo representada por 14 estudiantes matriculados en el curso, sin embargo, el análisis de los datos fue recabada por 7 estudiantes que cumplieron con el proceso completo, ya que la prueba utilizada como pretest y postest además del cuestionario fueron realizados como prueba formativa. Con esto se establece que la muestra de análisis recayó sobre el 50 % de la población como una muestra intencionada para validar la propuesta de evaluación brindada en el curso de geometría analítica.

3.4. Propuesta de la estrategia

3.4.1. Desarrollo de las clases

Las clases se desarrollaron de manera virtual en la plataforma de Medición Virtual y reuniones virtuales en Zoom.

Durante la semana se trabajaron dos sesiones, una sincrónica en la que se realizaba la exposición de los conceptos para lo cual se utilizaron las herramientas de Whiteboard de Zoom, una tableta gráfica, fichas de elaboración propia con los contenidos del curso y el apoyo de los softwares Geogebra y Winplot para la comprobación en la visualización de las gráficas, todas las lecciones sincrónicas fueron grabadas y compartidas mediante un link en Medición Virtual. Y otra sesión asincrónica que consistía principalmente en la asignación de listas de ejercicios.

Adicional a estas dos sesiones de trabajo se daba un espacio de consulta de hasta 6 horas semanales, que los estudiantes podían reservar con citas de 20 minutos, mediante un archivo tipo Excel compartido en Drive donde el estudiante debía adjuntar el enlace de la reunión en Zoom, igualmente se les permitía a los estudiantes grabar las citas de consulta si así lo deseaban.

3.4.2. Estrategia de evaluación sumativa

Para el curso se realizó una evaluación sumativa (ver tabla 1) basada principalmente en el trabajo colaborativo en ambientes de aprendizaje virtuales, mediante la siguiente asignación de actividades.

Tabla 1: Desglose de la evaluación del curso MA0451. Fuente: Programa del curso.

<i>Descripción</i>		<i>Porcentaje</i>
Proyecto 1. Vectores, rectas y planos	Trabajo escrito	15 %
	Exposición	15 %
Proyecto 2. Secciones cónicas	Trabajo escrito	15 %
	Exposición	15 %
Proyecto 3. Superficies y curvas en el espacio	Trabajo escrito	15 %
	Exposición	15 %
Prueba corta: Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas		10 %
Total		100 %

Los proyectos se realizaron de manera grupal en subgrupos de 3 a 4 estudiantes. Los grupos en cada proyecto se conformaron de manera aleatoria mediante un sorteo realizado en las clases sincrónicas.

Previo a cada exposición se elegía de manera aleatoria un representante para realizar la presentación y la nota obtenida por el expositor sería asignada al grupo, por lo que era responsabilidad de cada grupo de trabajo velar por la buena preparación de todos sus miembros. Además, las exposiciones se co-evaluaron entre los subgrupos de trabajo y el docente mediante una rúbrica establecida al inicio de la actividad.

3.4.3. Proyecto 3: superficies y curvas en el espacio

El objetivo del proyecto 3 consistió originalmente en aplicar conceptos de curvas, parametrización de curvas, superficies y parametrización de superficies para crear modelos tridimensionales de las piezas de ajedrez utilizando Winplot. Para ello debían realizar las siguientes tareas y presentarlas en el trabajo escrito:

1. Para cada una de las superficies que describe una pieza, debe definir una parametrización con su respectivo dominio de manera que la pieza posea un interior hueco.
2. Para cada una de las curvas generadas por la intersección de las superficies que definen la pieza, debe definir una parametrización con su respectivo dominio.
3. Adjuntar al menos una imagen del modelo de cada una de las piezas del ajedrez.

Para la presentación de los contenidos del tema de superficies y curvas en el espacio por parte del docente del curso, asignación del proyecto, aplicación del pretest y postest así como la exposición del proyecto se siguió el cronograma de trabajo descrito en la tabla 2.

Tabla 2: Cronograma de trabajo para el curso MA0451. Fuente: Programa del curso.

<i>Semana</i>	<i>Actividades</i>
5	Introducción al tema de superficies en el espacio.
6	Explicación y asignación del proyecto de superficies y curvas en el espacio. Actividades de evaluación del tema de secciones cónicas.
7	Tema: Superficies en el espacio.
8	Tema: Curvas en el espacio.
9	Tema: Curvas en el espacio.
10	Aplicación del pretest del tema superficies y curvas en el espacio.
11-14	Desarrollo del tema de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.
15	Aplicación del postest del tema superficies y curvas en el espacio. Exposición del proyecto de superficies y curvas en el espacio.

Es importante aclarar que, a pesar de que se trabajó con Winplot en la primera etapa de curso, los estudiantes solicitaron trabajar con Geogebra ya que estaban más familiarizados. Por lo que, para este proyecto se permitió el uso exclusivo de Geogebra.

3.5. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

En esta investigación las técnicas utilizadas fueron una prueba conceptual formativa (pretest y postest), ver anexo A, que permitiera la recopilación y análisis de datos y un cuestionario para la valoración de otros aspectos que se ejecutaron en función de los objetivos planteados con el objeto de estudio.

3.5.1. Test conceptual

La prueba conceptual consiste en un instrumento de estabilidad aplicado como pretest y postest, es decir, los estudiantes ejecutaron la prueba en dos momentos distintos, es decir, uno previo a la propuesta educativa y el otro posterior a la realización de este.

La prueba se dispuso de 5 ítems con un diseño de respuesta de selección única basada en el tema de curvas y superficies en el espacio, misma que fue elaborada por el docente a cargo del curso y validada antes de su ejecución por docentes de la Sección de Matemática de la misma institución. Dicha prueba fue aplicada a través de la plataforma de Mediación Virtual de la UCR, donde se configuró para un tiempo estimado de 60 minutos y fue adaptada para un solo intento bajo la modalidad de aleatorizar preguntas y respuestas, lo que garantizó una mayor variabilidad y nivel de confianza del instrumento al momento de la ejecución de la prueba tanto como pretest y postest para medir el factor de ganancia conceptual con la ejecución del tratamiento educativo aplicado en este caso con el proyecto de superficies y curvas en el espacio a través de los modelos tridimensionales de las piezas de ajedrez.

3.5.2. Cuestionario

De acuerdo con (Barrantes, 1999. p. 187) este instrumento permite obtener "... opiniones, actitudes, creencias, intenciones, impactos, distribuciones, actividades, hábitos, condiciones, ingresos, entre otros". De esta forma se permite considerar aspectos relevantes que van más acorde a la realidad social del estudiantado y el contexto en donde se desenvuelve.

El instrumento utilizado estuvo conformado por 15 preguntas, con 13 preguntas de selección única y 2 de respuestas abiertas relacionadas con la satisfacción de la propuesta aplicada en el curso. Para su aplicación se utilizó el recurso de encuesta que dispone el aula de Mediación Virtual y la misma se aplicó una vez finalizado el curso.

Cabe destacar que el instrumento fue elaborado por los autores, basado en el contexto educativo del curso y la actividad propuesta, además su validación fue igualmente realizada por docentes de la Sección de Matemática de la Institución.

3.6. Factor de concentración de Bao & Redish

El modelo estadístico de Bao y Redish permite determinar la concentración de análisis generada a partir de los resultados del pretest y el postest a fin de analizar la propuesta educativa con los perfiles conceptuales en los estudiantes.

Para ello, (Bao y Redish, 2001) miden la distribución en un factor normalizado cuyos valores se extienden desde $[0,1]$ con un 0 para un factor de concentración bajo y 1 para un máximo posible de respuesta en el factor, por tanto, los patrones de respuestas se posicionarán dentro de este rango y con ello se estableció los patrones de respuesta L, M y H por sus siglas en inglés (Low, Medium y High) que significan bajo, medio y alto. De esta forma, al intercambiar el factor de concentración y las

puntuaciones obtenidas por los estudiantes en las pruebas se establece una medida para el desempeño de estos mediante los niveles LL, LH, MM, LM, MH y HH. (Arias, 2021).

Considere la Tabla 3 donde se evidencia una categorización de los niveles de respuesta en función de un estilo y sus implicaciones.

Tabla 3: Combinación de la concentración y la puntuación para establecer los modelos del factor de concentración. Fuente: Becerra, 2018 (p. 87).

<i>Estilo</i>	<i>Nivel</i>	<i>Implicaciones de la puntuación y la concentración</i>
Un modelo	HH	Un modeo correcto
	LH	Un dominante modelo incorrecto
Dos modelos	MM	Dos modelos populares, uno correcto y otro incorrecto
	LM	Dos posibles modelos incorrectos
Sin modelo	LL	Situación aleatoria

El factor de concentración como función de la puntuación en una respuesta de (Bao y Redish, 2001) se determina con la siguiente expresión:

$$C(P) = \left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-1} \right) \left(\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (n_i)^2}{N}}}{N} - \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \quad (1)$$

De acuerdo con la ecuación 1, “ m es el número de opciones en las respuestas, N el número de estudiantes y los n_i representan el número de estudiantes que escogieron la opción i . Se define que el número mínimo de opciones de respuestas válidas para el factor de concentración como $m = 2$, de esta manera, se define la restricción de $N > m$ para que no se indetermine la ecuación” (Arias, 2021, p. 58).

3.7. Factor de error Gamma

Por otra parte, se tiene el factor del error Gamma (Γ), desarrollado igualmente por (Bao y Redish, 2001) para obtener información acerca de las respuestas que no tienden a salir bajo el modelo correcto de parte del estudiantado, es decir, su análisis está enfocado en “la distribución de las respuestas incorrectas del grupo, para poder determinar si en un grupo existe alguna concentración de errores que permita evidenciar un patrón que lleve a la identificación de concepciones erradas generales” (Becerra, 2018, p. 90).

Por tanto, el cálculo de valores está en un rango $[0, 1]$ donde el error $\Gamma = 0$, refiere a una concentración de respuestas incorrectas y no se identifica un concepto errado mientras que un $\Gamma = 1$ tendría una implicación de una respuesta incorrecta centrada a un error absoluto y se infiera que es posible la identificación de un concepto erróneo de parte de los estudiantes.

El formalismo matemático desarrollado (Bao y Redish, 2001) se sigue de la siguiente manera:

$$\Gamma(P) = \left(\frac{\sqrt{m-1}}{\sqrt{m-1}-1} \right) \left(\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (n_i)^2 - S^2}{N - S}}}{N - S} - \frac{1}{\sqrt{m-1}} \right)$$

Para este caso, m representa una vez más el número de opciones de respuestas, N el número de estudiantes y S representa la cantidad de aciertos, misma que se entiende como $S = \frac{\text{número de respuestas correctas}}{N}$, esto permite que se genere un gráfico con el modelo en función del para dar cuenta de un análisis sobre los conceptos de interés de parte del estudiantado bajo la aplicación del pretest y postest.

3.8. Método de Rasch

Diseñado por Georg Rasch, este modelo dicotómico permite “tomar o rechazar las hipótesis del modelo de contraste en el terreno de la tendencia evaluativa” (Tristán, 2013, p. 66), es decir, se analiza la probabilidad de acierto en una respuesta brindada por el estudiante ante una prueba de selección múltiple a partir de un estímulo.

El modelo requiere un formalismo lógico matemático que se describe como:

$$P = p(X = 1) = \frac{e^{\theta - \delta}}{1 + e^{\theta - \delta}}$$

Donde el parámetro θ se dice que este representa la habilidad del estudiante y el mismo se determina bajo la siguiente expresión:

$$\theta = \ln\left(\frac{s}{1-s}\right)$$

Luego, s representa el acierto obtenido por el grupo y para cuantificar la probabilidad del modelo de Rasch, X se entiende como una variable aleatoria que describe los resultados de los ítems. Se dice entonces que un caso donde $X = 1$ la respuesta es correcta, de lo contrario se tiene una respuesta incorrecta cuando $X = 0$. Por otra parte, el δ se conoce como el parámetro de dificultad sobre cada pregunta o ítem y el mismo establece una curva característica al relacionar el valor de Probabilidad P en función de la habilidad del estudiante θ tal y como se observa en la Figura 1.

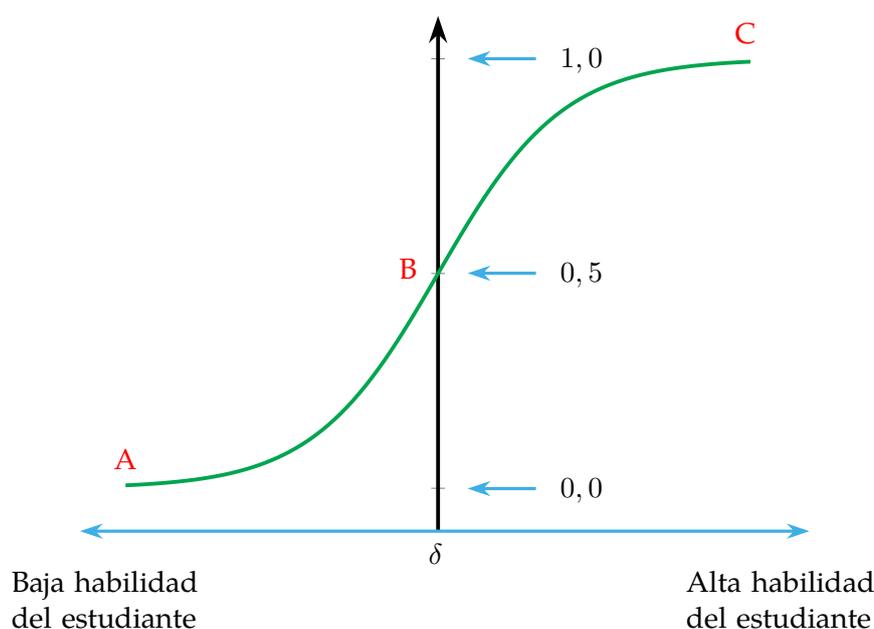


Figura 1: Gráfico de probabilidad en función de la dificultad del ítem basado en el modelo de Rasch. Fuente: Elaboración propia.

4. Análisis de datos

Como producto de la evaluación aplicada en el curso MA0451 se muestran algunas de imágenes elaboradas por los estudiantes en el anexo B. Para consultar los trabajos generados por los estudiantes de forma completa se pueden acceder través del enlace https://drive.google.com/drive/folders/1-ZRIBLqphp16xvKoUD44yjdyOnm_H8gT?usp=sharing donde se evidencian los diseños abordados por los estudiantes con el proyecto 3 de curvas y superficies en el espacio.

Además, se presenta el análisis de resultados recopilados a partir de la prueba conceptual y el cuestionario para validar la propuesta realizada en el proyecto 3 por los estudiantes.

4.1. Análisis del Factor de Concentración

Lo establecido por (Bao y Redish, 2001) permite considerar el efecto que tuvo la propuesta evaluativa en los estudiantes a través de la aplicación del pretest y el postest. Observe detalladamente la Tabla 4 que ilustra la implicación y su nivel descrito en la Tabla 3. Es notorio destacar la importancia que presentó la pregunta 1, 3 y 4, ya que mantienen un patrón destacado y de la misma forma la pregunta 2 y 5 evidencia un leve decaimiento a la zona de posibles modelos respuestas incorrectas.

Tabla 4: Patrón de cambios en las respuestas de los estudiantes con el factor de concentración al implementar la propuesta del proyecto educativo. Fuente: Elaboración propia.

Pregunta	Respuesta correcta	Pre-test			Pos-test			Cambio
		Puntuación	Concentración	Patrón	Puntuación	Concentración	Patrón	
1	B	0,43	0,25	MM	0,57	0,25	MM	Igual en alto
2	D	0,57	0,31	MM	0,43	0,18	LM	Bajó moderadamente
3	D	0,29	0,03	LL	0,71	0,54	MH	Aumentó considerablemente
4	C	0,71	0,48	MH	0,86	0,74	HH	Excelente
5	B	0,43	0,31	MM	0,43	0,18	LM	Bajó moderadamente

Desde una perspectiva más analítica, al inicio de aplicar la propuesta, el estudiantado con el pretest reflejó un 60 % con un patrón MM, esto establece una respuesta con dos modelos populares, uno correcto y otro incorrecto, luego un 20 % en una condición excelente (HH) con un modelo de respuesta correcta y apenas 20 % en un patrón LL, es decir, en una condición aleatoria que no define nada concreto.

Por su parte, el postest, es decir, la prueba aplicada una vez que se implementó la actividad reflejó una condición del 40 % hacia el patrón de un modelo (HH y MH) y un 60 % en dos modelos (MM y LM) siendo un escenario más favorable ya que evidencia cambios destacados para el factor de concentración.

Además, en la Figura 2 se evidencia un claro desplazamiento de los puntos de dispersión del pretest en comparación a los puntos del postest, donde también se hace énfasis al patrón de nivel de los valores

promedios tanto del pretest como el postest, mismo que está representado por el vector característico en el plano y se entiende como un aporte valioso con la implementación de la propuesta evaluativa, ya que el modelo de concentración sobre el aprendizaje del grupo analizado es significativo y contribuye al proceso del curso en el tema del proyecto 3, dado que el “diferencial semántico nos mostró aspectos importantes de cómo los estudiantes perciben el aprendizaje” (Kane et al., 2016, p.6).

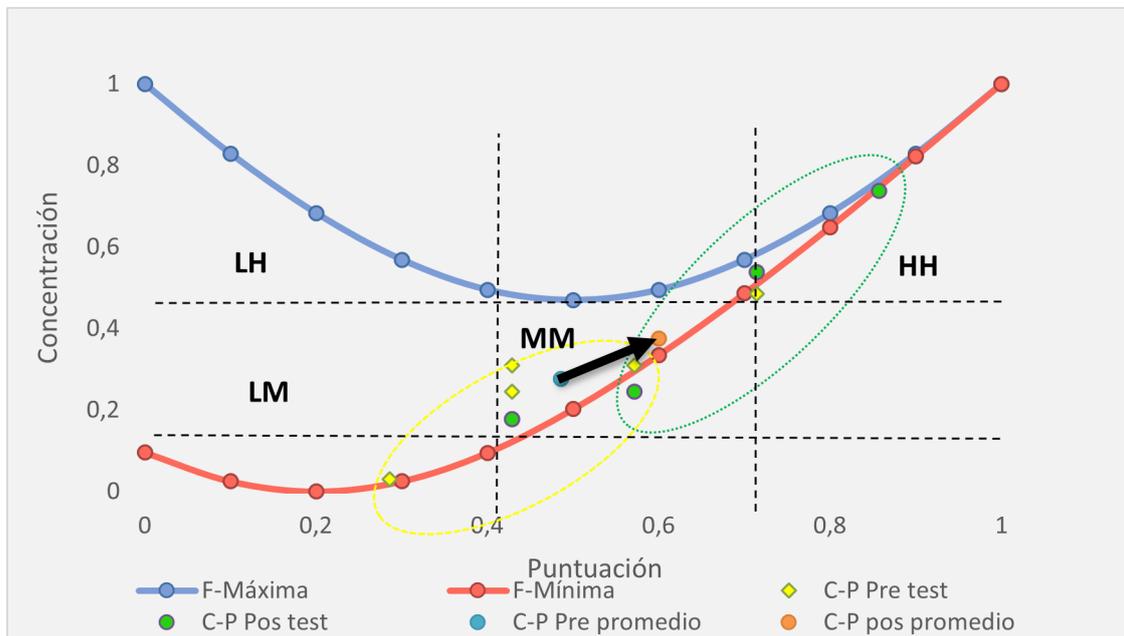


Figura 2: Análisis del Factor de Concentración en función de la Puntuación para el grupo en general con los resultados aplicados del pretest y postest. Fuente: Elaboración propia.

En el caso puntual de la pregunta 3 y 4, es destacable como el grupo obtuvo una considerable mejoría con el factor de concentración, es decir, hubo una ganancia conceptual del tema de las superficies con la aplicación en el postest, ya que de acuerdo con la Figura 3 se evidencia un diferencial semántico relevante con el vector trazado en el plano. Siendo este nuevamente un escenario positivo para el proceso de enseñanza y aprendizaje con la propuesta evaluativa implementada en el curso de geometría analítica.

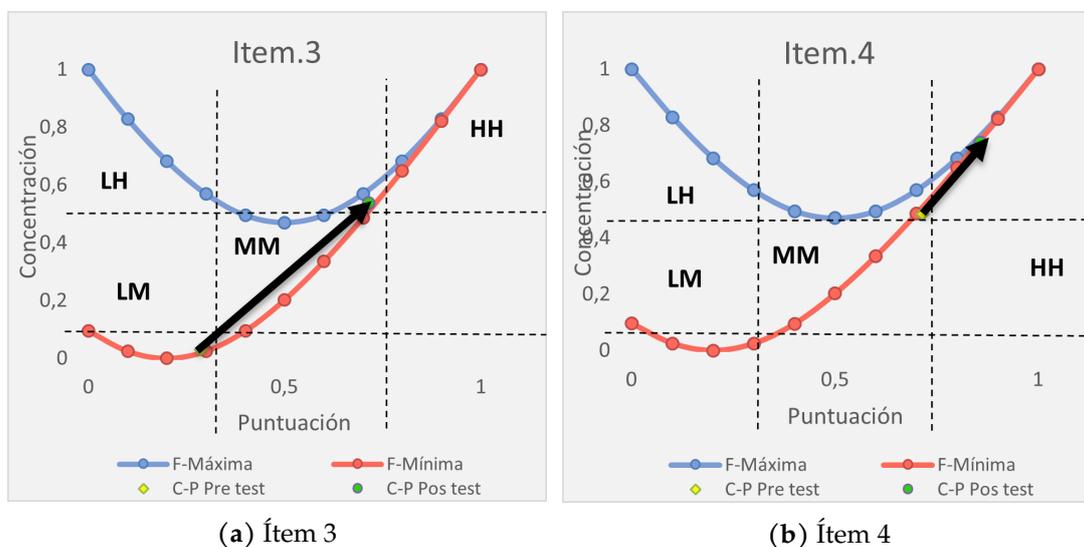


Figura 3: Análisis del Factor de Concentración en función de la Puntuación para el ítem 3 y 4. Fuente: Elaboración propia.

Analizando el caso de la pregunta 3 se le solicitó al estudiante identificar la gráfica de un sólido dado por la intersección de las regiones definidas por las inecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4 \\ 1 \leq x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \\ x^2 + y^2 \leq z \end{cases}$$

mismo que fue comparado con la gráfica de otros sólidos similares, que se podían obtener interpretando de manera incorrecta las desigualdades o bien figuras que se podría obtener mediante la intersección de las superficies omitiendo las desigualdades, a fin de que el estudiante comprendiera que el sólido representado correspondía al descrito en la Figura 4.

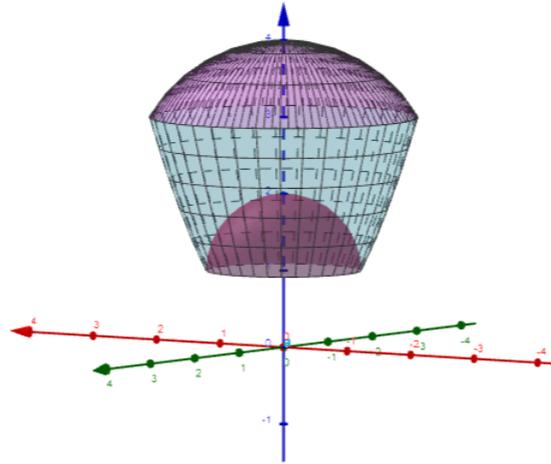


Figura 4: Gráfico del sólido requerido para el ítem 3 de la prueba. Fuente: Elaboración propia

Por su parte, en la pregunta 4 se disponía de una superficie parametrizada descrita por la función:

$$\begin{aligned} s &: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ s(u, v) &= (\cos(u), v, \sin(u)) \end{aligned}$$

Para este ítem se solicitaba identificar la gráfica de la superficie, siendo la forma correcta a la superficie la Figura 5.

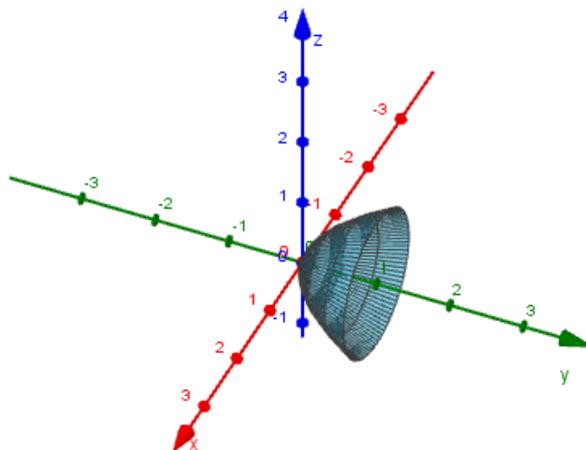


Figura 5: Superficie parametrizada para el ítem 4 de la prueba. Fuente: Elaboración propia.

4.2. Análisis del Factor Gamma

El análisis asociado al factor gamma se centra en la distribución de los errores o respuestas incorrectas, es decir no precisa al valor asociado de la puntuación con las respuestas correctas. En la Tabla 5 se ilustra un resumen detallado por pregunta para la prueba aplicada como pretest y posttest siguiendo los planteamientos de (Bao y Redish, 2001).

Tabla 5: Concentración de respuestas erradas en el factor gamma para el grupo general al implementar el pre test y pos test. Fuente: Elaboración propia.

Pregunta	Respuesta correcta	Información						Conclusiones			
		Pre-test			Pos-test			Γ pre	Γ post	Diferencia	Variación
		Acierto	Puntuación	Γ	Acierto	Puntuación	Γ				
1	B	3	0,430	0,50	4	0,570	0,00	0,5	0	0,5	Disminuyó ligeramente
2	D	4	0,570	0,40	3	0,430	0,31	0,4	0,31	0,09	Disminuyó ligeramente
3	D	2	0,290	0,05	5	0,710	1,00	0,05	1	0,95	Aumentó considerablemente
4	C	5	0,710	0,31	6	0,860	1,00	0,31	1	0,69	Aumentó considerablemente
5	B	3	0,430	0,68	3	0,430	0,31	0,68	0,31	0,37	Disminuyó ligeramente

De los resultados anteriores se puede inferir que la concentración en los errores para las preguntas 1, 2 y 5 las variaciones obtenidas con el posttest no presentan una desviación de Γ cercana a 1, por lo que no es posible detectar un concepto errado en el grupo.

Por el contrario, en la Figura 6 se aprecia una desviación cercana a 1 en la pregunta 3 y 4, que, a pesar de haber sido las preguntas con mejor diferencial semántico en el factor de concentración, también evidencia un concepto errado para el grupo.

Cabe destacar que para el caso de la pregunta 3, el error asociado fue que los estudiantes que fallaron no interpretaron las regiones definidas por las desigualdades en las inecuaciones, en cambio solo imaginaron las superficies eligiendo una opción que parecía tener coherencia, eligiendo la gráfica que se muestra en la Figura 7, dejando en claro que algunos estudiantes tienen problemas para interpretar la intersección de regiones “externas” e “internas” definidas por inecuaciones de cuádricas.

En el caso del ítem 4, no es posible hacer una interpretación del error asociado a pesar del resultado destacado en el factor gamma, debido a que solo un estudiante falló la pregunta interpretando la superficie como una semiesfera vertical como se describe en la Figura 8.

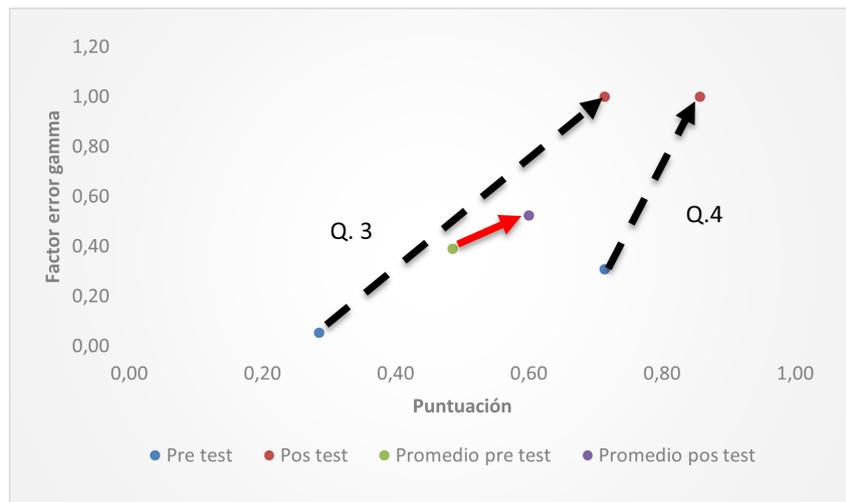


Figura 6: Análisis del Factor de error Gama en función de la Puntuación para el grupo en general al implementar el pretest y pos test de la pregunta 3 y 4 y promedio general. Fuente: Elaboración propia.

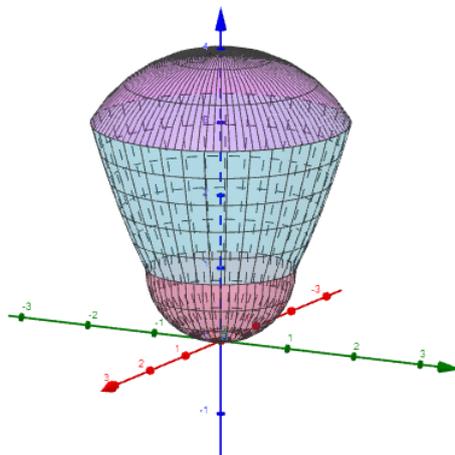


Figura 7: Superficie asociada a las respuestas del ítem 3 de la prueba. Fuente: Elaboración propia.

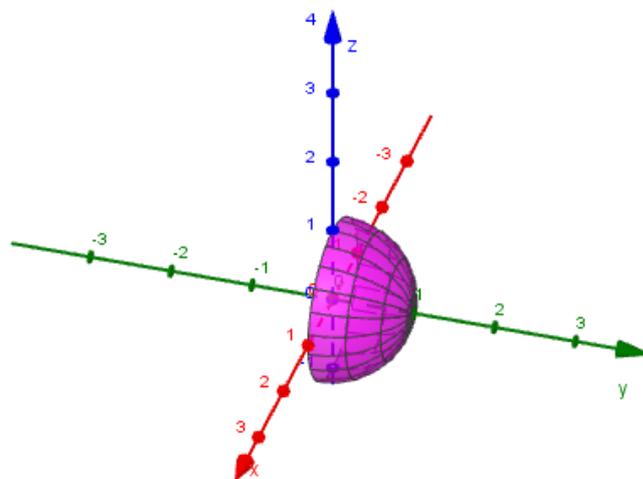


Figura 8: Superficie asociada a las respuestas del ítem 4 de la prueba. Fuente: Elaboración propia.

4.3. Análisis de Rasch

Por su parte, para el análisis de Rasch se consideró analizar de forma general al medir el parámetro de habilidad en función del resultado obtenido por todo el grupo de estudiantes y no precisamente por cada estudiante como se suele acostumbrar a trabajar este método dicotómico (ver tabla 6), por ende, las curvas características se obtendrán de forma invertida en comparación con la señalada en la Figura 1.

Tabla 6: Parámetros de habilidad en las diferentes preguntas del test aplicado. Fuente: Elaboración propia.

<i>tes</i>	<i>Cantidad de respuestas acertadas</i>	<i>Puntuación</i>	<i>Parámetro de habilidad</i>	$\Delta\theta$
Pre	3	0,428571	-0,287682	0,575364
Pos	4	0,571428	0,287682	
(a) Pregunta 1 del grupo 1				

<i>tes</i>	<i>Cantidad de respuestas acertadas</i>	<i>Puntuación</i>	<i>Parámetro de habilidad</i>	$\Delta\theta$
Pre	4	0,571428	0,287682	-0,575364
Pos	3	0,428571	-0,287682	
(b) Pregunta 2 del grupo 1				

<i>tes</i>	<i>Cantidad de respuestas acertadas</i>	<i>Puntuación</i>	<i>Parámetro de habilidad</i>	$\Delta\theta$
Pre	2	0,285714	-0,916290	1,832581
Pos	5	0,714285	0,916290	
(c) Pregunta 3 del grupo 1				

<i>tes</i>	<i>Cantidad de respuestas acertadas</i>	<i>Puntuación</i>	<i>Parámetro de habilidad</i>	$\Delta\theta$
Pre	5	0,714285	0,916290	0,875468
Pos	6	0,857142	1,791759	
(d) Pregunta 4 del grupo 1				

<i>tes</i>	<i>Cantidad de respuestas acertadas</i>	<i>Puntuación</i>	<i>Parámetro de habilidad</i>	$\Delta\theta$
Pre	3	0,428571	-0,287682	0
Pos	3	0,428571	-0,287682	
(e) Pregunta 5 del grupo 1				

En la Tabla 7 se representa las variables establecidas para la ecuación 4 y 5, de forma que se delimito el parámetro de habilidad y el rango de aciertos establecidos en la prueba.

Tabla 7: Concentración de respuestas erradas en el factor gamma para el grupo general al implementar el pre test y pos test. Fuente: Elaboración propia.

<i>Valores mínimos y máximos en la habilidad en función de la puntuación</i>						
	<i>Valor mínimo posible de acierto</i>	<i>Parámetro de habilidad</i>	<i>Valor medio de acierto</i>	<i>Parámetro de habilidad</i>	<i>Valor máximo posible de acierto</i>	<i>Parámetro de habilidad</i>
Pre test	0,142857	-1,79176064	0,5	0	0,8571	1,79140951
Post test	0,142857	-1,79176064	0,5	0	0,8571	1,79140951

Posteriormente, se tiene los parámetros de habilidad aplicados a la prueba por cada uno de los ítems, estableciendo la condición necesaria para determinar el grado de probabilidad de acierto del grupo sobre cada pregunta o ítem.

De acuerdo con la Figura 9, se puede hacer una comparación directa que tuvo cada ítem del pretest al postest. Sin embargo, observe detalladamente donde se evidencia un avance en el nivel de probabilidad al responder correctamente sobre el ítem 1, 3 y 4, lo que coincide para la pregunta 3 y 4 analizada con el factor de concentración, es decir, la función Rasch presenta un resultado alentador a la propuesta, ya que el aumento sobre la curva característica es de carácter significativo y contribuye como validación para afirmar que la propuesta evaluativa del proyecto 3 en el tema de curvas y superficies en el espacio ha sido relevante para el curso MA0451.

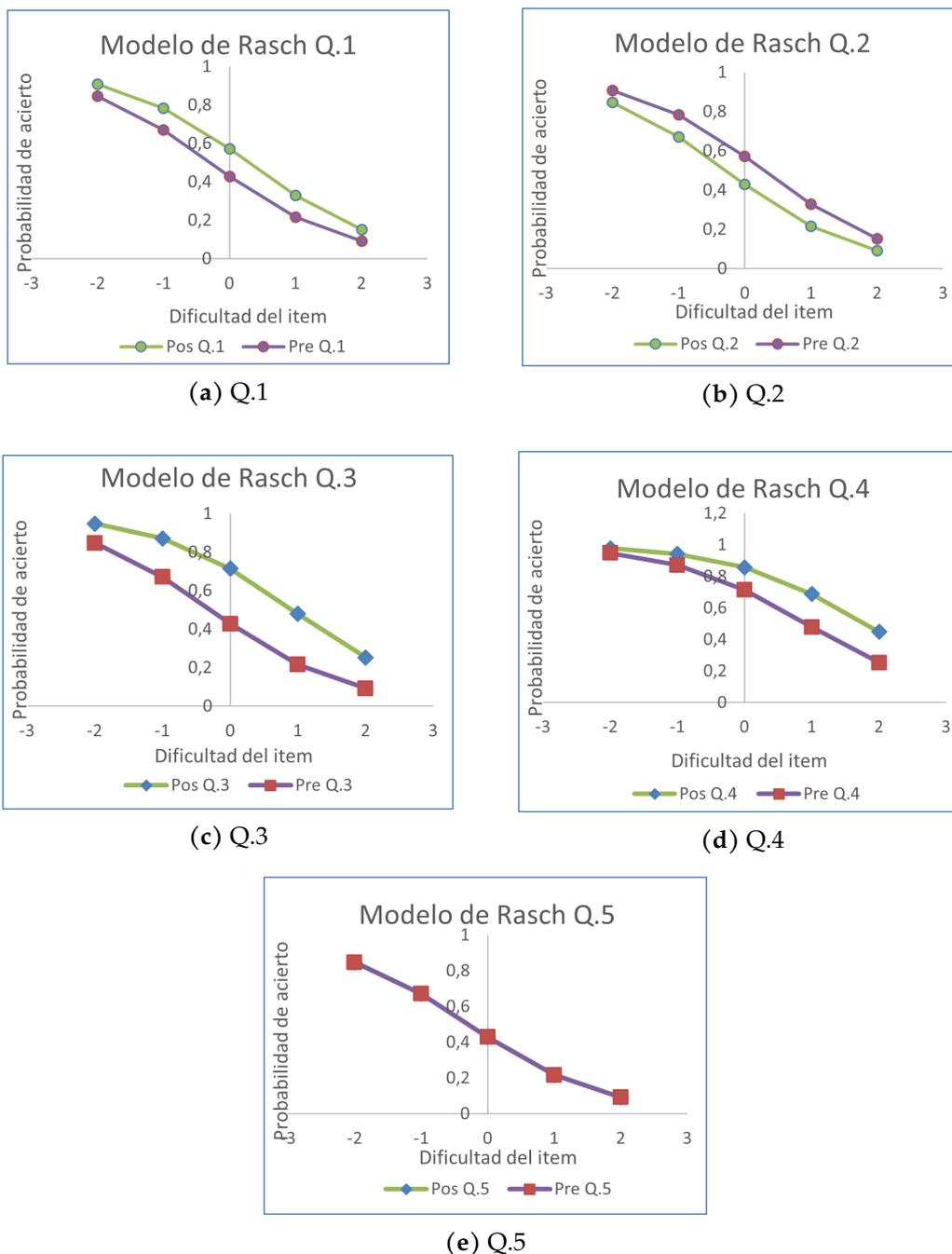


Figura 9: Análisis de la probabilidad del acierto en función de la dificultad del ítem para el modelo de Rasch (caso dicotómico) en cada uno de los ítems de la prueba. Fuente: Elaboración propia.

No obstante, la curva presentada en el ítem 5 no define mayor argumento dado que sus condiciones se mantuvieron constantes, por el contrario, el ítem 2 si evidenció una disminución, mismo que se relaciona con el resultado de la Tabla 4 al presentar una tendencia de caída en el patrón del factor de concentración de MM a un LM.

Para el caso del ítem 2, se le presentó a los estudiantes la Figura 10 y se les pidió determinar las inecuaciones que describían el sólido.

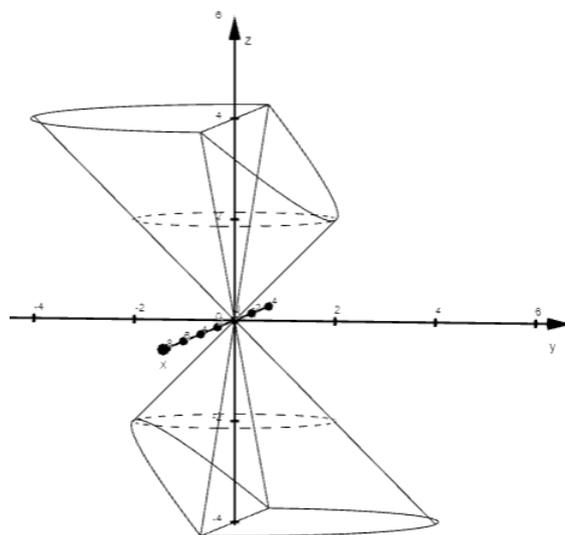


Figura 10: Superficie asociada a la pregunta del ítem 2 de la prueba. Fuente: Elaboración propia.

Para este caso, el grupo tuvo la mayor confusión al interpretar erróneamente las inecuaciones con los planos que cortan transversalmente el cono. Aunque las razones de porqué en esta pregunta bajaron la cantidad de respuestas correctas pueden ser diversas, debemos señalar que el tema de rectas y planos en el espacio fue el primero que se desarrolló en el curso por lo que cronológicamente esto pudo repercutir entre el momento que se aplicó el pretest y el postest los cuales se hicieron con 5 semanas de diferencia.

4.4. Apreciaciones del cuestionario empleado

Respecto a los resultados recopilados con el cuestionario como instrumento complementario, es evidente que de acuerdo con la tabla 8 se obtienen valoraciones del 80 % distribuidas en la escala de 4 y 5, siendo estos los grados de aceptación más altos o esperados para validar la propuesta evaluativa implementada en el curso MA0451, con excepción de los puntos relacionados con el uso del software.

De igual manera, el aspecto menos valorado efectivamente por los estudiantes se centró en el software empleado, ya que durante el proyecto los estudiantes tuvieron alguna dificultad con el uso del Winplot, algunas opiniones respecto a este criterio fueron destacados en las tablas 9 y 10 donde los estudiantes hacen referencia a que se deben suministrarles mejor preparación previamente para el uso de este tipo de software o bien emplear paquetes ya conocidos como fue el caso con el uso de Geogebra.

Otros aspectos para destacar de la propuesta evaluativa fueron expuestos por los estudiantes en la Tabla 9, donde se reconoce de forma positiva el cambio evaluativo con este tipo de propuestas, acordes a un nuevo paradigma educativo y a su vez se traza el reto de poder implementar esto en diferentes contenidos para la enseñanza de la Matemática.

Tabla 8: Aspectos valorados por los estudiantes con la utilidad del proyecto educativo. Fuente: Elaboración propia.

<i>Aspecto o criterio evaluado</i>	<i>Escala</i>				<i>Totalmente de acuerdo (5)</i>
	<i>Totalmente en desacuerdo (1)</i>	<i>En desacuerdo (2)</i>	<i>Ni en desacuerdo ni acuerdo (3)</i>	<i>De acuerdo (4)</i>	
Considero que el tiempo asignado para el desarrollo de cada uno de los proyectos es apropiado.			40 %	60 %	
Me sentí identificado(a) con la actividad realizada con los proyectos.			20 %	80 %	
Considero que el software empleado para los proyectos fue simple de usar y aplicar.		20 %	20 %	60 %	
Me parece que las guías de instrucciones son claras.			20 %	40 %	40 %
Los datos obtenidos en el software me permitieron alcanzar el objetivo planteado con los proyectos.			20 %	40 %	40 %
Al trabajar con los proyectos comprendí lo que estaba haciendo.				20 %	60 %
Al trabajar en los proyectos pude comprobar el principio matemático que se buscaba.				20 %	60 %
Considero que las habilidades adquiridas fueron valiosas en mi aprendizaje.				20 %	60 %
Considero que el uso del software me permitirá realizar actividades similares en otras aplicaciones Matemáticas.			40 %		60 %
Me gustaría usar este tipo de recurso educativo en otros cursos.			20 %		80 %
Considero que la incorporación de proyectos es importante en el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática.				20 %	80 %
Considero que realizar modelos geométricos de manera virtual por medio de proyectos facilitó mi aprendizaje.			20 %	20 %	60 %
En general me siento satisfecho(a) con el uso de este tipo de proyectos en el curso de geometría analítica.			20 %		80 %

5. Conclusiones

De acuerdo con lo planteado en la investigación es importante recalcar los siguientes aspectos:

- Los docentes están en el compromiso de fomentar la incorporación de propuestas relacionadas con experiencias didácticas lúdicas como estrategia para la enseñanza de la geometría analítica, por lo que es necesario hacer uso de actividades motivadoras y significativas en la evaluación de un curso a fin de despertar el potencial de las y los estudiantes.
- Los estudiantes necesitan motivación e integración hacia el tópico matemático (geometría analítica), mediante una estrategia motivadora y agradable como la de los juegos didácticos, que les permita lograr el aprendizaje por su propio esfuerzo, incentivando la autoestima, la perseverancia, la motivación al logro, los cuales son valores esenciales en la formación del estudiante.
- El factor de Bao & Redish demuestra un diferencial semántico efectivo en el grupo analizado, lo que representa una validación significativa para el proceso de enseñanza y aprendizaje con la

Tabla 9: Cuadro de opinión de los estudiantes con respecto al proyecto educativo presentado durante la pandemia ocurrida por el COVID-19. Fuente: Elaboración propia.

<i>¿Cómo valora este tipo de recursos educativos para realizar aplicado para situaciones como las que estamos viviendo (emergencia por COVID-19)?</i>	
<i>Estudiante</i>	<i>Comentarios</i>
1	Me parece valioso ya que en esta pandemia no hay que limitar el aprendizaje. si se tiene una aplicación o software hay que usarla para entender los conocimientos adquiridos. No usar Winplot porque es muy complicado de usar GeoGebra es más interactivo.
2	Creo que este curso fue uno de los que fue más innovador y se buscó un recurso para adaptarse a la virtualidad de buena manera, hay que reconocer al docente la creatividad para presentar los proyectos y que se utilice de manera que se ponga en práctica lo visto en clases, fue una buena experiencia y fue agradable, considero que fue muy provechosa y una muestra de demostrar conocimiento y de una manera más llamativa, me parece bien que sea un mismo proyecto para todos ya que así todos tienen el mismo nivel de dificultad y no van a haber unos más fáciles que otros, en resumen me parece una buena actividad y la recomendaría.
3	Me pareció distinto, pero muy bonito ya que se usó una forma diferente a lo magistral y fue muy bien planteado por el profesor, porque nos hacía plasmar la. Materia en distintos proyectos que a su vez era de interés.
4	Es útil y diferente, capta la atención del estudiante y el aprendizaje es más dinámico.
5	Me parece que para el estudiante es mejor, ya que no se enfrenta al estrés y ansiedad que provoca una prueba en un tiempo de 3 horas (donde se debe escanear, revisar que todo para que se aprecie bien) y que es cansado estudiar varias horas (muchos solo estudian para la evaluación) y con el simple hecho de estar aislado, es agotador, muchos estudiantes no aguantan la presión de pensar que si no pasan una prueba no van a pasar el curso porque la mayoría de los cursos de mate son así con tres exámenes y pruebas cortas. Los proyectos dan la oportunidad de enfrentarse a un problema en grupo, donde habrá dificultades para llegar a un acuerdo y saber que se realizará, pero se da el espacio para investigar, corregir y otros.

Tabla 10: Cuadro de opinión de los estudiantes con respecto a los problemas o recomendaciones para el proyecto educativo desarrollado en el curso. Fuente: Elaboración propia.

<i>¿Cuáles son los principales problemas que se le presentaron al emplear este tipo de trabajo basado en proyectos?</i>	
<i>Estudiante</i>	<i>Comentarios</i>
1	El uso de Winplot hace muy lento y tedioso los proyectos, es mas no entiendo por qué en clases siempre se usaba GeoGebra y en los proyectos Winplot creo que es contradictorio. Es mejor utilizar solo un software que permite estandarizar el aprendizaje.
2	A veces no se sabía cómo hacer las cosas, ya que no se comprendía del todo la materia vista en clases, creo que brindar unos videos donde se explique detalladamente los pasos a realizar es útil, por ejemplo en el último proyecto se dificulto mucho la intersección de curvas al estar las figuras rotadas y no teníamos una fuente confiable para consultar (aparte del docente claramente), si bien en internet se puede encontrar no todo es fiable o viene explicado el porqué de las cosas, además puede que hayan estudiantes que no aportaron lo suficiente, que no hayan participado y hayan afectado al grupo, el proyecto se puede dividir en partes, por lo que unos estudiante harían una parte y otro el resto y no se estaría practicando una parte de la materia, además que hay compañeros que pueden hacer las cosas mal, sacadas de algún lugar no fiable o hacer el proyecto de una manera que no sea la deseada por el docente, ya sea utilizando otro media o herramienta indeseada que facilite el trabajo y no se ponga en práctica el tema deseado por el docente.
3	Al principio la falta de una computadora, puesto que no contaba con una tuve muchos problemas con el proyecto 1 por esa situación, luego pues por falta de conocimientos, pero se han adquirido con formé se avanza en los proyectos a utilizar nuevas aplicaciones.
4	No se aborda toda la materia con el proyecto, el aprendizaje se limita al proyecto, se podría reforzar esa parte.
5	Como el todo el proyecto el principal desafío es que todos los integrantes del grupo aporten la misma cantidad de tiempo dedicado para dicho proyecto, y también cuando en los integrantes existen más de dos personas con un carácter dominante donde ninguno de los dos quiere ceder para realizar de forma el problema planteado o en otro caso que no ninguno quiera realizar nada. En muchas ocasiones es difícil pensar que se podría aplicar para el proyecto, pero con investigación y repaso de materia se logra.

propuesta evaluativa empleada en el curso de Geometría Analítica.

- El método de Rasch permite establecer como la probabilidad del grupo de estudiantes conforme realizaron el proyecto de superficies y curvas en el espacio aumentó progresivamente en los ítems 1, 3, 4 y 5 realizados tanto en el pretest como el postest, dado que se muestra en la ilustración 9 como la tendencia del pos test (línea verde) se sobre pone sobre la tendencia del pre test salvo el ítem 5 que no se alteró y a su vez permitió entender algunas debilidades señaladas por los estudiantes como el caso del ítem 2 donde se dio el escenario contrario donde el pos test no reflejó un aumento de probabilidad en cuanto a la habilidad del grupo de estudiantes.
- Los estudiantes valoraron mediante el cuestionario la propuesta evaluativa empleada en el curso como agradable, fueron críticos en que el docente debe adecuar no solo la propuesta sino adecuar bien la secuencia con el uso de software, debido a que para ellos es fundamental conocer adecuadamente las herramientas tecnológicas.

6. Recomendaciones

Los instrumentos de recolección de datos como el pretest y postest son esenciales como instrumento de validación en el aprendizaje significativo de la investigación educativa, sin embargo, es esencial otorgar un porcentaje de evaluación del curso para que todos los estudiantes se sientan comprometidos para realizar las pruebas.

Aunque los resultados son un escenario aceptable, es necesario replicar estas estrategias de evaluación en grupos con mayor cantidad de estudiantes para someter a nuevos resultados estadísticos y con ello validar este tipo de propuesta con el aprovechamiento en el aprendizaje del estudiantado.

Se propone la realización de “Talleres mediante experiencias lúdicas” como estrategias metodológicas en la enseñanza de la geometría para que los docentes de Matemáticas puedan aplicarlos a los estudiantes de séptimo grado de Educación Básica.

Los docentes en servicio deberían organizarse con el fin de discutir, analizar y reflexionar la problemática actual de la Educación Básica con el fin de hallar posibles cambios significativos para la Enseñanza de la Matemática.

Se requiere que los docentes promuevan la elaboración de talleres relacionados con el uso de diferentes softwares educativos a fin de poder realizar nuevas experiencias educativas relacionadas en otras temáticas de interés.

Previo a cualquier diseño de propuesta didáctica es fundamental hacer un diagnóstico que permita señalar aspectos como el conocimiento de software o conocimiento alguno de propuestas similares empleadas en otros cursos.

7. Bibliografía

- [1] Arias, E. (2021). Una propuesta didáctica experimental aplicada a la unidad Electricidad en un colegio científico de Costa Rica. *Revista De Enseñanza De La Física*, 33(2), 55–62. <https://doi.org/10.55767/2451.6007.v33.n2.35175>.
- [2] Bao, L., & Redish, E. F. (2001). Concentration analysis: A quantitative assessment of student states. *American Journal of Physics*, 69(S1), S45–S53. <https://doi.org/10.1119/1.1371253>.

- [3] Barrantes, R. (1999). Investigación: Un camino al conocimiento, un enfoque cualitativo y cuantitativo (Primera). Editorial Universidad Estatal a Distancia.
- [4] Becerra, D. (2018). Uso de simulaciones en la enseñanza de conceptos generales de electricidad y magnetismo en estudiantes de ingeniería [[Tesis de doctorado] INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL]. <https://www.fised-cicata.com/tesisdoctorado.html>.
- [5] Buendía Eisman, L., Colás Bravo, P., & Fuensanta Hernández, P. (1998). Métodos de Investigación en Psicopedagogía. McGraw-Hill Interamericana.
- [6] Grande de Prado, M.; García Peñalvo, F. J.; Corell Almuzara, A.; Abella García, V. (2021). Evaluación en Educación Superior durante la pandemia de la COVID-19. Campus Virtuales, 10(1), 49-58. (www.revistacampusvirtuales.es).
- [7] Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). Metodología de la investigación (6th ed.). McGraw-Hill Education.
- [8] Herrera, B. (10 de marzo de 2016). VD-R-9374-2016. Recuperado el 30 de noviembre de 2021, de Vicerrectoría de Docencia: <http://vd.ucr.ac.cr/documento/vd-r-9374-2016/>.
- [9] Herrero, L. (30 de noviembre de 2009). VD-R-8458-2009. Recuperado el 30 de noviembre de 2021, de Vicerrectoría de Docencia: <http://vd.ucr.ac.cr/documento/vd-r-8458-2009-pdf/>.
- [10] León, M. (1 de abril de 2020). Resolución VD-11426-2020. Recuperado el 30 de noviembre de 2021, de Vicerrectoría de Docencia: <http://vd.ucr.ac.cr/documento/resolucion-vd-11426-2020/>.
- [11] Kane, S. N., Mishra, A., & Dutta, A. K. (2016). Implementation of an active instructional design for teaching the concepts of current, voltage and resistance. Journal of Physics: Conference Series, 755(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/755/1/011001>.
- [12] Kirkut, L. (25 de junio de 2020). Análisis de resultados de la evaluación de la virtualización de cursos en la UCR ante la pandemia por COVID-19: Perspectiva estudiantil. Recuperado el 30 de noviembre de 2021, Repositorio Institucional de la Universidad de Costa Rica: <https://www.kerwa.ucr.ac.cr/handle/10669/81216>.
- [13] Lucero, M. M. (2003). Entre el trabajo colaborativo y el aprendizaje colaborativo. Revista iberoamericana de Educación, 33(1), 1-21.
- [14] Martínez, F. (2020). El nuevo oficio del investigador educativo : Una introducción metodológica.
- [15] Ruiz, H. M. (2012). Metodología de la investigación con enfoque en competencias. CENGAGE Learnig.
- [16] Tristán, A. (2013). Análisis de Rasch para Todos. Instituto de Evaluación e Ingeniería Avanzada.
- [17] Vargas Morúa, E. (2021). El plagio: consideraciones para su prevención. Revista Espiga, 21 (41), páginas 68-85.
- [18] Walpole, R., Myers, R., Myers, S., & Ye, K. (2012). Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias (Novena). Pearson Education.

A. Apéndice: Prueba conceptual aplicada como pretest y postest

Pregunta 1.

Una parametrización para la curva definida por $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z - x = 2 \end{cases}$ corresponde a

a) $r : \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}^3; r(t) = \left(\frac{t^2}{4} - 1, t, \frac{t^2}{4} + 1 \right)$

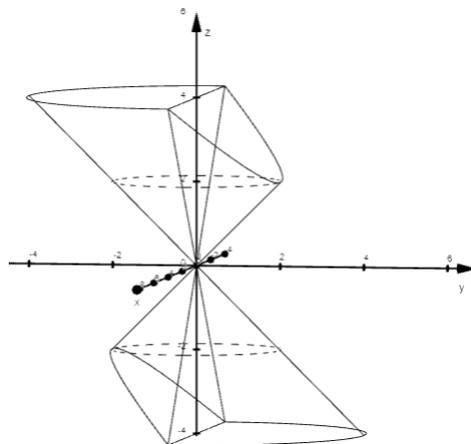
b) $r : \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}^3; r(t) = \left(\frac{t^2}{4} + 1, t, \frac{t^2}{4} - 1 \right)$

c) $r : \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}^3; r(t) = \left(\frac{t^2}{4} + 1, t, \frac{t^2}{4} - 1 \right)$

d) $r : \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}^3; r(t) = \left(1 - \frac{t^2}{4}, t, \frac{t^2}{4} + 1 \right)$

Pregunta 2.

El sólido descrito en la siguiente imagen



Visualización Geogebra en línea: <https://www.geogebra.org/m/nehescmd>

Corresponde a:

a) $\begin{cases} -4 \leq z \leq 4 \\ -4 \leq x + y + z \\ x + y + z \leq 4 \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \end{cases}$

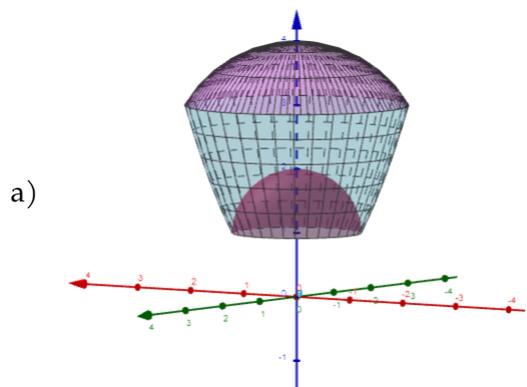
c) $\begin{cases} -4 \leq z \leq 4 \\ -4 \leq y + z \\ y + z \leq 4 \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4 \leq z \leq 4 \\ -4 \leq x + y \\ x + y \leq 4 \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \end{cases}$

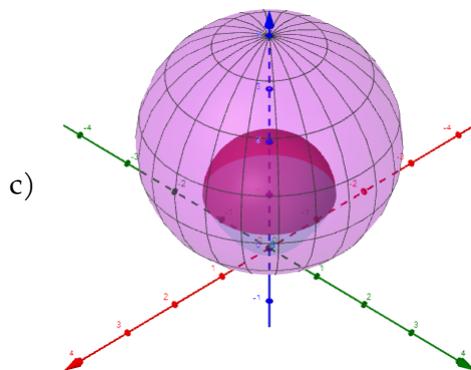
d) $\begin{cases} -4 \leq z \leq 4 \\ -4 \leq x + z \\ x + z \leq 4 \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \end{cases}$

Pregunta 3.

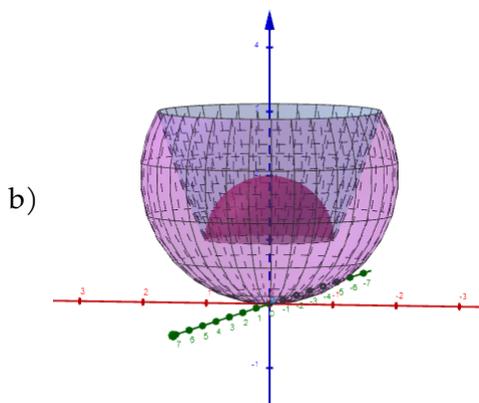
La gráfica del sólido $\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4 \\ 1 \leq x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \\ x^2 + y^2 \leq z \end{cases}$



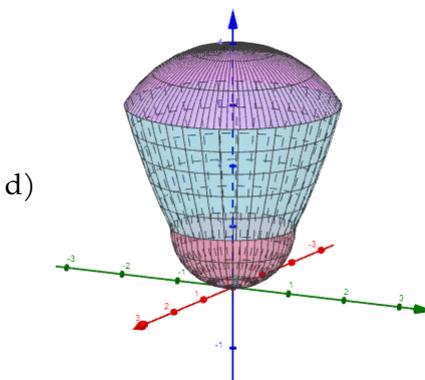
<https://www.geogebra.org/m/tusfyfvr>



<https://www.geogebra.org/m/cnyxekyp>



<https://www.geogebra.org/m/vnuvy4t>



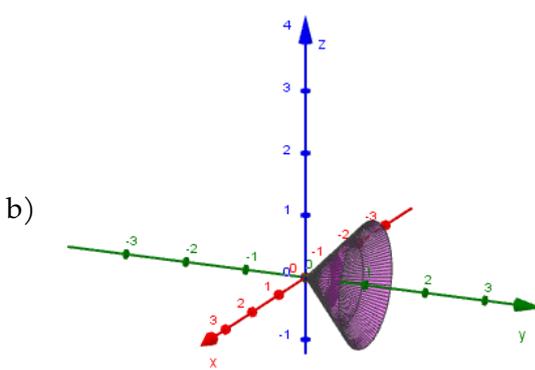
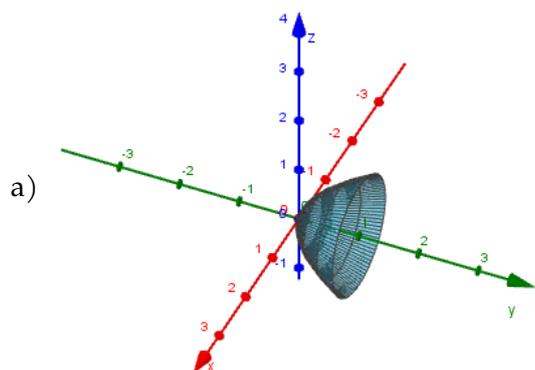
<https://www.geogebra.org/m/fuz3emaa>

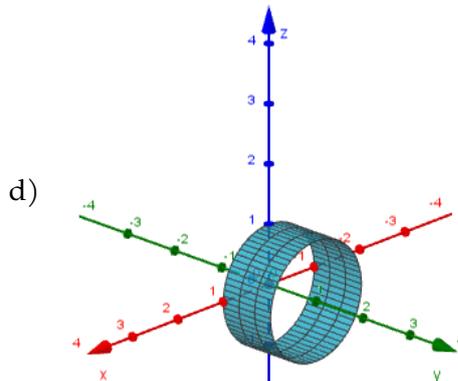
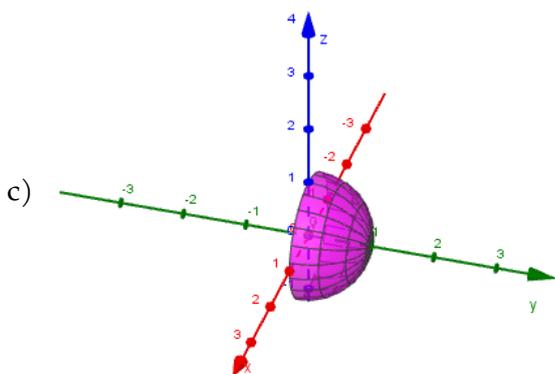
Pregunta 4.

Considere la superficie S parametrizada por la función

$$s : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad s(u, v) = (\cos(u), v, \sin(u))$$

La gráfica de S corresponde a:





Pregunta 5.

Considere la superficie definida por $S : x^2 + y^2 + z^2 = r^2; 0 \leq z \leq \frac{r}{2}$.

Cuál de las siguientes son parametrizaciones de S :

I. $s_1 : [0, 2\pi] \times [0, r/2] \rightarrow \mathbb{R}^3; s_1(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), \sqrt{r^2 - v^2})$.

II. $s_2 : [0, 2\pi] \times [0, \pi/3] \rightarrow \mathbb{R}^3; s_2(u, v) = (r \cos(u) \sin(v), r \sin(u) \sin(v), r \cos(v))$.

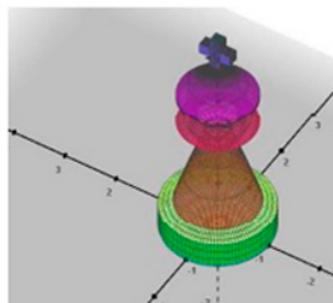
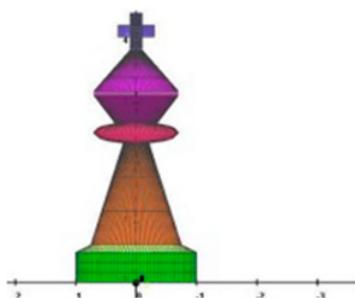
a) Ninguna.

c) Solo la II.

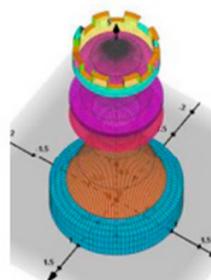
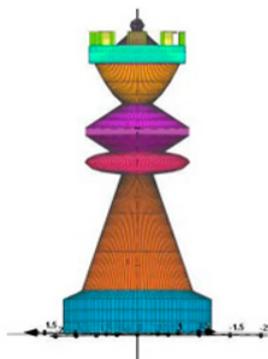
b) Solo la I.

d) Ambas.

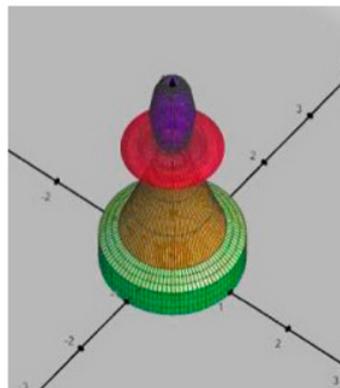
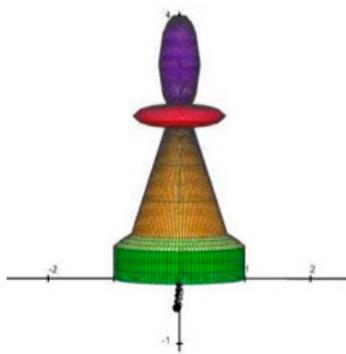
B. Apéndice: Algunos modelos realizados por los estudiantes del curso MA0451



Grupo 1. Rey



Grupo 1. Reina



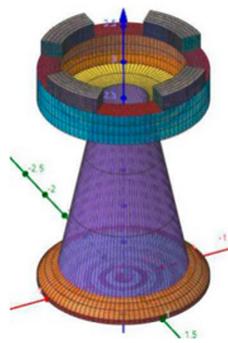
Grupo 1. Alfil



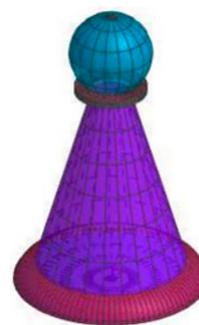
Grupo 2. Rey



Grupo 2. Reina



Grupo 2. Torre



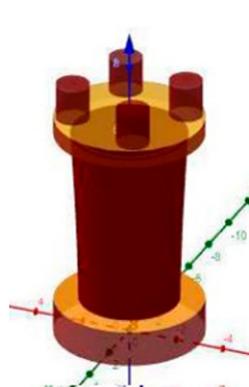
Grupo 2. Peón



Grupo 3. Rey



Grupo 3. Reina



Grupo 3. Caballo



Grupo 3. Torre