Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica
Vol 26, No 1. Agosto, 2025 – Febrero, 2026

ISSN 1659 -0643
DOI: 10.18845/rdmei.v26i1.7981

¿Qué es GeoGebra Discovery? Una ilustración

| What is GeoGebra Discovery? An illustration |

| O que é o GeoGebra Discovery? Uma ilustração |

Saulo Mosquera López[1]
samolo@udenar.edu.co
Grupo de investigación GESCAS
Universidad de Nariño
Nariño, Colombia

Sergio Gómez Noguera[2]
sgomez1987@gmail.com
Dpto de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
Nariño, Colombia

Recibido: 30 de enero de 2025 Aceptado: 30 de abril de 2025

Resumen: GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que, entre otros, permite la construcción de objetos geométricos, que pueden manipularse a través del arrastre y así observar los cambios que experimenta la construcción y las relaciones que permanecen constantes en la misma. En los últimos años se ha incorporado a GeoGebra una versión experimental llamada *GeoGebra Discovery*, que consiste en una colección de herramientas y comandos, que posibilitan la verificación matemática rigurosa y el descubrimiento automático de proposiciones sobre figuras geométricas, es decir, GeoGebra Discovery es una versión de GeoGebra que complementa, mejora y amplia determinadas herramientas de razonamiento automático que están en la versión estándar. El objetivo de este documento es el de describir algunas de estas herramientas e ilustrar su uso con ejemplos que permitan al usuario visualizar e interpretar resultados de geometría plana obtenidos en las construcciones desarrolladas.

Palabras Clave: GeoGebra Discovery, construcciones geométricas, demostración automática, descubrimiento.

Abstract: GeoGebra is a dynamic mathematics software that, among other things, allows the construction of geometric objects, which can be manipulated by dragging and thus observing the changes that the construction undergoes and the relationships that remain constant in it. In recent years, an experimental version called *GeoGebra Discovery* has been incorporated into GeoGebra. This version consists of a collection of tools and commands that enable rigorous mathematical verification and the automatic discovery of propositions about geometric figures. In other words, GeoGebra Discovery is a version of GeoGebra that complements, improves and extends certain automatic reasoning tools that are in the standard version. The objective of this document is to describe some of these tools and illustrate their use with examples that allow the user to visualize and interpret plane geometry results obtained in the developed constructions.

[1]Saulo Mosquera López. Docente pensionado del departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño. Dirección postal: Urbanización Sumatambo, Manzana 19 Casa 5A. Pasto, Nariño, Colombia. Código postal: 520001. Correo electrónico: samolo@udenar.edu.co.

[2]Sergio Alexander Gómez Noguera. Docente del departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño. Dirección postal: Calle 18 No 50-02. Torobajo. Pasto, Nariño, Colombia. Código postal: 520002. Correo electrónico: sgomez1987@udenar.edu.co.

Keywords: GeoGebra Discovery, geometric constructions, automatic demonstration, discovery.

Resumo: GeoGebra é um software de matemática dinâmico que, entre outras coisas, entre outros, permite a construção de objetos geométricos. Esses objetos podem ser manipulados por meio de arrastar e soltar, permitindo ao usuário observar as mudanças que ocorrem na construção e as relações que permanecem constantes na mesma. Nos últimos anos, uma versão experimental chamada GeoGebra Discovery foi incorporada ao GeoGebra. Esta versão consiste em uma coleção de ferramentas e comandos que permitem uma verificação matemática rigorosa e a descoberta automática de proposições sobre figuras geométricas. Em outras palavras, o GeoGebra Discovery é uma versão do GeoGebra que complementa, melhora e estende certas ferramentas de raciocínio automático que estão na versão padrão. O objetivo deste documento é descrever algumas dessas ferramentas e ilustrar sua utilização com exemplos que permitam ao usuário visualizar e interpretar resultados de geometria plana obtidos nas construções desenvolvidas.

Palavras-chave: GeoGebra Discovery, construções geométricas, prova automática, descoberta.

1. Introducción

Existen diversos programas de geometría dinámica que actualmente permiten incluir funciones para el razonamiento automático que posibilitan la verificación automática y matemática con rigor y el descubrimiento de resultados geométricos (Kovács et al., 2017), lo cual viabiliza mejores condiciones para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. El software GeoGebra no escapa a esta posibilidad y su versión extendida GeoGebra Discovery ha incorporado algunos recursos denominados Sistemas de Razonamiento Automático (ART), que permiten la verificación o prueba matemática automática de resultados geométricos, así como la posibilidad de descubrir proposiciones sobre figuras de geometría euclidiana elaboradas por el usuario.

Las funciones básicas de razonamiento automático, aunque no están incluidas en la versión estandar de GeoGebra, se pueden encontrar en GeoGebra Discovery, disponible en https://github.com/kovzol/geogebra/releases; operan sobre GeoGebra Classic 5 o 6, para ordenadores y portátiles, en sistemas operativos Windows, Mac o Linux, y también son válidas en tabletas y teléfonos inteligentes. En nuestra opinión GeoGebra 5 y GeoGebra 6 son equivalentes y GeoGebra Discovery contiene las mismas herramientas ART en ambas versiones, sin embargo, Geogebra Discovery se ejecuta en modo Web en GeoGebra 6 y en modo local en GeoGebra 5, en estas condiciones consideramos que para utilizar las herramientas ART es más apropiado utilizar GeoGebra 6. La versión de Discovery 6 es accesible en http://autgeo.online/geogebra-discovery/ y esta versión se puede descargar y ejecutar sin conexión también en https://autgeo.online/.

Es importante comentar que las respuestas de estos comandos no están basadas en consideraciones visuales o numéricas entre los objetos considerados, sino que son completamente rigurosas y el resultado de traducir las construcciones geométricas a un conjunto de ecuaciones e inecuaciones polinómicas y de determinar, mediante algebra computacional, que las soluciones de tales sistemas verifican otra ecuación o inecuación, a través de un programa de cálculo simbólico que se encuentra implementado en el núcleo de GeoGebra. También es necesario observar que las afirmaciones presentadas por GeoGebra Discovery nos indican si la respuesta a cierta pregunta, es decir, a cierta relación, es verdadera o falsa o nos enumera una serie de propiedades entre los objetos considerados, sin presentar, en ningún caso, argumentos para apoyar tales respuestas. Se trata, por tanto, de considerar GeoGebra Discovery como un profeta, que responde a las preguntas del usuario, pero le encarga a este la tarea de analizar las razones de tal respuesta.

Como lo hemos mencionado el propósito esencial de este trabajo es el de presentar, en una línea análoga a las consideradas en Botana et al. (2020) y Kovács et al. (2017), las herramientas básicas de razonamiento automático, así como el de desarrollar algunos ejemplos que ilustren el posible uso académico de las mismas. Está dirigido a usuarios que posean un conocimiento básico de GeoGebra y deseen apropiarse de los comandos de razonamiento automático implementados, de manera experimental, pero no divulgados de forma amplia en los paises Latinoamericanos. En la dirección https://www.geogebra.org/m/pej8xc57 se pueden consultar los archivos GeoGebra considerados en este trabajo.

2. Las herramientas de Razonamiento automático en GeoGebra Discovery

Las herramientas de razonamiento automático de GeoGebra Discovery están basadas en algoritmos de cálculo simbólico y permiten la demostración y descubrimiento automático de teoremas sobre figuras geométricas elaboradas con este software. Constan fundamentalmente de seis comandos así: *Relación* (*Relation*), *Demuestra* (*Prove*), *DemuestraDetalles* (*Prove Details*), *EcuaciónLugar* (*LocusEquation*), *Envolvente* (*Envelope*) y *Descubrir* (*Discover*).

Para utilizar este sotfware, el usuario debe elaborar una figura geométrica utilizando las herramientas que se encuentran en el menú de GeoGebra. Después de esto, GeoGebra tiene diversas formas de promover la investigación de las propiedades geométricas de esta figura, a través de varias herramientas y configuraciones. Por ejemplo:

- Al arrastrar los objetos libres, se puede investigar visualmente el comportamiento de sus objetos dependientes.
- La herramienta Relación, usual en GeoGebra classic, ayuda a comparar objetos y obtener relaciones entre ellos.
- Activando o desactivando el rastro de un objeto construido, se visualiza el movimiento de un objeto "dependiente" cuando los objetos de los cuales depende están cambiando.
- La herramienta Lugar Geométrico muestra la trayectoria de un objeto para todas las posiciones posibles de otro objeto que se mueve sobre una trayectoria dada.

Estos métodos generalmente son conocidos por los usuarios de GeoGebra y, consecuentemente, están lo suficientemente documentados y se pueden encontrar diversos ejemplos de ellos en Materiales de GeoGebra https://www.geogebra.org/materials/. Por otro lado, GeoGebra también ofrece herramientas de razonamiento automático simbólico para generalizar algunas propiedades geométricas observadas o conjeturadas. Las herramientas actualmente consideradas y una decripción de las mismas se presentan en la tabla 1

Siguiendo la línea desarrollada en Kovács et al. (2017) y Botana et al. (2020) describimos de manera más detallada la forma de utilizar cada una de estas herramientas.

2.1. La herramienta y el comando relación

La herramienta y el comando **Relación** permiten al usuario verificar numéricamente, es decir, para la construcción elaborada con coordenadas asignadas con precisión a cada punto, si para una lista de hasta cuatro objetos o para dos objetos, existe determinada relación a través de la sintaxis:

$$\text{Relación}(< Lista >)$$
$$\text{Relación}(< objeto >, < objeto >)$$

Tabla 1: Herramientas de razonamiento automático y su descripción. Elaboración propia.

Herramienta o Comando	*Descripción*
Relación	Se utiliza para volver a calcular simbólicamente los resultados numéricos.
EcuaciónLugar	Mejora el resultado del comando Lugar Geométrico mostrando la ecuación algebraica del resultado gráfico, aunque posee algunas limitaciones. Este comando se puede utilizar para analizar lugares geométricos implícitos.
Envolvente	Calcula la ecuación de una curva que es tangente a una familia de objetos cuando un elemento de la familia se mueve sobre una trayectoria determinada.
Descubrir	Analiza figuras geométricas en la búsqueda de patrones, propiedades y nuevos resultados geométricos. Esta herramienta es una implementación básica para el descubrimiento automático en geometría plana elemental.
Demuestra	Proporciona como resultado, de manera general, el valor de verdad verdadero (true) o falso (false) de una proposición.
DemuestraDetalles	Utiliza métodos simbólicos para determinar si en general una proposición es verdadera o falsa. Adicionalmente, devuelve en una lista, algunos detalles complementarios de la proposición en consideración.

De manera explícita este comando permite verificar si:

- Dos rectas son perpendiculares.
- Dos rectas son paralelas.
- Dos objetos son iguales.
- Un punto se encuentra en una recta o una cónica.
- Una recta es tangente o interseca a una cónica.
- Tres puntos son colineales.
- Tres rectas son concurrentes o paralelas.
- Cuatro puntos están sobre una misma circunferencia, es decir, son concíclicos o alternativamente, son colineales.

Algunas de estas verificaciones también se pueden realizar de forma simbólica, es decir, la afirmación puede verificarse rigurosamente para el caso general y no sólo para la construcción geométrica concreta desarrollada. Si GeoGebra soporta la verificación simbólica para una determinada propiedad, aparece el botón **Más**. De acuerdo con Hohenwarter et al. (2017), al presionar este botón el subsistema que contiene las herramientas de razonamiento automático de GeoGebra se inicia y selecciona, mediante ciertas heurísticas, un método de prueba apropiado para decidir si la propiedad obtenida numéricamente es, en general, verdadera. La versión actual de GeoGebra Discovery es capaz de elegir entre los métodos siguientes como técnica ART subyacente para este proceso:

- El método de bases de Gröbner.
- El método característico de Wu.
- El método del área.
- El método de verificación exacta de Recio.

Complementariamente, si la relación conjeturada no se cumple los dos primeros métodos pueden determinar algunas condiciones geométricas adicionales, que deben cumplirse para que la afirmación dada, en general, sea correcta.

Ejemplo 1

Considere un cuadrilátero cualquiera, ¿qué relación existe entre dos segmentos no consecutivos que unan los puntos medios de los lados del cuadrilátero?

Construimos, en GeoGebra, un cuadrilátero $ABCD$, los puntos medios E, F, G y H de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente y los segmentos $f = EF$ y $g = GH$.

Con este proceso se obtiene lo que ilustra la Figura 1, un exámen de naturaleza visual de la misma sugiere que los segmentos f y g tienen la misma longitud y parecen ser paralelos. Si analizamos la ventana algebraica se observa que estos segmentos tienen la misma longitud y al mover los vértices del cuadrilátero se nota que, aunque sus longitudes se modifican, siguen siendo las mismas y el posible paralelismo se conserva.

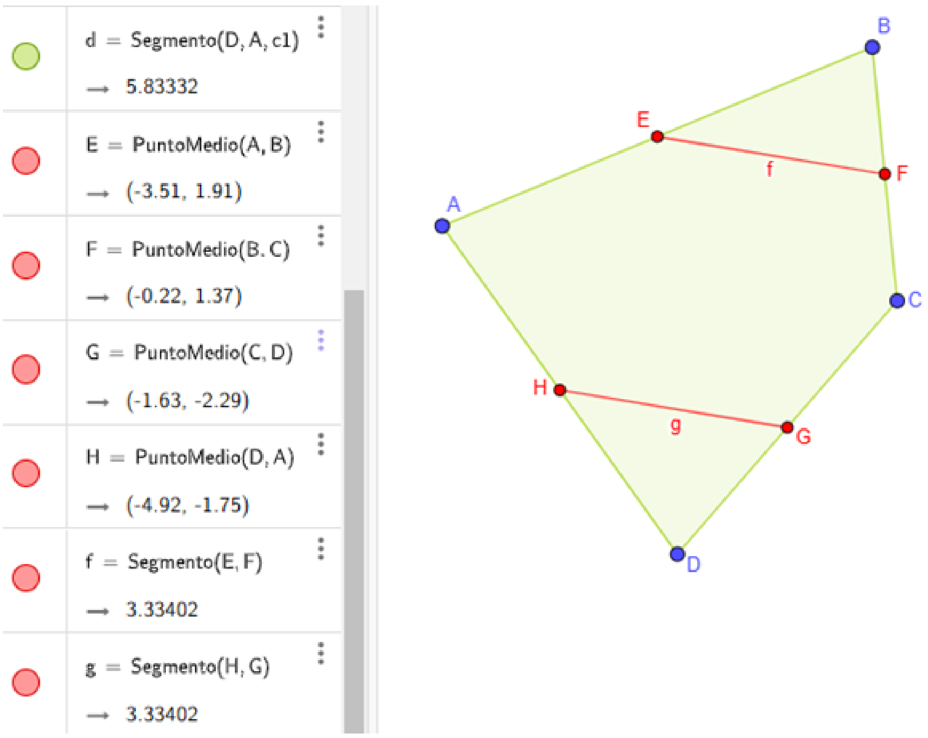


Figura 1: El cuadrilátero y los segmentos f y g. Elaboración propia.

La Figura 2 muestra el resultado que se obtiene al ingresar en la barra de entrada la sintaxis *Relación*(f, g). Este resultado permite verificar numéricamente que los segmentos f y g son paralelos y tienen la misma longitud.

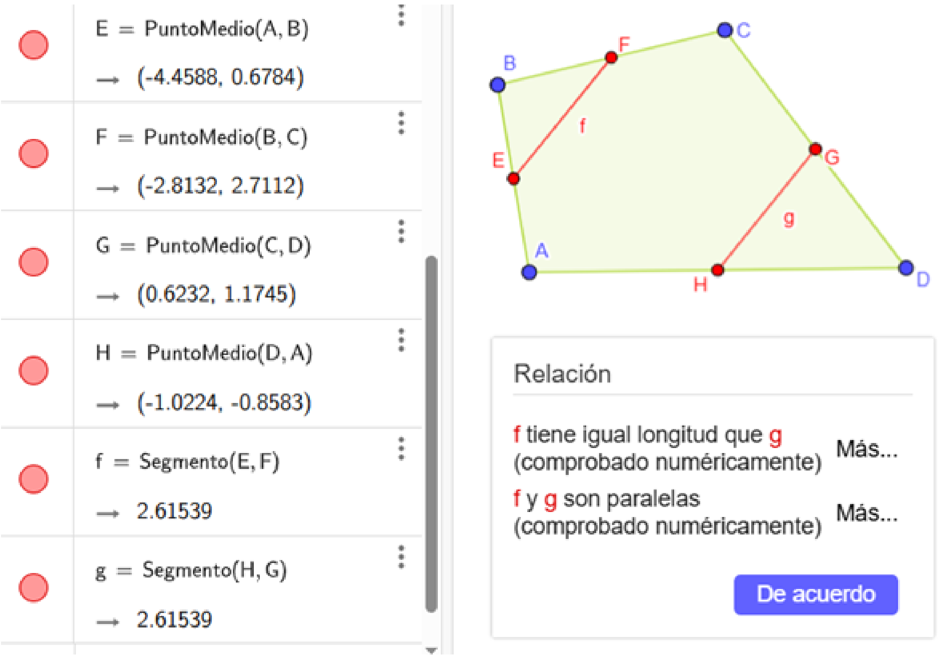


Figura 2: Cuadrilátero y respuesta numérica para la relación entre los segmentos f y g. Elaboración propia.

Al dar clic, sobre los botones **Más** que se observan en el recuadro, se genera un nuevo mensaje que muestra, desde el punto de vista simbólico, que efectivamente los segmentos f y g son paralelos y tienen la misma longitud, así como las condiciones para que eso suceda. Esto se ilustra en la Figura 3.

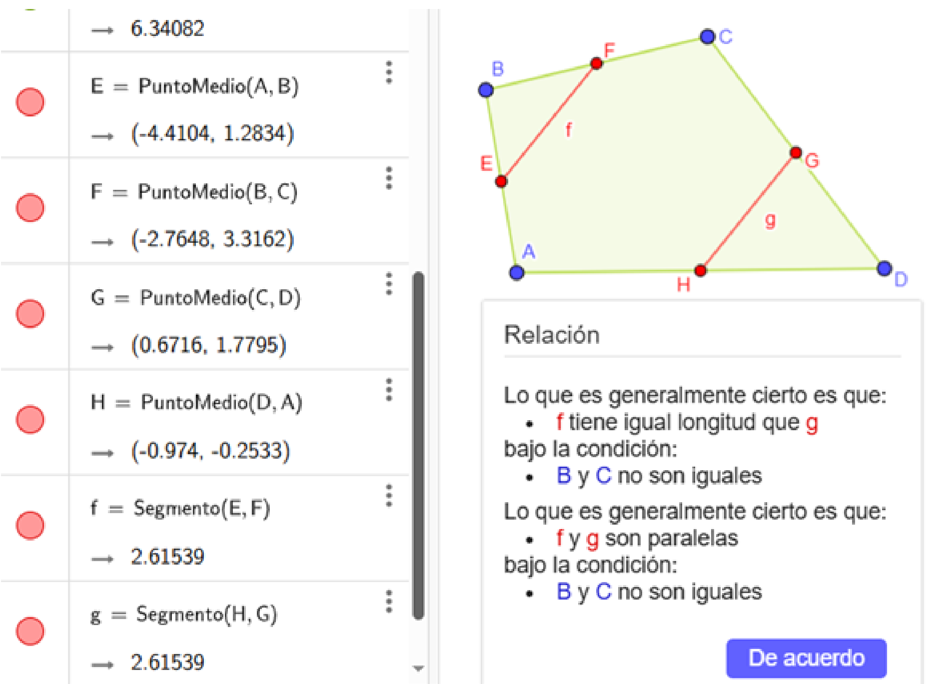


Figura 3: Cuadrilátero y respuesta simbólica para la relación entre los segmentos f y g. Elaboración propia.

En GeoGebra, la verificación "simbólica", (Hohenwarter et al., 2019) significa que los datos de entrada ya no son puntos con coordenadas numéricas, sino con coordenadas expresadas mediante variables. Los pasos de la construcción no producen ecuaciones con coeficientes numéricos, sino en ecuaciones paramétricas dependiendo de los parámetros que describen las coordenadas de los puntos libres y en segundo plano se ejecutan sofisticados algoritmos que involucran, sin que el usuario lo perciba, diversos aspectos de geometría computacional que constan de una gran cantidad de pasos algebraicos.

Ejemplo 2

Un **cuadrilátero cíclico** es aquel cuyos vértices pertenecen a una circunferencia. Considere un cuadrilátero cíclico y las mediatrices de los lados de este objeto geométrico. ¿Qué relación existe entre estas cuatro rectas?

Construimos, en GeoGebra, una circunferencia de centro en un punto O y que pase por un punto P, un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en las misma y las mediatrices f, g, h, i de los lados AB, BC, CD, DA respectivamente.

El resultado de este proceso se ilustra la Figura 4, en la cual se ha ocultado el punto O y en la ventana gráfica es posible visualizar que las mediatrices "parecen ser" concurrentes. Podemos encontrar el punto E de intersección entre dos de estas rectas, digamos f y g y observar que se preserva la posible concurrencia de las cuatro rectas en el punto E.

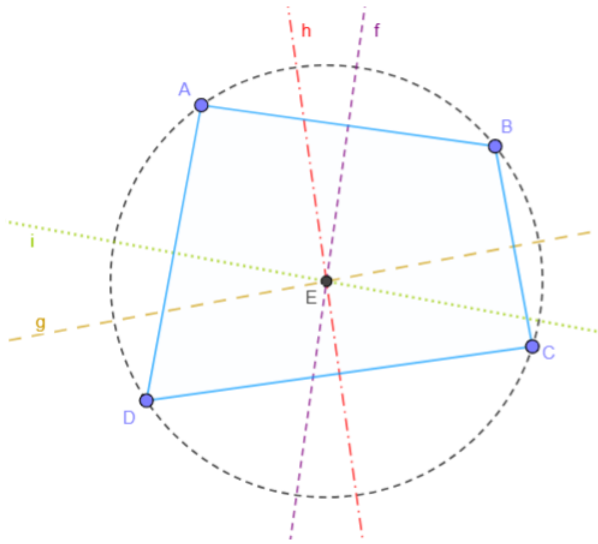


Figura 4: El cuadrilátero cíclico y la posible concurrencia de las rectas f, g, h, i. Elaboración propia.

En GeoGebra no existe, una herramienta que nos permita, verificar si se cumple una relación entre cuatro rectas, por ello podemos proceder de manera indirecta por lo menos de dos formas diferentes, ilustramos una de ellas.

El punto E es la intersección entre f y g y debemos verificar que este punto está en i y h, por lo cual creamos dos listas, $l1$ con las rectas f, g, h y $l2$ con las rectas i, g, h.

En la Figura 5 se muestra el resultado de ingresar en la barra de entrada la sintaxis *Relación* ($l1$). Resultado que indica desde el punto de vista numérico que las rectas f, g y h son concurrentes en el punto E. La verificación simbólica se obtiene al dar clic sobre el botón **Más** lo cual produce lo que se ilustra en la Figura 6, es decir, un nuevo mensaje que corrobora, desde el punto de vista simbólico, que efectivamente las rectas f, g y h son concurrentes, así como las condiciones para que eso suceda.

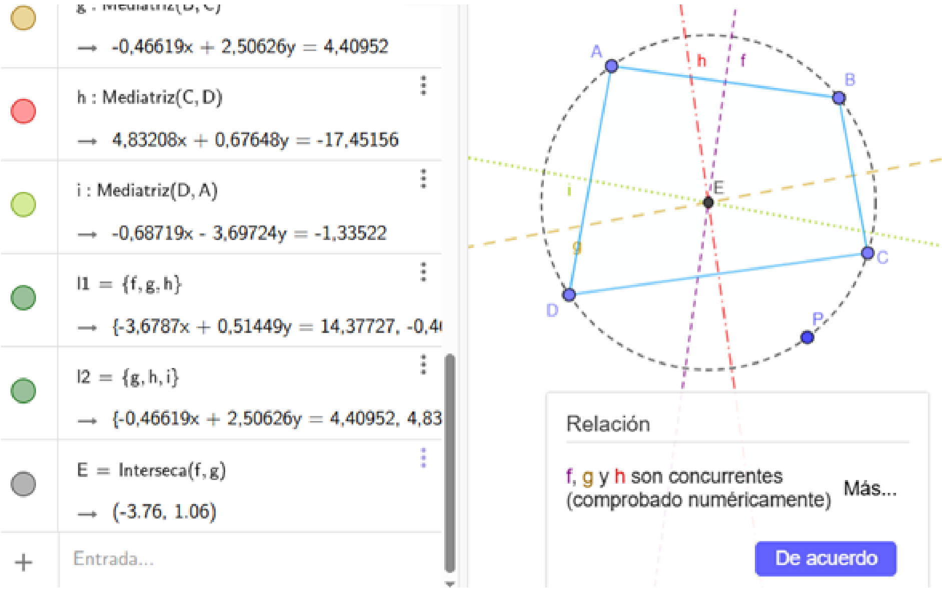


Figura 5: Respuesta numérica del comando Relación a la concurrencia de las rectas f, g, h. Elaboración propia.

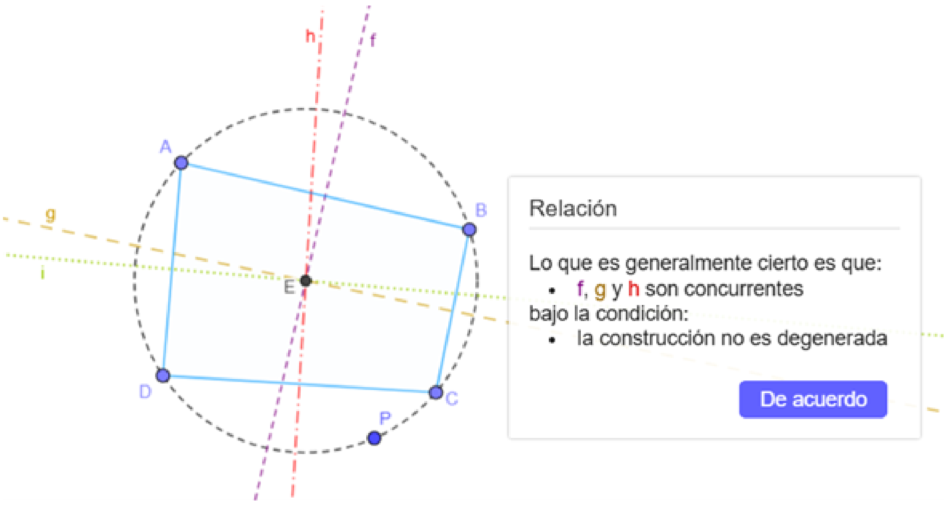
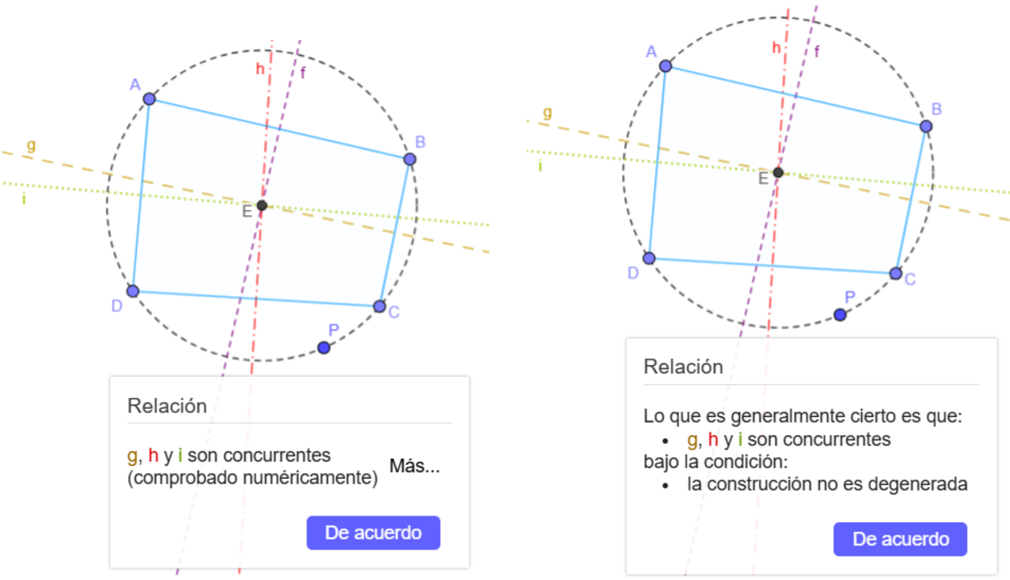


Figura 6: Respuesta simbólica del comando Relación a la concurrencia de las rectas f, g, h. Elaboración propia.

De la misma manera, al utilizar la instrucción *Relación* $(l2)$ y a continuación dar clic sobre el botón **Más** se obtiene lo que ilustra la Figura 7.

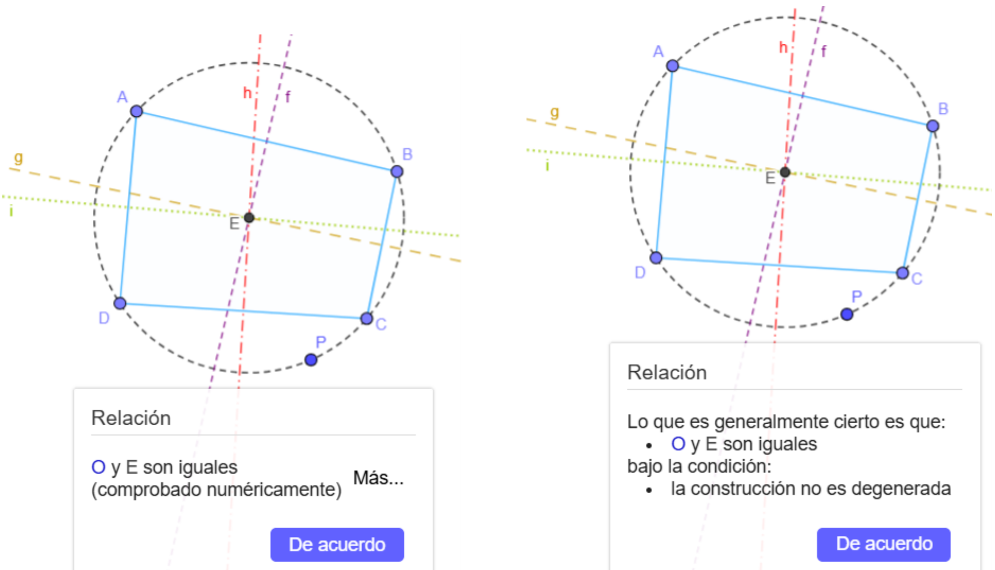
El proceso descrito permite concluir, de manera simbólica, que las rectas f, g, h, i son concurrentes en el punto E. Pero ¿qué características tiene este punto?

El uso de la instrucción *Relación*(O, E) y enseguida dar clic sobre el botón **Más** genera lo que ilustra la Figura 8. Esto muestra que: *Las mediatrices de los lados de un cuadrilatero cíclico son concurrentes en el centro de la circunferencia circunscrita al cuadrilatero*.



(**a**) Respuesta numérica (**b**) Respuesta simbólica

Figura 7: Respuesta numérica y simbólica del comando Relación a la concurrencia de las rectas g, h, i. Elaboración propia.



(**a**) Respuesta numérica. (**b**) Respuesta simbólica.

Figura 8: Respuesta numérica y simbólica del comando Relación a la coincidencia de los puntos O y E. Elaboración propia.

2.2. El comando EcuaciónLugar (LocusEquation)

Este comando calcula la ecuación de un lugar geométrico y lo representa gráficamente como una curva implícita. Es posible utilizarlo en dos formas diferentes que se denominan *lugar geométrico explícito* y *lugar geométrico implícito*, de la siguiente manera.

I. **Lugar geométrico explícito**. Considere un punto de entrada P sobre una trayectoria c, resultado de algunos pasos de una construcción y un punto de salida Q. El propósito es determinar la ecuación ecu del lugar geométrico de Q mientras P se mueve sobre la trayectoria c y luego representar gráficamente ecu. La sintaxis del comando es:

$$\text{EcuaciónLugar}(\ < \textit{Punto del lugar} >, < \textit{Punto variable} > \ )$$
$$\text{EcuaciónLugar}(< \textit{Lugar Geométrico} > \ )$$

II. **Lugar geométrico implícito.** Considere un punto de entrada P, un punto libre o un punto en una trayectoria c y algunos pasos de determinada construcción, para la cual se afirma que se cumple una condición lógica F. El objetivo es determinar la ecuación ecu, del lugar geométrico, tal que para todos los puntos P' de ella, si $P = P'$, entonces F se cumple. La sintaxis del comando es:

$$\text{EcuaciónLugar}(\ < \textit{Función lógica} >, < \textit{Punto variable} >)$$

Las siguientes ilustraciones nos muestran el uso de este comando como lugar implícito y como lugar explícito.

Ejemplo 3

Determinar el lugar geométrico generado por un punto Q que es la intersección de la recta tangente a una circunferencia en un punto P de esta y la recta perpendicular a la tangente en un punto C exterior a la circunferencia.

Este lugar geométrico se obtiene de la siguiente manera:

a. Construya una una circunferencia de centro en un punto A que pasa por B.

b. Considere un punto P sobre la circunferencia y un punto C en su exterior.

c. Trace la recta tangente en P a la circunferencia, la perpendicular por C a la tangente y denote con Q al punto de corte de estas dos rectas.

d. Escriba, desde la barra de entrada, *EcuaciónLugar*(Q, P).

Con este proceso se obtiene el lugar geométrico pedido, que corresponde a la curva denominada *Caracol de Pascal*, que se muestra en la Figura 9. Para el caso considerado, los puntos $A(0,0)$, $B(2,0)$ y $C(2,2)$, la ecuación resultante también se presenta en la misma figura.

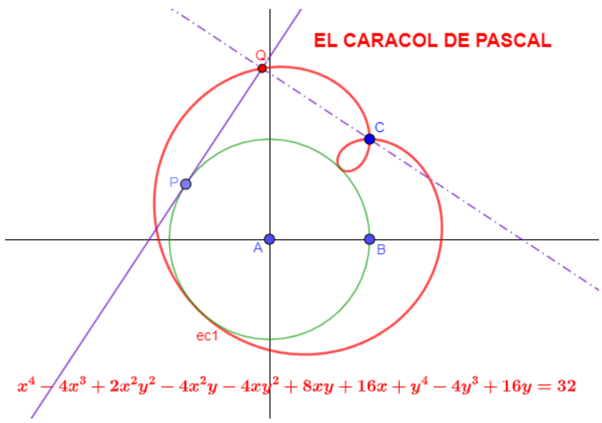


Figura 9: Lugar geométrico explícito. Respuesta de GeoGebra a la sintaxis EcuaciónLugar(Q, P). Elaboración propia.

Ejemplo 4

Dado un triángulo ABC, caracterizar los puntos C para los cuales este triángulo es isósceles en C, es decir, $AC = BC$.

Existen diferentes maneras de explorar este problema, por ejemplo, utilizando el comando (o herramienta) *Lugar Geométrico* y la solución al mismo es conocida, sin embargo, cómo se desea utilizar las herramientas de razonamiento automático, después de construir con la herramienta *Polígono* el triángulo ABC de lados $BC = a$, $AC = b$ y $AB = c$ se escribe, desde la barra de entrada, *EcuaciónLugar(a==b,* C), con lo que se genera la imagen que se muestra en la Figura 10.

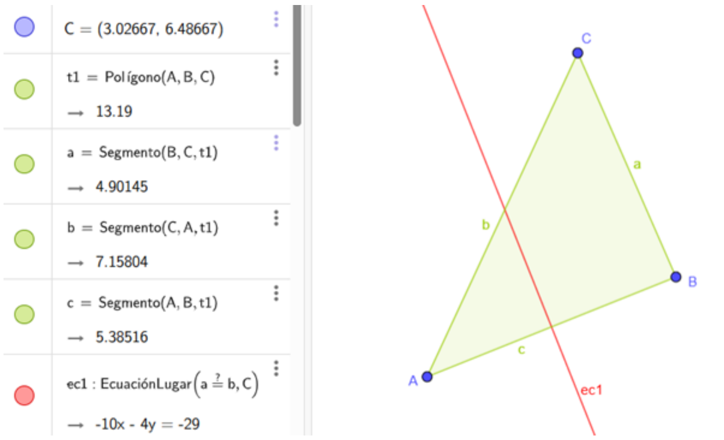


Figura 10: Lugar geométrico implícito. Respuesta de GeoGebra a la sintaxis EcuaciónLugar(a==b, C). Elaboración propia.

Esto significa que para los puntos seleccionados $A = (0, 0)$ y $B = (5, 2)$, el triángulo ABC es isósceles cuando el punto C está sobre la *curva* definida por $ec1$ que tiene por ecuación $10x + 4y = 29$ y corresponde a una recta. Naturalmente al arrastrar los puntos A o B cambia la ecuación de la recta, pero conserva sus características. ¿qué características posee esta recta?

Para intentar responder este interrogante, se halla el punto D, intersección entre la recta y el segmento AB, se ubica un punto E sobre ella, se mide el ángulo EDB y la longitud de los segmentos AD y DB, lo que permite conjeturar, ver Figura 11, que: *La recta es perpendicular al segmento* AB *en su punto medio*, es decir, el lugar geométrico es *la mediatriz del segmento* AB.

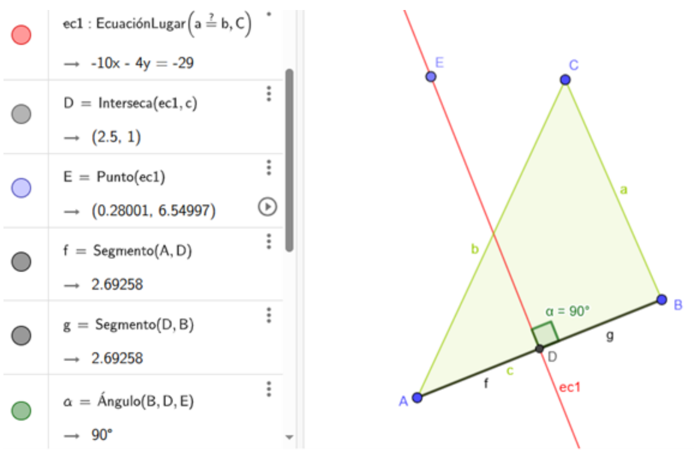


Figura 11: Perpendicularidad de la recta $ec1$ y el segmento AB, así como la igualdad de la longitud de los segmentos f y g. Elaboración propia.

Para verificar simbólicamente en GeoGebra este hecho, se procede de manera diferente.

En primer lugar, se oculta el lugar geométrico y se construye la mediatriz del segmento AB, a continuación, se ubica un punto F sobre la mediatriz, se construye el triángulo AFB y al utilizar, desde el menú de GeoGebra, la herramienta *Relación*, o el comando correspondiente, al escribir, desde la barra de entrada, la expresión, *Relación*$(a_1\ ,b_1)$, se genera el cuadro de diálogo que se muestra en la Figura 12, lo cual verifica, desde el punto de vista numérico, que el triángulo AFB es isósceles.

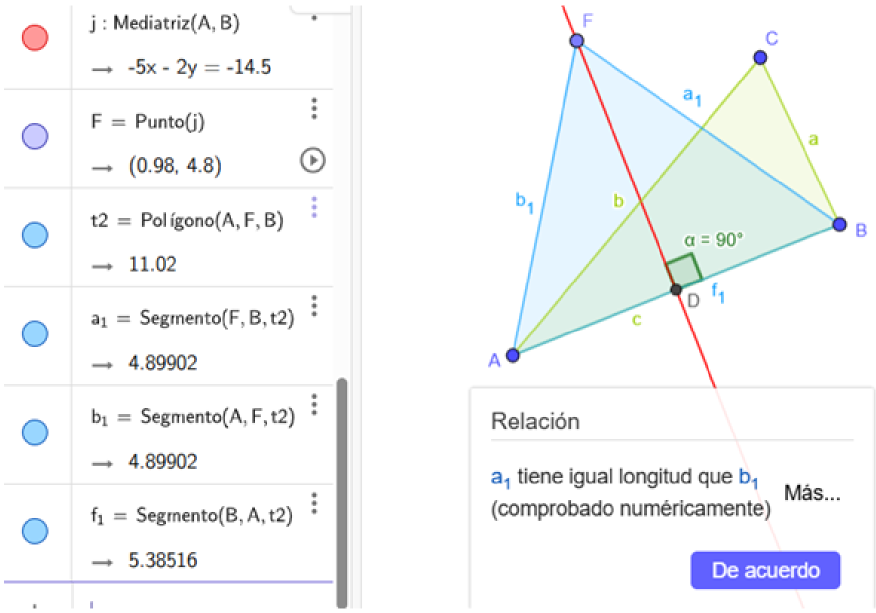


Figura 12: Respuesta numérica del comando Relación a la igualdad de la longitud de los segmentos a_1 y b_1. Elaboración propia.

Finalmente, al oprimir el botón **Más** se muestra una nueva caja de diálogo (ver Figura 13) que da cuenta de la verificación simbólica, es decir, de una prueba matemáticamente rigurosa del hecho de que: *Si el punto* C *está sobre la mediatriz del segmento* AB *el triángulo* ABC *es isósceles*.

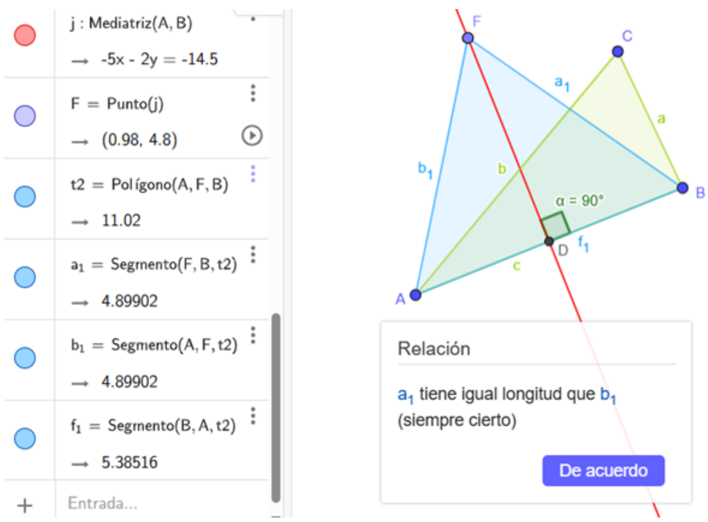


Figura 13: Respuesta simbólica del comando Relación a la igualdad de la longitud de los segmentos a_1 y b_1. Elaboración propia.

2.3. El comando Envolvente (Envelope)

Este comando calcula la ecuación de una curva que es tangente a una familia de objetos mientras un punto que genera los objetos de la familia se mueve a lo largo de una trayectoria. Más precisamente, dado un punto de entrada P en una trayectoria c, algunos pasos de una construcción y una ruta de salida $c^{'}$, el objetivo es determinar la ecuación ecu de una curva $c^{''}$ que es tangente a $c^{'}$, cuando P se mueve sobre c, para, finalmente, trazar la curva definida por ecu. P es el punto que genera la curva, ecu se llama ecuación envolvente y su representación gráfica es la envolvente.

La sintaxis del comando es:

$$\text{Envolvente}(<Trayectoria>, <Punto>)$$

Ejemplo 5

Una manera no usual de definir una hipérbola es la siguiente. Una *hipérbola* es la envolvente de una familia de rectas perpendiculares en el extremo de un segmento determinado por un punto libre sobre la circunferencia principal y un foco de la hipérbola. Construir la hipérbola como una envolvente.

La construcción de la hipérbola, a partir de esta definición, puede desarrollarse en GeoGebra de la siguiente manera:

a. Considere una recta cualquiera y sobre ella dos puntos F_1 y F_2 que serán los focos de la hipérbola.

b. Con centro en el punto medio del segmento F_1F_2 construya una circunferencia de diámetro menor que la longitud de este segmento. Esta es una circunferencia principal de la hipérbola y los puntos de corte de esta circunferencia y la recta F_1F_2 son los vértices V_1 y V_2 de la hipérbola.

c. Seleccione un punto libre P sobre la circunferencia y trace el segmento PF_2.

d. Construya la recta l perpendicular al segmento PF_2 en el extremo P.

e. Desde la barra de entrada escriba la instucción *Envolvente*(l, P).

El resultado de este proceso se ilustra en la Figura 14, en la cual para los puntos considerados, a saber, $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$ y $V_1(-\frac{9}{4}, 0)$ se obtiene la curva definida por la expresión $ec2$ que corresponde a la hipérbola de ecuación $104809x^2 - 13412y^2 = 529832$.

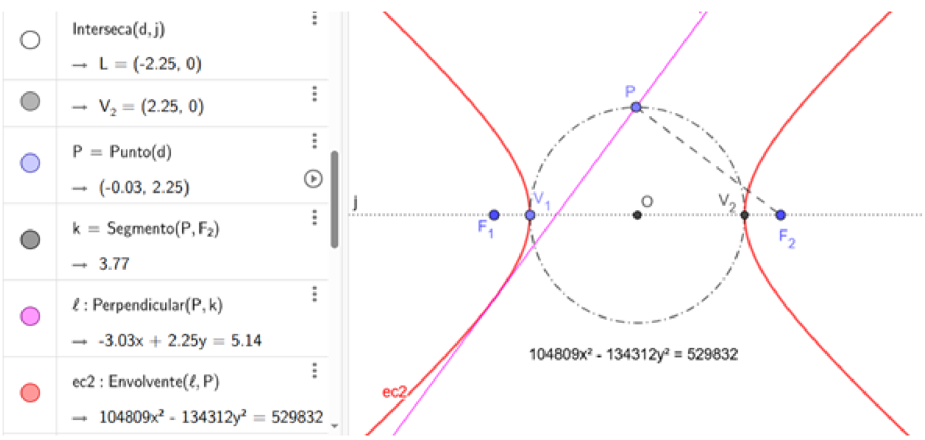


Figura 14: Hipérbola resultante de utilizar el comando Envolvente sobre l y P. Elaboración propia.

Si se desea visualizar la familia de rectas que genera esta curva se debe activar el rastro de la recta l y animar el punto P, con lo cual se obtiene lo que ilustra la Figura 15.

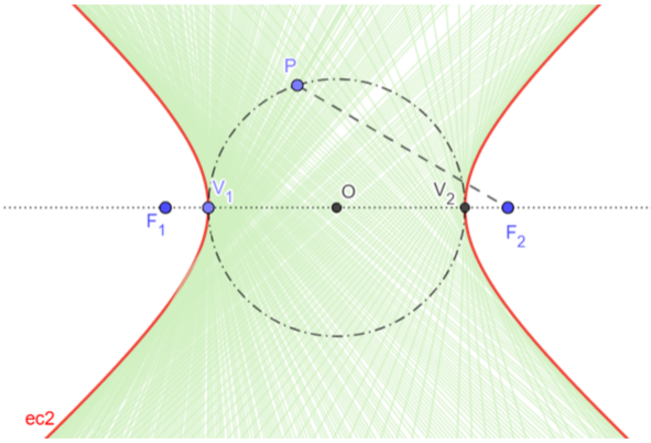


Figura 15: Familia de rectas envolvente de la hipérbola. Elaboración propia.

2.4. El comando Descubrir (Discover)

Este comando o la herramienta equivalente del menú principal de GeoGebra Discovery, utilizan como argumento un punto y buscan de forma automática y combinatoria relaciones de colinealidad, paralelismo, congruencia y otos, que involucren al punto considerado (Kovács & Yu, 2022).

La sintaxis de este comando es:

$$\text{Descubrir}(\ < Punto >\ )$$

Ejemplo 6

Considere un triángulo cualquiera ABC y D, E y F los puntos medios de los lados AB, BC y AC. ¿Qué relaciones geométricas válidas, que involucren el punto D, se deducen de esta configuración?

La Figura 16 ilustra el resultado de ingresar desde la barra de entrada, $Descubrir(D)$ la cual muestra los resultados que GeoGebra ha descubierto y que involucran al punto D.

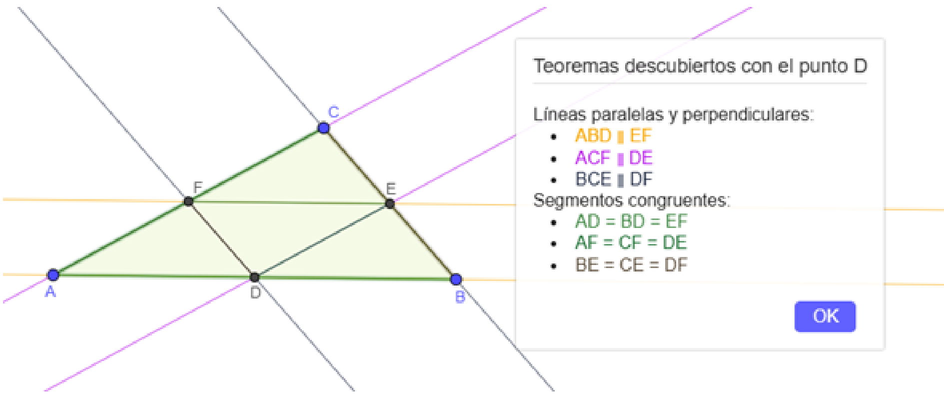


Figura 16: Respuesta de GeoGebra al comando Descubrir sobre el punto D. Elaboración propia.

De ello, es posible concluir, por ejemplo, que los triángulos ADF, FDE, DEB y FCE son congruentes y que por tanto el área de cada uno de ellos es la cuarta parte del área del triángulo ABC. ¿qué otros resultados se deducen de esta configuración?

Nótese que GeoGebra colorea, de un mismo color, los objetos que de alguna manera están relacionados.

2.5. Los comandos Demuestra (Prove) y DemuestraDetalles (ProveDetails)

Los comandos *Demuestra* y *DemuestraDetalles* funcionan de manera análoga, (Kovács & Yu, 2022), pero en cada caso el usuario debe introducir la proposición objeto de conjetura y la respuesta que se obtiene es el valor de verdad de la proposición. El comando DemuestraDetalles puede proporcionar condiciones geométricas adicionales para que la afirmación dada sea generalmente correcta. Si GeoGebra no puede determinar la respuesta, el resultado es indefinido. La sintaxis adecuada es:

Demuestra($< \textit{Proposición lógica} >$)
DemuestraDetalles($< \textit{Proposición lógica} >$)

Ejemplo 7

Un **cometa** es un cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes congruentes. ¿qué relación geométrica es posible proponer entre las diagonales del cometa?.

Este objeto puede construirse geométricamente al seleccionar tres puntos arbitrarios no colineales A, B y C, trazar la recta AC y reflejar sobre esta recta el punto B para obtener un punto D, con lo que se obtiene el cometa $ABCD$, en él, las diagonales corresponden a los segmentos $g = AC$ y $h = BD$.

La Figura 17 ilustra la respuesta de GeoGebra al uso del comando Demuestra y afirma que las diagonales de un cometa son perpendiculares. El comando DemuestraDetalles informa que estas diagonales son perpendiculares siempre que los puntos A y B no coincidan.

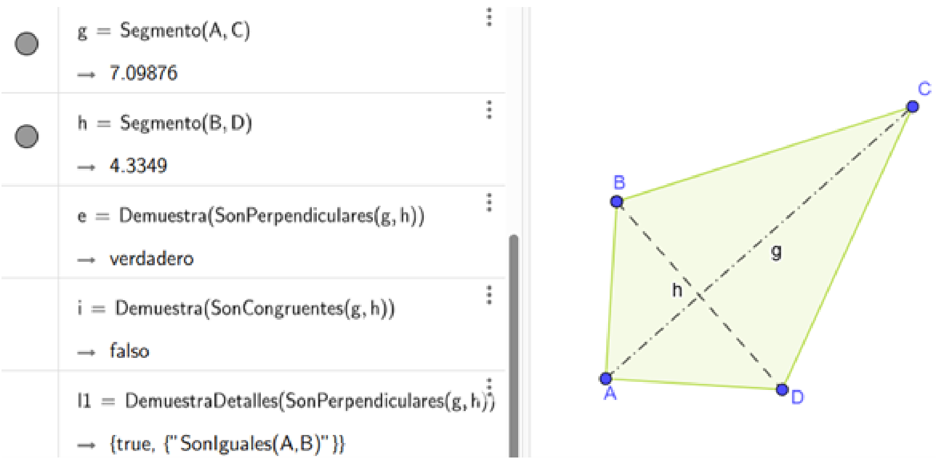


Figura 17: Un cometa, sus diagonales y la respuesta de GeoGebra a los comandos Demuestra y DemuestraDetalles. Elaboración propia.

Se presenta, como última ilustración, una actividad considerada en, Gordejuela et al. (2021) que permite tratar el conocido teorema de la altura. Como complemento, a lo que usualmente se conoce de este resultado, en el desarrollo de la misma aparece una consecuencia adicional que es en general, en nuestra opinión, sorprendente.

Ejemplo 8

Sea ABC un triángulo cualquiera, f la perpendicular por C al lado AB, D su punto de corte con este lado y considere los segmentos $g = CD, h = AD$ y $i = DB$. ¿Qué condiciones debe cumplir el punto C para que $g^2 = h * i$?.

La Figura 18 ilustra la construcción, así como el lugar geométrico en el cual debe estar el punto C para que se satisfaga el teorema de la altura, es decir, para que se cumpla la relación $g^2 = i * h$, para lo cual es necesario utilizar la instrucción *EcuaciónLugar*$(g^2 == h * i, C)$.

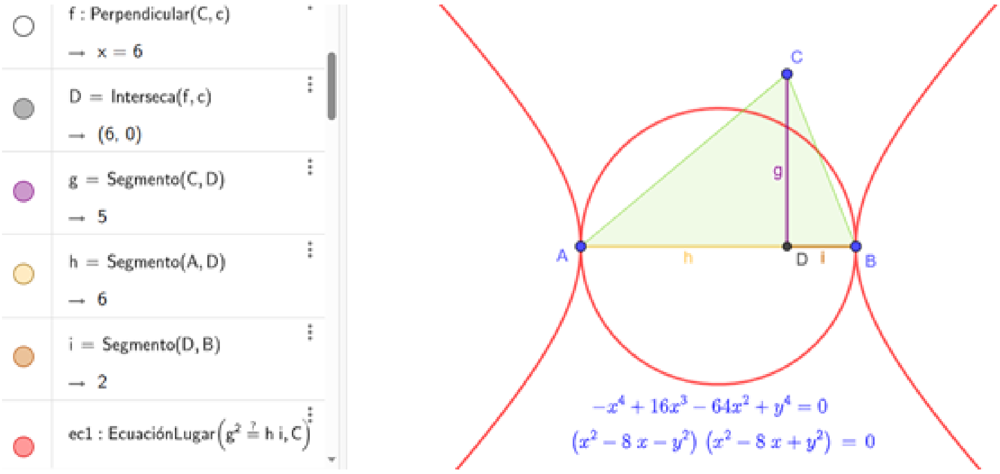


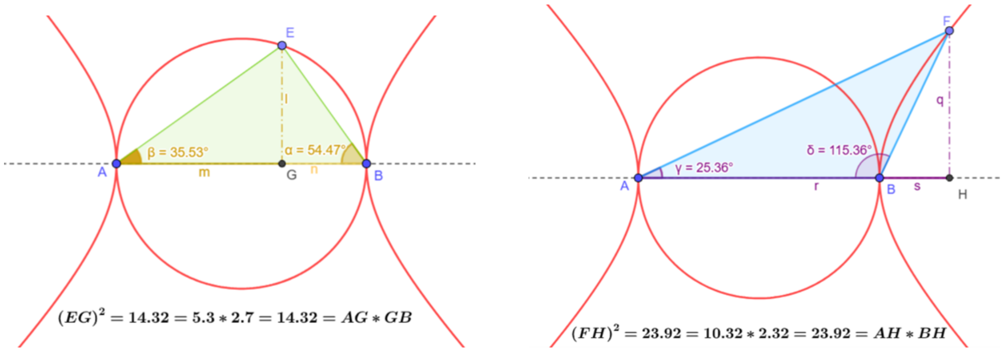
Figura 18: Lugar geométrico de la relación $g^2 = h * i$. Elaboración propia.

Este lugar, para $A = (0, 0)$ y $B = (8, 0)$, está definido por la ecuación $y^4 + 16x^3 - 64x^2 - x^4 = 0$ y al parecer está conformado por la unión de una circunferencia y una hipérbola. Al utilizar el Sistema de Algebra Computacional (CAS) de GeoGebra para factorizar la expresión anterior mediante la instrucción *FactorizaCl*$(ec1)$ se obtiene lo que ilustra la Figura 19.

Figura 19: Factorización de la ecuación $y^4 + 16x^3 - 64x^2 - x^4 = 0$. Elaboración propia.

Así la ecuación definida por la expresión $ec1$ se factoriza como $y^4 + 16x^3 - 64x^2 - x^4 = (-x^2 + 8x + y^2)(x^2 - 8x + y^2) = 0$, es decir, que el punto C debe estar en la circunferencia de ecuación $(x-4)^2 + y^2 = 16$ o en la hipérbola de ecuación $(x-4)^2 - y^2 = 16$, excepto cuando con los puntos A y B coinciden.

Es un hecho conocido que el teorema de la altura, es decir que, $l^2 = m * n$ (ver Figura 20a) se cumple cuando C, en este caso E, está sobre la circunferencia de diámetro AB por lo que el triángulo ABE es rectángulo en E, pero un nuevo resultado que se obtiene de esta ilustación, es que también se cumple que $q^2 = r * s$ (ver Figura 20b) cuando C, en este caso F, está sobre la hipérbola, pero ahora el triángulo ABF no es rectángulo.



(**a**) Verificación del teorema de la altura, triángulo rectángulo

(**b**) Verificación del teorema de la altura, triángulo pseudo-rectángulo.

Figura 20: Verificación del teorema de la altura. Elaboración propia.

La demostración de este hecho, las características del triángulo y de la hipérbola son consideradas en Gordejuela et al. (2021) por ejemplo, el triángulo ABF lo denominan *pseudo-rectángulo* por que la diferencia de los ángulos FBA y BAF es 90°.

3. Observaciones

En esta sección final se presentan algunos comentarios que complementan lo considerado en el desarrollo de este documento.

- En la época contemporánea, el desarrollo de las herramientas de razonamiento automatizado tiene su origen en los trabajos de Alfred Tarski, alrededor de 1930 (Kovács et al., 2021). Durante la década de los 70 Wen-Tsün continuó con esta labor (Chou, 1988) y ha tenido un gran impulso a lo largo de estos años. En GeoGebra el proyecto relacionado con este tipo de herramientas fue iniciado por Recio y sus colaboradores alrededor del año 2010 (Kovács & Yu, 2022) y este trabajo continúa en la actualidad.

- Las herramientas ART descritas en este documento, no están incluidas en la versión oficial de GeoGebra y su utilización para analizar algunas características de ciertas proposiciones geométricas son una muestra del avance que ha logrado este software y se espera que una vez depuradas y completamente revisadas estén disponibles en un tiempo prudencial en esta versión.

- En la dirección https://www.geogebra.org/m/pej8xc57 se muestra un ejemplo de las limitaciones del comando *EcuaciónLugar* y correponde a la sexta actividad considerada en tal dirección. En este archivo, la curva construida al usar la herramienta habitual, Lugar Geométrico y la curva resultante de utilizar la herramienta Ecuación Lugar Geométrico son diferentes, ¿puede explicar estos resultados?.

- De acuerdo con Abar et al. (2020) las posibles aplicaciones de estas herramientas en el aula de clase es un tema en discusión, aunque hay algunos avances al respecto(Recio et al., 2019). Con base en este documento la utilización de estas herramientas en estos espacios todavía no posee un marco teórico y una metodología rigurosamente sustentada.

- Al utilizar estas herramientas para analizar una proposición geométrica se obtiene como resultado la verdad o falsedad de la misma pero si es necesaria una demostración esta debe ser un trabajo del usuario final. Alternativamente algunas de las herramientas consideradas presentan condiciones adicionales para que cierto enunciado geométrico sea verdadero, sin embargo, se debe insistir en que la certeza de tales proposiciones está matemáticamente verificada y es válida en todos los casos. Esta respuesta es diferente de la que se obtiene cuando se utiliza el software como verificador numérico caso en el cual probabilísticamente podemos tener una proposición cierta, pero esto no es totalmente seguro.

- Se espera que este trabajo sirva como aliciente para que docentes del área de matemáticas o educadores matemáticos en formación se interesen por conocer, estudiar y experimentar con estas herramientas. Sin duda, una implementación adecuada de las mismas en el aula de clase puede conllevar a modificar la manera como se tratan los problemas de geometría en estos espacios.

Contribución de las personas autoras: conceptualización: S.M.L, S.G.N. Metodología: S.M.L, S.G.N. Investigación: S.M.L, S.G.N. Visualización: S.M.L. Supervisión: S.G.N. Análisis formal: S.M.L, S. G. N. Escritura (borrador original): S.M.L. Escritura (Revisión y edición): S.M.L, S.G.N.

Accesibilidad de los datos: Los datos utilizados en este estudio corresponden a archivos elaborados en el software GeoGebra y están disponibles en la dirección electrónica https://www.geogebra.org/m/pej8xc57.

4. Referencias

Abar, C., Recio, T., Vélez, M. P., & Van Vaerenbergh, S. (2020). Herramientas de Razonamiento Automático en GeoGebra: qué son y para qué sirven. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *16*(59), 08-15. https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/202

Botana, F., Kovács, Z., Recio, T., & Pilar Vélez, M. (2020). Hacia un autómata geómetra. *La Columna de Matemática Computacional*, *23*(2), 343-371. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1587

Chou, S.-C. (1988). *Mechanical Geometry Theorem Proving* (1st) [Originally published by D. Reidel Publishing Company]. Springer Dordrecht. https://link.springer.com/book/9789027726506

Gordejuela, F. E., de Lucas Sanz, N., Recio, T., & Vélez, M. P. (2021). Inventing theorems with GeoGebra: a new altitude theorem. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de profesores de matemáticas*, *111*, 8-28. https://www.ucm.es/sociedadpuigadam/file/boletin-111-de-soc-puig-adam

Hohenwarter, M., Kovács, Z., & Recio, T. (2017). Deciding Geometric Properties Symbolically in GeoGebra: TSG 18: Reasoning and proof in mathematics education. *R&E-SOURCE*. https://journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/article/view/411

Hohenwarter, M., Kovács, Z., & Recio, T. (2019). Using Automated Reasoning Tools to Explore Geometric Statements and Conjectures (G. Hanna, D. A. Reid & M. de Villiers, Eds.), 215-236. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_10

Kovács, Z., Recio, T., & Vélez, M. P. (2021). GeoGebra Discovery in Context. *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, *352*, 141-147. https://doi.org/10.4204/eptcs.352.16

Kovács, Z., Richard, P. R., Recio, T., & Vélez, M. P. (2017). GeoGebra Automated Reasoning Tools: A Tutorial with Examples. En G. Aldon & J. Trgalová (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 400-404). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01632970

Kovács, Z., & Yu, J. H. (2022). Automated Discovery of Geometrical Theorems in GeoGebra. *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, *354*, 1-12. https://doi.org/10.4204/eptcs.354.1

Recio, T., Richard, P. R., & Vélez, M. P. (2019). Designing Tasks Supported by GeoGebra Automated Reasoning Tools for the Development of Mathematical Skills. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *26*(2), 81-88. https://doi.org/10.1564/tme_v26.2.05