Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica
Vol 26, No 1. Agosto, 2025 – Febrero, 2026
ISSN 1659 -0643
DOI: 10.18845/rdmei.v26i1.8121

Competencias previas en estudiantes de cálculo diferencial. Análisis de un caso de estudio en la Universidad Técnica Nacional de Costa Rica

| Background knowledge required for differential calculus. A case study at the National Technical University of Costa Rica |

| Competências prévias em estudantes de cálculo diferencial: Análise de um estudo de caso na Universidade Técnica Nacional da Costa Rica |

Tonny Andrey Garita Araya
tonny.garita.araya@una.cr
Universidad Nacional de Costa Rica
Heredia, Costa Rica

Yeison Arley Ramírez Vanegas
yeison.ramirez@udea.edu.co
Universidad de Antioquia
Medellín, Colombia

Recibido: 16 de enero de 2025 Aceptado: 1 de mayo de 2025

Resumen: Este artículo muestra que, a pesar de las variantes en las pruebas estandarizadas de matemática al concluir la educación secundaria, el desempeño de los estudiantes a lo largo de los años sigue siendo bajo. También expone datos sobre el rendimiento de los estudiantes en el curso de Cálculo en las universidades públicas de Costa Rica. El estudio se enfoca en examinar la relación entre el currículo oficial del Ministerio de Educación Pública y las competencias matemáticas que los estudiantes adquieren para ingresar a la educación superior, con énfasis en la preparación para el cálculo diferencial. Para ello, se presentan los resultados de una prueba diagnóstica que evaluó el rendimiento de los estudiantes en: la determinación de la imagen de una función, el análisis de gráficas, la resolución de ecuaciones y de problemas de aplicación. Estos temas, abordados en secundaria, son fundamentales para la comprensión de conceptos clave del cálculo diferencial, como la interpretación de la derivada y sus aplicaciones. La investigación se realizó con una muestra de 23 estudiantes y evidenció dificultades significativas en la comprensión de conceptos básicos, como el cálculo de la pendiente de una recta a partir de dos puntos, así como en la ejecución de procedimientos algebraicos elementales para resolver ecuaciones. A partir de estos resultados, se compara la propuesta del programa de estudio de matemática para secundaria con el desempeño de los estudiantes, identificando posibles barreras que afectan el aprendizaje del cálculo diferencial.

Palabras Clave: Cálculo diferencial, prueba diagnóstica, educación secundaria.

Abstract: This article shows that, despite variations in standardized mathematics tests at the end of high school, student performance over the years remains low. It also presents data on student performance in the Calculus course at public universities in Costa Rica. The study focuses on examining the

[1]Tonny Andrey Garita Araya. Profesor en la Universidad Nacional de Costa Rica. Dirección portal: Heredia, Costa Rica. Código Postal: 40101. Correo electrónico: tonny.garita.araya@una.cr.

[2]Yeison Arley Ramirez Vanegas. Coordinador de Programas de Posgrado del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Antioquia, Colombia. Dirección postal: Calle 67 No. 53 - 108. Medellín - Colombia. Código postal: 050010. Correo electrónico: yeison.ramirez@udea.edu.co.

relationship between the official curriculum of the Ministry of Public Education and the mathematical competencies that students acquire to enter higher education, with emphasis on preparation for differential calculus. To this end, we present the results of a diagnostic test that evaluated students' performance in: determining the image of a function, analyzing graphs, solving equations and application problems. These topics, addressed in high school, are fundamental for the understanding of key concepts of differential calculus, such as the interpretation of the derivative and its applications. The research was carried out with a sample of 23 students and revealed significant difficulties in the understanding of basic concepts, such as the calculation of the slope of a line from two points, as well as in the execution of elementary algebraic procedures to solve equations. Based on these results, we compare the Based on these results, the proposal of the mathematics program of study for secondary school is compared with the performance of the students, identifying possible barriers that affect the learning of differential calculus.

Keywords: Differential calculus, diagnostic test, high school education.

Resumo: Este artigo mostra que, apesar das variações nas provas padronizadas de matemática ao concluir o ensino secundário, o desempenho dos estudantes ao longo dos anos continua sendo baixo. Também apresenta dados sobre o rendimento dos estudantes no curso de Cálculo nas universidades públicas da Costa Rica. O estudo foca na análise da relação entre o currículo oficial do Ministério da Educação Pública e as competências matemáticas que os estudantes adquirem para ingressar no ensino superior, com ênfase na preparação para o cálculo diferencial. Para isso, são apresentados os resultados de uma prova diagnóstica que avaliou o desempenho dos estudantes em: determinação da imagem de uma função, análise de gráficos, resolução de equações e de problemas de aplicação. Esses temas, abordados no ensino secundário, são fundamentais para a compreensão de conceitos-chave do cálculo diferencial, como a interpretação da derivada e suas aplicações. A pesquisa foi realizada com uma amostra de 23 estudantes e evidenciou dificuldades significativas na compreensão de conceitos básicos, como o cálculo da inclinação de uma reta a partir de dois pontos, assim como na execução de procedimentos algébricos elementares para resolver equações. A partir desses resultados, compara-se a proposta do programa de estudos de matemática para o ensino secundário com o desempenho dos estudantes, identificando possíveis barreiras que afetam a aprendizagem do cálculo diferencial.

Palavras-chave: Cálculo diferencial, prova diagnóstica, ensino secundário.

1. Introducción

Con el objetivo de mejorar el rendimiento de los estudiantes de primaria y secundaria en pruebas nacionales e internacionales, Costa Rica ha implementado de manera paulatina desde el año 2012 el enfoque de enseñanza de las matemáticas basado en la resolución de problemas. Es decir, se plantea la posibilidad de construir una formación de calidad mediante la contextualización de problemas matemáticos, utilizando modelos cercanos a los estudiantes y los procesos de: *Razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, conectar, comunicar y representar*, integrados durante todo el proceso educativo (Ministerio de Educación Púbica [MEP], 2012; Ruiz, 2013).

De acuerdo con ese objetivo y en lo que respecta a las pruebas internacionales, se puede mencionar el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA) realizado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). La implementación en Costa Rica de este tipo de evaluaciones comenzó en el año 2009 a través de un plan piloto. Desde entonces, y en virtud de su carácter trianual, estas evaluaciones se han llevado a cabo con regularidad en instituciones educativas seleccionadas de manera aleatoria (MEP, 2021). Las puntuaciones de las pruebas PISA se dan en una escala con promedio 500 y una desviación estándar de 100, con base en las puntuaciones obtenidas por los países participantes (MEP, 2024).

En la tabla 1 se puede observar cómo Costa Rica ha venido descendiendo en los resultados en Lectura, Ciencias y Matemáticas a través del tiempo. Esta situación constituye una alerta para el sistema educativo en general, pues representa un indicador sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes en todas las instituciones de educación secundaria (públicas y privadas), donde no se están alcanzando los resultados de aprendizaje programados. Además, se refleja una situación de desfavorabilidad frente a otros países de la región (Chaves, 2023).

Tabla 1: Resultados de las pruebas PISA de Costa Rica. Fuente: (MEP, 2024)

Resultados de las Pruebas PISA	*2009*	*2012*	*2015*	*2018*	*2022*
Lectura	443	441	427	426	415
Matemáticas	409	407	400	402	385
Ciencias	430	429	420	416	411

Nota: La escala de puntuación es de 350 a 550

La OCDE clasifica los resultados en seis niveles de competencia en alfabetización matemática. En 2012 y 2015, Costa Rica se ubicó entre el 25 % de los países con los puntajes más bajos. Aunque en 2018 superó el promedio de América Latina, al compararse con los miembros de la OCDE, quedó entre los dos últimos lugares. Para 2022, el país registró una disminución de 17 puntos con respecto a 2018, lo que llevó a su clasificación en el grupo que la OCDE designa para países que no alcanzan el nivel 1 (bajo) (Chaves, 2023).

En la figura 1 se presenta una comparación de los resultados en matemáticas en las últimas cinco ediciones de las pruebas PISA.

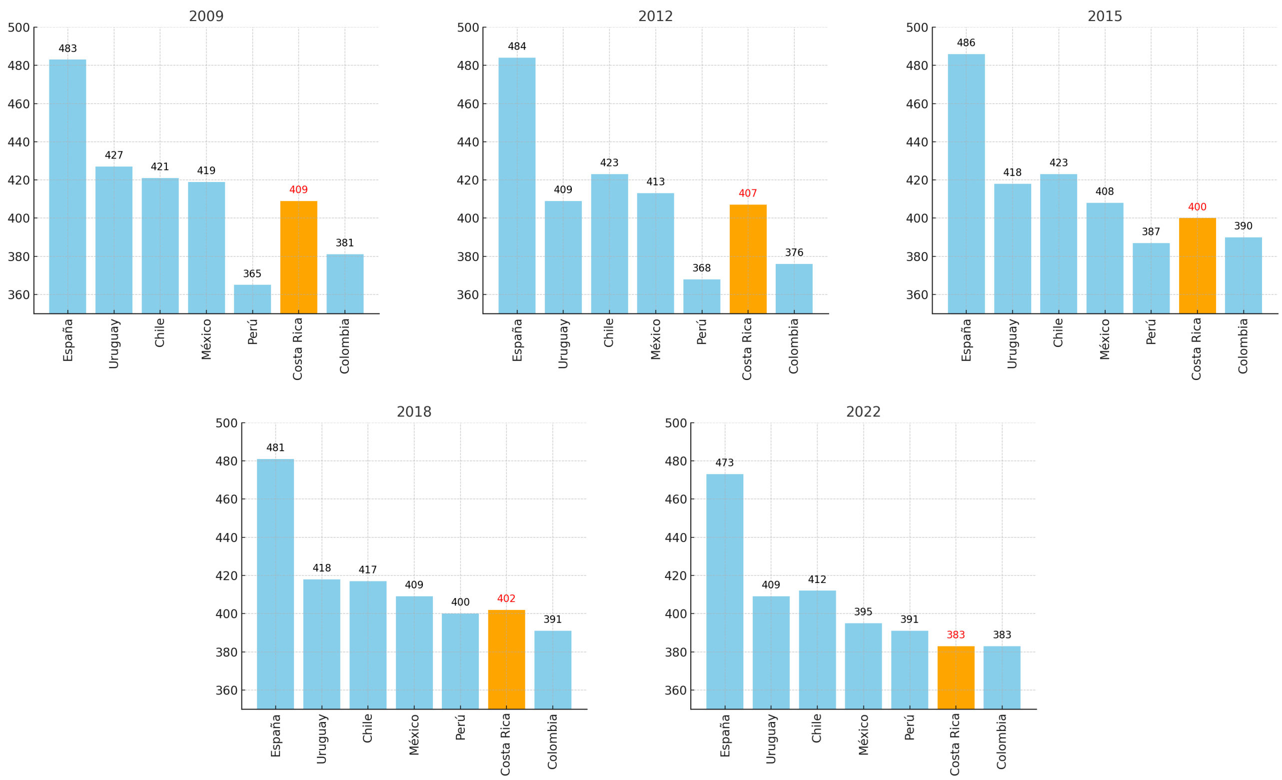


Figura 1: Comparativo en resultados por país para los años indicados. Elaboración propia con datos tomados de MEP (2024).

Estos bajos resultados también se observan en los exámenes realizados por el MEP, los cuales son un requisito para finalizar la educación secundaria. A lo largo de los años, se implementaron diversos cambios en las políticas gubernamentales, entre ellos:

- La prueba de *Bachillerato* constaba de 60 preguntas de selección múltiple con cuatro opciones, pero a partir del año 2016 se incluyeron preguntas de única respuesta cerrada, en la cual el estudiante debía escribir la respuesta obtenida (Alvarado, 2016; Castillo, 2015).
- Las pruebas *FARO* (*Fortalecimiento de Aprendizajes para la Renovación de Oportunidades*) sustituyeron a las pruebas de *Bachillerato* en 2019. Se aplicaban en el penúltimo año de educación secundaria y podían repetirse en caso de ser necesario (Castro, 2019).
- En 2023, las *Pruebas Estandarizadas* reemplazaron a las pruebas *FARO*. Además, volvieron a aplicarse en el último año de educación secundaria y las preguntas de selección única pasaron a tener tres opciones (Poder Ejecutivo, 2024; MEP, 2024).

A pesar de los cambios en las pruebas mencionados, los resultados negativos se mantuvieron y han sido evidenciados en diferentes investigaciones:

- En 2014, los resultados de bachillerato mostraron que "en Matemáticas, cerca del 80 % obtuvo una nota inferior a 70 y más de la mitad, una menor a 50"(Consejo Nacional de Rectores [CONARE], 2015, p. 136).
- Los resultados de las pruebas de bachillerato de 2017 reflejaron que "por asignatura, Matemáticas obtuvo los niveles de aprobación más bajos, un 73,7 %" (CONARE, 2019, p. 136).
- En las pruebas FARO de 2022, "un total de 66059 estudiantes aplicaron la prueba. Un 2,34 % se ubicó en nivel 3 o avanzado, 13,24 % en nivel 2A o intermedio alto, 78,86 % en nivel 2B intermedio bajo y 5,56 % en nivel 1 o elemental"(Cordero, 2022).
- En la tabla 2 se presentan los porcentajes de los niveles de desempeño (básico, intermedio, avanzado) según los resultados de la prueba estandarizada 2023 en las diferentes modalidades de educación secundaria (Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad [DGEC], s.f).

Tabla 2: Resultados de matemática en las pruebas estandarizadas 2023.
Elaboración propia con datos tomados de MEP (2023b).

	Básico	*Intermedio*	*Avanzado*
Académica Diurnos	35,94 %	39,92 %	24,14 %
Académica Nocturnos	40,10 %	36,60 %	23,30 %
Técnicos	25,59 %	47,52 %	26,86 %

Entonces, los resultados en las pruebas muestran que no se ha logrado mejorar los índices de aprobación a nivel nacional. Algunos autores señalan que los organismos responsables de la evaluación no han desarrollado herramientas estandarizadas alineadas con los enfoques pedagógicos actuales. Esto dificulta la integración, planificación y medición del currículo, afectando el desarrollo de la competencia matemática. Dicha competencia es fundamental para resolver problemas en diversos contextos, incluidos los ámbitos científico y matemático (Poveda et al., 2023; Ruiz, 2017; CONARE, 2023).

2. Planteamiento del problema

Ahora bien, el bajo rendimiento antes mencionado evidencia que los estudiantes que finalizan la secundaria o están en su primer año universitario no cuentan con los conocimientos básicos para afrontar con éxito los cursos de matemáticas a nivel superior. Los resultados de la Prueba Diagnóstica en Matemática, aplicada por la Universidad de Costa Rica (UCR) y diseñada para evaluar las condiciones académicas de los estudiantes al ingresar a carreras que requieren cursos de matemática, mostraron que en el año 2023 que de las 1874 personas que realizaron la prueba, el 78,28 % obtuvo calificaciones inferiores a 40 en una escala de 0 a 100, mientras que solo el 5,12 % alcanzó puntajes de 70 o más (Universidad de Costa Rica [UCR], 2023).

Lo anterior tiene consecuencias negativas en la aprobación de los cursos. En 2022, el 44,4 % de las personas que cursaban estudios universitarios en Costa Rica estaban matriculadas en universidades públicas. A lo largo del tiempo, se ha observado que los cursos no propios de la carrera, conocidos como cursos de servicio, presentan las tasas de reprobación más altas (CONARE, 2023).

Un ejemplo de ello es el curso de Cálculo I, el cual durante el período de 2015 a 2019, registró una tasa de reprobación que osciló entre el 53,7 % y el 63,7 % en las tres universidades públicas más grandes del país[1] (García y Román, 2021).

Cabe señalar que existen muchas investigaciones sobre rendimiento y la falta de conocimiento previo de los estudiantes a la hora de enfrentarse a cursos universitarios de matemática. Por ende, en este artículo se delimitó a analizar la propuesta curricular del MEP y conocer si ¿la preparación adquirida en secundaria proporciona el conocimiento básico para el curso de Cálculo I?

3. Metodología

Los resultados presentes es este artículo hacen parte de un trabajo de investigación que aplicó modelos contextualizados en las clases de cálculo diferencial del curso ME-003 (Cálculo I) de la Universidad Técnica Nacional (UTN) para analizar el aprendizaje significativo de los estudiantes. La elección de esa institución de educación superior se basó en que el curso de Cálculo I tiene características similares con los cursos de las otras universidades públicas, tales como:

- En todas las universidades públicas el curso de Cálculo I abarca: límites y continuidad, cálculo diferencial y cálculo integral. Existen diferencias mínimas con respecto a una u otra universidad.
- Los estudiantes que conforman los cursos de Cálculo pertenecen a diversas carreras y provienen de distintos modelos de educación secundaria (colegios diurnos, nocturnos, académicos, técnicos) donde el común denominador es que tuvieron que realizar alguna de las pruebas estandarizadas mencionadas anteriormente para poder acceder a la educación superior.
- Al igual que las otras universidades el porcentaje de reprobación es alto, por ejemplo para el año 2017 la tasa de deserción y reprobación en el curso de Cálculo I fue cercana al 65 % (Arroyo, 2018).

Con el objetivo de conocer el desenvolvimiento en cinco habilidades que se estudian en secundaria y son necesarias en temas de cálculo diferencial, se aplicó una prueba diagnóstica en uno de lo grupos de la sede de Atenas durante el segundo cuatrimestre del año 2023. Los resultados se analizaron utilizando una rúbrica (ver el Apéndice A) que se construyó siguiendo los lineamientos técnicos propuestos por el MEP (2023a) para conocer el desempeño con base en la precisión, el uso adecuado de procedimientos, así como la claridad en la justificación de las respuestas en cada uno de los ejercicios y de esta forma clasificarlos en cuatro niveles: superior, alto, básico o bajo.

3.1. Población y muestra

Al momento de aplicar la prueba diagnóstica, se estaba impartiendo el curso de Cálculo I a dos grupos en la sede de Atenas de la UTN. No existió ningún criterio particular para la elección de la muestra, la

[1] UCR: Universidad de Costa Rica. TEC: Instituto Tecnológico de Costa Rica. UNA: Universidad Nacional de Costa Rica

cual correspondió al grupo 002 de 23 estudiantes y de los cuales el 95 % eran menores a 20 años. Para el caso de estudio la edad es un dato relevante, pues significa que la mayoría de la muestra está formada por estudiantes que recibieron las clases en secundaria con la propuesta curricular implementada en el año 2012, presentaron alguna o varias de las pruebas nacionales anteriormente mencionadas y los exámenes regulares de aula construidos con los lineamientos del MEP. Es decir, el lenguaje y forma de preguntar no es desconocido para ellos.

Finalmente, es importante mencionar que se cumplió una de las características mencionadas anteriormente sobre la conformación heterogénea de personas de diversas carreras en un mismo grupo, en este caso habían estudiantes de Contabilidad y Finanzas, Ingeniería en Sistemas de Producción Animal e Ingeniería en Tecnología de Alimentos.

3.2. Prueba diagnóstica

En vista que se iba a indagar sobre habilidades obtenidas en la etapa colegial, era importante realizar las preguntas utilizando al lenguaje y forma de presentar los conceptos que los estudiantes conocen en ese nivel de educación. Teniendo esto en cuenta, la prueba diagnóstica se elaboró bajo las indicaciones propuestas por el MEP (2023a) para las evaluaciones escritas de matemática con ítems de: identificación, resolución de ejercicios y resolución de problemas. Se validó la prueba mediante el juicio de expertos, según Escobar y Cuervo (2008) se define como "una opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en éste, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones" (p. 29). Por lo tanto, los expertos elegidos fueron los profesores que regularmente imparten Cálculo I en la sede de Atenas y además, con amplia experiencia en educación secundaria, lo que resulta ideal por su conocimiento en la estructura de las pruebas que se ejecutan en ese nivel, así como los contenidos que se imparten en el curso de Cálculo.

Tras analizar el programa del curso y considerando los temas que, según los expertos, presentan mayores dificultades de comprensión en cálculo diferencial, se decidió indagar sobre los siguientes aspectos:

- *Ecuación de una recta:* El concepto de derivada se introduce teniendo como base la razón de cambio promedio entre dos puntos y luego concluir que es la razón de cambio instantánea o pendiente de la recta tangente. Por lo tanto, era necesario determinar si los estudiantes pueden encontrar la ecuación de una recta utilizando dos puntos de la misma.

- *Imagen de una función:* Para determinar máximos y mínimos utilizando los puntos críticos, el estudiante debe ser capaz de encontrar la imagen de una función. Se eligió una función polinómica y la multiplicación de una función raíz cuadrada con una exponencial de la forma $a^{f(x)}$ (MEP, 2012). Estos tres tipos se analizan en cálculo diferencial.

- *Análisis de gráficas:* Dentro de las aplicaciones de la derivada, se encuentra determinar la monotonía y concavidades en la gráfica de una función. Entonces era necesario conocer si podían identificar diversos elementos relacionados a esos temas en la representación gráfica de una función.

- *Resolución de ecuaciones:* Se requiere para encontrar los puntos críticos y de inflexión, se les presentó diversos tipos de ecuaciones como polinomiales, radicales, racionales y exponenciales.

- *Resolución de problemas:* El enfoque principal del currículo en secundaria es la resolución de problemas (MEP, 2012) y en cálculo diferencial los estudiantes se enfrentan a ese tipo de situaciones, específicamente en aplicaciones de la derivada. De ahí la importancia de determinar si lograban poner en práctica de forma adecuada la estrategia de comprender, aplicar, resolver e interpretar un problema.

4. La propuesta del programa de estudio

A continuación se presenta un análisis de la propuesta metodológica del Programa de Estudio de Matemáticas (MEP, 2012) sobre las habilidades que deben obtener los estudiantes en los temas seleccionados para la prueba diagnóstica.

4.1. Ecuación de la recta

En décimo año los estudiantes deben adquirir los conocimientos para determinar todos los elementos relacionados con la recta en el plano, así como su interpretación geométrica. Desde el currículo se propone que, con problemas relacionados con la ecuación de la recta el estudiante retome lo aprendido sobre el tema en octavo año, y sea capaz de construir la ecuación, graficarla, interpretarla y obtener información de ella respecto de algún valor en particular. Específicamente menciona que:

> Puede proponerse que se determine la pendiente y la intersección con el eje de las ordenadas de una determinada recta representada por el criterio $y = mx + b$, dados dos puntos de ella. La idea es que cada estudiante pueda deducir la fórmula para la pendiente m de la recta, como la razón entre el cambio de y con respeto al de x:
>
> $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
>
> y que siga utilizándola para calcular la pendiente de una forma más fácil (MEP, 2012, p. 410).

Es decir, los estudiantes debían adquirir la habilidad de determinar la pendiente de una recta mediante dos puntos de ella. El ejercicio propuesto a los estudiantes en la prueba diagnóstica era:

- Determine la ecuación de la recta l_1 que pasa por los puntos $(-6, 5)$ y $(8, 2)$.

4.2. Imagen de una función

Otra habilidad que se espera de los estudiantes en décimo año es "Evaluar el valor de una función dada en forma gráfica o algebraica, en distintos puntos de su dominio" (MEP, 2012, p. 407). El programa de estudio en educación secundaria propone utilizar una función cúbica, dónde los estudiantes deben determinar la imagen de $x = -2$, $x = t$ y $x = \frac{1}{a^2}$ al completar una tabla. Luego, presenta una función a trozos y deben determinar la imagen de números enteros pero también de irracionales como $x = \pi$ y $x = \sqrt{20}$ (MEP, 2012).

Los ejercicios propuestos para resolver eran los siguientes:

- Para $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + x + 15$ determine $f(-6)$
- Para $f(x) = \sqrt{7x+4} \cdot e^{3x+5}$ determine $f(3)$

4.3. Análisis de gráficas

Otra habilidad importante que deben desarrollar los estudiantes en décimo año es "Analizar una función a partir de sus representación gráfica" (MEP, 2012, p. 407). Para ello, en el programa del MEP se presentó un ejemplo con la representación gráfica sobre el crecimiento del PIB del gobierno central para responder de ella los siguientes aspectos:

- ¿En qué intervalos la función es creciente?
- ¿En qué intervalos la función es decreciente?
- ¿Cuál es el dominio de la función?
- ¿Cuál es su ámbito (aproximado)?
- ¿Es inyectiva la función?
- ¿Cuáles son los ceros (aproximados) de la función?
- ¿Cuál es la imagen (aproximada) de 2007?
- ¿En cuáles intervalos la función es negativa?
- ¿Cuál es el valor máximo (aproximado) de la función?
- ¿Cuál es el valor mínimo (aproximado) de la función?

(MEP, 2012, p. 408)

Siguiendo lineamientos similares a los propuestos por el MEP (2012), en la prueba diagnóstica se les presentó la gráfica de la figura 2.

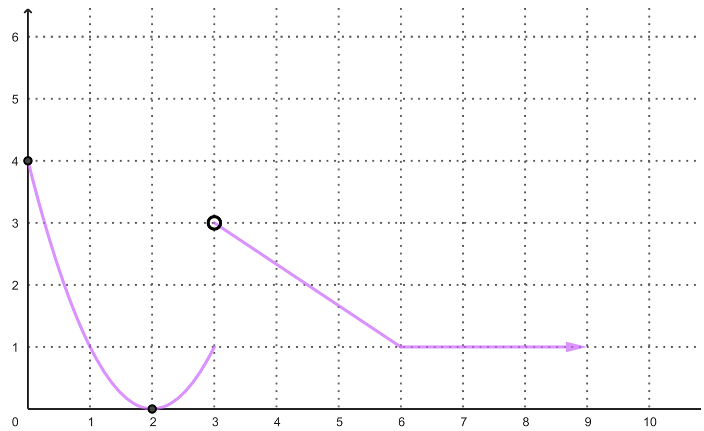


Figura 2: Gráfica de la prueba diagnóstica. Elaboración propia.

De donde los estudiantes debían identificar:

- Un intervalo donde la función es creciente
- Un intervalo donde donde la función es decreciente
- Un intervalo donde donde la función es constante
- Punto máximo
- Punto mínimo
- Ceros de la función
- Imagen de 6
- Preimagen de 4

4.4. Resolución de ecuaciones

Para esta habilidad los estudiantes debían encontrar la solución en $\mathbb{R}$ de las siguientes ecuaciones:

1. $3x^2 + 14x - 5 = 0$

2. $5x + 8 = 10$

3. $\sqrt{3x-1} = 8$

4. $\dfrac{2x+1}{3x-4} = -6$

5. $2^x = 7$

En el caso de la ecuación lineal el MEP propone desarrollar varias habilidades tales como:

- Identificar la diferencia entre una expresión algebraica y una ecuación.
- Comprobar si un número dado es solución de una ecuación.
- Reducir una ecuación a otra que es equivalente a ella.
- Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Resolver ecuaciones algebraicas fraccionarias que se reducen a ecuaciones del primer grado con una incógnita.
- Resolver ecuaciones literales para una de las letras.

(MEP, 2012, p. 335)

Para las ecuaciones cuadráticas el programa de estudio propone alcanzar las siguientes habilidades:

- Plantear y resolver problemas utilizando ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
- Resolver ecuaciones que se reducen a ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

(MEP, 2012, p. 340)

Las ecuaciones radicales no están explicitas en el programa de estudio, sin embargo, en undécimo año se estudian las habilidades de:

- Identificar las condiciones para que una función tenga inversa.
- Determinar intervalos en los cuales una función representada gráficamente tiene inversa.
- Analizar gráfica y algebraicamente la función con criterio dado por $f(x) = a\sqrt{x+b} + c$.

(MEP, 2012, p. 413)

Por lo cual los estudiantes aprenden a resolver ecuaciones de la forma $a\sqrt{x+b} + c = 0$ para determinar los intervalos o la intersección con el eje x.

En lo referente a las ecuaciones exponenciales, la habilidad por construir es *Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones exponenciales* y sugiere trabajar con ecuaciones que se pueden expresar como $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, donde y f y g son funciones lineales o cuadráticas de x (MEP, 2012).

4.5. Resolución de problemas

Una de las últimas habilidades que se estudian en secundaria es la de "Utilizar las funciones estudiadas para resolver problemas a partir de una situación dada" (MEP, 2012, p. 417), según el programa del MEP está habilidad encierra todas las funciones que se estudian desde la primaria, por lo cual se busca una integración de ellas y usar modelos matemáticos de situaciones reales.

> Se sugiere que la o el docente proponga un problema en forma verbal o tabular y que cada estudiante interprete la información, la sistematice y establezca relaciones relevantes del problema para determinar el modelo que mejor refleje la situación. Además cada estudiante debe resolver el problema, analizar los resultados y verificar la factibilidad del modelo (MEP, 2012, p. 417).

El programa muestra ejemplos con:

- Una función exponencial que modela la temperatura del cuerpo, conocida como la ley de Newton de enfriamiento.
- Una caja, para utilizar una función cuadrática que permite determinar el volumen y área.
- Una función logarítmica, con aplicación en química para determinar la acidez de una solución o pH
- Otra función exponencial, aplicada esta vez a la economía donde se determina el interés compuesto.

Además en lo que respecta a las funciones cuadráticas, otra habilidad de undécimo año es la de "Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Y el programa menciona que dicha función se estudió desde noveno año, por lo se debe hacer un estudio sistemático para obtener elementos tales como el vértice y los intervalos de monotonía (MEP, 2012).

En vista de lo anterior, se les propuso a los estudiantes resolver los siguientes problemas:

1. La función $y = 4.64 + 0.001154x - 0.000058693x^2$ con $1 \leq x \leq 270$ permite determinar la producción de leche $(\mathrm{kg/d})$, de acuerdo con los días de lactancia x.

   Determine

   - La producción los días $x = 100$ y $x = 225$

2. La función $f(x) = 9.380571 + 0.020771x - 0.00005845x^2$ modela el porcentaje de firmeza de los frutos de tomate, de acuerdo con una dosis de nitrógeno x (mg/dm) con $0 \leq x \leq 400$.

   Determine

   - El punto máximo.
   - Los intervalos de monotonía.

5. Resultados y discusión

La figura 3 muestra el desempeño de los estudiantes en cada una de los temas evaluados de acuerdo con los indicadores (ver Apéndice A). Se puede observar que solo en las preguntas relacionadas con imagen de una función un porcentaje mayor de estudiantes lograron un desempeño superior, en los demás temas evaluados, el desempeño más común fue básico o bajo.

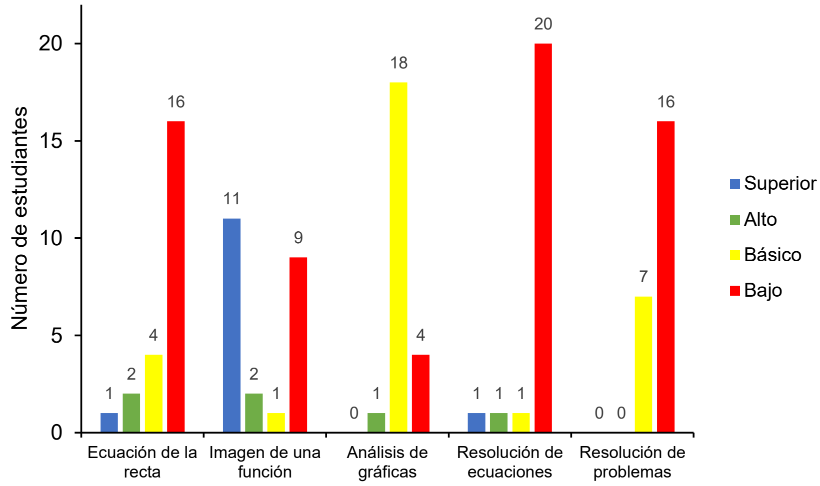


Figura 3: Desempeño por temas en la prueba diagnóstica. Elaboración propia.

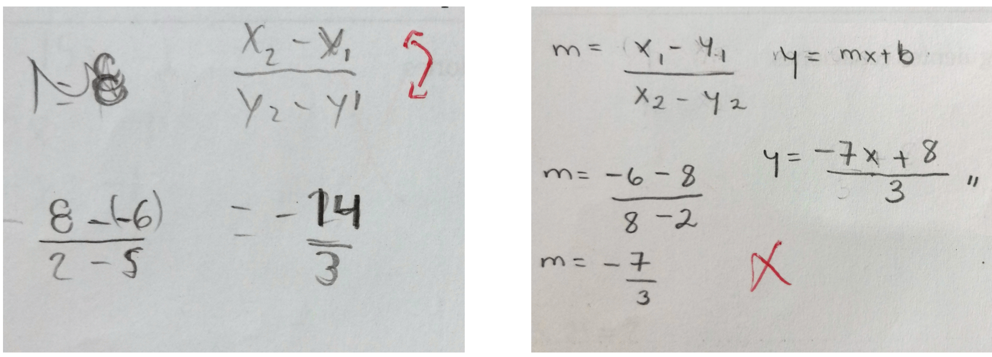
5.1. Ecuación de la recta

La tabla 3 presenta el porcentaje de desempeño en las preguntas relacionadas con la ecuación de la recta.

Tabla 3: Desempeño en obtener la ecuación de una recta. Elaboración propia.

Nivel de desempeño	*Total de estudiantes*	*Porcentaje*
Superior	1	4,3
Alto	2	8,7
Básico	4	17,4
Bajo	16	69,6
Total	23	100

Solo un estudiante se clasificó como un nivel superior al responder el ejercicio de forma correcta, lo que representa el 4,3 % de la muestra. El 8,7 % pudo determinar la pendiente pero no encontrar la ecuación de la recta y, más del 17 % tuvo un desempeño básico al aplicar incorrectamente la fórmula para determinar la pendiente, como se observa en la figura 4 con las respuestas de dos distintos estudiantes. Finalmente, cerca del 70 % obtuvo un bajo rendimiento derivado del hecho que desconocían o no recordaban cómo determinar la pendiente de una recta, razón por la cual no respondieron la pregunta.



(a) Estudiante 11 (b) Estudiante 18

Figura 4: Errores cometidos al utilizar la fórmula de la pendiente. Fuente: Respuestas de los estudiantes.

Los resultados indican que aunque algunos estudiantes cometieron “Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales”(Gamboa et al., 2019, p. 14), la mayoría no dominaba una habilidad fundamental: la razón de cambio promedio entre dos puntos, base para introducir la derivada (Rivera et al., 2019). Este concepto permite interpretar cómo cambia una variable respecto a otra, y así definir la derivada como la razón de cambio instantánea o pendiente de la recta tangente en un punto. Al asociar el concepto de pendiente de una recta con el de la recta tangente a distintas curvas, se facilita el análisis del comportamiento de las funciones, lo que resulta clave en temas avanzados como optimización y análisis de gráficas. Además, conocer las intersecciones de una recta con los ejes está directamente relacionado con las condiciones iniciales y de frontera en problemas de valor inicial en modelos matemáticos, aspecto esencial en cálculo y base para cursos de ecuaciones diferenciales.

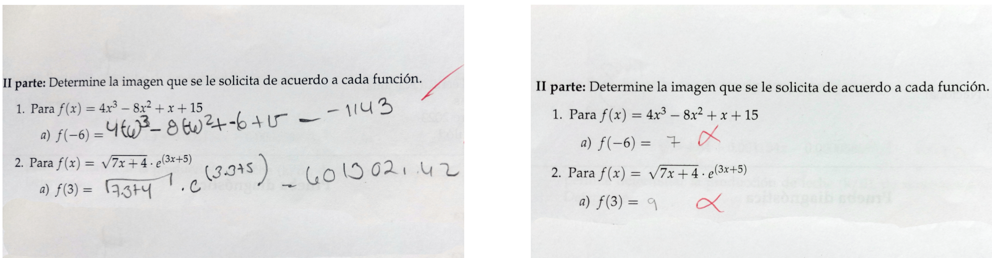
5.2. Imagen de una función

La tabla 4 muestra que aproximadamente el 48 % pudo responder correctamente las preguntas relacionadas con determinar información sobre la imagen de una función. Acá no se tuvo en cuenta si las respuestas se obtuvieron mediante procesos mentales no escritos, o el uso de la calculadora como herramienta. El 8.7 % (dos estudiantes) pudo determinar la imagen del producto de funciones pero no de la función polinomial, mientras que el 4,3 % (un estudiante) pudo encontrar en la función polinomial pero no en el producto de funciones.

Tabla 4: Desempeño en obtener la imagen de una función. Elaboración propia.

Nivel de desempeño	*Total de estudiantes*	*Porcentaje*
Superior	11	47,9
Alto	2	8,7
Básico	1	4,3
Bajo	9	39,1
Total	23	100

Un 39 % no pudo determinar la imagen para ninguna de las funciones propuestas. En varios casos, como el que se muestra en la figura 5b, los estudiantes simplemente escribían un número sin presentar ningún tipo de proceso de justificación. Por el contrario, como lo ejemplifica la figura 5a, algunos escribieron el proceso para obtener el resultado correcto, lo que evidencia su comprensión en las preguntas y el correcto desarrollo para encontrar las respuestas.



(**a**) Estudiante 4 (**b**) Estudiante 13

Figura 5: Soluciones a la pregunta sobre imagen de una función. Fuente: Respuestas de los estudiantes.

En general, se observó que los estudiantes no dominan correctamente el concepto de función y confunden elementos del dominio con su imagen, lo que se considera un “error debido al lenguaje matemático”(Gamboa et al., 2019, p. 12). Además, algunos sólo escriben respuestas sin mostrar un procedimiento que de cuenta de su respuesta y que evidencie que efectivamente comprenden la temática.

Lo anterior es relevante porque en cálculo diferencial determinar correctamente la imagen de una función a partir de su representación algebraica permite calcular la derivada en uno o varios puntos, para luego comparar resultados entre distintos valores. Esto es fundamental para aplicar los criterios de la primera y segunda derivada en la identificación de máximos, mínimos y puntos de inflexión, con aplicaciones en optimización, tasas de cambio relacionadas y construcción de gráficas.

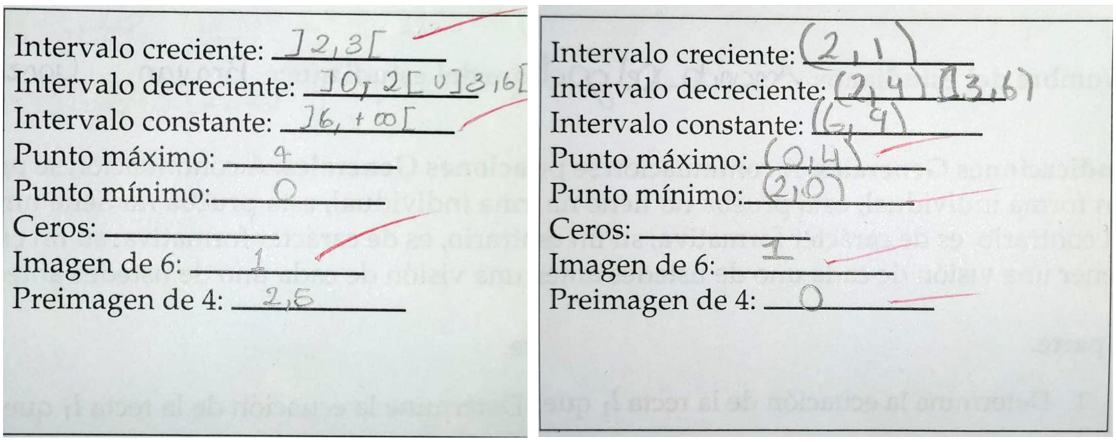
5.3. Análisis de gráficas

Según la tabla 5 ningún estudiante se clasificó en un nivel superior, el 4.3 % pudo identificar la mayoría de elementos en la representación gráfica y el 78 % solamente algunos como el máximo y mínimo de la función, lo que es importante pues es uno de los temas fundamentales para analizar con la derivada. Algo a resaltar es que cerca del 17 % no pudo identificar correctamente ninguno de los elementos.

Tabla 5: Desempeño del análisis de gráficas. Elaboración propia.

Nivel de desempeño	*Total de estudiantes*	*Porcentaje*
Alto	1	4,3
Básico	18	78,3
Bajo	4	17,4
Total	23	100

Otro dato a destacar es que ningún estudiante logró determinar los ceros de la función. El error más recurrente observado entre las respuestas fue confundir la imagen y la preimagen, pero también errores de notación, tanto en los intervalos como en la representación escrita de un punto. Por ejemplo, como lo muestra la figura 6, el estudiante 17 hizo una correcta utilización de la notación de intervalos, pero falló en la de puntos. Por el contrario, el estudiante 19 identificó y utilizó correctamente la notación para puntos, pero no así en los intervalos



(**a**) Estudiante 17 (**b**) Estudiante 19

Figura 6: Soluciones a la interpretación de gráficas. Fuente: Respuestas de los estudiantes.

Los resultados mostraron que muchos estudiantes cometieron “Errores debidos a dificultades para obtener información espacial”(Gamboa et al., 2019, p. 12) porque no logran interpretar correctamente el comportamiento de una función a partir de su gráfica. En el campo del cálculo diferencial, esta limitación es especialmente significativa, puesto que gran parte de las estimaciones de una función se basan en la gráfica de su derivada, y si esta se interpreta de manera errónea, se obtienen conclusiones equivocadas sobre la función original.

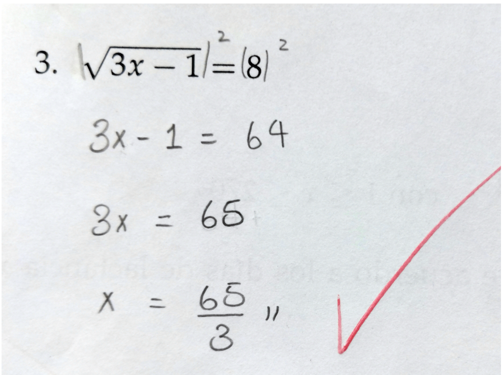
5.4. Resolución de ecuaciones

En resolución de ecuaciones se presentó el mayor porcentaje de estudiantes con un nivel bajo. De acuerdo con la tabla 6, un 87 % pudo resolver únicamente un tipo de ecuación; en la mayoría de los casos la lineal.

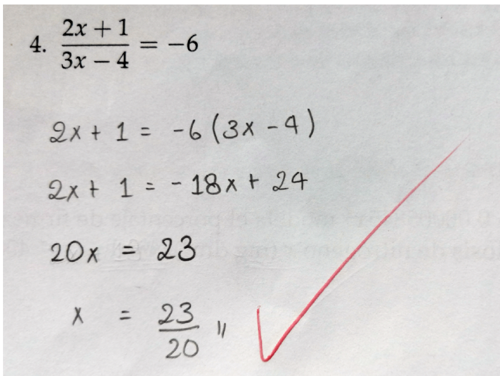
Tabla 6: Desempeño en la resolución de ecuaciones. Elaboración propia

Nivel de desempeño	*Total de estudiantes*	*Porcentaje*
Superior	1	4,3
Alto	1	4,3
Básico	1	4,3
Bajo	20	87,1
Total	23	100

Las respuestas muestran que solo un estudiante pudo resolver satisfactoriamente la gran mayoría de las ecuaciones **mostrando de manera explícita sus procedimientos**, como se observa en la figura 7



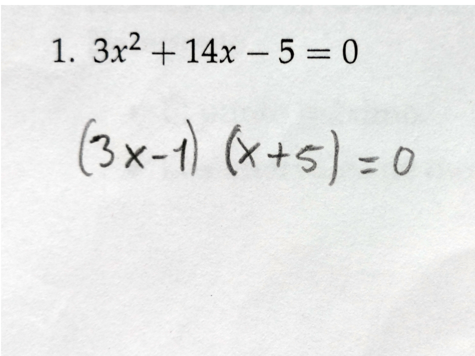
(**a**) Ecuación radical



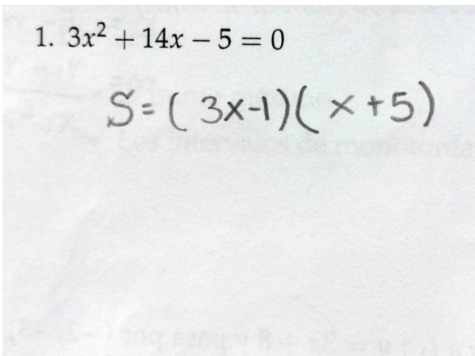
(**b**) Ecuación racional

Figura 7: Soluciones del estudiante 17 a la ecuación racional y la radical. Fuente: Respuestas de los estudiantes.

Si bien, algunos estudiantes procedieron mediante factorización en las ecuaciones polinómicas, como muestra la figura 8, no concluyeron el ejercicio mostrando las raíces. Esto permite inferir que no tienen claro el proceso y solo escriben procedimientos que conocen sin claridad o una estrategia de solución, lo cual se puede clasificar como "Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos" (Gamboa et al., 2019, p. 15).



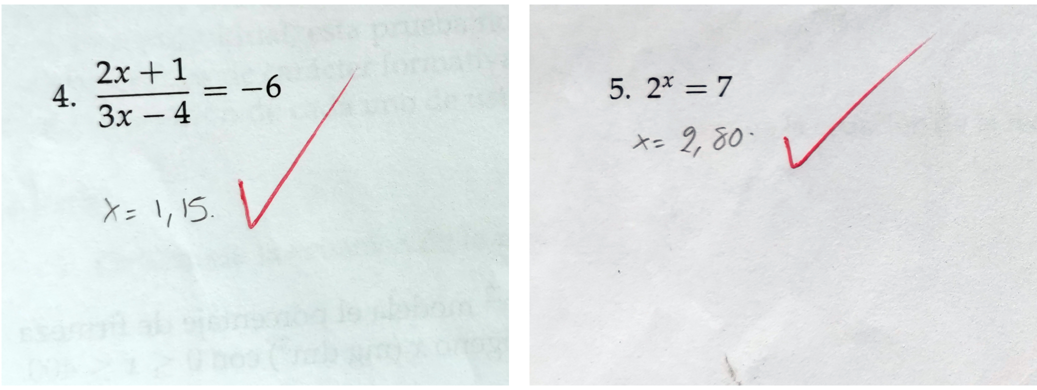
(**a**) Estudiante 1



(**b**) Estudiante 8

Figura 8: Procedimiento incompleto a la solución de la ecuación cuadrática mediante el método de factorización. Fuente: Respuestas de los estudiantes.

Un caso particular fue el estudiante 15, quien fue clasificado en nivel superior en los temas relacionados con cálculo de imagen y resolución de ecuaciones, en este último tema fue el único que contestó correctamente a todas las preguntas, pero no presentó ningún tipo de procedimiento como se observa en la figura 9. Ese estudiante fue clasificado en nivel bajo en los temas de rectas, interpretación de gráficas y resolución de problemas. Esto permite inferir que el uso de herramientas de apoyo como la calculadora jugaron un papel importante, pues en los temas donde fue clasificado en nivel bajo, necesitaba manejar algunos conceptos previos antes de realizar cálculos directos que llevaran a la respuesta.



(a) Ecuación racional (b) Ecuación exponencial

Figura 9: Soluciones del estudiante 15 a la ecuación racional y la exponencial. Fuente: Respuestas de los estudiantes.

Como es bien sabido, resolver ecuaciones forma parte esencial de la resolución de problemas en cálculo, como el trazado de gráficas, problemas de optimización y la determinación de intervalos de monotonía y concavidad. Por ejemplo, para encontrar los puntos críticos se debe resolver la ecuación $f'(x) = 0$ y luego clasificarlos como máximos o mínimos utilizando el criterio de la primera o la segunda derivada. Del mismo modo, al resolver la ecuación $f''(x) = 0$ se obtienen los puntos de inflexión que señalan el cambio de concavidad de la función. Analizar adecuadamente la monotonía y la concavidad proporciona información relevante para la aplicación de las derivadas en distintos contextos.

5.5. Resolución de problemas

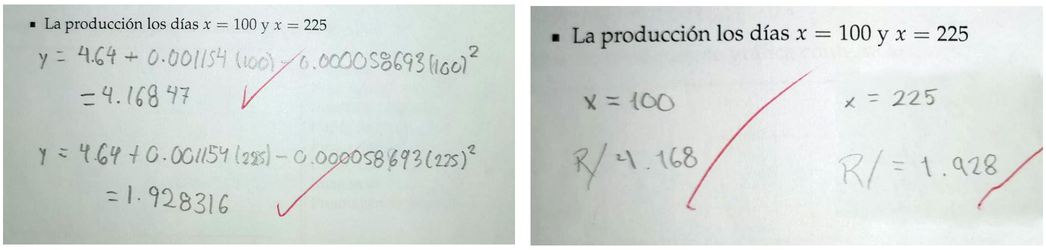
Finalmente, en la tabla 7 se pueden apreciar los resultados obtenidos en el tema de resolución de problemas, donde se clasificaron a siete estudiantes en un nivel básico porque lograron resolver únicamente el primer problema propuesto, el cual abordaba el tema de dominio e imagen de una función. Los restantes 16, en un nivel bajo debido a que no resolvieron ninguno de los problemas propuestos.

Tabla 7: Desempeño en la resolución de problemas. Elaboración propia

Nivel de desempeño	*Total de estudiantes*	*Porcentaje*
Básico	7	30,4
Bajo	16	69,6
Total	23	100

Como muestra la figura 10, algunos estudiantes escribieron la sustitución y luego el valor obtenido, otros solamente escribieron el resultado.

Paradójicamente, algunos de los estudiantes que resolvieron dicho problema no pudieron responder correctamente las preguntas relacionadas con el mismo contenido en una fase previa (pregunta 2A).



(**a**) Ecuación racional (**b**) Ecuación exponencial

Figura 10: Soluciones a los problemas de la prueba diagnóstica. Fuente: Respuestas de los estudiantes.

Se vuelve a observar de nuevo el "error debido al lenguaje matemático"(Gamboa et al., 2019, p. 12) pues la falta de comprensión de los conceptos fundamentales sobre funciones les genera confusión debido a la notación utilizada.

Por ejemplo, en la pregunta 2A se solicitó determinar $f(-6)$, mientras que en los problemas se planteó la consigna: *Determine la producción para* $x = 100$ *y* $x = 225$. Esto sugiere que aunque los estudiantes comprenden cómo calcular la imagen de una función a partir de su notación, tienen dificultades para interpretar la expresión $f(x)$ cuando se les pide evaluar la función en un valor específico.

La habilidad de resolución de problemas es necesaria poder comprender, obtener resultados y analizar correctamente las situaciones planteadas en problemas de optimización o razones de cambio relacionadas.

6. Conclusiones

Aunque la muestra no es representativa para generalizar los resultados a todas las universidades y grupos de Cálculo, presentó la misma característica de composición heterogénea, tanto del modelo de educación secundaria donde provienen y de diversidad de carreras como sucede en las otras universidades públicas de Costa Rica. Además, se evidenciaron errores y resultados similares a los de otras investigaciones realizadas con poblaciones similares. (Castillo, et al. 2018; Chacón y Roldán, 2021; Gamboa, et al 2019).

El desconocimiento o manejo limitado de conceptos fundamentales (pendiente de una recta, evaluación de funciones, solución de ecuaciones, uso de la notación, etc.) repercute directamente en la comprensión de temas centrales del cálculo diferencial. De acuerdo con el análisis del programa y la experiencia de los profesores del curso de Cálculo, se prevén dificultades para:

- Entender la derivada como razón de cambio instantánea.
- Resolver problemas de optimización (máximos y mínimos) o concavidad y puntos de inflexión.
- Aplicar técnicas de modelado de fenómenos reales mediante funciones más complejas.

Finalmente, se comprobó que la propuesta en el currículo oficial del MEP para secundaria contiene habilidades que son pertinentes para los temas de cálculo diferencial. Sin embargo, para la muestra en cuestión, se evidencia una brecha significativa entre las habilidades abordadas en secundaria y el nivel de dominio real que poseen los estudiantes al ingresar a la educación superior. Por lo cual, es importante seguir investigando sobre aquellas habilidades que presentan mayor desconocimiento por parte de los estudiantes para así realizar estrategias que ayuden a mitigar la afectación en el curso de Cálculo.

Contribución de las personas autoras: Conceptualización: T.A.G.A. Curación de datos: T.A.G.A. Análisis formal: T.A.G.A, Y.A.R.V. Investigación: T.A.G.A. Metodología: T.A.G.A, Y.A.R.V. Supervisión: Y.A.R.V. Escritura - borrador original: T.A.G.A, Y.A.R.V. Escritura - revisión y edición: T.A.G.A, Y.A.R.V.

Accesibilidad de datos: Todos los datos recopilados durante la investigación están disponibles para los interesados que lo soliciten por correo electrónico.

7. Referencias

Alvarado, J. (17 Agosto, 2016). Cambiarán examen de Bachillerato de Matemática. *CRhoy.com*. https://www.crhoy.com/nacionales/cambiaran-examen-de-bachillerato-de-matematica/.

Arroyo, G. (2018). *Apoyo de entornos virtuales para el curso de Cálculo I*. [Tesis de Maestría, Universidad Técnica Nacional]. https://utn.ac.cr/sites/default/files/attachments/cfpte/Arroyo_Gerardo_Informe_Final.pdf.

Castillo, P. J. (2015). Desarrollo en la prueba nacional de bachillerato de Matemática: Una necesidad. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 53-66. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/19144.

Castillo, M. Gamboa, R. y Hidalgo, R. (2018). Concordancia entre los cursos iniciales de matemática a nivel universitario y el programa de estudios preuniversitario: Una mirada desde los contenidos y el rendimiento académico universitario. UNICIENCIA. 32(2), 20-41. https://doi.org/10.15359/ru.32-2.2.

Castro, K. (20 febrero, 2019). Esto es todo lo que debe saber sobre de las pruebas FARO. *CRhoy.com*. https://www.crhoy.com/nacionales/esto-es-todo-lo-que-tiene-que-saber-sobre-las-pruebas-faro/.

Chacón, E. y Roldán, G. (2021). Factores que inciden en el rendimiento de los estudiantes de primer ingreso del curso Matemática General del Instituto Tecnológico de Costa Rica. *Uniciencia*, 35(1), 265-283. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.16.

Chaves, E. (2023). Pruebas PISA en Costa Rica (2009-2018). Proyecto Reforma Matemática. https://www.reformamatematica.net/wp-content/uploads/2023/12/Pruebas-PISA-en-Costa-Rica.pdf .

Consejo Nacional de Rectores (CONARE). (2015). Quinto Informe Estado de la Educación 2015. https://hdl.handle.net/20.500.12337/669.

Consejo Nacional de Rectores (CONARE). (2019). Séptimo Informe Estado de la Educación 2019. https://hdl.handle.net/20.500.12337/7773.

Consejo Nacional de Rectores (CONARE). (2023). Noveno Estado de la Educación 2023. https://hdl.handle.net/20.500.12337/8544.

Cordero, M. (26 abril, 2022). Mayoría de estudiantes de secundaria no alcanzaron nivel avanzado en pruebas FARO. *SEMANARIO UNIVERSIDAD*. https://semanariouniversidad.com/pais/mayoria-de-estudiantes-de-secundaria-no-alcanzaron-nivel-avanzado-en-pruebas-faro/.

Decreto Ejecutivo 44432 de 2024 [Poder Ejecutivo]. Reforma Reglamento de evaluación de los aprendizajes. 30 de Abril del 2024. Costa Rica. http://www.pgrweb.go.cr/scij/Busqueda/Normativa/Normas/nrm_norma.aspx?nValor2=101855.

Escobar, J. y Cuervo, A. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en Medición*, 6, 27-36. https://www.humanas.unal.edu.co/lab_psicometria/application/files/9416/0463/3548/Vol_6._Articulo3_Juicio_de_expertos_27-36.pdf.

Gamboa, R. Castillo, M. y Hidalgo, R. (2019). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. *Actualidades Investigativas en Educación*, 19(1), 1-31. https://doi.org/10.15517/aie.v19i1.35278.

García, C. y Román, M. (2021). Costos de la reprobación en las universidades públicas de Costa Rica. http://hdl.handle.net/20.500.12337/8167

Ministerio de Educación Pública (MEP) (2012). Programas de Estudio Matemáticas. I, II y III Ciclos dela Educación General Básica y Ciclo Diversificado. *MEP*. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/media/matematica.pdf.

Ministerio de Educación Pública (MEP). (2021). Las pruebas PISA en Costa Rica. https://dgec.mep.go.cr/pisa/

Ministerio de Educación Pública (MEP) (2023a). Lineamientos técnicos para la elaboración de la prueba escrita. *MEP*. https://ddc.mep.go.cr/sites/all/files/ddc_mep_go_cr/archivos/lineamientos_tecnicos_para_la_prueba_escrita_2023._vf.pdf

Ministerio de Educación Pública (MEP) (2023b). Marco de especificaciones Prueba Nacional Estandarizada 2023. *MEP*. https://dgec.mep.go.cr/wp-content/uploads/2024/02/marco_de_especificaciones_marzo_2023.pdf.

Ministerio de Educación Pública (MEP) (2024). Informe 12-2024 Proceso de pruebas PISA. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/2024-09/inf-12-2024-pruebasPISA.pdf.

Poveda, R., Zumbado, M., y Chaves, E. (2023). Criterios y ruta para el diseño de pruebas nacionales consistentes con los programas de estudio de matemáticas. *Consejo Nacional de Rectores-CONARE, PEN*. https://hdl.handle.net/20.500.12337/8523.

Rivera, M. Salgado, G. y Dolores, G. (2019). Explorando las Conceptualizaciones de la Pendiente en Estudiantes Universitarios. *Bolema*, 33(65), 1027-1046. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a03.

Ruiz, A. (2017). Evaluación y Pruebas Nacionales para un Currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (12), 1-316. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/31916.

Ruiz, A. (2013). La reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (9), 1-115. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/11125/10602.

Universidad de Costa Rica (UCR). (2023). Informe Examen de Diagnóstico en Matemática 2023. https://www.emate.ucr.ac.cr/sites/default/files/2023-09/Análisis DIMA 2023_para Dirección Mate.pdf.

A. Apéndice

Indicadores de desempeño

Tabla 8: Indicadores de desempeño.

Tema	Nivel superior	Nivel Alto	Nivel básico	Nivel bajo
Ecuación de una recta	Encuentra correctamente la ecuación de una recta utilizando dos puntos de ella.	Encuentra correctamente la pendiente de una recta utilizando dos puntos de ella.	Aplica incorrectamente la fórmula para determinar la pendiente de una recta utilizando dos puntos de ella.	Desconoce cómo obtener la pendiente de una recta utilizando dos puntos de ella.
Imagen de una función	Determina la imagen en funciones polinomiales y en composición de funciones radicales y exponenciales.	Determina la imagen en composición de funciones radicales y exponenciales.	Determina la imagen en funciones polinomiales.	No determina la imagen en funciones polinomiales y en composición de funciones radicales y exponenciales.
Análisis de gráficas	Interpreta correctamente todos los elementos al analizar una gráfica.	Interpreta correctamente la mayoría de elementos al analizar una gráfica.	Interpreta correctamente algunos de elementos al analizar una gráfica.	No interpreta correctamente los elementos al analizar una gráfica.
Resolución de ecuaciones: polinomiales, radicales, racionales y exponenciales.	Resuelve correctamente todos los tipos de ecuaciones.	Resuelve correctamente tres tipos de ecuaciones.	Resuelve correctamente dos tipos de ecuaciones.	Resuelve correctamente un o ningún tipo de ecuación.
Resolución de problemas	Encuentra y analiza detalladamente la imagen, el punto máximo y los intervalos de monotonía en un modelo cuadrático.	Encuentra y analiza al menos dos de los siguientes conceptos: la imagen, el punto máximo y los intervalos de monotonía en un modelo cuadrático.	Encuentra y analiza uno siguientes conceptos: la imagen, el punto máximo y los intervalos de monotonía en un modelo cuadrático.	No puede encontrar o analizar al menos uno siguientes conceptos: la imagen, el punto máximo y los intervalos de monotonía en un modelo cuadrático.