Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica
Vol 24, No 1. Agosto, 2023 – Febrero, 2024
ISSN 1659 -0643

Uma visualização da sequência de Jacobsthal com o aporte do GeoGebra

| A visualization of the Jacobsthal sequence with the contribution of GeoGebra |

Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro
carla.patricia62@aluno.ifce.edu.br
Secretaria de Educação do Ceará
Brasil

Francisco Régis Vieira Alves
fregis@ifce.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnología do Ceará
Brasil

Daniel Brandão Menezes
brandaomenezes@hotmail.com
Universidade Estadual do Ceará
Brasil

Recibido: 2 agosto 2022 Aceptado: 30 marzo 2023

Resumo: No Brasil, de acordo com as pesquisas, são escassos os trabalhos sobre a sequência de Jacobsthal, nos cursos de licenciatura, e isso motivou a realização deste trabalho, dada a particularidade intrigante de sua definição. Diante disso, o objetivo deste trabalho é investigar uma proposta didática que viabilize a compreensão da sequência de Jacobsthal por meio de uma visualização geométrica com arrimo do software GeoGebra. Para sua estruturação, a metodologia utilizada foi a Engenharia Didática, em suas duas primeiras fases – análises preliminares e análise a priori – com a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas, que é uma teoria de ensino. Como resultado, temos visualização bidimensional e tridimensional, a partir da construção de ladrilhos e prismas relacionando com os números de Jacobsthal.

Palavras-chave: sequência de Jacobsthal, GeoGebra, Engenharia Didática, Teoria das Situações Didáticas.

Abstract: In Brazil, according to research, there are few works on the Jacobsthal sequence in undergraduate courses, and this motivated this work, given the intriguing particularity of its definition. Therefore, the objective of this work is to investigate a didactic proposal that enables the understanding of the Jacobsthal sequence through a geometric visualization supported by the GeoGebra software. For its structuring, the methodology used was Didactic Engineering, in its first two phases – preliminary analysis and a priori analysis – with the perspective of the Theory of Didactic Situations, which is a theory of teaching. As a result, we have two-dimensional and three-dimensional visualization, from the construction of tiles and prisms relating to the Jacobsthal numbers.

Keywords: Jacobsthal sequence, GeoGebra, Didactic Engineering, Theory of Didactic Situations.

1. Introdução

O uso da história para ensinar Matemática é um caminho que diversos professores de matemática estão-se esforçando para trilhar. A capacidade da história da Matemática, assunto não explorado consideravelmente, precisa ser observada para que possa, de modo prático, permitir auxiliar os processos de construção de conhecimentos. Ensinar a Matemática por meio da história pode auxiliar no entendimento da elaboração dos conceitos matemáticos, fazendo uma ligação das descobertas com os conteúdos propostos.

Nesse momento, durante essa construção é importante que os estudantes desenvolvam o raciocínio matemático para avançar nessa consolidação de conhecimentos, para que isso ocorra "é necessário que o aluno tenha desenvolvido a habilidade de fazer deduções e construir elementos essencialmente abstratos, utilizando-se de conhecimentos prévios de forma combinada" (Sousa, Azevedo e Alves, 2021, p. 361).

Perante o exposto, são consideradas as dificuldades na compreensão da Matemática, no que diz respeito ao processo histórico e investigativo dos conteúdos abordados nessa área de conhecimento. Esses fatores fortalecem a necessidade do estudo da História da Matemática, que é explorada como disciplina no curso de Licenciatura em Matemática, dando um amparo à compreensão da origem das criações científicas de vários assuntos da Matemática, de maneira lógica e temporal.

Com base neste contexto, a história da sequência de Jacobsthal, uma sequência numérica recorrente e linear, é um assunto pouco explorado na Licenciatura em Matemática, tal como existem poucas produções que discutem essa sequência no ensino da Matemática, como relatam os autores (Alves, 2017; Souza e Alves, 2018; Alves e Catarino, 2018).

Diante dessas pesquisas surge o interesse de estudar essa sequência, tendo como objetivo deste trabalho investigar uma proposta didática que viabilize a compreensão da sequência de Jacobsthal por meio de uma visualização geométrica com arrimo do software GeoGebra.

Pensando em atingir o objetivo deste trabalho, adotamos a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, com a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas, pois da interação com ambas se constrói, de maneira organizada, um elo entre a teoria e a prática em sala de aula.

Alves e Dias (2019) afirmam que a Engenharia Didática é um método que traz "a opção por uma perspectiva sistemática de preparação, de concepção, de planejamento, de modelização e, possivelmente, a execução e/ou replicação de sequências estruturadas de ensino" (p.2). Fortalecendo o que se busca neste estudo. No caso da Teoria das Situações Didáticas, é uma teoria de ensino que pode ser definida a partir de situações didáticas pensadas para serem aplicadas em uma conjectura escolar, com o intuito de observar o comportamento do estudante. Segundo Almouloud (2007), essa situação tem como objetivo identificar a correlação estabelecida entre o professor-saber- aluno. Essa teoria é composta por quatro fases com propósito de investigar o processo de ensino e de aprendizagem, fazendo assim um amparo para a metodologia escolhida para essa pesquisa.

Logo, para um suporte da situação didática para uma possibilidade de visualização da sequência de Jacobsthal utilizamos o software GeoGebra, com uso de suas janelas bidimensional (2D) e tridimensional (3D), explorando definições matemáticas e particularidades dessa sequência de forma visual. Sousa, Azevedo e Alves (2021) afirmam que GeoGebra, enquanto recurso associa à prática do professor, contribui para a exibição de conteúdos de compreensão complexa de maneira mais dinâmica.

Nas seções seguintes apresentamos a Engenharia Didática deste trabalho, estruturada em suas duas primeiras fases, que são: as análises preliminares e a análise a priori. Nas análises preliminares busca-se discutir o campo epistêmico matemático da sequência de Jacobsthal, enquanto na análise a priori enfatizamos a construção da proposta didática com apoio da Teoria das Situações Didáticas e o software GeoGebra como recurso visual e manipulável.

2. Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas

Na década de 80, surgiu uma preocupação por parte dos professores de Matemática na criação de centros universitários na França, com o intuito de melhorar a esquematização do ensino, tendo como resultado o surgimento da Engenharia Didática (Vieira e Alves, 2020). Visando as pesquisas de situações didáticas em ensino, temos como definição da ED uma metodologia de pesquisa que consiste em um agrupamento de sequências, com o objetivo de desenvolver um plano de aprendizagem voltado para estudantes (Laborde, 1997).

Segundo Artigue (1988), a Engenharia Didática possui uma semelhança de trabalho comparada à de um engenheiro, no qual para se desenvolver um projeto, deve-se ter o controle do conhecimento científico, mas simultaneamente, tende a trabalhar com objetos que trazem preocupações maiores do que a das ciências.

Dessa maneira, relata-se que as etapas previstas da Engenharia Didática são: (i) análises preliminares; (ii) concepção e análise a priori; (iii) experimentação; (iv) análise a posteriori e validação (Artigue, 1984; Laborde, 1997). Logo, essa pesquisa aplicamos às duas primeiras fases, com a perspectiva de mostrar nas análises preliminares o contexto histórico e a definição essencial para os números de Jacobsthal. Bem como, na análise a priori descrever o momento de elaboração e descrição da situação didática, voltada para a construção geométrica dos números que compõem a sequência de Jacobsthal.

Durante essas duas fases iniciais, percebemos a importância das situações de ensino, pois é permitida a construção do conhecimento dos estudantes, e também a modificação diante das observações realizadas pelo professor, no momento da aplicação da atividade proposta.

Pensando na relevância das situações de ensino, propomos uma metodologia de ensino, Engenharia Didática, amparada pela teoria de ensino, Teoria das Situações Didáticas, na qual o estudante apropria-se do conhecimento prévio existentes ou em andamento, estimulando o lado investigativo do aluno durante a resolução da situação de ensino da Matemática. Brousseau (2000) afirma que "este esquema tripolar é geralmente associado a uma concepção de ensino em que o professor organiza o conhecimento a ser ensinado em uma série de mensagens a partir das quais o aluno leva o que deve adquirir" (p.7).

Brousseau (1986) relata que, durante as situações Teoria das Situações Didáticas, o professor esclarece os elementos principais nas etapas de ensino que são: ação, formulação, validação e institucionalização.

Essa situação didática proposta com as fases da Teoria das Situações Didáticas, deve fazer com que o conhecimento do estudante seja aflorado, de maneira que haja uma única intenção didática esperada. Eventualmente, os alunos encontram uma maneira mais fácil de resolver o problema proposto, no qual nesse momento a construção do saber ainda se encontra em andamento. É essencial que, durante esse processo de ensino e de aprendizagem, ocorra uma interação entre os participantes, tanto com quem aprende como com quem ensina, utilizando materiais didáticos apropriados.

Dessa maneira, esses materiais ajudaram na resolução do problema proposto, levando em consideração as regras estabelecidas, com o objetivo de traçar um caminho correto para obtenção dos resultados. Observamos que a relação entre a Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas é a complementação para um acúmulo, unido com a contestação e determinação dos conhecimentos teóricos, metodológicos e didáticos, durante uma prática organizada por uma transposição ao que se refere a um conteúdo matemático (Alves, 2017).

Por fim, com essa integração da Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas, utilizamos o GeoGebra como um recurso tecnológico para uma transposição didática, para auxiliar a pesquisa em andamento, com o intuito de promover uma situação didática como alternativa para professores de uma prática em sala de aula sobre a sequência de Jacobsthal, através das demonstrações geométricas a partir de sua lei de recorrência.

Na seção seguinte abordamos o referencial teórico necessário para uma análise preliminar da sequência de Jacobsthal, por meio de definições da lei de recorrência propostos para a concepção da situação didática.

3. Análises preliminares

Como forma de sistematizar as análises preliminares, segundo a estimativa da Engenharia Didática, Artigue (1988) descreve as principais dimensões que define o fenômeno a ser estudado e que se relacione ao ensino, as quais são: epistemologia, didática e a cognição. Segundo Pais (2015), cada uma delas atua na constituição do objeto matemático.

Dessa maneira, no que diz a respeito sobre a dimensão epistemológica, tratamos a origem e as definições matemáticas relativos à sequência de Jacobsthal. Já na perspectiva da didática, analisamos uma abordagem por meio de uma pesquisa bibliográfica buscando esclarecer os elementos matemáticos referentes a essa sequência que foram apresentados em pesquisas tais como: Horadam (1996), Koken e Bozkurt (2008) e algumas mais recentes como Souza e Alves (2018), Alves e Catarino (2018).

Neste estudo, permitimos encontrar caminhos para a realização de uma transposição didática, ou seja, modificar um conhecimento científico em um assunto que possa ser ensinado em sala de aula. Em relação à dimensão cognitiva, propomos uma situação didática de modo que o estudante possa identificar e manifestar a intuição, desenvolvendo o raciocínio lógico-dedutivo mobilizando os conhecimentos da sequência de Jacobsthal.

Ainda a respeito no que se trata da análise preliminar da Engenharia Didática, segundo Almouloud e Silva (2012) essa fase destaca considerações sobre o quadro teórico didático geral. Bem como, uma análise epistemológica do ensino de um determinado tema, o ponto de vista dos estudantes e seus obstáculos, além do estudo do campo de exigências em que se pretende realizar uma situação didática.

Dessa forma, nessa análise preliminar realizamos um levantamento bibliográfico em relação à sequência de Jacobsthal, mostrando as concepções matemáticas dessas sequências, destacando os conceitos matemáticos mais pertinentes e construindo um elo com elementos que proporcionem a exploração desse assunto em uma situação de ensino voltada para a licenciatura em Matemática.

De acordo com as pesquisas, Siegmund-Schultze (2009) o alemão Ernst Erich Jacobsthal (1882-1965) "foi aluno de Ferdinand G. Frobenius, um especialista em Teoria dos números que tinha sido expulso de Berlim e se tornou um refugiado à Noruega e Suécia em 1939 e 1943" (p. 327). Esse matemático foi uns dos pioneiros a estudar e definir os números de Fibonacci.

Segundo Falcón e Plaza (2007) a sequência de k-Fibonacci já havia sido definida para todo número real positivo k, de acordo com a lei de recorrência $F_{k,n+1} = k.F_{k,n} + F_{k,n-1}$, para $n \geq 1$. Sendo as condições iniciais como: $F_{k,0} = 0$ e $F_{k,1} = 1$. Se para valor de $k = 1$, obtêm-se a sequência clássica de Fibonacci $\{F_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdot\}$. Da mesma forma, se o valor de $k = 2$, escrevemos a sequência de Pell $\{P_n\} = \{0, 1, 2, 5, 12, 70, 169 \cdots\}$.

A partir dessas informações, apresentamos três definições importantes para a sequência de Jacobsthal com a relação de recorrência.

Definição 1

$J_n = J_{n-1} + 2.J_{n-2}$, para $n \geq 2$, $J_0 = 0$ e $J_1 = 1$.

Definição 2

$J_{k,n} = k.J_{k,n-1} + 2.J_{k,n-2}$, para $n \geq 2$.

Sendo as condições iniciais para definição 3, $J_{k,0} = 0$ e $J_{k,1} = 1$, denominando a sequência de k-Jacobsthal. É importante destacar, que se utilizar $k = 1$ e $k = 2$, obtêm-se respectivamente a sequência usual de Fibonacci e a sequência de Jacobsthal que está representada por $\{J_n\} = \{0, 1, 1, 3, 5, 11, \cdots\}$.

Definição 3

$J_n(x) = J_{n-1}(x) + x.J_{n-2}(x)$ para valores iniciais $J_0(x) = 0$ e $J_1(x) = 1$.

Na Definição 3, temos a sequência polinomial de Jacobsthal, segundo as definições Koshy (2019) faz uma associação da sequência de Jacobsthal com um tabuleiro, de forma preliminar, a um ladrilho unidimensional do tipo $1 \times n$, com as seguintes representações: um quadrado 1×1 tem peso 1, retângulo 1×2, denominado dominó, tem peso x, como mostra a figura 1.

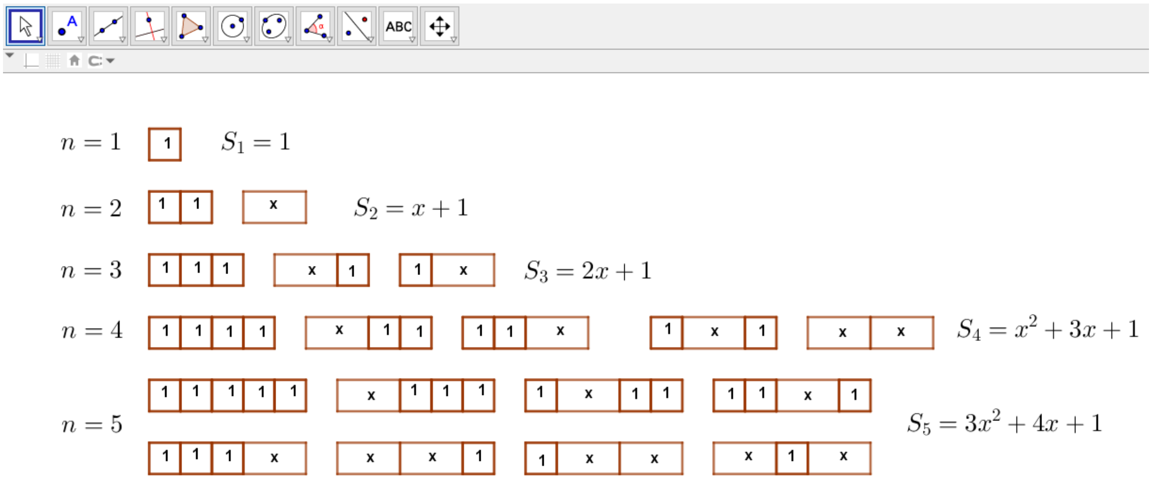


Figura 1: Representação de um tabuleiro $1 \times n$. Fonte: Adaptada pelos autores (2022).

Na figura 1, relacionamos os ladrilhos do tabuleiro com a sequência de Jacobsthal, sendo associado o peso denominado S_n , para cada tabuleiro. Segundo Koshy (2019) suponha que S_n denota a soma dos pesos do tabuleiro de comprimento n. Agora estabelecemos que $S_n = J_{n+1}(x)$. Primeiro, observe que $S_0 = 1 = J_1(x)$ e $S_1 = 1 = J_2(x)$. Considere um ladrilho de comprimento arbitrário n, no qual $n \geq 2$. Suponha que ele termine em um quadrado; a soma dos pesos de tais tabuleiros é $S_{n-1} \cdot 1 = S_{n-1}$.Por outro lado, suponha que termine em um dominó; a soma dos pesos de tais tabuleiros é $S_{n-2}.x = x.S_{n-2}$. Consequentemente, $S_n = S_{n-1} + x.S_{n-2}$, a recorrência de Jacobsthal.

Em virtude das condições iniciais, isso implica que $S_n = J_{n+1}(x)$, como desejado. Assim, temos o seguinte resultado os ladrilhamentos descritos por peças previamente definidas com os seguintes pesos: $S_1 = 1, S_2 = x + 1, S_3 = 2x + 1, S_4 = x^2 + 3x + 1, S_5 = 3x^2 + 4x + 1$,conforme a figura 1. Dessa forma, apresentamos o Teorema 3.

Teorema 1

Suponha que o peso de um quadrado seja 1 e o de um dominó seja x. Então a soma dos pesos dos tabuleiros de comprimento n é $J_{n+1}(x)$, no qual $n \geq 0$.

Prova. Segundo Koshy (2019). Como $J_{n+1}(1) = F_{n+1}$, no qual F corresponde aos números de Fibonacci, existem exatamente F_{n+1} ladrilhos de comprimento n, podemos mostrar que

$$J_{m+n+1}(x) = J_{m+1}(x) \cdot J_{n+1}(x) + x.J_m(x) \cdot J_n(x).$$

□

Finalizando o Teorema 3, cabe mostrar uma forma de extensão da Sequência de Jacobsthal, para o caso particular da variável $x = 1$, podemos determinar, por intermédio das representações dos ladrilhamentos contidos na figura 1, os termos correspondentes presentes na Sequência de Jacobsthal, que conhecemos por 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, etc.

De modo geral, quando comparamos a Definição 3, percebemos que os termos determinados na figura 1. correspondem os termos que podemos escrever, por intermédio da relação de recorrência $J_n(x) = J_{n-1}(x) + x.J_{n-2}(x)$ para valores iniciais $J_0(x) = 0$ e $J_1(x) = 1$,para $n \geq 2$.

Agora, de forma preliminar, vamos considerar um tabuleiro unidimensional do tipo $2 \times n$, com as seguintes peças: dominós horizontais 1×2, dominós verticais 2×1, ambos de peso 1, quadrados verdes 2×2, com peso x, conforme a figura 2.

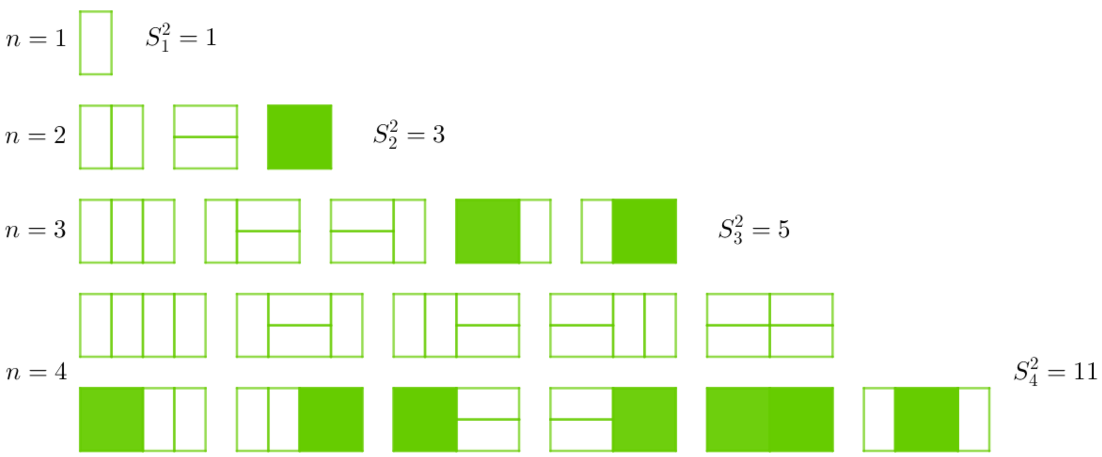


Figura 2: Representação de um tabuleiro $2 \times n$. Fonte: Adaptada pelos autores (2022)

Segundo Koshy (2019), consideramos o peso definido por S_n^2 para cada tabuleiro, e $S_0^2 = 1$. A partir do exame de alguns casos particulares podemos depreender, por intermédio de um exercício da visualização, que ocorrem apenas duas formas de ladrilhos, quando olhamos para o final. Ocorrem ladrilhos que terminam com retângulos verticais e, neste caso, determinam sub-ladrilhos de comprimento $n - 1$. Por outro lado, podem ocorrer sub-ladrilhos de comprimento $n - 2$ que terminam em quadrados verdes 2×2 ou dominós agrupados da forma de dois retângulos juntos 1×2, de acordo com a figura 2.

Por exemplo, com base na figura 2, quando consideramos os ladrilhos do tabuleiro para $n = 4$, podemos contar cinco ladrilhos com retângulos verticais, três ladrilhos que terminam em quadrados verdes, três ladrilhos que terminam com retângulos horizontais, ou seja, $n = 4 \Rightarrow 5 + 2.3 = 11 = J_4$. Com base nesse exame particular, vamos generalizar os respectivos argumentos de contagem dos ladrilhos que preenchem um tabuleiro $2 \times n$, com o Teorema 3.

Teorema 2

Seja um tabuleiro $2 \times n$, e os dominós horizontais 1×2 e verticais 2×1, ambos com peso 1, quadrados verdes 2×2, com peso x. Então a soma dos pesos de comprimentos n, será $S_n^2 = J_{n+1}$, para $n \geq 0$ (Koshy,2019).

Prova. Considere um tabuleiro $2 \times n$. Denominamos por S_n^2 o número de formas diferentes de ladrilhos deste tabuleiro. De imediato, nos casos $n = 0$ e $n = 1$, definimos que $S_0^2 = 1 = J_1$, $S_1^2 = 1 = J_2$. Nos casos seguintes, podemos examinar as relações numéricas exibidas na figura 2. Considerando ladrilhos arbitrários quaisquer, que denotaremos por T, vamos considerar os seguintes casos: (i) quando termina com um dominó vertical; (ii) quando termina com um quadrado; (iii) quando termina com dois retângulos juntos na forma horizontal. Percebemos que, quando não ocorre o caso (i), teremos apenas duas possibilidades que ocorrem.

Podem ocorrer sub-ladrilhos da forma de $n-2$ para quadrados 2×2, ou sub-ladrilhos da forma de $n-2$ para dois retângulos horizontais juntos 1×2. Dessa forma, desde que representações anteriores são independentes, a contribuição total final de todos os casos, por um princípio aditivo e contagem, resulta na expressão $2 \times S_{n-2}^2$.

E, acrescentando-se os casos do item (i), para os casos de sub-ladrilhos da forma $n-1$, para ladrilhos verticais determinaremos que: $1 \times S_{n-1}^2 + 2xS_{n-2}^2 = S_{n-1}^2 + 2xS_{n-2}^2$. Por fim, desde que $S_0^2 = 1 = J_1$, $S_1^2 = 1 = J_2$, $S_2^2 = 3 = J_3$, $S_4^2 = 5 = J_4$, a expressão anterior corresponde ao caso e mesma regra de recorrência da sequência de Jacobsthal, determinamos que $S_n^2 = J_{n+1}$, para $n \geq 0$. $\square$

De acordo com a tese de Craveiro (2004), oferece algumas possibilidades para a representação de ladrilhamentos como: 3×1, 3×2, 3×3, 3×4 e etc., utilizando quadrados de 1×1 e 2×2 para definir o total de números de ladrilhamentos possíveis para um tabuleiro $3 \times n$, conforme a figura 3.

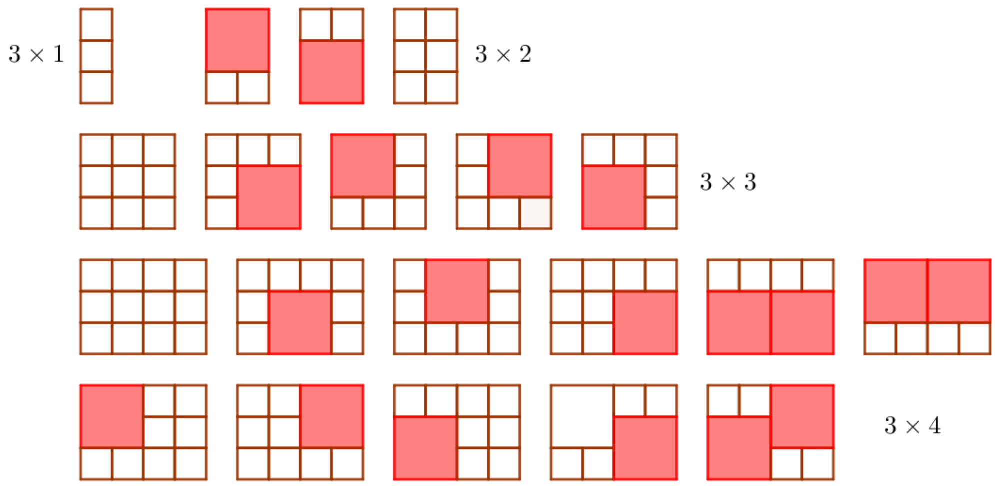


Figura 3: Representação de um tabuleiro $3 \times n$. Fonte: Adaptada pelos autores (2022)

De acordo com a figura 3, Koshy (2019) e Craveiro (2004), mostram o teorema 3 a seguir.

Teorema 3

Considerando um tabuleiro $3 \times n$, com apenas dois tipos de ladrilhos, um ladrilho 1×1 na cor branca e um ladrilho 2×2 na cor vermelha. Então, J_n para o número de ladrilhamentos possíveis para o tabuleiro é determinado por $j_n = J_(n+1)$ para $n \geq 1$.

Prova. De acordo com os argumentos empregados por Craveiro (2004), vamos considerar três conjuntos, a saber: (i) um conjunto de ladrilhamentos $3 \times n$ (com ladrilhos dos dois tipos definidos 1×1 e 2×2) e que contém, pelo menos um ladrilhamento (à direita) 3×1 e com ladrilhos de cor branca 1×1 ; (ii) um conjunto de ladrilhamentos $3 \times n$ (com ladrilhos dos dois tipos definidos 1×1 e 2×2) e que contém, pelo menos um ladrilhamento (à direita) 3×2 com dois ladrilhos de cor branca e um de cor vermelha sendo os ladrilhos brancos na parte superior ; (iii) um conjunto de ladrilhamentos 3×2 (com ladrilhos dos dois tipos definidos 1×1 e 2×2) e que contém, pelo menos um ladrilhamento (à direita) 3×2 com dois ladrilhos de cor branca e um de cor vermelha, sendo os ladrilhos brancos na parte inferior.

Após considerar as três possibilidades particulares de ladrilhamentos, como indicados nos itens (i), (ii) e (iii), Craveiro (2004) explica que j_n o número de ladrilhamentos com as peças indicadas no enunciado do teorema. Definiremos que $j_0 = 1 = J_1$. No caso, seguinte, conforme figura 3, no caso 3×1, teremos apenas uma forma de ladrilhar, isto é, $j_1 = 1 = J_2$.

No caso 3×1 temos $j_2 = 3 = J_3$, de acordo com a figura 3. Mais uma vez, com base na mesma ilustração, por uma contagem direta, teremos que $j_3 = 5 = J_4$ e, logo a seguir, constatamos que $j_4 = 11 = J_5$.

Por fim, Craveiro (2004) emprega uma representação semelhante à de Koshy (2019), na medida em que, a partir de uma prova visual, podemos afirmar que para o item (i) o número j_{n-1} e, para os demais casos, concluímos que (ii) e (iii) possuem a mesma quantidade de elementos, que denotaremos por j_{n-2}. Como tratam-se de situações independentes e, por um princípio aditivo, somam-se todas as situações que podem ser representadas por $j_n = j_{n-1} + 2.j_{n-2}$, com os termos iniciais $j_0 = 1 = J_1$ e $j_1 = 1 = J_2$. No entanto, Craveiro (2004) conclui a partir da observação que esta relação de recorrência fornece os números de Jacobsthal, ou seja, $j_n = J_{n+1}$ para $n \geq 1$. □

Para melhor compreensão da situação didática sobre a sequência de Jacobsthal utilizamos neste trabalho o GeoGebra, que é um software gratuito disponível em vários idiomas, com possibilidade de diversas estratégias de ensino e de aprendizagem nos conteúdos de matemática, com a finalidade de mostrar a visualização bidimensional(2D) e tridimensional (3D) com relação aos números de Jacobsthal.

Diante disso, desenvolvemos a construção da situação problema em duas etapas, que são: a criação da sequência de Jacobsthal na forma geométrica por meio da criação de ladrilhos uma visualização 2D e, a construção da mesma sequência em uma visualização 3D, por meio de prismas. Através da definições e teoremas, elaboramos uma situação didática para a construção dessas visualizações utilizando o software GeoGebra.

4. Concepção e análise a priori

Na análise a priori parte-se de uma situação didática, observamos os comportamentos e "tenta demonstrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorreram, é por consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem" (Almouloud e Silva, 2012, p.27).

Na fase anterior, análises prelimirares, foi apresentado um estudo sobre a sequência de Fibonacci para a definição da sequência de k-Jacobsthal. Dessa maneira, com base na lei de recorrência apresentada, desenvolvemos uma situação didática de ensino, amparada pela Teoria de Situações Didáticas e por meio do software GeoGebra, permitindo a compreensão visual das características da sequência de Jacobsthal, e que também pode servir para auxiliar em outras situações-problema desenvolvidas sobre essa sequência , a partir desses conhecimentos adquiridos.

Assim, tem-se como proposta para desenvolvimento a seguinte situação didática: Com base nos números de Jacobsthal representados por $\{J_n\} = \{0, 1, 1, 3, 5, 11, \cdots\}$ podemos representar essa sequência de forma geométrica utilizando o software GeoGebra?

Para a organização e a modelização do desenvolvimento desta situação didática, utilizamos uma sequência de resolução com base nas dialéticas da Teoria das Situações Didáticas – ação, formulação, validação e institucionalização, conforme Brousseau (1996).

Na fase de ação, inicialmente, apresentamos aos estudantes a situação didática proposta, junto a elementos para que ele entenda a lei de recorrência de Fibonacci clássica para a construção de uma nova recorrência para a sequência de Jacobsthal.

Como consequência, esperamos que os estudantes absorvam o problema proposto e as informações previamente estabelecidas e as relacionem com a sequência, pensando como pode ser construída por meio de quadrados e retângulos, utilizando apenas os conhecimentos adquiridos durante a sua trajetória de estudos em etapas anteriores. Nesta dialética, é importante que o estudante conecte ideias e relações entre os conteúdos, pois isso ajudará nas possíveis formulações de respostas.

Na fase da formulação, os estudantes realizam conjecturas e apresentam suas primeiras ideias encontradas, a partir da situação didática proposta, expondo a partir do que foi visualizado no GeoGebra.

É importante que nesta fase sejam realizadas anotações por parte dos estudantes, não necessariamente com um rigor matemático e com o auxílio do software, como forma de memorizar a regra da lei de recorrência da sequência de Jacobsthal, para compreensão da construção de figuras geométricas.

Neste momento, não é importante que o estudante saiba manipular todos os comandos, pois não é o foco, mas sim que o mesmo entenda como ocorre a criação. Mostrando a elaboração de testes da sequência de Jacobsthal com base na lei de recorrência $\{1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, \cdots\}$.

Para a construção, o estudante deve seguir os passos:

1. Na barra de ferramentas, clicar na opção "polígono regular", para construir um quadrado.
2. Construir os demais quadrados utilizando o teorema 3 para a construção da figura 4, ou seja, construir ladrilhos com uma estrutura 3×2.

Começamos inserindo dois quadrados de comprimento lateral 1, logo o próximo quadrado criado será a soma das medidas dos lados dos quadrados anteriores, o terceiro elemento será um quadrado de lado 2, conforme a figura 4.

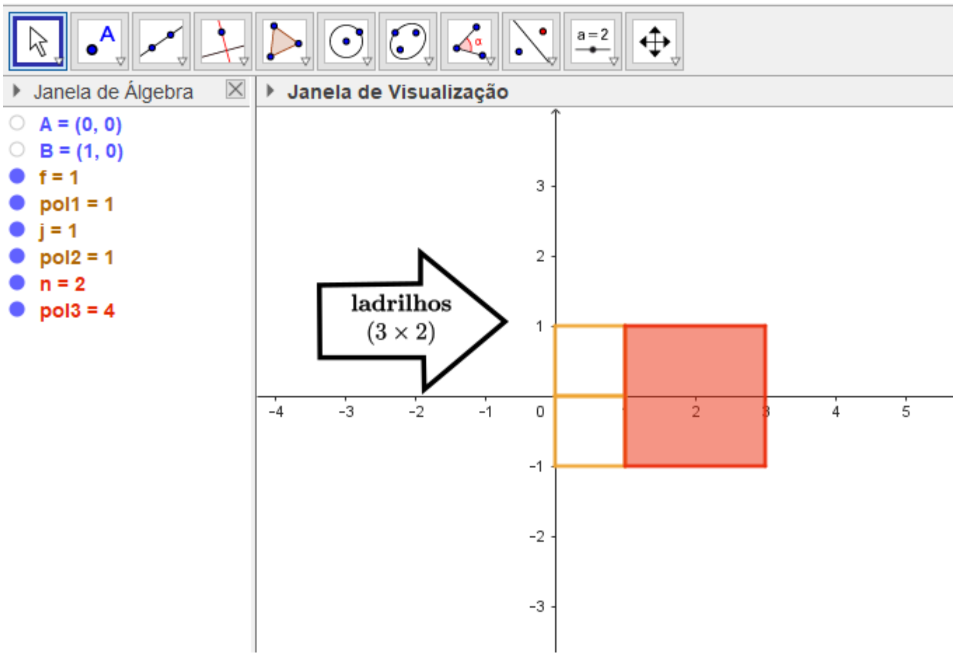


Figura 4: Os termos iniciais dos ladrilhos para a sequência de Jacobsthal Fonte: Elaborada pelos autores (2022)

Na figura 4 em uma visualização 2D, de modo inicial para pensamos em algumas possibilidades de maneiras de ladrilhar um retângulo de $3 \times n$ com quadrados de lados 1×1 e 2×2, levando em consideração que essa situação é denominada $a_n = J_{n+1}$, sendo o primeiro termo representado por um retângulo de combinação (3×2), o segundo e o terceiro termo representados por ladrilhos de combinação (3×3).

Dando continuidade à construção temos os próximos termos da sequência de Jacobsthal de acordo com o teorema 3, já demonstrado anteriormente, conforme a figura 5.

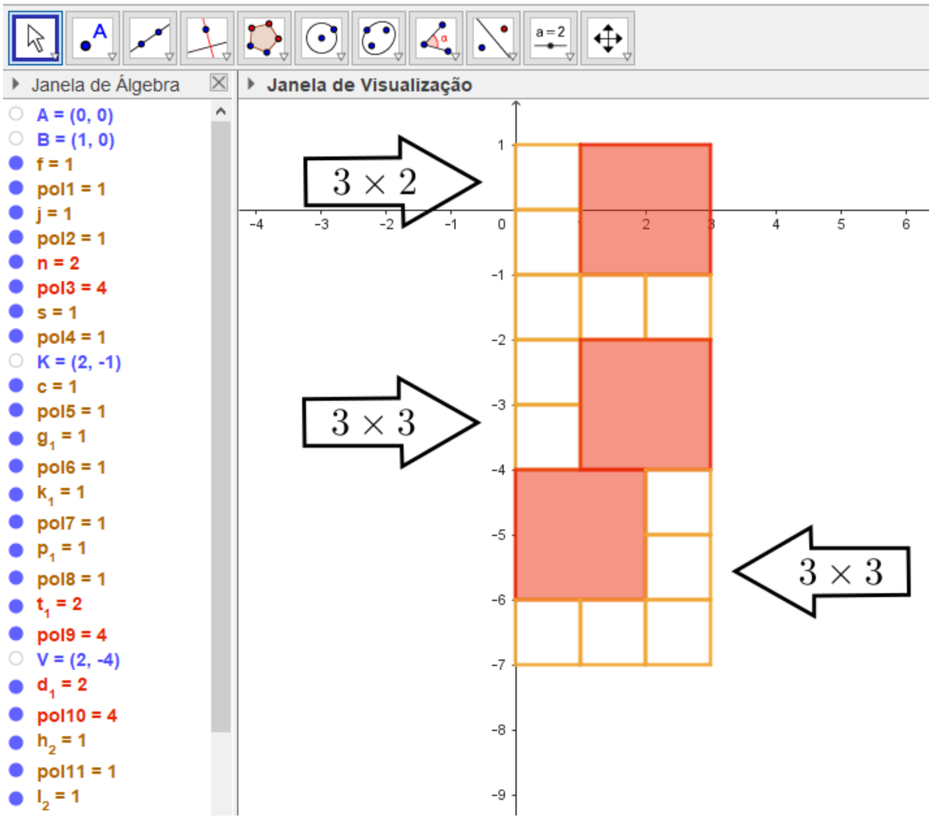


Figura 5: Ladrilhos $3 \times n$ da sequência de Jacobsthal para uma visualização 2D. Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Dessa maneira, o quarto termo pode ser representado também por ladrilhos de combinação (3×3). Assim os números da sequência de Jacobsthal são representados pelos quadrados de cor branca para os quadrados (1×1), e de cor vermelha para os quadrados (2×2), conforme o teorema 3. Assim, repetimos o processo para obter os próximos números, para que os estudantes possam criar suas hipóteses.

A partir dessas informações, pensamos em uma possibilidade para uma visualização 3D, por meio de ladrilhos, um número de maneiras de preencher os espaços com as medidas $2 \times 2 \times n$ com um elemento de medidas $1 \times 2 \times 2$. Conforme a figura 6.

Para construir a visualização 3D, o estudante deve seguir os seguintes passos:

1. Selecionar na barra de ferramenta a opção cubos e prismas.

   Estes comandos constroem, um cubo a partir da medida de dois pontos, ou seja, delimitando a aresta. Para utilizá-la, é preciso primeiro clicar sobre um ponto e levá-la até o outro ponto.

2. Para construção do prisma, o estudante deve criar uma base por meio da seleção de quatro pontos formando um quadrilátero e em seguida, subir no eixo y para determinar o ponto de altura.

   Após executar estes procedimentos, esperamos que o estudante chegue à construção apresentada na figura 7, que consiste na sequência de Jacobsthal em uma visualização 3D.

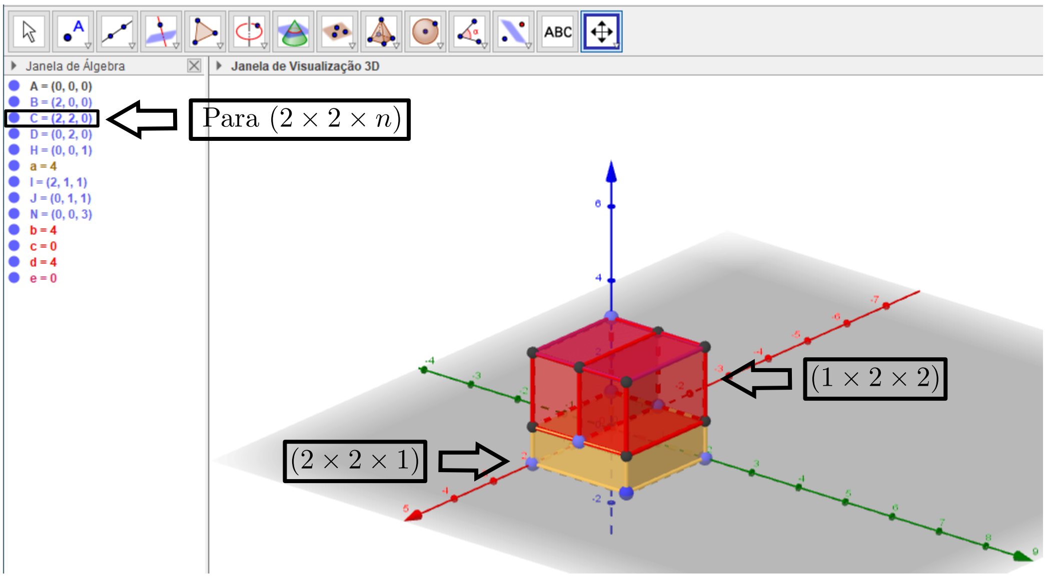


Figura 6: Termos iniciais para visualização 3D. Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

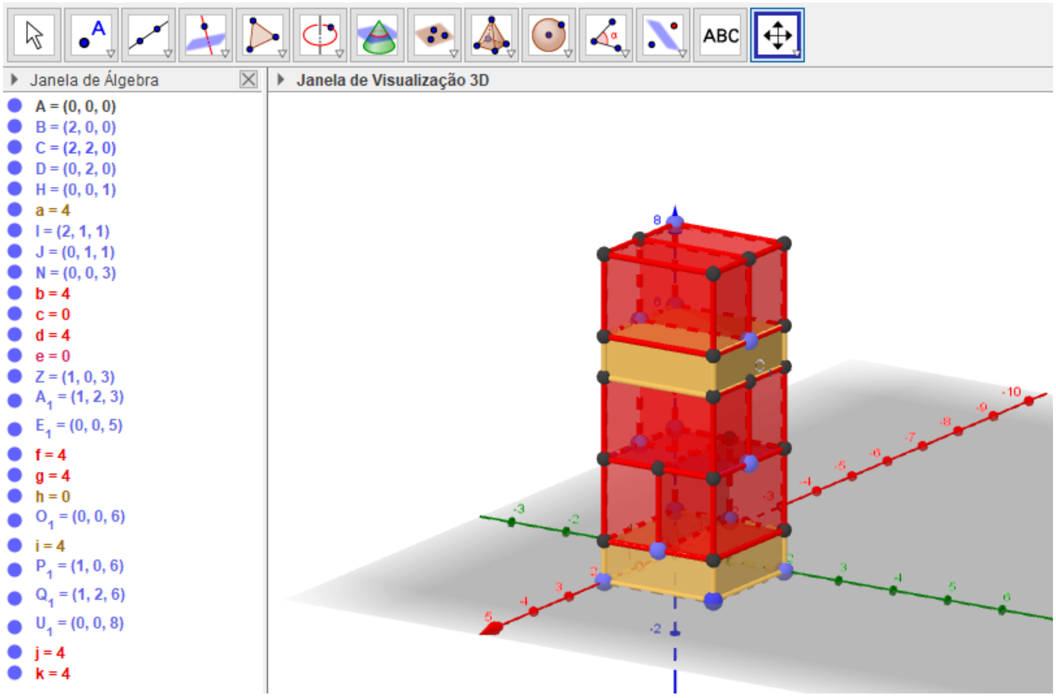


Figura 7: Uma visualização 3D da sequência de Jacobsthal.Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

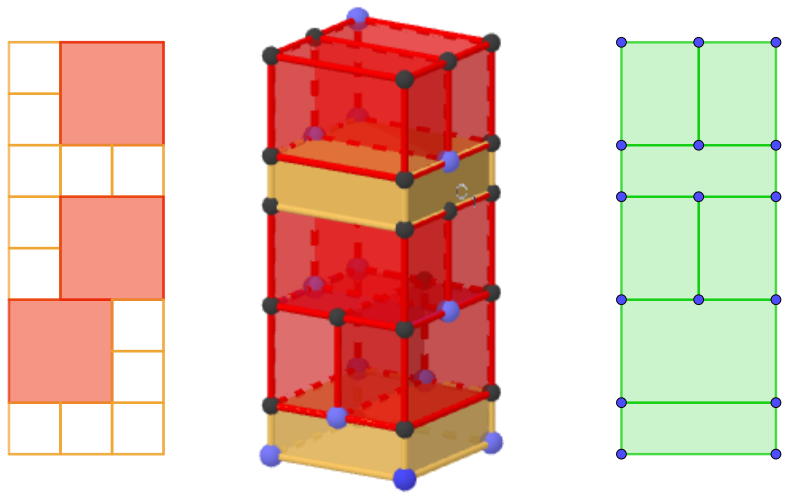
Observamos que a figura 7 traz uma de suas faces que corresponde à figura 5. A parte frontal, apresentam os termos com a construção de ladrilhos na forma de quadrados (2×2) e retângulos (1×2) conforme o teorema 3.

Para construir uma visualização 3D, é necessária no mínimo construção de cinco ladrilhos na forma $(2 \times n)$ para a sequência de Jacobsthal, denominando esse ladrilhamento como $b_n = J_(n+1)$. Portanto, executamos este processo até perfazer outro lado da construção 3D por meio das informações contidas no teorema 3.

Assim, fazendo a associação $a_n = b_n = J(n+1)$, ilustramos essa pequena cadeia de igualdades usando uma prova bijetiva. Nesta fase, na situação de validação, esperamos que os estudantes demonstrem uma compreensão da regra da lei de recorrência e dos teoremas propostos como essa sequência pode ser construída por meio de figuras geométricas, por meio da visualização dos ladrilhos para uma visualização 2D e, por meio de cubos e prismas para uma visualização 3D da sequência de Jacobsthal, observando o comportamento padrão dessa sequência.

Na situação de Institucionalização, de acordo com Brousseau (1996) é nesse momento que o professor se manifesta, com o intuito de produzir um percurso didático que esclarece a construção do conhecimento do estudante, agregando algumas informações essenciais que não foram observadas pelo aluno, e fazendo as intervenções sobre possíveis argumentos sem relevância para o aprendizado.

Então, o professor ressalta durante as suas considerações $a_n = J_(n+1) = b_n$, e que também $c_n = J_{n+1}$, conforme a figura 8.



$$a_n = c_n = b_n$$

Figura 8: Associação da visualização 2D e 3D. Fonte: Elaborada pelos autores (2022)

Logo, temos que $a_n \Leftrightarrow c_n \Leftrightarrow b_n$, afirmando a condição de existência para uma construção 3D por meio de ladrilhamento para a sequência de Jacobsthal. O professor pode também preferir construir as figuras e ressaltar que o uso do software é imprescindível para a compreensão desse estudo, enquanto explica a metodologia que poderia ter seguido.

Dessa forma, os estudantes poderiam ter um resumo de todo processo percorrido, procurando outras relações em torno do conhecimento, associadas a outras propriedades ou construções não citadas anteriormente, com base nas novas informações apresentadas pelo professor durante essa fase.

5. Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos uma proposta didática para subsidiar a discussão da sequência da Jacobsthal, estruturada nas duas primeiras fases da Engenharia Didática e norteada pelos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas, como possibilidade metodológica a ser discutida/trabalhada nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Assim, nas análises preliminares deste estudo foram apontados aspectos teóricos em torno da sequência de Jacobsthal, dando ênfase em definições matemáticas. Já na análise a priori, apresentamos a situação didática proposta que viabiliza a visualização pelas perspectivas 2D e 3D destas sequências com arrimo do software GeoGebra, que contribuiu de forma significativa para o processo de ensino sobre essa sequência.

Essa proposta para o professor trouxe uma contribuição em relação a fundamentação teórica a partir da definição dos números de Fibonacci, pois percebemos que existe a possibilidade de se estender suas propriedades para outras sequências numéricas, por meio das fórmulas de recorrência, da representação de seus termos, como foi o caso da sequência de Jacobsthal, discutida aqui, observando também as dificuldades no ensino encontradas sobre o tema proposto. Já no planejamento, pensamos em situações que possam ocorrer quando criar ambiente para que ocorra a aprendizagem dos estudantes.

Além disso, esta pesquisa trouxe um problema proposto com a utilização do GeoGebra, não somente como instrumento, mais sim como uma ferramenta essencial para a compreensão dos estudantes para a construção do seu conhecimento, pois sem o auxílio dessa ferramenta a visualização geométrica não seria viável.

Dessa maneira, os alunos podem obter possibilidades de agir, formular e validar suas hipóteses, que poderão ser criadas a partir da situação didática, trilhando um caminho matemático com autonomia e liberdade para criação de suas conjecturas, ou seja, utilizando meios próprios para encontrar sua solução para esse problema com a utilização da ferramenta para a superação dos possíveis obstáculos, como a construção geométrica em uma visualização tridimensional, que podem ocorrer durante esse percurso.

A sequência de Jacobsthal tem definições intrigantes e que, por diversas vezes, não são devidamente exploradas por autores de livros da História da Matemática e tampouco discutidas na graduação com os estudantes em formação inicial. Desse modo, apesar de não receber a devida atenção por autores, a sequência de Jacobsthal pode ser considerada um tema propício para o desenvolvimento do ensino de sequências lineares recorrentes, bem como a convergência entre termos consecutivos de tais sequências.

Contudo, este estudo trouxe um diferencial ao docente de Matemática, que é uma abordagem no campo da Matemática aliada ao uso da tecnologia. O GeoGebra possibilita a construção e visualização dessa sequência a partir de visualizações bidimensionais e tridimensionais, sendo um recurso com grande potencial para explorar e discutir as características e relações entre essas sequências tanto por uma perspectiva algébrica quanto geométrica.

Por fim, como dificuldades enfrentadas neste estudo temos a escassez de referências que discutam o assunto e de figuras para representação dessa sequência, tanto dentro da História da Matemática quanto com relação à abordagem da sequência de Jacobsthal com uso da tecnologia. Desta forma, esperamos em uma perspectiva futura desenvolver esse trabalho no curso de mestrado, apresentando aos estudantes o processo histórico, matemático e epistemológico das sequências recorrentes e lineares, verificando a construção de seus conceitos.

6. Referências

[1] Almouloud, S. A. (2007). Fundamentos da didática da matemática. Curitiba: UFPR.

[2] Almouloud, S. A. e Silva, M. J. (2012). Engenharia didática: evolução e diversidade. Revemat - Revista Eletrônica de Educação Matemática, 7(2), 22-52.

[3] Alves, F. R. V. (2017). Engenharia Didática para a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s, t) -Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori. Revista Unión, São Paulo, 12(41), 83-106.

[4] Alves, F.R.V. e Catarino, P.M. (2018). Engenharia Didática de 2ª Geração com o tema: h(x)- polinômios de Jacobsthal. Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista. 8(3).

[5] Alves, F. R. V. e Dias, M. A. (2019). Engenharia Didática para a Teoria do Resíduo: Análises Preliminares, Análise a Priori e Descrição de Situações-Problema. Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas, 10(1), 2-14.

[6] Artigue, M. (1984).Modélisation et Reproductibilité en Didactiques de Mathématiques. Les Cahiers Rouge des Didactiques des Mathematiques, 8(1), 1-38.

[7] Artigue, M. (1988).Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 9(3), 281-308.

[8] Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherchesen Didactique des Mathématiques, 7(2), 33-115.

[9] Brousseau, G. (1996). Fundamentos e métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, Jean. (Org.). Didáticas das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget. 35-113.

[10] Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. Educación Matemática, 12(1), 5-38.

[11] Craveiro, I. M. (2004). Extensões e Interpretações Combinatórias para os Números de Fibonacci, Pell e Jacobsthal. (tese de doutorado). Campinas: Unicamp.

[12] Falcón, S. e Plaza, (2007). Á. On the Fibonacci k-numbers. Chaos, Solitons & Fractals, [s.l.], 32(5), 1615-1624.

[13] Horadam, A. F. (1996). Jacobsthal representation numbers. The Fibonacci Quarterly. Austrália, pp. 40-55.

[14] Koken, F. e Bozkurt, D.(2008). On the Jacobsthal numbrs by matrix methods. International Journal of Contemporary Mathematics. 3(13), 605-614.

[15] Koshy, T. (2019). Fibonacci and Lucas Numbers and Applications, 2. New York: John Willey and Sons.

[16] Laborde, C. (1997).Affronter la complexité des situations didátiques d´apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. Didaskalia, 10(1), 97-112.

[17] Pais, L.C. (2015). Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Ed. Autêntica.

[18] Siegmund-SchultzeI, R. (Reinhard) (2009). Mathematicians fleeing from Nazi Germany: individual fates and global impact

[19] Souza, T.S.A. e Alves, F.R.V. (2018). Engenharia Didática como instrumento metodológico no estudo e no ensino da sequência de Jacobsthal. #Tear: Revista de Educação, Ciências e Tecnologia, Canoas, 7(2).

[20] Sousa, R. T., Azevedo, I. F. e Alves, F. R. V. (2021). Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas: um contributo ao ensino de Geometria Analítica com o software GeoGebra. Revista Binacional Brasil-Argentina, 10(1),357-379.

[21] Vieira, R.P.M e Alves, F.R.V. (2020). Engenharia Didática e sequência de Padovan e Tridovan: uma análise preliminar e a priori. Revista Iberoamericana de Educación Matemática.