



Rotaciones y cuaterniones (sin secretos)

| Rotations and quaternions: The easy and convenient way |

 **Walter Mora Flores¹**

wmora2@gmail.com

Investigador independiente

Alajuela, Costa Rica

Recibido: 8 de febrero de 2024

Aceptado: 10 de mayo de 2024

Resumen: Hay mucha literatura dispersa sobre cuaterniones y rotaciones que está orientada a aplicaciones prácticas pero no tanto a desarrollar la intuición y las matemáticas que hay detrás de las fórmulas. En este artículo partimos de los conocimientos básicos comunes de los cursos de Álgebra Lineal¹ y se introducen los cuaterniones y su aplicación en rotaciones, siguiendo un flujo natural, teórico, práctico e intuitivo. El conjunto de cuaterniones, denotado $\mathbf{H}$, es un espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{R}^4$ y se define una multiplicación que le da estructura de campo no conmutativo. La multiplicación por un cuaternión unitario aplica una rotación en dos planos, de manera simultánea, de una manera similar a como la multiplicación por un número complejo unitario aplica una rotación. Para usar este hecho en rotaciones en $\mathbb{R}^3$, escogemos una base ortonormal de $\mathbf{H}$ adecuada (esto nos da dos planos), de tal manera que en un plano se fije el eje de rotación (es decir, no hay rotación) y en el otro plano se aplique la rotación deseada.

Palabras Clave: Rotaciones, Interpolación, Cuaterniones, Álgebra Lineal

Abstract: There is a lot of scattered literature on quaternions and rotations that is oriented to practical applications but not so much to develop the intuition and mathematics behind the formulas. In this paper we start from the common basic knowledge of Linear Algebra courses² and introduce quaternions and their application in rotations, following a natural, theoretical, practical and intuitive flow. The set of quaternions, denoted $\mathbf{H}$, is a vector space isomorphic to $\mathbb{R}^4$ and a multiplication is defined which gives it a non-commutative field structure. Multiplication by a unitary quaternion applies a rotation in two planes, in a simultaneous manner, in a similar way as multiplication by a unitary complex number applies a rotation. To use this fact in rotations in $\mathbb{R}^3$, we choose a suitable orthonormal basis of $\mathbf{H}$ (this gives us two planes), such that in one plane the axis of rotation is fixed (i.e., no rotation) and in the other plane the desired rotation is applied.

Keywords: Rotations, Interpolation, Linear Algebra

¹Walter Mora-Flores. Investigador independiente. Dirección postal: San Ramón, Alajuela, Costa Rica. Código postal: 20201. Correo electrónico: wmora2@gmail.com

²Como referencia podemos tomar el libro de S. Lang [16]

²As a reference we can take S. Lang's book [16]

1. Introducción

Mucho tiempo ha pasado después de que W. R. Hamilton descubrió los cuaterniones en 1843 [3, pág. 2]. Los cuaterniones se pueden ver como números de la forma $a + bi + cj + dk$ o también como $a + \mathbf{u}$. Actualmente, entre muchas otras aplicaciones (en matemática, ingeniería, física, robótica, etc.), los celulares y las tablets (Android, Iphone) usan cuaterniones para manejar la orientación de la pantalla, específicamente los sensores de movimiento (Figura 1). En un cuaternión unitario " $a + bi + cj + dk$ ", un programador lo que ve es una componente a para el ángulo y las otras tres para un eje de rotación, es decir, ve piezas de información compactas y eficientes, que se pueden sumar, multiplicar y dividir para obtener rotaciones e interpolar suavemente sobre una esfera.

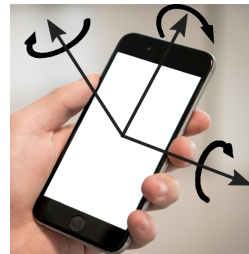


Figura 1: Orientación

Fuente: Elaboración propia

El conjunto de los cuaterniones se denota con $\mathbf{H}$ y, en lo que vamos a hacer aquí, podemos identificarlo³ con $\mathbb{R}^4$ como espacio vectorial (los números reales y los vectores de $\mathbb{R}^3$ son cuaterniones también). Adicionalmente, además de la suma y la multiplicación por un escalar, $\mathbf{H}$ viene dotado con una manera de multiplicar sus elementos: En $\mathbf{H}$ podemos sumar, restar, multiplicar y dividir alegremente como en los números complejos, excepto que la multiplicación no es conmutativa.

De manera similar que en los números complejos, los cuaterniones unitarios se puede expresar como $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$ con $\hat{\mathbf{n}}^2 = -1$. El conjunto de símbolos $\{1, i, j, k\}$ es una base de este espacio vectorial. Dependiendo de la aplicación, las bases de $\mathbf{H}$ se cambian, para obtener representaciones adecuadas⁴, en el contexto de las rotaciones, se usa una base ortonormal

$$\{1, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}\} \text{ con } \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}}$$

Multiplicar por un cuaternión unitario $\mathbf{q}$ aplica una rotación en dos planos ortogonales, generados respectivamente, por $\{1, \hat{\mathbf{n}}\}$ y $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}\}$. Y cuando queremos ir de un cuaternión unitario a otro, sobre la esfera unitaria, usamos "interpolación" sobre un solo plano (hay una componente nula en el primer plano).

Hay varios métodos muy conocidos para aplicar rotaciones, entonces ¿por qué molestarse con los cuaterniones?. Es una cuestión de simplicidad, eficiencia y estabilidad:

- Rotar $\mathbf{u}$: $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}(\mathbf{u}) = \mathbf{q}\mathbf{u}\bar{\mathbf{q}}$
- Parametrización de un camino sobre la esfera, de $\mathbf{q}_1$ a $\mathbf{q}_2$: $\mathbf{q}(t) = (\mathbf{q}_2\bar{\mathbf{q}}_1)^t\mathbf{q}_1$.
Una animación⁵ se puede ver en la Figura 2.

³Trabajar con cuadrúple es muy engorroso, así que también se usan otras representaciones que simplifican los cálculos.

⁴Se puede ver la escogencia de otras bases en "procesamiento de señales" [17]

⁵La animación solo se ejecuta en visores pdf que admitan código javascript, como Acrobat, Okular, etc. El código en MATHEMATICA está más abajo: 6.1

Figura 2: $\mathbf{q}(t) = (\mathbf{q}_2 \bar{\mathbf{q}}_1)^t \mathbf{q}_1$.

Fuente: Elaboración propia

¡Son fórmulas simples y compactas!. Para ver la intuición y las matemáticas que hay detrás de estas fórmulas, necesitamos solo cosas básicas del cuerpo de conocimientos que se obtiene en un curso introductorio de Álgebra Lineal de nuestra época, como por ejemplo el libro de S. Lang [16]⁶.

La intuición y las matemáticas, de por qué la multiplicación por un cuaternión unitario $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$ aplica una rotación, está basado en las fórmulas que se derivan de manera natural de la definición de la multiplicación: Si $\mathbf{q}_1 = s_1 + \mathbf{u}$ y $\mathbf{q}_2 = s_2 + \mathbf{v}$ entonces

$$\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 = \underbrace{s_1 s_2 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}_{\text{parte escalar}} + \underbrace{\mathbf{u} \times \mathbf{v} + s_1 \mathbf{v} + s_2 \mathbf{u}}_{\text{parte vectorial}}$$

En particular, si Π_1 es un plano con base ortonormal $\{\mathbf{1}, \hat{\mathbf{n}}\}$ y si Π_2 es un plano con base ortonormal $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}\}$, entonces $\mathbf{1}' = \mathbf{q}\mathbf{1}$ y $\hat{\mathbf{n}}' = \mathbf{q}\hat{\mathbf{n}}$ son una rotación positiva de los ejes $\{\mathbf{1}, \hat{\mathbf{n}}\}$ y $\hat{\mathbf{u}}' = \mathbf{q}\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{v}}' = \mathbf{q}\hat{\mathbf{v}}$ son una rotación positiva de los ejes $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}\}$, pues

$$\begin{cases} \mathbf{q}\mathbf{1} = \cos \theta \mathbf{1} + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta \\ \mathbf{q}\hat{\mathbf{n}} = -\sin \theta \mathbf{1} + \hat{\mathbf{n}} \cos \theta \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} \mathbf{q}\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}} \cos \theta + \hat{\mathbf{w}} \sin \theta \\ \mathbf{q}\hat{\mathbf{w}} = -\hat{\mathbf{v}} \sin \theta + \hat{\mathbf{w}} \cos \theta \end{cases}$$

Para lograr el flujo natural de los conceptos básicos del Álgebra Lineal usual hacia los cuaterniones y sus aplicaciones, en rotaciones e interpolación en $\mathbb{R}^3$, iniciamos con un sección preliminar sobre longitud y ángulos en un espacio vectorial con producto interior, luego derivamos la fórmula de rotación Euler-Rodriguez y pasamos de manera natural a los cuaterniones y a la rotación con cuaterniones y finalizamos con interpolación sobre una esfera.

En los apéndices encontramos una nota histórica del sorprendente hecho de que la multiplicación, con las propiedades deseables usuales, solo es posible en espacios de dimensión $n = 1, n = 2$ y $n = 4$ (si prescindimos de la asociatividad, también $n = 8$) y algunos detalles de índole teórica que posiblemente alguien sienta que requiere aclaraciones adicionales.

⁶El Álgebra Lineal de la década de 1840 no es la misma de ahora. Hasta 1943 se publicó el primer libro de Álgebra Lineal para estudiantes universitarios que es la base de lo que conocemos actualmente: P. Halmos *Finite Dimensional Vector Spaces*, y apenas se empezó a agregar en los programas de las universidades hasta los 70's logrando establecerse en los alrededores del año 2000 [1]. Antes de eso, en 1888, G. Peano ya había introducido espacios vectoriales en el Álgebra Lineal pero fue un trabajo largamente ignorado [9, pp. 86-87]

Las ideas intuitivas se hacen con representaciones gráficas en un plano. Es solo intuición, porque algunas cosas suceden en $\mathbb{R}^4$. Las aplicaciones en $\mathbb{R}^3$ por supuesto, no tienen problemas. La programación se hace en MATHEMATICA y se incluye el código en casi todos los ejemplos, porque es la manera concreta de ver cómo se aplica la teoría. MATHEMATICA es un lenguaje interpretado, adecuado para este propósito. Hay muchas librerías que dan soporte a las operaciones con cuaterniones en C, C++, language R, etc. En [4] podemos ver un ejemplos.

2. Preliminares

Vamos a establecer algunas herramientas básicas para trabajar con rotaciones en un plano. Siempre vamos a estar en espacios vectoriales con producto interior, lo que nos permite hablar de longitud (norma)⁷ y ángulos.

Norma, ángulo y proyección ortogonal.

Con el producto interior usual en $\mathbb{R}^n$, la *norma* (o “longitud”) de un vector $\mathbf{u}$ se define como $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$. Se usa la notación $\hat{\mathbf{n}}$ para indicar que el vector es “unitario” (de norma 1). El ángulo θ entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, denotado $\theta = \angle \mathbf{u}, \mathbf{v}$, se define con la relación⁸

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}$$

Proyección ortogonal. La “proyección ortogonal” $\mathbf{u}$ sobre el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ es

$$\text{proy}_{\hat{\mathbf{n}}}^{\mathbf{u}} = (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}$$

Descomposición ortogonal. Un vector $\mathbf{u}$ se descompone como una suma de un componente ortogonal $\mathbf{u}_{\perp}$ y la proyección $\mathbf{u}_{\parallel}$, como se muestra en la Figura 3 y la Figura 4, es decir,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp} \text{ con } \begin{cases} \mathbf{u}_{\parallel} = (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel} \end{cases}$$

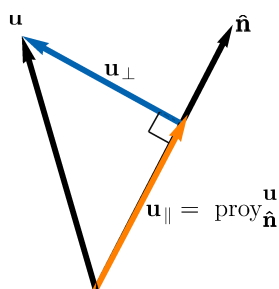


Figura 3: Componentes de $\mathbf{u}$: $\mathbf{u}_{\perp}$ y $\mathbf{u}_{\parallel}$

Fuente: Elaboración propia

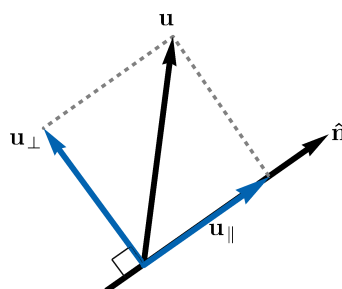


Figura 4: Descomposición ortogonal de $\mathbf{u}$

Fuente: Elaboración propia

Planos con base ortonormal. Un conjunto $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}\}$ es *ortonormal* si $\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = 0$, es decir, son perpendiculares.

⁷Los Espacios Vectoriales Normados incluyen una norma, pero no necesariamente obtenida de un producto interior

⁸La desigualdad de Cauchy–Schwarz garantiza que $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} \in [-1, 1]$

Un plano Π_o con base ortonormal $\mathcal{B} = \{\hat{u}, \hat{v}\}$, tiene “ecuación vectorial”

$$\Pi_o : t\hat{u} + s\hat{v}, t, s \in \mathbb{R}$$

En un plano podemos usar la geometría, la trigonometría y la geometría analítica (plana) usual.

Un plano Π_1 que *no contiene* el origen es una traslación de un plano Π_o (ver Figura 5). Una ecuación vectorial es

$$\Pi_1 : P + t\hat{u} + s\hat{v}, t, s \in \mathbb{R}, P \notin \Pi_o$$

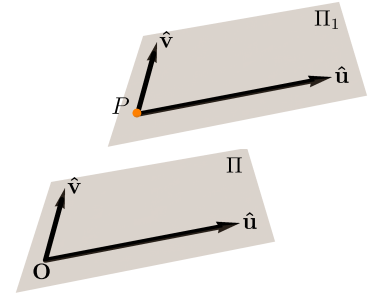


Figura 5: Planos en $\mathbb{R}^3$

Fuente: Elaboración propia

Coordenadas y circunferencias en un plano. Si $w \in \Pi_o$ con $\theta = \angle \hat{u}, \hat{w}$ y $\phi = \angle \hat{u}, \hat{v}$, entonces, como se muestra en la Figura 6,

$$w = |w|(\cos \theta \hat{u} + \sin \theta \hat{v})$$

$$\hat{w} = \cos \theta \hat{u} + \sin \theta \hat{v}$$

En efecto, usando $\text{proy}_{\hat{u}}^w$ y $\text{proy}_{\hat{v}}^w$,

$$\begin{aligned} \hat{w} &= (\hat{u} \cdot \hat{w})\hat{u} + (\hat{v} \cdot \hat{w})\hat{v} \\ &= \cos \theta \hat{u} + \cos \phi \hat{v} \\ &= \cos \theta \hat{u} + \cos(\pi/2 - \theta) \hat{v} \\ &= \cos \theta \hat{u} + \sin \theta \hat{v} \end{aligned}$$

(1)

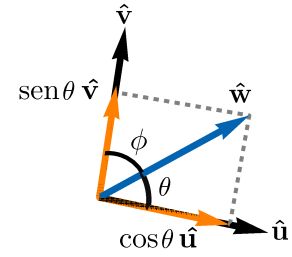


Figura 6: $\hat{w} = \cos \theta \hat{u} + \sin \theta \hat{v}$

Fuente: Elaboración propia

Una ecuación paramétrica de una circunferencia de radio r , con centro en $Q \in \Pi_o$, es

$$c(t) = Q + r \cos t \hat{u} + r \sin t \hat{v}, t \in [0, 2\pi]$$

El recorrido es de “ $\hat{u}$ hacia $\hat{v}$ ”, es decir, contrareloj. La circunferencia se muestra en la Figura 7

Verificación: Es claro que $c(t) \in \Pi_o$. Ahora, los puntos de la curva c equidistan r del centro Q :

$$\begin{aligned} |c(t) - Q|^2 &= (c(t) - Q) \cdot (c(t) - Q) \\ &= (r \cos t \hat{u} + r \sin t \hat{v}) \cdot (r \cos t \hat{u} + r \sin t \hat{v}) \\ &= r^2 \cos^2 t \hat{u} \cdot \hat{u} + r^2 \sin^2 t \hat{v} \cdot \hat{v} = r^2 \end{aligned}$$

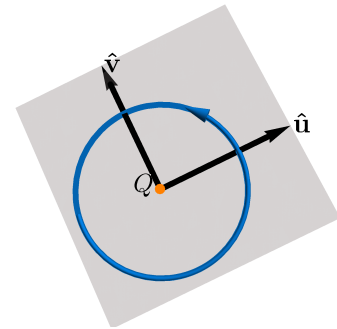


Figura 7: Circunferencia en el plano Π_o

Fuente: Elaboración propia

Una circunferencia se puede parametrizar de varias maneras, por ejemplo como

$$c(t) = P + r \cos t^2 \hat{u} + r \sin t^2 \hat{v}, t \in [0, \sqrt{2\pi}]$$

Lo que cambia en este caso es que si, por ejemplo, $c(t)$ es la trayectoria de una partícula, el movimiento *no tiene* rapidez (y velocidad angular) constante.

Productor cruz.

Recordemos que el *producto cruz* (o “producto vectorial”) de dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, denotado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, está definido en $\mathbb{R}^3$ (y en $\mathbb{R}^7$)⁹ como el único vector cuya longitud es el área del paralelogramo generado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y cuya dirección es perpendicular a este paralelogramo y está orientado según “la regla de la mano derecha” como se ve en la Figura 8.

Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \times \mathbf{w} &= (v_2 w_3 - v_3 w_2) \mathbf{i} \\ &+ (v_3 w_1 - v_1 w_3) \mathbf{j} \\ &+ (v_1 w_2 - v_2 w_1) \mathbf{k}\end{aligned}$$

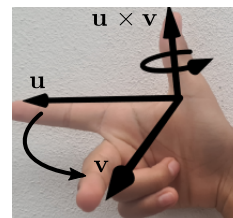


Figura 8: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

Fuente: Elaboración propia

De especial importancia es la fórmula del triple producto vectorial y la identidad de Lagrange.

- Triple producto vectorial: $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

Además de una fórmula de cálculo rápido, la intuición del “triple producto vectorial” es que si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ no son paralelos, $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ está en el mismo plano que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ como se muestra en la Figura 9. En particular nos interesa:

- $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$
- $\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}) = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u})\hat{\mathbf{n}} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}})\mathbf{u} = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u})\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{u}$

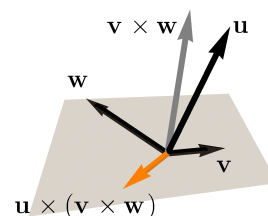


Figura 9: $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

Fuente: Elaboración propia

- Identidad de Lagrange: $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{v}|^2 |\mathbf{w}|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2$

En particular, como $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos \theta$ con $\theta = \angle \mathbf{v}, \mathbf{w} \in [0, \pi]$, entonces

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \sin \theta$$

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (1/5, 4/5, 0)$ y $\mathbf{w} = (-2/5, -4/5, 0)$. En las Figuras 10, 11 y 12 se muestran gráficamente los productos $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$ y $\mathbf{w} \times \mathbf{u}$, respectivamente.

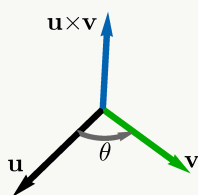


Figura 10: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

Fuente: Elaboración propia

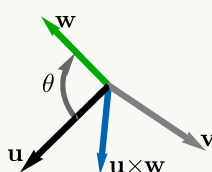


Figura 11: $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$

Fuente: Elaboración propia

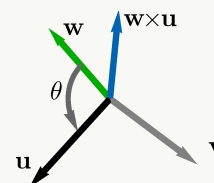


Figura 12: $\mathbf{w} \times \mathbf{u}$

Fuente: Elaboración propia

⁹Un “producto cruz” puede ser definido en $\mathbb{R}^n$, pero no exactamente como en $\mathbb{R}^3$, [11, pág 698]

Podemos descomponer el vector $\mathbf{u}$ como

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp} \text{ con } \begin{cases} \mathbf{u}_{\parallel} = (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel} \end{cases}$$

Entonces,

$$\bullet \quad \mathbf{u}_{\perp} = (\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \hat{\mathbf{n}} \quad (2)$$

$$\bullet \quad |\mathbf{u}_{\perp}| = |\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{n}}| \quad (3)$$

$$\bullet \quad |\mathbf{u}_{\perp}| = |\mathbf{u}| \sin \theta \quad (4)$$

$$\bullet \quad \mathbf{u} = |\mathbf{u}| \cos \theta \hat{\mathbf{n}} + |\mathbf{u}| \sin \theta \frac{\mathbf{u}_{\perp}}{|\mathbf{u}_{\perp}|} \quad (5)$$

Las fórmulas 2 y 5 se pueden visualizar en las Figuras 13 y 14.

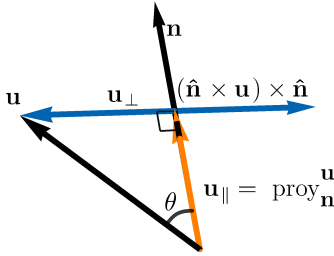


Figura 13: $\mathbf{u}_{\perp} = (\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \hat{\mathbf{n}}$

Fuente: Elaboración propia

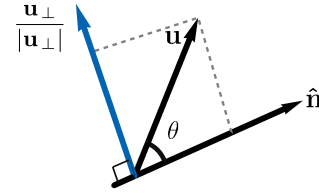


Figura 14: $\mathbf{u} = |\mathbf{u}| \cos \theta \hat{\mathbf{n}} + |\mathbf{u}| \sin \theta \frac{\mathbf{u}_{\perp}}{|\mathbf{u}_{\perp}|}$

Fuente: Elaboración propia

Verificación:

$$\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u})\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{n}}) = (\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{Triple producto vectorial})$$

$$|\mathbf{u}_{\perp}| = |\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{n}}| |\hat{\mathbf{n}}| \sin \pi/2 = |\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{n}}|$$

$$|\mathbf{u}_{\perp}| = |\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{n}}| = |\mathbf{u}| \sin \theta$$

$$\mathbf{u} = |\mathbf{u}| \cos \theta \hat{\mathbf{n}} + |\mathbf{u}| \sin \theta \frac{\mathbf{u}_{\perp}}{|\mathbf{u}_{\perp}|} \quad \text{por (1)}$$

Base ortonormal orientada positivamente. Por un convenio adoptado por la London Mathematical Society [18, pág. 34], a petición de J.C. Maxwell, en 1871, se dice que un sistema de ejes $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{n}}\}$ está *orientado positivamente* si rota en la dirección de rotación de la tierra visto desde el polo norte. A través de la historia han habido diversos recursos mnemotécnicos para describir la orientación positiva de un sistema, en nuestros días uno recurso usual (no el único) es “la regla de la mano derecha”, como se muestra en la Figura 15.

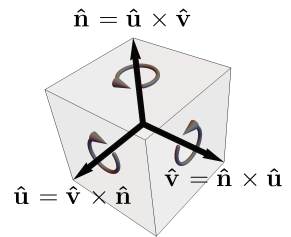


Figura 15: Orientación positiva.

Fuente: Elaboración propia

En $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{n}}\}$ es una *base ortonormal* si sus vectores son mutuamente ortogonales. Dados $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}$ ortogonales, podemos construir una base ortonormal. Y dado solamente $\hat{\mathbf{n}}$, podemos construir también una base ortonormal.

- Dados dos vectores $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}$ ortogonales, podemos construir una base ortonormal $\mathcal{B} = \{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{n}}\}$ con $\hat{\mathbf{n}} = \pm(\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}})$. Observe que efectivamente $|\hat{\mathbf{n}}| = |\hat{\mathbf{u}}| |\hat{\mathbf{v}}| \sin \pi/2 = 1$

Si $\hat{n} = \hat{u} \times \hat{v}$, la base $\mathcal{B}$ esta orientada positivamente

Si $\mathcal{B}$ esta orientada positivamente, entonces $\hat{u} \times \hat{v} = \hat{n}$ y además $\hat{n} \times \hat{u} = \hat{v}$ y $\hat{v} \times \hat{n} = \hat{u}$.

Verificación: Como $\hat{u} \times \hat{v} = \hat{n}$, aplicando el triple producto vectorial tenemos

$$\begin{aligned}\hat{n} \times \hat{u} &= (\hat{u} \times \hat{v}) \times \hat{u} = (\hat{u} \cdot \hat{u})\hat{v} = \hat{v} \\ \hat{v} \times \hat{n} &= \hat{v} \times (\hat{u} \times \hat{v}) = (\hat{v} \cdot \hat{v})\hat{u} = \hat{u}\end{aligned}$$

Podemos especificar la base $\mathcal{B}$ de varias maneras,

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{\hat{u}, \hat{v}, \hat{u} \times \hat{v}\} \\ &= \{\hat{u}, \hat{n} \times \hat{u}, \hat{n}\} \\ &= \{\hat{v} \times \hat{n}, \hat{v}, \hat{n}\}\end{aligned}$$

Si $\hat{n} = \hat{u} \times \hat{v}$ entonces $\hat{u} = \hat{v} \times \hat{n}$, por tanto $\hat{u} \cdot (\hat{v} \times \hat{n}) = 1$ (el volumen del paralelepípedo generado por los elementos de $\mathcal{B}$ es 1) y esto lo utilizamos para verificar que $\mathcal{B}$ esta orientada positivamente. El cálculo se puede hacer con un determinante:

$$\hat{u} \cdot (\hat{v} \times \hat{n}) = \text{Det} \begin{bmatrix} | & | & | \\ \hat{u} & \hat{v} & \hat{n} \\ | & | & | \end{bmatrix} = 1$$

Ejemplo 2

- La base canónica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ de $\mathbb{R}^3$ esta orientada positivamente pues

$$\mathbf{i} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = \text{Det} \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ | & | & | \end{bmatrix} = 1$$

- Considere la base ortonormal $\mathcal{B} = \{\hat{n}, \hat{u}, \hat{v}\}$ con

$$\hat{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$$

$$\hat{u} = (1/\sqrt{6}, -\sqrt{2}/3, 1/\sqrt{6})$$

$$\hat{v} = \hat{n} \times \hat{u} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$$

Entonces $\mathcal{B}$ está orientada positivamente, como se muestra en la Figura 16

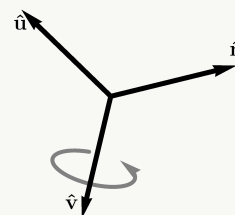


Figura 16: Base $\mathcal{B}$

Fuente: Elaboración propia

- Dado un vector $\hat{n}$ podemos construir una base ortonormal de varias maneras. Pero, para aplicar rotaciones en $\mathbb{R}^3$, nos interesa una base en particular:

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{n}$ vectores no nulos ni paralelos. Como $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - (\hat{n} \cdot \mathbf{u})\hat{n}$, el conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\mathbf{u}_{\perp}}{|\mathbf{u}_{\perp}|}, \frac{\hat{n} \times \mathbf{u}}{|\hat{n} \times \mathbf{u}|}, \hat{n} \right\} \quad (6)$$

es una base ortonormal *orientada positivamente* como se muestra en la Figura 17.

Verificación: Los vectores son unitarios. Como $\frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|}$ y $\hat{\mathbf{n}}$ son ortogonales, solo hay que probar que

$$\frac{\mathbf{u}_\perp}{|\mathbf{u}_\perp|} = \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|} \times \hat{\mathbf{n}}$$

Y, efectivamente, como ya vimos en (2) y (3)

$$(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u}_\perp \quad \text{y} \quad |\mathbf{u}_\perp| = |\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|$$

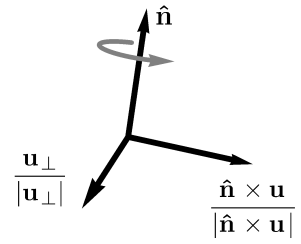


Figura 17: Base $\mathcal{B}$

Fuente: Elaboración propia

Por tanto
$$\frac{\mathbf{u}_\perp}{|\mathbf{u}_\perp|} = \frac{(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}) \times \hat{\mathbf{n}}}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|}$$

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$ y $\hat{\mathbf{n}} = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$. Para construir una base ortonormal positivamente orientada como en (6), solo necesitamos calcular $\frac{\mathbf{u}_\perp}{|\mathbf{u}_\perp|}$ y $\frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|}$

- $\text{proy}_{\hat{\mathbf{n}}}^{\mathbf{u}} = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u})\hat{\mathbf{n}} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$
- $\mathbf{u}_\perp = \mathbf{u} - \text{proy}_{\hat{\mathbf{n}}}^{\mathbf{u}} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$
- $\frac{\mathbf{u}_\perp}{|\mathbf{u}_\perp|} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
- $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2}\right)$
- $\frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|} = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Forma matricial del producto cruz. $T_{\mathbf{n}}(\mathbf{w}) = \mathbf{n} \times \mathbf{w}$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. Esto es así pues

$$T_{\mathbf{n}}(\alpha \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \alpha \mathbf{w} = \alpha(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \alpha T_{\mathbf{n}} \mathbf{w}$$

$$T_{\mathbf{n}}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{n} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{n} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} = T_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) + T_{\mathbf{n}}(\mathbf{w})$$

Por tanto $T_{\mathbf{n}}$ tiene asociada una matriz (estándar) $\mathbf{K}_{\mathbf{n}}$. Si $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, entonces

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{n}}(1, 0, 0) &= (0, n_3, -n_2) \\ T_{\mathbf{n}}(0, 1, 0) &= (-n_3, 0, n_1) \\ T_{\mathbf{n}}(0, 0, 1) &= (n_2, -n_1, 0) \end{aligned} \implies \mathbf{K}_{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

En particular,

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} = \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{u} \tag{7}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}) = \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}}^2 \mathbf{u} \tag{8}$$

y, aplicando la fórmula para el "triple producto vectorial",

$$-\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} = \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}}^3 \mathbf{u} \tag{9}$$

Planos, arcos y circunferencias. En un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, con un producto interior, un plano Π es un subespacio de dimensión 2. En $\mathbb{R}^3$, un plano Π_o que pasa por el origen se puede especificar con un solo vector $\mathbf{n}$, *normal al plano*. Un vector no nulo $\mathbf{n}$ es normal al plano si es perpendicular a todos los elementos del plano, es decir, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = 0$ para todo $\mathbf{w} \in \Pi_o$. Por supuesto si $\Pi_o : t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ entonces un vector normal es $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

Si conocemos que $\mathbf{n}$ es normal un plano Π_o (que pasa por el origen), entonces hay varias maneras de obtener una base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ para este plano. Por ejemplo,

$$\mathbf{n} = (a, b, c) = \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{c}(0, c, -b)}_{\mathbf{u}} \times \underbrace{(-c, 0, a)}_{\mathbf{v}} & \text{si } c \neq 0 \\ (0, 0, 1) \times (b, -a, 0) & \text{si } c = 0 \end{cases}$$

Si el contexto es “rotar un vector $\mathbf{u}$ ”, usamos una base ortonormal particular. Sean $\mathbf{u}$ y $\hat{\mathbf{n}}$ no nulos ni paralelos. Como ya vimos, proyectando $\mathbf{u}$ sobre $\hat{\mathbf{n}}$, la base (ver Figura 18)

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\mathbf{u}_\perp}{|\mathbf{u}_\perp|}, \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|}, \hat{\mathbf{n}} \right\}$$

es positivamente orientada y, en particular, $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector normal a los planos de base ortonormal

$$\left\{ \frac{\mathbf{u}_\perp}{|\mathbf{u}_\perp|}, \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|} \right\}$$

Sean $\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{u}}$ no paralelos y $\theta = \angle \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{u}}$. Si $\hat{\mathbf{u}}_\perp = \hat{\mathbf{u}} - \text{proy}_{\hat{\mathbf{v}}}^{\hat{\mathbf{u}}}$, entonces usando la ecuación (5), obtenemos que en el plano $\Pi : t\hat{\mathbf{v}} + s\hat{\mathbf{u}}_\perp$, una ecuación paramétrica de un arco que va de $\hat{\mathbf{v}}$ a $\hat{\mathbf{u}}$ es

$$\mathbf{c}(t) = \cos(t\theta) \hat{\mathbf{v}} + \sin(t\theta) \hat{\mathbf{u}}_\perp, \quad t \in [0, 1] \quad (10)$$

Observe que $\mathbf{c}(0) = \hat{\mathbf{v}}$ y $\mathbf{c}(1) = \hat{\mathbf{u}}$. El recorrido es de $\hat{\mathbf{v}}$ a $\hat{\mathbf{u}}$, contra-reloj como se muestra en la Figura 19

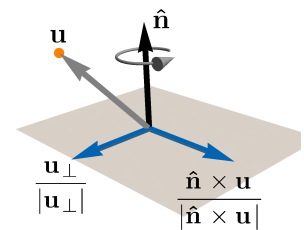


Figura 18: Base $\mathcal{B}$

Fuente: Elaboración propia

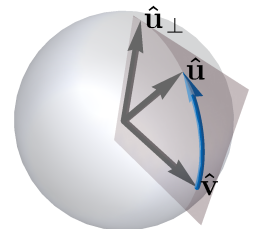


Figura 19: Arco en $\mathbb{R}^3$

Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 4 (Circunferencia en un plano en $\mathbb{R}^3$)

Sean $\hat{\mathbf{n}} = (2/3, 2/3, 1/3)$ y $\mathbf{u} = (0, 6/5, 3/2)$. Consideremos el plano

$$\Pi : t \frac{\mathbf{u}_\perp}{|\mathbf{u}_\perp|} + s \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

En este plano, una ecuación paramétrica de una circunferencia (ver Figura 20), centrada en el origen y de radio $|\mathbf{u}_\perp|$, tiene ecuación

$$\mathbf{c}(t) = |\mathbf{u}_\perp| \cos t \frac{\mathbf{u}_\perp}{|\mathbf{u}_\perp|} + |\mathbf{u}_\perp| \sin t \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

- $\text{proy}_{\hat{n}}^{\mathbf{u}} = (\mathbf{u} \cdot \hat{n})\hat{n} = \left(\frac{13}{15}, \frac{13}{15}, \frac{13}{30}\right)$
- $\mathbf{u}_{\perp} = \left(-\frac{13}{15}, \frac{1}{3}, \frac{16}{15}\right)$
- $|\mathbf{u}_{\perp}| = |\hat{n} \times \mathbf{u}| = \sqrt{2}$
- $\frac{\mathbf{u}_{\perp}}{|\mathbf{u}_{\perp}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{13}{15}, \frac{1}{3}, \frac{16}{15}\right)$
- $\frac{\hat{n} \times \mathbf{u}}{|\hat{n} \times \mathbf{u}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{5}, -1, \frac{4}{5}\right)$

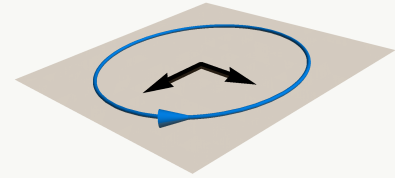


Figura 20: Circunferencia en plano Π

Fuente: Elaboración propia

El código en MATHEMATICA es

```
ClearAll[u, up, uperp, e1, e2, radio, or3]
n = {2/3, 2/3, 1/3}; u = {0, 6/5, 3/2}; or3 = {0, 0, 0};
up = (n.u) n; uperp = u - up; radio = Norm[uperp];
e1 = Normalize@uperp; e2 = Normalize@Cross[n, u];
Graphics3D[{AbsoluteThickness[5], Arrowheads[0.055],
  Arrow[{or3, e1}], Arrow[{or3, e2}],
  (*plano*)
  First@ParametricPlot3D[t e1 + s e2, {t, -1.8, 1.8}, {s, -1.8, 1.8},
    Mesh -> None, PlotStyle -> {Opacity[0.3], Gray}],
  (*circunferencia*)
  First@ParametricPlot3D[radio Cos[t] e1 + radio Sin[t] e2, {t, 0, 7},
    PlotRange -> All, PlotStyle -> Directive[{Celeste, Arrowheads[.06]}]] /.
    Line[pts_] :> Arrow[Tube[pts, .025], {0, -0.1}]
}, Boxed -> False, PlotRange -> All, Lighting -> "Neutral", ImageSize -> 400]
```

Rotación de ejes en un plano. Consideremos el plano Π con base ortonormal $\{\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}\}$

$$\Pi : t\hat{\mathbf{v}} + s\hat{\mathbf{w}}, t, s \in \mathbb{R}$$

Las rotaciones son transformaciones que conservan longitud y ángulos. Una rotación de ejes unitarios recorren una circunferencia de radio 1, centrada en el origen. Por tanto si $\hat{\mathbf{v}}'$ y $\hat{\mathbf{w}}'$ es una rotación positiva de los ejes $\hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{w}}$, de ángulo θ (ver Figura 21), tendríamos

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{v}}' = \cos \theta \hat{\mathbf{v}} + \sin \theta \hat{\mathbf{w}} \\ \hat{\mathbf{w}}' = \cos(\pi/2 + \theta) \hat{\mathbf{v}} + \sin(\pi/2 + \theta) \hat{\mathbf{w}} \end{cases}$$

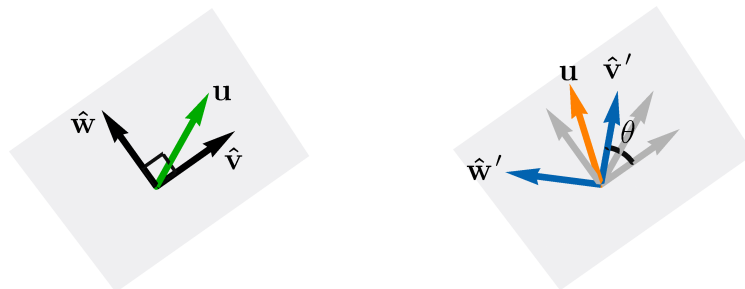


Figura 21: Idea intuitiva: Rotación de ejes en un plano

Fuente: Elaboración propia

En general, si $\mathbf{u} = t_0 \hat{\mathbf{v}} + s_0 \hat{\mathbf{w}} \in \Pi$ y si

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{v}}' &= \cos \theta \hat{\mathbf{v}} + \sin \theta \hat{\mathbf{w}} \\ \hat{\mathbf{w}}' &= -\sin \theta \hat{\mathbf{v}} + \cos \theta \hat{\mathbf{w}} \\ \mathbf{u}' &= t_0 \hat{\mathbf{v}}' + s_0 \hat{\mathbf{w}}' \end{cases}$$

entonces $\hat{\mathbf{v}}'$ y $\hat{\mathbf{w}}'$ son una rotación de los ejes $\hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{w}}$, en “dirección positiva”, de ángulo θ , pues se conserva la longitud y los ángulos. Y $\mathbf{u}$ rota con los ejes hasta $\mathbf{u}'$.

Verificación:

- $|\hat{\mathbf{v}}'| = 1$ pues $(\cos \theta \hat{\mathbf{v}} + \sin \theta \hat{\mathbf{w}}) \cdot (\cos \theta \hat{\mathbf{v}} + \sin \theta \hat{\mathbf{w}}) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$
- De manera similar $|\hat{\mathbf{w}}'| = 1$
- $\hat{\mathbf{v}}' \cdot \hat{\mathbf{w}}' = (\cos \theta \hat{\mathbf{v}} + \sin \theta \hat{\mathbf{w}}) \cdot (-\sin \theta \hat{\mathbf{v}} + \cos \theta \hat{\mathbf{w}}) = 0$
- $\hat{\mathbf{v}}' \cdot \hat{\mathbf{v}} = (\cos \theta \hat{\mathbf{v}} + \sin \theta \hat{\mathbf{w}}) \cdot \hat{\mathbf{v}} = \cos \theta$
- De manera similar $\hat{\mathbf{w}}' \cdot \hat{\mathbf{w}} = \cos \theta$

3. Fórmula de rotación “eje-ángulo”

Como ya vimos en la sección anterior, dados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{n}$ no nulos y no paralelos, una ecuación paramétrica de una circunferencia con centro en $\text{proy}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{u}}$ y radio $|\mathbf{u}_{\perp}|$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t) &= \text{proy}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{u}} + |\mathbf{u}_{\perp}| \cos t \frac{\mathbf{u}_{\perp}}{|\mathbf{u}_{\perp}|} + |\mathbf{u}_{\perp}| \sin t \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|} \\ &= (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}) \hat{\mathbf{n}} + \cos t \mathbf{u}_{\perp} + \sin t \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}, \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Si $\mathbf{u}'$ se obtiene rotando $\mathbf{u}$ alrededor de $\hat{\mathbf{n}}$, en un ángulo θ contrareloj, entonces

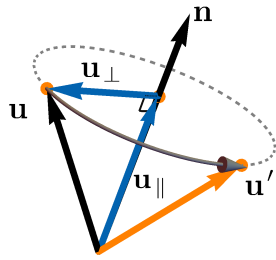
$$\mathbf{u}' = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}) \hat{\mathbf{n}} + \cos \theta \mathbf{u}_{\perp} + \sin \theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} \quad (11)$$

Esta es la llamada “fórmula eje-ángulo” o fórmula de Euler–Rodrigues¹⁰.

El plano de rotación tiene ecuación (ver Figuras 22 y 23)

$$\Pi : (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}) \hat{\mathbf{n}} + t \frac{\mathbf{u}_{\perp}}{|\mathbf{u}_{\perp}|} + s \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

¹⁰En realidad la fórmula fue derivada primero por L. Euler y por varios aspectos se recomienda llamarla “fórmula Euler–Rodriguez”, [2].

Figura 22: Rotación de $\mathbf{u}$

Fuente: Elaboración propia

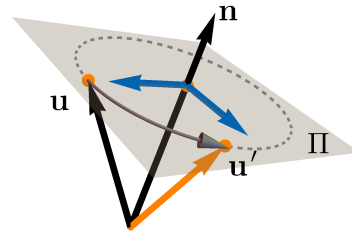


Figura 23: Plano de rotación

Fuente: Elaboración propia

Necesitamos tomar nota de este detalle: La transformación

$$R_{\hat{n},\theta}(\mathbf{u}) = (\hat{n} \cdot \mathbf{u})\hat{n} + \cos \theta \mathbf{u}_{\perp} + \sin \theta \hat{n} \times \mathbf{u}$$

es lineal (pues sus sumandos son lineales) y *deja* $\mathbf{u}_{\parallel}$ *invariante* y solo rota $\mathbf{u}_{\perp}$ alrededor de $\hat{n}$, es decir,

$$R_{\hat{n},\theta}(\mathbf{u}) = R_{\hat{n},\theta}(\mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}) = \mathbf{u}_{\parallel} + R_{\hat{n},\theta}(\mathbf{u}_{\perp})$$

Intuitivamente lo podemos ver en la Figura 22. Formalmente, como

$$\mathbf{u}_{\parallel} = (\mathbf{u}_{\parallel} \cdot \hat{n})\hat{n} = (\mathbf{u} \cdot \hat{n})\hat{n}$$

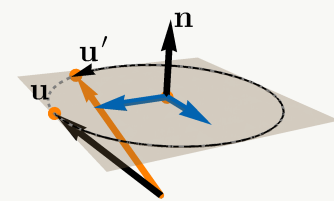
entonces

$$\begin{aligned} R_{\hat{n},\theta}(\mathbf{u}_{\parallel}) &= (\mathbf{u}_{\parallel} \cdot \hat{n})\hat{n} + \cos \theta (\mathbf{u}_{\parallel})_{\perp} + \sin \theta \hat{n} \times \mathbf{u}_{\parallel} \\ &= (\mathbf{u} \cdot \hat{n})\hat{n} + \cos \theta (\mathbf{u}_{\parallel} - (\mathbf{u} \cdot \hat{n})\hat{n}) + \sin \theta \mathbf{0} \\ &= \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Sea $\mathbf{u} = (0, 2, 1/2)$. Queremos rotar contrareloj $\mathbf{u}$ alrededor de $\hat{\mathbf{n}} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, en un ángulo $\theta = 5\pi/3$ como se muestra en la Figura 24. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= R_{\hat{\mathbf{n}}, 5\pi/3}(\mathbf{u}) \\ &= (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u})\hat{\mathbf{n}} + \cos 5\pi/3 \mathbf{u}_{\perp} + \sin 5\pi/3 \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} \\ &= (7/6, 5/3, -1/3) \end{aligned}$$

Figura 24: Rotación de $\mathbf{u}$

Fuente: Elaboración propia

El código en MATHEMATICA es

```
ClearAll[u, n, theta, up, uperp, nxu, e1, e2]
n = Normalize@{1, 1, 1}; u = {0, 2, 1/2}; or3 = {0, 0, 0};
theta = 5 Pi/3;
up = (n.u) n; uperp = u - up; nxu = Cross[n, u];
e1 = Normalize@uperp; e2 = Normalize@nxu;
uprima = up + Cos[theta] uperp + Sin[theta] nxu;
Graphics3D[{
  AbsolutePointSize[10], Orange, Point[{u, up, uprima}],
```

```

AbsoluteThickness[5], Arrowheads[0.07],
Black, Arrow[{up, up + n}], Arrow[{or3, u}],
Blue, Arrow[{up, up + e1}], Arrow[{up, up + e2}],
Orange, Arrow[{or3, uprima}],
(*circunferencia*)
First@ParametricPlot3D[up + Cos[t] uperp + Sin[t] nxu, {t, 0, 2 Pi},
  PlotRange -> All, PlotStyle -> Directive[{Gray, Thick, Dashed}]],
(*Arco*)
First@ParametricPlot3D[up + Cos[t] uperp + Sin[t] nxu, {t, 0, 5 Pi/3},
  PlotStyle -> Directive[{Black, Arrowheads[.06]}]] /.
  Line[pts_] :> Arrow[pts, {0, -0.1}],
(*Plano*)
First@ParametricPlot3D[up + t e1 + s e2, {t, -1.5, 1.5}, {s, -1.5, 1.5},
  Mesh -> None, PlotStyle -> {Opacity[0.3], Gray}]
}, Boxed -> False, PlotRange -> All, ImageSize -> 300]

```

Forma matricial de $R_{\hat{n},\theta}$.

Aplicando la forma matricial del producto cruz y el triple producto vectorial, podemos obtener una forma matricial de la fórmula “eje-ángulo”. Tenemos que

$$\hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{u}) = (\hat{n} \cdot \mathbf{u})\hat{n} - \hat{n} = -\mathbf{u}_{\perp}$$

Ahora aplicando la forma matricial del producto cruz nos queda

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\perp} &= -\mathbf{K}_{\hat{n}}^2 \mathbf{u} \\ (\hat{n} \cdot \mathbf{u})\hat{n} &= \mathbf{K}_{\hat{n}}^2 \mathbf{u} + \hat{n}\end{aligned}$$

Ahora sustituimos (recuerde que $\mathbf{u}$ como matriz, es un “vector columna” 3×1 , es decir, $I\mathbf{u} = \mathbf{u}$)

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \cdot \hat{n})\hat{n} + \cos \theta \mathbf{u}_{\perp} + \sin \theta \hat{n} \times \mathbf{u} &= \mathbf{K}_{\hat{n}}^2 \mathbf{u} + \hat{n} - \cos \theta \mathbf{K}_{\hat{n}}^2 \mathbf{u} + \sin \theta \mathbf{K}_{\hat{n}} \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} + (1 - \cos \theta) \mathbf{K}_{\hat{n}}^2 \mathbf{u} + \sin \theta \mathbf{K}_{\hat{n}} \mathbf{u} \\ &= \underbrace{(\mathbf{I}_{3 \times 3} + (1 - \cos \theta) \mathbf{K}_{\hat{n}}^2 + \sin \theta \mathbf{K}_{\hat{n}})}_{\text{Matriz asociada } R_{\hat{n},\theta}} \mathbf{u}\end{aligned}$$

La matriz asociada a $R(\hat{n}, \theta)$ la denotamos (en negrita) $\mathbf{R}(\hat{n}, \theta)$. Para simplificar vamos a aplicar las siguientes sustituciones: $s = \sin \theta$ y $c = 1 - \cos \theta$ y como $\hat{n}$ es unitario, $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ y por tanto $n_1^2 - 1 = -n_2^2 - n_3^2$, $n_2^2 - 1 = -n_1^2 - n_3^2$, y $n_3^2 - 1 = -n_1^2 - n_2^2$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\hat{n}, \theta) &= \mathbf{I}_{3 \times 3} + \sin \theta \mathbf{K}_{\hat{n}} + (1 - \cos \theta) \mathbf{K}_{\hat{n}}^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 + (n_1^2 - 1)c & n_1 n_2 c - n_3 s & n_1 n_3 c + n_2 s \\ n_1 n_2 c + n_3 s & 1 + (n_2^2 - 1)c & n_2 n_3 c - n_1 s \\ n_1 n_3 c - n_2 s & n_2 n_3 c + n_1 s & 1 + (n_3^2 - 1)c \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{12}$$

R es ortonormal y su determinante es 1.

Es importante establecer, como veremos más adelante, que esta matriz $\mathbf{R}(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$ es ortonormal y su determinante es 1. Observe que al cambiar θ por $-\theta$, entonces c no cambia (pues $\cos \theta = \cos -\theta$) pero s cambia a $-s$ (pues $\sin -\theta = -\sin \theta$), entonces

$$\mathbf{R}(\hat{\mathbf{n}}, -\theta) = \mathbf{R}^T(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$$

Y como $\mathbf{R}(\hat{\mathbf{n}}, -\theta)$ es la matriz de una transformación lineal, el producto es la composición de rotaciones, entonces

$$\mathbf{R}(\hat{\mathbf{n}}, \theta) \mathbf{R}^T(\hat{\mathbf{n}}, \theta) = \mathbf{R}(\hat{\mathbf{n}}, \theta) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{n}}, -\theta) = \mathbf{I}$$

Como $\text{Det } \mathbf{I} = \text{Det } \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \text{Det } \mathbf{R} \text{Det } \mathbf{R} = (\text{Det } \mathbf{R})^2 \implies \text{Det } \mathbf{R} = \pm 1$. Verificar directamente que $\text{Det } \mathbf{R}(\hat{\mathbf{n}}, \theta) = 1$ requiere demasiados cálculos, pero podemos usar MATHEMATICA para hacer el cálculo algebraico

```
ClearAll[mR, n, detR]
(* n es unitario*)
mR[n_, theta_] := With[{c = 1 - Cos[theta], s = Sin[theta]},
  {{1 + (n[[1]]^2 - 1)c, n[[1]] n[[2]]c - n[[3]]s, n[[1]] n[[3]]c + n[[2]]s},
  {n[[1]] n[[2]]c + n[[3]]s, 1 + (n[[2]]^2 - 1)c, n[[2]] n[[3]]c - n[[1]]s},
  {n[[1]] n[[3]]c - n[[2]]s, n[[2]] n[[3]]c + n[[1]]s, 1 + (n[[3]]^2 - 1)c}}];

n = {n1, n2, n3};
detR = Det[mR[n, t]] // FullSimplify
(*Out[] -(-n1^2-n2^2-n3^2+(-1+n1^2+n2^2+n3^2)Cos[t])(Cos[t]^2+(n1^2+n2^2+n3^2)Sin[t]^2)*)

(* n es unitario, debemos agregar esto como una regla, para simplificar*)
detR /. {n1^2 + n2^2 + n3^2 -> 1, -n1^2 - n2^2 - n3^2 -> -1}
(*Out[] Cos[t]^2+Sin[t]^2 = 1*)
```

Otra manera para establecer que el determinante es 1, es usar propiedades de matrices ortonormales y sus valores propios.

Ejemplo 6

Sea $\mathbf{u} = (0, 2, 1/2)$. Queremos rotar contrareloj $\mathbf{u}$ alrededor de $\hat{\mathbf{n}} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, en un ángulo $\theta = 5\pi/3$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{n}}, 5\pi/3}(\mathbf{u}) \\ &= (7/6, 5/3, -1/3) \end{aligned}$$

```
ClearAll[mR, n, theta, u, uprima]
(*n es unitario*)
mR[n_, theta_] :=
  With[{c = 1 - Cos[theta], s = Sin[theta]},
    {{1+(n[[1]]^2 - 1)c, n[[1]]n[[2]]c-n[[3]]s, n[[1]]n[[3]]c+n[[2]]s},
    {n[[1]]n[[2]]c+n[[3]]s, 1+(n[[2]]^2 - 1)c, n[[2]]n[[3]]c-n[[1]]s},
    {n[[1]]n[[3]]c-n[[2]]s, n[[2]]n[[3]]c+n[[1]]s, 1+(n[[3]]^2-1)c}}
  ];
```

```
n = Normalize@{1, 1, 1}; u = {0, 2, 1/2};
theta = 5 Pi/3;
uprime = mR[n, theta].u
(*Out[] {7/6, 5/3, -1/3}*)
```

4. Matrices y Rotaciones

Las rotaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son transformaciones que preservan longitud y orientación y eso es lo que se acepta como definición de *una de rotación en $\mathbb{R}^n$* : Una transformación que preservan longitud y orientación [5], [19].

Una matriz $\mathbf{R}$ es ortonormal si $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ y $\mathbf{R}$ preserva el producto interior. Sea $\mathbf{w}_1 = \mathbf{R}\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}_2 = \mathbf{R}\mathbf{v}$. Operando como matrices,

$$\mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_2 = (\mathbf{R}\mathbf{u})^T \mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$$

Volviendo al lenguaje de vectores, $\mathbf{w}_1^T \mathbf{v} = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2$ y $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, es decir, $\mathbf{R}\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Como $\mathbf{R}$ preserva el producto interior, entonces preserva longitudes, pues

$$|\mathbf{R}\mathbf{u}|^2 = \mathbf{R}\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2, \text{ es decir, } |\mathbf{R}\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|$$

Definición 1

Una matriz $\mathbf{R}_{n \times n}$ representa una rotación si y solo si

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I} \text{ y } \text{Det } \mathbf{R} = 1$$

Las columnas de $\mathbf{R}$ constituyen una base ortonormal. Que el determinante sea 1 garantiza que se conserva la orientación de los ejes al aplicar $\mathbf{R}$. Por ejemplo en $\mathbb{R}^3$, si las columnas de $\mathbf{R}$ constituyen la base ortonormal $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{n}}\}$, esta base está orientada positivamente si y solo si el paralelepípedo determinado por estos vectores tiene volumen 1, es decir,

$$V = \hat{\mathbf{u}} \cdot (\hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{n}}) = \text{Det} \begin{bmatrix} | & | & | \\ \hat{\mathbf{u}} & \hat{\mathbf{v}} & \hat{\mathbf{n}} \\ | & | & | \end{bmatrix} = 1, \text{ es decir, } \text{Det } \mathbf{R} = 1$$

Matrices ortonormales en $\mathbb{R}^3$. Una matriz ortonormal aplica una rotación. En este caso, en $\mathbb{R}^3$, hay un plano, un eje de rotación y un ángulo (cosa que no pasa en dimensiones $n > 3$). Podemos obtener un eje de rotación $\hat{\mathbf{n}}$ y un ángulo *correctamente* asociado a este eje.

$$\text{Si } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

entonces, si $\mathbf{R}$ no es simétrica, podemos tomar

$$\mathbf{n} = (r_{23} - r_{32}, r_{31} - r_{13}, r_{12} - r_{21}) \text{ o } \mathbf{n} = -(r_{23} - r_{32}, r_{31} - r_{13}, r_{12} - r_{21}).$$

Y el ángulo *correcto* de rotación, que corresponde a la elección de $\mathbf{n}$, se calcula usando las relaciones

$$\begin{cases} \cos \theta &= \frac{\text{Tr}(\mathbf{R}) - 1}{2} \\ \sin \theta &= -\frac{\text{Tr}(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{R})}{2} \end{cases}$$

La deducción completa se puede ver en el apéndice B

Ejemplo 7

$$\text{Sea } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Un cálculo directo nos da $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = I$ y $\text{Det } \mathbf{R} = 1$ por tanto $\mathbf{R}$ aplica una rotación.
- La matriz $\mathbf{R}$ no es simétrica. Tenemos dos elecciones para el eje de rotación:

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm \frac{(\mathbf{R}_{23} - \mathbf{R}_{32}, \mathbf{R}_{31} - \mathbf{R}_{13}, \mathbf{R}_{12} - \mathbf{R}_{21})}{\|(\mathbf{R}_{23} - \mathbf{R}_{32}, \mathbf{R}_{31} - \mathbf{R}_{13}, \mathbf{R}_{12} - \mathbf{R}_{21})\|} = (0, 0, \pm 1)$$

El ángulo de rotación, respecto a $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, -1)$ es

$$\theta = \text{ArcTan}[(\text{Tr}[\mathbf{R}] - 1)/2, -\text{Tr}[\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{R}]/2] = -\frac{\pi}{4}$$

El ángulo de rotación, respecto a $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)$ es

$$\theta = \text{ArcTan}[(\text{Tr}[\mathbf{R}] - 1)/2, -\text{Tr}[\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{R}]/2] = \frac{\pi}{4}$$

En ambos casos, corresponde a la misma rotación alrededor del eje z

El código en MATHEMATICA es

```
ClearAll[n, R, theta, K]
K[n_] := {{0, -n[[3]], n[[2]]}, {n[[3]], 0, -n[[1]]}, {-n[[2]], n[[1]], 0}};
R = {{1/Sqrt[2], -1/Sqrt[2], 0}, {1/Sqrt[2], 1/Sqrt[2], 0}, {0, 0, 1}};
n = {R[[2, 3]] - R[[3, 2]], R[[3, 1]] - R[[1, 3]], R[[1, 2]] - R[[2, 1]]};
n = Normalize@n
theta = ArcTan[(Tr[R] - 1)/2, -Tr[mK[n].R]/2]
{n, theta}
```

5. Cuaterniones

Los cuaterniones se pueden ver como una extensión de los números complejos. En $\mathbb{C}$, multiplicar por $z = \cos \theta + i \sin \theta$ con $i^2 = -1$, aplica una rotación con dirección positiva (contra-reloj) de ángulo $\theta = \text{Arg}(z)$, en el plano xy . De manera similar, un cuaternión q unitario se puede expresar como

$\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$ con $\hat{\mathbf{n}}^2 = 1$ y multiplicar por $\mathbf{q}$ aplica una rotación de ángulo θ simultáneamente en dos “planos ortogonales”¹¹. En particular, el operador de similaridad $R_{\mathbf{q}}(\mathbf{u}) = \mathbf{q}\mathbf{u}\bar{\mathbf{q}}$ aplica una rotación en dos planos ortogonales pero en un plano deja $\mathbf{u}_{\parallel}$ invariante y el otro plano rota $\mathbf{u}_{\perp}$ en un ángulo 2θ contra-reloj, y esto lo utilizamos para obtener una rotación de $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^3$ de manera compacta, eficiente y estable. También nos permite interpolar entre dos cuaterniones de igual longitud, tomando el “camino más corto” sobre una esfera, con rapidez constante y sin singularidades.

Definición 2

Sea $\mathbf{u} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ y $a \in \mathbb{R}$. Un cuaternión $\mathbf{q}$ se define como el número de la forma

$$\mathbf{q} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \text{ con } \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \text{ y } \mathbf{ijk} = -1.$$

- Es usual omitir $a\mathbf{1}$ y escribir solo a .
- Denotamos con $\mathbf{H}$ al conjunto de cuaterniones
- Se usa la notación $\mathbf{q} = [a, \mathbf{u}]$ o también $\mathbf{q} = a + \mathbf{u}$.
- $\mathbf{V}(\mathbf{q}) = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ es la “parte imaginaria” (o “parte vectorial”)
- $\mathbf{S}(\mathbf{q}) = a$ es la “parte real” (o “escalar”).
- El conjunto de “cuaterniones puramente imaginarios” (llamados “versores”) es

$$\mathbf{H}_p = \{ix + jy + kz \text{ con } x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

- La notación $\mathbf{q} = a + \mathbf{u}$ la usamos *intensamente* para cálculos algebraicos
- La notación $\mathbf{q} = [a, \mathbf{u}]$ la usamos para tareas de programación. En MATHEMATICA podemos escribir

$\mathbf{q} = \{a, \{b, c, d\}\}$ o también $\mathbf{u} = \{a, b, c\}$; $\mathbf{q} = \{a, \mathbf{u}\}$

y luego implementar los comandos para manejar la aritmética en $\mathbf{H}$. También tenemos el paquete Quaternions

```
<< Quaternions'
q = Quaternion[a, b, c, d]
```

Ejemplo 8 (Notación)

Sean $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbf{H}$ con

- $\mathbf{q} = 2 + \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
- $\mathbf{p} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

Entonces, usando la notación establecida en la definición, podemos escribir

¹¹En $\mathbb{R}^4$ muchas cosas pueden ser muy diferentes a $\mathbb{R}^3$. Π_1 y Π_2 son ortogonales si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$ para todo $\mathbf{u} \in \Pi_1, \mathbf{v} \in \Pi_2$. En $\mathbb{R}^3$ hay “planos perpendiculares” pero *no hay* planos ortogonales porque *no hay* 4 vectores mutuamente ortogonales. En $\mathbb{R}^4$ los planos tienen dos vectores perpendiculares no paralelos!. En $\mathbb{R}^3$ un vector $\hat{\mathbf{n}}$ es perpendicular a un único plano pero, en $\mathbb{R}^4$ un vector $\hat{\mathbf{n}}$ puede ser perpendicular a 3 planos no paralelos.

- $\mathbf{q} = [2, (1, -3, 2)]$ o también $\mathbf{q} = 2 + (1, -3, 2)$
- $\mathbf{p} = [0, (2, 3, 0)]$ o también $\mathbf{p} = 0 + (2, 3, 0)$ o simplemente $\mathbf{p} = (2, 3, 0)$

$\mathbf{H}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

En $\mathbf{H}$ se define una suma y una multiplicación por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ así

- $a_1 + \mathbf{u} + a_2 + \mathbf{v} = a_1 + a_2 + \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{H}$
- $\lambda(a_1 + \mathbf{u}) = \lambda a_1 + \lambda \mathbf{u} \in \mathbf{H}$

Si $\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbf{H}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tenemos

- $\mathbf{q} + (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) = (\mathbf{q} + \mathbf{q}_1) + \mathbf{q}_2$
- $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1$
- $\mathbf{q} + \mathbf{0} = \mathbf{q}$
- El inverso aditivo de $a_1 + \mathbf{u}$ es $-a_1 - \mathbf{u}$
- $\alpha \mathbf{q} = \mathbf{q} \alpha$
- $1\mathbf{q} = \mathbf{q}$ (esta es una manera de definir “la multiplicación escalar” por 1 y evitar cosas raras)
- $\alpha(\beta \mathbf{q}) = (\alpha\beta)\mathbf{q}$
- $\alpha(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) = \alpha\mathbf{q}_1 + \alpha\mathbf{q}_2$
- $(\alpha + \beta)\mathbf{q} = \alpha\mathbf{q} + \beta\mathbf{q}$

La aplicación $\psi(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = (a, b, c, d)$ es un isomorfismo natural entre $\mathbf{H}$ y $\mathbb{R}^4$, como espacios vectoriales. Dos espacios vectoriales isomorfos pueden considerarse esencialmente iguales, al menos en lo que respecta a las operaciones de suma vectorial y multiplicación escalar. En particular envían bases en bases.

En la definición de espacio vectorial no hay una definición de “igualdad”, pero naturalmente tenemos

$$a_1 + \mathbf{u} = a_2 + \mathbf{v} \iff a_1 = a_2 \text{ y } \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

$1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son simplemente símbolos, o si lo queremos ver de otra manera, $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ podría ser cualquier base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ de un espacio vectorial de dimensión 4: Lo importante es definir las reglas de la multiplicación de los elementos $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$. Con esto ya podemos usar “una tabla de multiplicar” para extender el producto a cualquier par de cuaterniones.

Más adelante vamos a ver que, como los vectores de $\mathbb{R}^3$ son elementos de $\mathbf{H}$ (cuaterniones “pura-mente imaginarios”), entonces si $\{\hat{n}, \hat{v}, \hat{w}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, tenemos que una base ortonormal de $\mathbf{H}$ es

$$\{1, \hat{n}, \hat{v}, \hat{w}\}$$

$\mathbf{H}_p$ es un subespacio de $\mathbf{H}$ y es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ como espacios vectoriales. Una base de $\mathbf{H}_p$ es $\{i, j, k\}$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. No son los mismos objetos aunque los podemos identificar vía isomorfismos.

$\mathbf{H}$ es un campo no conmutativo sobre $\mathbb{R}$.

Se define en $\mathbf{H}$ una multiplicación que, junto con la suma, le da estructura de “campo no conmutati-vo”. Es decir, con la multiplicación que vamos a definir, podemos sumar, multiplicar y dividir como en los reales o los complejos! (sin división por cero, por supuesto). Tenemos que fijarnos si la multi-plicación es por la derecha o la izquierda, por la ausencia de conmutatividad.

Para definir una multiplicación en $\mathbf{H}$ necesitamos definir la manera de multiplicar los símbolos $1, i, j$ y k : Las reglas para multiplicar son $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ y $ijk = -1$.

Multiplicando ijk por i, j y k , se obtienen las identidades

$$jk = -kj = i, ki = -ik = j \text{ e } ij = -ji = k$$

Asumiendo la propiedad muy deseable de distributividad se tiene

$$\begin{aligned}(s_1 + iu_1 + ju_2 + ku_3)(s_2 + iv_1 + jv_2 + kv_3) &= s_1s_2 + s_1(iu_1 + ju_2 + ku_3) + iu_1s_2 + ju_2s_2 \\ &\quad + ku_3s_2 + i^2u_1v_1 + iju_1v_2 + iku_1v_3 + jiu_2v_1 \\ &\quad + j^2u_2v_2 + jku_2v_3 + kiu_3v_1 + kju_3v_2 + k^2u_3v_3\end{aligned}$$

Aplicando las reglas y simplificando, se obtiene la multiplicación en términos del producto cruz y del producto escalar y ya podemos establecer la definición estándar:

Si $\mathbf{q}_1 = s_1 + \mathbf{u}$ y $\mathbf{q}_2 = s_2 + \mathbf{v}$ entonces la multiplicación $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2$ se define así:

$$\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = \underbrace{s_1s_2 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}_{\text{parte escalar}} + \underbrace{\mathbf{u} \times \mathbf{v} + s_1\mathbf{v} + s_2\mathbf{u}}_{\text{parte vectorial}} \quad (13)$$

En particular, la manera de multiplicar vectores es:

$$\mathbf{u} \mathbf{v} = (0 + \mathbf{u})(0 + \mathbf{v}) = \underbrace{-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}_{\text{parte escalar}} + \underbrace{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}_{\text{parte vectorial}} \quad (14)$$

Ejemplo 9

Sea $\mathbf{v} = (2, 0, 2)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 1)$ y $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbf{H}$ con $\mathbf{q} = 2 + 5\mathbf{v}$ y $\mathbf{p} = 3 + \mathbf{w}$.

- $\mathbf{qp} = (2 + 5\mathbf{v})(3 + \mathbf{w})$

$$= \underbrace{2 \cdot 3 - 5\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}_{\text{parte escalar}} + \underbrace{5\mathbf{v} \times \mathbf{w} + 2\mathbf{w} + 3 \cdot 5\mathbf{v}}_{\text{parte vectorial}}$$

$$= -4 + (20, -8, 42)$$
- $\mathbf{s}(\mathbf{qp}) = -4$
- $\mathbf{v}(\mathbf{qp}) = (20, -8, 42)$

Los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son cuaterniones “puramente imaginarios” y por supuesto se pueden multiplicar,

- $\mathbf{vw} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} = -2 + (-2, -2, 2)$
- $\mathbf{wv} = -2 + (2, 2, -2)$. Observe: Solo cambia el signo de la parte vectorial.

- En general $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 \neq \mathbf{q}_2\mathbf{q}_1$ pues $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2\mathbf{q}_1 - 2\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
- $\mathbf{s}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2) = \mathbf{s}(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_1)$
- $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2\mathbf{q}_1$ si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, es decir, si $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$
- $\lambda\mathbf{q} = \mathbf{q}\lambda$, es decir, $\mathbf{q}$ conmuta con los cuaterniones $\lambda \in \mathbb{R}$
- Sean $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbf{H}_p$ entonces $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 \in \mathbf{H}_p$ solo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ (perpendiculares) pues en ese caso $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = 0 + \mathbf{u} \times \mathbf{v} \in \mathbf{H}_p$.
- Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_p$ son perpendiculares, entonces $\mathbf{uv} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$\mathbf{H}$, con la suma y esta multiplicación, es un campo *no conmutativo* sobre $\mathbb{R}$, es decir, podemos verificar que se cumplen los axiomas de campo, excepto la conmutatividad para la multiplicación. No vamos a verificar que efectivamente $\mathbf{H}$ con esta multiplicación, es un “campo no conmutativo”, como usamos cuádruples para representar los cuaterniones, hacer todas esas pruebas es muy laborioso, pero si vamos a verificar algunas cosas que vamos a usar más adelante.

- $\mathbf{H}$ es un grupo conmutativo respecto a la suma
- $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 \in \mathbf{H}$ para todo $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbf{H}$
- El elemento neutro para la multiplicación es $\mathbf{1}$ pues $\mathbf{1q} = \mathbf{q1} = \mathbf{q}$. Si $\mathbf{q} = s + \mathbf{v}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{1q} &= (1 + \mathbf{0})(s + \mathbf{v}) \\ &= \underbrace{1 \cdot s - \mathbf{0} \cdot \mathbf{v}}_{\text{parte escalar}} + \underbrace{\mathbf{0} \times \mathbf{v} + 1\mathbf{v} + s\mathbf{0}}_{\text{parte vectorial}} \\ &= s + \mathbf{v} \end{aligned}$$

- Inversos. Para hablar del inverso de $\mathbf{q}$ necesitamos primero definir el conjugado de $\mathbf{q}$.

El conjugado de $\mathbf{q} = s + \mathbf{v}$ se define como $\bar{\mathbf{q}} = s - \mathbf{v}$. Entonces $\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}$ es un “escalar” y conmuta.

En efecto,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} &= (s + \mathbf{v})(s - \mathbf{v}) \\
 &= \underbrace{s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}_{\text{parte escalar}} + \underbrace{-\mathbf{v} \times \mathbf{v} + s\mathbf{v} - s\mathbf{v}}_{\text{parte vectorial}} \\
 &= s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\
 &= \bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}
 \end{aligned}$$

Si $\mathbf{q} \neq 0$, el inverso multiplicativo de $\mathbf{q}$ es $\mathbf{q}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}} \bar{\mathbf{q}}$. Es usual escribir $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}}$.

Verificación:

$$\mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q} \frac{1}{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}} \bar{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}} = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{q} = 1, \text{ es decir, } \mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{q} = 1$$

Ejemplo 10

Si $\mathbf{q} = 2 + (1, 0, 1)$ entonces $\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = 6$ y

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{1}{6} (2 - (1, 0, 1)) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} (1, 0, 1)$$

- La multiplicación es asociativa y distributiva respecto a la suma. La demostración con esta representación es algo extensa.

- $\mathbf{q}_1(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3) = (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)\mathbf{q}_3$
- $\mathbf{q}_1(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1\mathbf{q}_3$ y $(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3)\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3\mathbf{q}_1$

Ejemplo 11

Sea $\mathbf{v} = (2, 0, 2)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 1)$ y $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbf{H}$ con $\mathbf{q} = 2 + 5\mathbf{v}$ y $\mathbf{p} = 3 + \mathbf{w}$. Entonces podemos multiplicar usando distributividad,

- $\begin{aligned} \mathbf{w}\mathbf{q} &= \mathbf{w}(2 + 5\mathbf{v}) = 2\mathbf{w} + 5\mathbf{w}\mathbf{v} \\ &= (0, 2, 2) + 5(-2 + (2, 2, -2)) \\ &= -10 + (10, 12, -8) \end{aligned}$
- $\begin{aligned} \mathbf{q}\mathbf{p} &= (2 + 5\mathbf{v})(3 + \mathbf{w}) = 6 + 2\mathbf{w} + 15\mathbf{v} + 5\mathbf{v}\mathbf{w} \\ &= -4 + (20, -8, 42) \end{aligned}$

Norma, ángulos, perpendicularidad.

Como antes, sean $\mathbf{q}_1 = s_1 + \mathbf{u}$ y $\mathbf{q}_2 = s_2 + \mathbf{v}$.

- Conjugado: Recordemos que si $\mathbf{q} = s_1 + \mathbf{u}$ entonces $\overline{\mathbf{q}}_1 = s_1 - \mathbf{u}$.
 - $\overline{\overline{\mathbf{q}}_1} = \mathbf{q}_1$
 - $\overline{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2} = \overline{\mathbf{q}_2} \overline{\mathbf{q}_1}$ (invierte el orden)
 - $\overline{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2} = \overline{\mathbf{q}_1} + \overline{\mathbf{q}_2}$
- Norma: Una norma en $\mathbf{H}$ se puede inducir con el producto interior usual.
 - $\mathbf{q} \overline{\mathbf{q}} = s_1^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$. Formalmente $\mathbf{q} \overline{\mathbf{q}} = s_1^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{0}$
 - $|\mathbf{q}_1| = \sqrt{\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}}_1} = \sqrt{s_1^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$
 - $\mathbf{q}$ es unitario si $|\mathbf{q}| = 1$.
 - $\hat{\mathbf{n}}$ es un cuaternión unitario pues $|\hat{\mathbf{n}}| = \sqrt{0^2 + \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}} = 1$
 - $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$ es unitario pues $|\mathbf{q}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \sin^2 \theta} = 1$
 - Normalizar $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ consiste en dividirlo por su norma $\frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$ (unitario).
 - $|\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2| = |\mathbf{q}_1| |\mathbf{q}_2|$

Verificación: $|\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2|^2 = \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \overline{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2} = \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \overline{\mathbf{q}_2} \overline{\mathbf{q}_1} = \mathbf{q}_1 |\mathbf{q}_2|^2 \overline{\mathbf{q}_1} = |\mathbf{q}_1|^2 |\mathbf{q}_2|^2$

Esta propiedad nos dice que si $\mathbf{q}$ es unitario, entonces multiplicar por $\mathbf{q}$ conserva la longitud (que es algo necesario para las rotaciones)

- $|\mathbf{q} \mathbf{p}| = |\mathbf{p}|$
- $|\mathbf{q} \mathbf{p} \overline{\mathbf{q}}| = |\mathbf{p}|$ pues $|\mathbf{q}| = |\overline{\mathbf{q}}|$

Como la norma es esencialmente una suma de cuadrados, esta propiedad nos dice que “la multiplicación de dos números que se pueden expresar como una suma de cuatro cuadrados, es una suma¹² de cuatro cuadrados”. Si n es el número de cuadrados, esta propiedad, según el teorema de Hurwitz, solo funciona para $n = 1, 2, 4$ y 8 , [15].

Por ejemplo, usando MATHEMATICA,

```
Needs["Quaternions`"]
normQ[q_] := q[[1]]^2 + q[[2]]^2 + q[[3]]^2 + q[[4]]^2;
```

¹²Formalmente, no es cualquier suma, si los sumandos son de la forma x_i^2 y y_j^2 , el resultado queda como cuadrados de combinaciones lineales de sumandos de la forma $x_i y_j$

```

q1 = Quaternion[a, b, c, d]; q2 = Quaternion[p, q, r, s];
{normQ[q1] normQ[q2] // Factor, "=", normQ[q1 ** q2]}
(*Out[ ]*)
(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)
= (as + br - cq + dp)^2 + (aq + bp + cs - dr)^2 + (ar - bs + cp + dq)^2 + (ap - bq - cr - ds)^2
q1 = Quaternion[0, b, c, d]; q2 = Quaternion[0, q, r, s];
{normQ[q1] normQ[q2] // Factor, "=", normQ[q1 ** q2]}
(*Out[ ]*)
(b^2 + c^2 + d^2)(q^2 + r^2 + s^2) = (-bq - cr - ds)^2 + (br - cq)^2 + (dq - bs)^2 + (cs - dr)^2

```

- Si $\mathbf{q}$ es unitario y “puramente imaginario” entonces $\mathbf{q}^2 = -1$

Verificación: $\mathbf{q} = 0 + \hat{\mathbf{u}}$ y aplicando (14),

$$\mathbf{q}^2 = \mathbf{q}\mathbf{q} = -\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{u}} = -1$$

En particular si $\hat{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}^3$, entonces como cuaternión, $\hat{\mathbf{n}}^2 = -1$.

- Si $\mathbf{q}$ es unitario, entonces $\mathbf{q}_1^{-1} = \overline{\mathbf{q}_1}$

Ejemplo 12

Sean $\hat{\mathbf{n}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\mathbf{q} = \cos \pi/3 + \hat{\mathbf{n}} \sin \pi/3$

- $|\hat{\mathbf{n}}| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1$
- $\hat{\mathbf{n}}^2 = -1$ pues $\hat{\mathbf{n}}^2 = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} = -1$
- $|1 + \hat{\mathbf{n}}| = \sqrt{1^2 + \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}} = \sqrt{2}$
- $\mathbf{q}\hat{\mathbf{n}} = (\cos \pi/3 + \hat{\mathbf{n}} \sin \pi/3)\hat{\mathbf{n}} = \cos \pi/3 \hat{\mathbf{n}} - \sin \pi/3$ pues $\hat{\mathbf{n}}^2 = -1$
- $|\mathbf{q}| = \sqrt{\cos^2 \pi/3 + \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \sin^2 \pi/3} = 1$
- $|\hat{\mathbf{n}}\mathbf{q}| = |\hat{\mathbf{n}}||\mathbf{q}| = 1$
- Como $\mathbf{q}$ es unitario, $\mathbf{q}^{-1} = \overline{\mathbf{q}} = \cos \pi/3 - \hat{\mathbf{n}} \sin \pi/3$

En el siguiente ejemplo vamos a hacer algunos cálculos algebraicos que vamos a usar más adelante.

Ejemplo 13 (Cálculos algebraicos)

Sea $\mathbf{q} = c + s\hat{\mathbf{n}}$ unitario. Vamos a operar algebraicamente con $\hat{\mathbf{n}}$, $\mathbf{q}$ y un vector $\mathbf{w}$.

Tenemos que

- $\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_p$
- $\mathbf{q}\hat{\mathbf{n}}$ es unitario y $\mathbf{q}\hat{\mathbf{n}} = c\hat{\mathbf{n}} - s$
- $\hat{\mathbf{n}}\mathbf{w} - \mathbf{w}\hat{\mathbf{n}} = 2\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w}$

Verificación:

a) $\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{w}$ son vectores, entonces están en $\mathbf{H}_p$ como cuaterniones.

b) $\mathbf{q}\hat{\mathbf{n}}$ es unitario pues $|\mathbf{q}\hat{\mathbf{n}}| = |\mathbf{q}||\hat{\mathbf{n}}| = 1 \cdot 1 = 1$. Ahora

$$\begin{aligned}\mathbf{q}\hat{\mathbf{n}} &= (c + s\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \\ &= c\hat{\mathbf{n}} + s\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \\ &= c\hat{\mathbf{n}} - s \text{ pues } \hat{\mathbf{n}}^2 = -1\end{aligned}$$

c) Aplicando (14) y el hecho de que $-\mathbf{w} \times \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w}$,

$$\hat{\mathbf{n}}\mathbf{w} - \mathbf{w}\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{w} + \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w} - (-\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \hat{\mathbf{n}}) = 2\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w}$$

Recordemos que si $\mathbf{q} = s + \mathbf{n}$ entonces la parte escalar es $\mathbf{S}(\mathbf{q}) = s$ y la parte vectorial es $\mathbf{V}(\mathbf{q}) = \mathbf{n}$ y que, en particular, $\mathbf{S}(\mathbf{n}) = 0$.

- Producto interior: $\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = \mathbf{S}(\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}_2})$, es decir, $\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2$ es la parte escalar de $\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}_2}$. En particular

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}_2}) = \mathbf{S}(\underbrace{s_1 s_2 - \mathbf{u} \cdot (-\mathbf{v})}_{\text{parte escalar}} + \mathbf{u} \times (-\mathbf{v}) - s_1 \mathbf{v} + s_2 \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + s_1 s_2$$

Podemos probar formalmente que $\mathbf{S} : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ cumple las propiedades que caracterizan a un producto interior.

- Ángulo entre dos cuaterniones: Supongamos que $|\mathbf{q}_1||\mathbf{q}_2| \neq 0$. Entonces $\theta = \angle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ se define usando la fórmula

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{S}(\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}_2})}{|\mathbf{q}_1||\mathbf{q}_2|}$$

Observe que efectivamente, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $\frac{\mathbf{S}(\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}_2})}{|\mathbf{q}_1||\mathbf{q}_2|} \in [-1, 1]$ y que $\frac{\mathbf{S}(\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}_2})}{|\mathbf{q}_1||\mathbf{q}_2|} = \frac{\mathbf{S}(\mathbf{q}_2 \overline{\mathbf{q}_1})}{|\mathbf{q}_2||\mathbf{q}_1|}$

Ejemplo 14

Si $\mathbf{q}_1 = 0 + (0, 1, 0)$ y $\mathbf{q}_2 = 0 + (0, 1, -1)$, entonces

$$\frac{\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}_2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por tanto, $\theta = \arccos(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$.

- Perpendicularidad y paralelismo:

- Decimos que $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ son perpendiculares si $\mathbf{S}(\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}_2}) = 0$

- Decimos que $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ son paralelos si $\mathbf{v}(\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}_2}) = \mathbf{0}$.

- $\mathbf{s}(\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}_2}) = 0$ es equivalente a que $\Delta \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 = \frac{\pi}{2}$

- Un resultado útil más adelante es: Si $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$ son perpendiculares, entonces

$$\mathbf{s}(\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}_2}) = \mathbf{s}(-\mathbf{q}_2 \overline{\mathbf{q}_1}) = 0 \quad (15)$$

$$\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}_2} = -\mathbf{q}_2 \overline{\mathbf{q}_1} \quad (16)$$

Verificación: Como $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$ son perpendiculares, la parte escalar de $\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}_2}$ y de $\mathbf{q}_2 \overline{\mathbf{q}_1}$ es nula, entonces

$$\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}_2} = \mathbf{u} \times (-\mathbf{v}) - s_1 \mathbf{v} + s_2 \mathbf{u} = -\mathbf{q}_2 \overline{\mathbf{q}_1}$$

- Si $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ son paralelos, $\mathbf{q}_1 = \lambda \mathbf{q}_2$ y viceversa. En particular $\Delta \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 = 0$ o π . Si $\mathbf{v}(\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}_2}) = \mathbf{0}$ entonces

$$-\mathbf{u} \times \mathbf{v} - s_1 \mathbf{v} + s_2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ y por tanto } \mathbf{u} \times \mathbf{v} = -s_1 \mathbf{v} + s_2 \mathbf{u}$$

Entonces

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (-s_1 \mathbf{v} + s_2 \mathbf{u}) = 0, \text{ es decir, } \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Por lo tanto $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ y, como $-s_1 \mathbf{v} + s_2 \mathbf{u} = \mathbf{0}$, también $s_1 = \lambda s_2$.

Ejemplo 15

- $\mathbf{q}_1 = 1 + (0, 1, 1)$ y $\mathbf{q}_2 = (0, 1, -1)$ son perpendiculares pues

$$\frac{\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}_2}}{\sqrt{2}} = 0 + \left(\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \in \mathbf{H}_p$$

$$\text{Es decir, } \mathbf{s}\left(\frac{\mathbf{q}_1 \overline{\mathbf{q}_2}}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

- Si $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ son perpendiculares, entonces $\mathbf{u} \perp \mathbf{u} \mathbf{w}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \overline{\mathbf{u} \mathbf{w}} &= \mathbf{u} (-\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{u} \times \mathbf{w}) \\ &= -\mathbf{u} \times \mathbf{u} \times \mathbf{w} \text{ pues } \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Es decir, } \mathbf{u} \overline{\mathbf{u} \mathbf{w}} \in \mathbf{H}_p \text{ por lo que } \mathbf{s}(\mathbf{u} \overline{\mathbf{u} \mathbf{w}}) = 0$$

- Sea $\mathbf{q} \in \mathbf{H}_p$ no nulo. Entonces $\mathbf{1} \perp \mathbf{q}$.

Verificación: Como $\mathbf{q} \in \mathbf{H}_p$ entonces $\mathbf{s}(\mathbf{q}) = 0$. Ahora

$$\mathbf{s}(\mathbf{1} \overline{\mathbf{q}}) = \mathbf{s}(\overline{\mathbf{q}}) = \mathbf{s}(\mathbf{q}) = 0$$

- Similar a lo que ocurre en los números complejos, a un cuaternión unitario $\mathbf{q} = a + \mathbf{n}$ le asociamos

un ángulo $\theta \in [0, \pi]$ de la siguiente manera: Sea $\mathbf{n} = (b, c, d)$, entonces

$$\mathbf{q} \text{ unitario: } \underbrace{b^2 + c^2 + d^2}_{\sin^2 \theta} + \underbrace{a^2}_{\cos^2 \theta} = 1 \implies \begin{cases} \sin \theta = +\sqrt{b^2 + c^2 + d^2} = |\mathbf{n}| \\ \cos \theta = a \end{cases}$$

Como $\cos \theta = \frac{\mathbf{s}(\mathbf{q}\bar{\mathbf{1}})}{|\mathbf{q}||\mathbf{1}|} = a$, entonces el ángulo asociado es $\theta = \Delta \mathbf{q}, \mathbf{1}$

En MATHEMATICA la función `ArcCos[t]` devuelve ángulos en $[0, \pi]$

- Si $\mathbf{q} = a + \mathbf{n}$ es unitario y $\theta = \Delta \mathbf{q}, \mathbf{1}$, entonces $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$. También para cualquier ángulo θ , $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$ es unitario. Si $\mathbf{q}$ es unitario, vive en el plano $\Pi : t\mathbf{1} + s\hat{\mathbf{n}}$ como se ve en la Figura 25 (si $\theta = \pi/2$, $\mathbf{q}$ también puede vivir en otro plano).

Verificación:

- Si $\mathbf{q} = a + \mathbf{n}$ es unitario con $|\mathbf{n}| \neq 0$, entonces tomamos $\theta = \Delta \mathbf{q}, \mathbf{1}$:

$$\begin{cases} \sin \theta = |\mathbf{n}| \\ \cos \theta = a \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{q} = \cos \theta + \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} |\mathbf{n}| \\ = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta \end{cases}$$

- Si $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$ entonces

$$|\mathbf{q}|^2 = \cos^2 \theta + \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \sin^2 \theta = 1$$

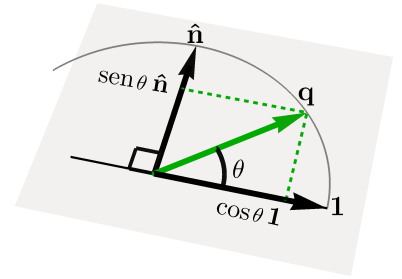


Figura 25: Idea $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$

Fuente: Elaboración propia

Aunque θ puede ser cualquier ángulo, $\arccos(\cos \theta) \in [0, \pi]$, es decir, el ángulo asociado a $\mathbf{q}$ sigue estando en $[0, \pi]$.

6. Rotaciones y cuaterniones.

En esta sección vamos a establecer que si $\mathbf{q} = \cos \theta/2 + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta/2$, entonces podemos aplicar una rotación positiva a $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, de ángulo θ , con la fórmula

$$\mathbf{q} \mathbf{u} \bar{\mathbf{q}}$$

La idea general de esta fórmula, como vamos a ver, es que $\mathbf{q} \mathbf{u}_{\parallel} \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{u}_{\parallel}$ y $\mathbf{q} \mathbf{u}_{\perp} \bar{\mathbf{q}}$ rota $\mathbf{u}_{\perp}$ alrededor de $\hat{\mathbf{n}}$, o lo que es lo mismo, en un plano perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}$.

Recordemos que en la Definición 1 establecimos que una matriz $\mathbf{R}_{n \times n}$ representa una rotación si y solo si

$$\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I} \text{ y } \text{Det } \mathbf{R} = 1$$

- Multiplicar por un cuaternión unitario $\mathbf{q} = \cos \theta/2 + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta/2$ aplica una rotación de ángulo θ . Las

transformaciones

$$\mathbf{L}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{q}\mathbf{p} \quad (\text{Multiplicar } \mathbf{q} \text{ por la izquierda})$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\mathbf{q} \quad (\text{Multiplicar } \mathbf{q} \text{ por la derecha})$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{q}\mathbf{p}\bar{\mathbf{q}} \quad (\text{"conjugación" o "emparejar" con } \mathbf{q} \text{ y } \bar{\mathbf{q}})$$

son transformaciones lineales y tienen asociada una matriz ortonormal con determinante 1. Esto nos dice que multiplicar por $\mathbf{q}$, por la izquierda, por la derecha o "emparejar" con $\mathbf{q}$ y $\bar{\mathbf{q}}$, aplica una rotación.

Verificación. Hay varias maneras de probar estas cosas. Primero lo haremos probando que la matriz asociada a cada transformación es ortonormal con determinante 1. Pero luego es más revelador operar con rotación de ejes en un plano.

- $\mathbf{L}_{\mathbf{q}}$ es lineal. Aplicando las propiedades de la multiplicación tenemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}_1 + \lambda\mathbf{p}_2) &= \mathbf{q}(\mathbf{p}_1 + \lambda\mathbf{p}_2) \\ &= \mathbf{q}\mathbf{p}_1 + \lambda\mathbf{q}\mathbf{p}_2 \\ &= \mathbf{L}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}_1) + \lambda\mathbf{L}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}_2) \end{aligned}$$

Por simplicidad, sea $\mathbf{q} = a + (b, c, d)$ con $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. El cálculo de la matriz asociada $\mathbf{M}_{\mathbf{L}}$ se hace de manera estándar.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathbf{q}}(\mathbf{1}) &= \mathbf{q}\mathbf{1} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \\ \mathbf{L}_{\mathbf{q}}(\mathbf{i}) &= \mathbf{q}\mathbf{i} = -b + a\mathbf{i} + d\mathbf{j} - c\mathbf{k} \\ \mathbf{L}_{\mathbf{q}}(\mathbf{j}) &= \mathbf{q}\mathbf{j} = -c - d\mathbf{i} + a\mathbf{j} + b\mathbf{k} \\ \mathbf{L}_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) &= \mathbf{q}\mathbf{k} = -d + c\mathbf{i} - b\mathbf{j} + a\mathbf{k} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}_{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

Como $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ se ve de inmediato que la matriz tiene columnas unitarias.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathbf{L}}\mathbf{M}_{\mathbf{L}}^T &= \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Det} \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} &= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 \\ &\quad + c^4 + 2a^2d^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 + d^4 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 1 \end{aligned}$$

El cálculo del determinante es un cálculo simbólico, el álgebra la podemos hacer con MATHEMATICA usando el paquete "Quaternions"

```
Needs["Quaternions"]
q = Quaternion[a, b, c, d];
(*Lq(p)*)
Lq[p_] := q ** p;
Fq[q_] := {q[[1]], q[[2]], q[[3]], q[[4]]};
(*Matriz asociada*)
mL = Transpose@{Fq@Lq[Quaternion[1, 0, 0, 0]],
  Fq@Lq[Quaternion[0, 1, 0, 0]], Fq@Lq[Quaternion[0, 0, 1, 0]],
  Fq@Lq[Quaternion[0, 0, 0, 1]]};
mLT = Transpose[mL];
mL // MatrixForm
(*mL y mL^T: Simplificamos y aplicamos la regla a^2+b^2+c^2+d^2=1*)
FullSimplify[mL.mLT] /. {a^2 + b^2 + c^2 + d^2 -> 1}
Factor[Det[mL]]
FullSimplify[Det[mL]] /. {a^2 + b^2 + c^2 + d^2 -> 1}
```

- Podemos rápidamente verificar que R_q y a C_q son transformaciones lineales y, aplicando el código anterior, podemos calcular cada matriz asociada y verificar que es ortonormal y de determinante 1.

Por ejemplo, para el caso C_q el código sería

```
Needs["Quaternions"]
q=Quaternion[a,b,c,d];cq=Quaternion[a,-b,-c,-d];
(*Cq(p)=q p cq*)
Cq[p_]:=q**p**cq;
Fq[q_]:=q[[1]],q[[2]],q[[3]],q[[4]]};
(*Matriz asociada*)
mC=Transpose@{Fq@Cq[Quaternion[1,0,0,0]],Fq@Cq[Quaternion[0,1,0,0]],Fq@Cq[
  Quaternion[0,0,1,0]],Fq@Cq[Quaternion[0,0,0,1]]};
mCT=Transpose[mC];
mC//MatrixForm
(*mC y mC^T: Simplificamos y aplicamos la regla a^2+b^2+c^2+d^2=1*)
FullSimplify[mC.mCT] /. {a^2+b^2+c^2+d^2->1};
Factor[Det[mC]];
FullSimplify[Det[mC]] /. {a^2+b^2+c^2+d^2->1}
```

La salida es

- $M_C = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2bc - 2ad & 2ac + 2bd \\ 0 & 2bc + 2ad & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2cd - 2ab \\ 0 & 2bd - 2ac & 2ab + 2cd & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{bmatrix}$
- $M_C M_C^T = I$
- $\text{Det } M_C = 1$.

Ejemplo 16 (Usando la matriz asociada y rotación de ejes).

Sea $\hat{n} = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{n} \sin \theta$. Entonces la matriz asociada respecto a la base canónica, es

$$M_L = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Como elegimos la base canónica $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ para $\mathbf{H}$, y $\mathbf{p} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, tenemos que

$$M_L[a, b, c, d]^T = (a \cos \theta - b \sin \theta, a \sin \theta + b \cos \theta, c \cos \theta - d \sin \theta, c \sin \theta + d \cos \theta)$$

Estas son las coordenadas de $\mathbf{qp}$ en la base $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Es decir, lo vemos como si los ejes quedaran fijos y el que rota es $\mathbf{p}$ (rotación activa). Pero claramente se ve que es una "rotación activa" en dos planos.

$$\Pi : t\mathbf{1} + s\hat{n} \quad \text{y} \quad \Pi^\perp : t\mathbf{j} + s\mathbf{k}$$

Ahora vamos a ver la rotación como una rotación de ejes en estos planos y $\mathbf{p}$ rotando con los ejes.¹³

Observe que $\hat{n} = \mathbf{i}$ en este caso, además, $\hat{n}^2 = -1$, $\hat{n}\mathbf{j} = \mathbf{k}$ y $\hat{n}\mathbf{k} = -\mathbf{j}$. Entonces

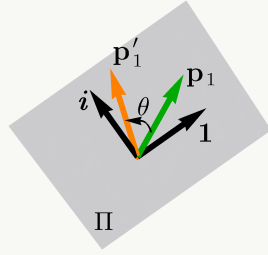
$$\begin{cases} \mathbf{1}' = \mathbf{q}\mathbf{1} = \cos \theta \mathbf{1} + \hat{n} \sin \theta \\ \hat{n}' = \mathbf{q}\hat{n} = \cos \theta \hat{n} - \sin \theta \mathbf{1} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \mathbf{j}' = \mathbf{q}\mathbf{j} = \cos \theta \mathbf{j} + \mathbf{k} \sin \theta \\ \mathbf{k}' = \mathbf{q}\mathbf{k} = \cos \theta \mathbf{k} - \sin \theta \mathbf{j} \end{cases}$$

Es decir, $\{\mathbf{1}', \hat{n}'\}$ es una rotación positiva de los ejes $\{\mathbf{1}, \hat{n}\}$ en el plano $\Pi : t\mathbf{1} + s\hat{n}$ y $\{\mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ es una rotación positiva de los ejes $\{\mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ en el plano $\Pi^\perp : t\mathbf{j} + s\mathbf{k}$. Además, como $\{\mathbf{1}', \hat{n}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ es un conjunto ortonormal, $\mathbf{p}$ rota con los ejes.

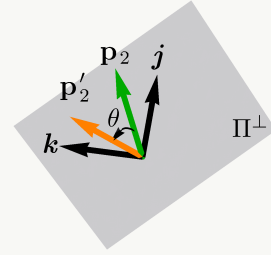
$$\mathbf{p} = \underbrace{a\mathbf{1} + b\mathbf{i}}_{\in \Pi} + \underbrace{c\mathbf{j} + d\mathbf{k}}_{\in \Pi^\perp} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{qp} &= \mathbf{q}(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = a\mathbf{q}\mathbf{1} + b\mathbf{q}\mathbf{i} + c\mathbf{q}\mathbf{j} + d\mathbf{q}\mathbf{k} \\ &= a\mathbf{1}' + b\hat{n}' + c\mathbf{j}' + d\mathbf{k}' \end{aligned}$$

Una idea intuitiva (pues son objetos en cuatro dimensiones) se puede ver en las Figuras 26 y 27

**Figura 26:** Idea intuitiva qp_1

Fuente: Elaboración propia

**Figura 27:** Idea intuitiva qp_2

Fuente: Elaboración propia

- Las transformaciones L_q , R_q y C_q aplican una rotación en dos planos ortogonales Π y $\Pi^\perp$ de manera simultánea. La representación de los planos y la representación de $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ dependen de la base ortonormal que escojamos para $\mathbf{H}$.

Para aplicar rotaciones en $\mathbb{R}^3$ con C_q , debemos elegir una base adecuada para $\mathbf{H}$.

Sea $\mathcal{B} = \{\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{n}}\}$ es una base positivamente orientada. Como ya vimos, $\mathbf{1}$ es unitario y perpendicular a cada uno de los vectores de la base $\mathcal{B}$. Una base¹⁴ ortonormal de $\mathbf{H}$ es

$$\{\mathbf{1}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{n}}\} \text{ o también } \{\mathbf{1}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{w}}\}$$

Como $\mathcal{B}$ es positivamente orientada, entonces $\hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{n}}$ y además $\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{w}}$ y $\hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{v}}$ y, como son vectores perpendiculares, en $\mathbf{H}$ tendríamos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{w}} &= \hat{\mathbf{n}} \\ \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{v}} &= \hat{\mathbf{w}} \\ \hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{n}} &= \hat{\mathbf{v}} \end{aligned} \tag{17}$$

Entonces tenemos dos planos ortogonales,

$$\Pi : t\mathbf{1} + s\hat{\mathbf{n}} \text{ y su complemento ortogonal } \Pi^\perp : t\hat{\mathbf{v}} + s\hat{\mathbf{w}}$$

$$\text{Si } \mathbf{p} \in \mathbf{H}, \text{ entonces } \mathbf{p} = \underbrace{\mathbf{1} + s_0\hat{\mathbf{n}}}_{\in \Pi} + \underbrace{\hat{\mathbf{v}} + s_1\hat{\mathbf{w}}}_{\in \Pi^\perp}$$

Ahora queda ver la acción de las transformaciones sobre cualquier cuaternión $\mathbf{p}$ con esta representación. Para esto usamos la misma idea algebraica del Ejemplo 16.

¹³Nos referimos a una rotación en un plano, alrededor del origen.

¹⁴Observe que $a\mathbf{1} + b\hat{\mathbf{v}} + c\hat{\mathbf{w}} + d\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$ si y solo si $a = b = c = d = 0$. Esto es así pues como $\hat{\mathbf{v}}^2 = \hat{\mathbf{w}}^2 = (\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{w}})^2 = -1$, si $a\mathbf{1} + b\hat{\mathbf{v}} + c\hat{\mathbf{w}} + d\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$ tenemos $(a\mathbf{1} + b\hat{\mathbf{v}} + c\hat{\mathbf{w}} + d\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{w}})(a\mathbf{1} - b\hat{\mathbf{v}} - c\hat{\mathbf{w}} - d\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{w}}) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$ entonces $a = b = c = d = 0$.

Sean $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$ cuaterniones unitarios y perpendiculares y sea $\mathbf{p} = t_0\mathbf{q}_1 + s_0\mathbf{q}_2$. Consideramos el plano $\Pi : t\mathbf{q}_1 + s\mathbf{q}_2$ y los cuaterniones

$$\begin{cases} \mathbf{q}'_1 = \cos \theta \mathbf{q}_1 + \sin \theta \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}'_2 = -\sin \theta \mathbf{q}_1 + \cos \theta \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{p}' = t_0\mathbf{q}_1 + s_0\mathbf{q}_2 \end{cases}$$

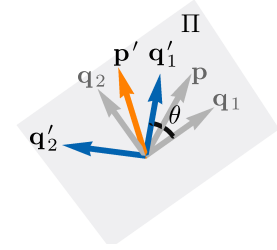


Figura 28: Idea intuitiva

Fuente: Elaboración propia

Entonces $\mathbf{q}'_1$ y $\mathbf{q}'_2$ constituyen una rotación positiva, de ángulo θ , de los ejes $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ del plano Π y $\mathbf{p}$ rota con los ejes y se transforma en $\mathbf{p}'$ como se ve intuitivamente en la Figura 28.

Claro, como nos interesan rotaciones en $\mathbb{R}^3$, en vez de tomar cuaterniones $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ arbitrarios, tomamos elementos de la base $\{1, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{w}}\}$ que hemos visto anteriormente.

- Sea $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$. Vamos a ver como opera la transformación

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}}(\mathbf{u}) = \mathbf{q}\mathbf{u}\bar{\mathbf{q}}$$

Para esto, analizamos las transformaciones $\mathbf{L}_{\mathbf{q}}$ y $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{q}}}$, es decir, la acción de multiplicar $\mathbf{q}$ y $\bar{\mathbf{q}}$ por los ejes de cada plano: Esto nos revela la dirección de rotación de los ejes. Los elementos de cada plano rotan con los ejes en el mismo plano.

Sea $\mathbf{p} \in \mathbf{H}$. Como $\mathbf{p} = t_0\mathbf{1} + s_0\hat{\mathbf{n}} + t_1\hat{\mathbf{v}} + s_1\hat{\mathbf{w}}$ entonces $\mathbf{p}$ se puede descomponer como $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ con $\mathbf{p}_1 \in \Pi$ y $\mathbf{p}_2 \in \Pi^\perp$ donde

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= t_0\mathbf{1} + s_0\hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{p}_2 &= t_1\hat{\mathbf{v}} + s_1\hat{\mathbf{w}}. \end{aligned}$$

- **Rotaciones en Π .** $\mathbf{q}\mathbf{p}_1$ rota $\mathbf{p}_1$ en el plano Π con ángulo θ , en *dirección positiva*. Mientras que $\mathbf{p}_1\bar{\mathbf{q}}$ rota $\mathbf{p}_1$ en el plano Π , con ángulo θ , en *dirección negativa* como se ve intuitivamente en las Figuras 29 y 30. En efecto, multiplicando y usando (17) tenemos

$$\begin{cases} \mathbf{q}\mathbf{1} = \cos \theta \mathbf{1} + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta \in \Pi \\ \mathbf{q}\hat{\mathbf{n}} = (\cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta)\hat{\mathbf{n}} \\ = -\sin \theta + \hat{\mathbf{n}} \cos \theta \in \Pi \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \mathbf{1}\bar{\mathbf{q}} = -\hat{\mathbf{n}} \sin \theta + \cos \theta \mathbf{1} \in \Pi \\ \hat{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{n}}(\cos \theta - \hat{\mathbf{n}} \sin \theta) \\ = \hat{\mathbf{n}} \cos \theta + \sin \theta \in \Pi \end{cases}$$

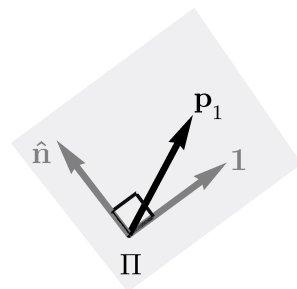


Figura 29: Idea intuitiva: $\mathbf{p}_1 = t_0\mathbf{1} + s_0\hat{\mathbf{n}}$

Fuente: Elaboración propia

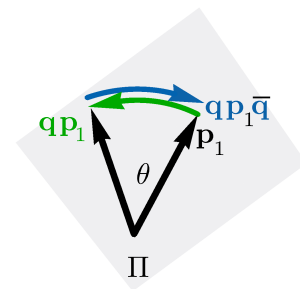


Figura 30: Idea intuitiva: $\mathbf{q}\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{q}\mathbf{p}_1\bar{\mathbf{q}}$

Fuente: Elaboración propia

Ahora $\mathbf{q}\mathbf{p}_1 = t_0\mathbf{q}\mathbf{1} + s_0\mathbf{q}\hat{\mathbf{n}}$ es una rotación positiva de $\mathbf{p}_1$, de ángulo θ en el plano Π y como está en el plano Π , entonces $(\mathbf{q}\mathbf{p}_1)\bar{\mathbf{q}}$ aplica una rotación negativa de ángulo θ en el plano Π y devuelve $\mathbf{q}\mathbf{p}_1$ a su posición original $\mathbf{p}_1$, como se ve intuitivamente en la Figura 31.

En el caso de $\mathbf{u} = \underbrace{\mathbf{n}_{\parallel}}_{\in \Pi} + \mathbf{u}_{\perp}$ tenemos

$$\mathbf{q}\mathbf{u}_{\parallel}\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{u}_{\parallel}$$

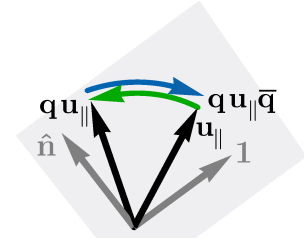


Figura 31: Idea intuitiva: $\mathbf{q}\mathbf{u}_{\parallel}\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{u}_{\parallel}$

Fuente: Elaboración propia

En particular, como $\mathbf{q} = \cos \theta \mathbf{1} + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$, entonces $\mathbf{q}$ está en el plano Π y, como se ve intuitivamente en las Figuras 32, 33 y 34, entonces

- $\mathbf{q}\mathbf{q} = \mathbf{1} \cos 2\theta + \hat{\mathbf{n}} \sin 2\theta$
- Si $\theta = \pi/2$ y $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{n}}$ y entonces $\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{1}$
- $\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{1}$

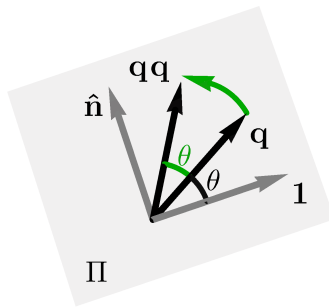


Figura 32: Idea intuitiva: $\mathbf{q}\mathbf{q}$

Fuente: Elaboración propia

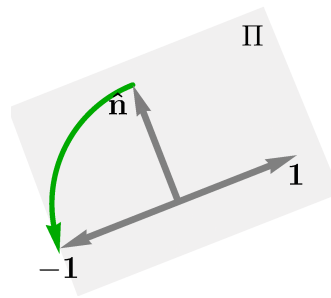


Figura 33: Idea intuitiva: $\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{1}$

Fuente: Elaboración propia

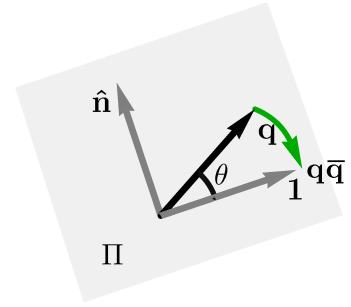


Figura 34: Idea intuitiva: $\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{1}$

Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 17 (Rotación en Π)

Como estamos en el contexto de rotaciones en $\mathbb{R}^3$, debemos escoger una base de $\mathbf{H}$ adecuada. Para aplicar la teoría que acabamos de ver, necesitamos una base $\{\mathbf{1}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}\}$ de $\mathbf{H}$ con $\{\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}\}$ una base positivamente orientada de $\mathbb{R}^3$. Ya vimos cómo construir una base adecuada.

Sea $\hat{\mathbf{n}} = (1/2, 1/\sqrt{2}, 1/2)$ y $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$. Entonces, por (2),

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp} = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u})\hat{\mathbf{n}} + (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}) \times \hat{\mathbf{n}}$$

Por (6), $\left\{ \frac{\mathbf{u}_\perp}{|\mathbf{u}_\perp|}, \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|}, \hat{\mathbf{n}} \right\}$ es una base positivamente orientada de $\mathbb{R}^3$. Ahora podemos aplicar la teoría que acabamos de ver.

Consideremos una base de $\mathbf{H}$

$$\{\mathbf{1}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}\} \text{ con } \begin{cases} \hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}_\perp}{|\mathbf{u}_\perp|} \\ \hat{\mathbf{w}} = \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|} \end{cases}$$

Entonces tenemos dos planos,

$$\Pi : t\mathbf{1} + s\hat{\mathbf{n}} \text{ y } \Pi^\perp : t\hat{\mathbf{v}} + s\hat{\mathbf{w}}$$

Sea $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$ con $\theta = \pi/4$. Vamos hacer un par de cálculos en Π para verificar que efectivamente, aplicar $\mathbf{C}_\mathbf{q}(\mathbf{p}_1) = \mathbf{q}\mathbf{p}_1\bar{\mathbf{q}}$ “cancela” los ángulos de rotación.

- Sea $\mathbf{p} = \underbrace{2 + \hat{\mathbf{n}}}_{\mathbf{p}_1} + \underbrace{\sqrt{6}\hat{\mathbf{v}} + \sqrt{3}\hat{\mathbf{w}}}_{\mathbf{p}_2}$, entonces $\mathbf{p}_1 = 2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$
 - $\mathbf{q}\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$
 - $(\mathbf{q}\mathbf{p}_1)\bar{\mathbf{q}} = 2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$, como se esperaba.
- Sea $\mathbf{u} = \underbrace{0 \cdot \mathbf{1} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u})\hat{\mathbf{n}}}_{\mathbf{u}_\parallel} + \underbrace{|\mathbf{u}_\perp|\hat{\mathbf{v}} + 0 \cdot \hat{\mathbf{w}}}_{\mathbf{u}_\perp}$, entonces $\mathbf{u}_\parallel = 0 + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right)$
 - $\mathbf{q}\mathbf{u}_\parallel = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$
 - $(\mathbf{q}\mathbf{p}_1)\bar{\mathbf{q}} = 0 + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right)$ como se esperaba.

El código en MATHEMATICA es

```
Needs["Quaternions'"]
ClearAll[n, q, v, w, p1, up]
toQuaternion[v_] := Quaternion[0, v[[1]], v[[2]], v[[3]];
toQuaternion[a_, v_] := Quaternion[a, v[[1]], v[[2]], v[[3]];
theta = Pi/4;
n = {1/2, 1/Sqrt[2], 1/2}; u = {0, 0, 1};
q = toQuaternion[Cos[theta], Sin[theta] n];
v = Normalize[u-(n.u) n]; w = Normalize@Cross[n, u];
(*p=2+n+Sqrt[6] v+Sqrt[3] w*)
p1 = toQuaternion[2, n]
{q ** p1, (q ** p1) ** Conjugate[q]}
(*Out[] {Quaternion[1/sqrt(2), 3/(2*sqrt(2)), 3/2, 3/(2*sqrt(2))], Quaternion[2, 1/2, 1/sqrt(2), 1/2]} *)
(*u=(n.u)n+ (u-(n.u)n)*)
up = toQuaternion[(n.u) n];
{q ** up, (q ** up) ** Conjugate[q]}
(*Out[] {Quaternion[-1/(2*sqrt(2)), 1/(4*sqrt(2)), 1/4, 1/(4*sqrt(2))], Quaternion[0, 1/4, 1/(2*sqrt(2)), 1/4]} *)
```

- **Rotaciones en $\Pi^\perp$.** $\mathbf{q}\mathbf{p}_2$ rota $\mathbf{p}_2$ en el plano $\Pi^\perp$, en *dirección positiva* con ángulo θ . También $\mathbf{p}_2\bar{\mathbf{q}}$ rota $\mathbf{p}_2$ en el plano $\Pi^\perp$, con ángulo θ , en *dirección positiva* como se ve intuitivamente en las Figuras 35 y 36. En efecto, multiplicando y usando (17) tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}} \cos \theta + \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{v}} \sin \theta \\ \quad = \hat{\mathbf{v}} \cos \theta + \hat{\mathbf{w}} \sin \theta \in \Pi^\perp \\ \mathbf{q}\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{w}} \cos \theta + \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{w}} \sin \theta \\ \quad = -\hat{\mathbf{v}} \sin \theta + \hat{\mathbf{w}} \cos \theta \in \Pi^\perp \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{v}} \cos \theta - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{v}} \sin \theta \\ \quad = -\hat{\mathbf{w}} \sin \theta + \hat{\mathbf{v}} \cos \theta \in \Pi^\perp \\ \hat{\mathbf{w}}\bar{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{w}} \cos \theta - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{w}} \sin \theta \\ \quad = \hat{\mathbf{w}} \cos \theta + \hat{\mathbf{v}} \sin \theta \in \Pi^\perp \end{array} \right.$$

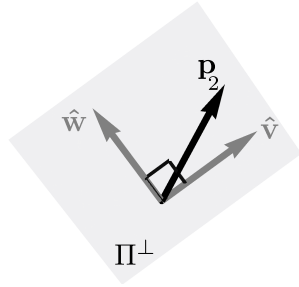


Figura 35: Idea intuitiva: $\mathbf{p}_2 = t_0\mathbf{1} + s_0\hat{\mathbf{n}}$

Fuente: Elaboración propia

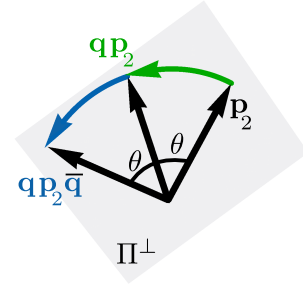


Figura 36: Idea intuitiva: $\mathbf{q}\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{q}\mathbf{p}_2\bar{\mathbf{q}}$

Fuente: Elaboración propia

Ahora $\mathbf{q}\mathbf{p}_2 = t_1\mathbf{q}\hat{\mathbf{v}} + s_1\mathbf{q}\hat{\mathbf{w}}$ es una rotación positiva de $\mathbf{p}_2$, de ángulo θ en el plano $\Pi^\perp$ y como está en el plano $\Pi^\perp$, entonces $(\mathbf{q}\mathbf{p}_2)\bar{\mathbf{q}}$ aplica una rotación positiva de ángulo θ en el plano $\Pi^\perp$ y finalmente rota $\mathbf{p}_2$ en un ángulo 2θ

En particular, si $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$ y $\hat{\mathbf{u}}$ es *perpendicular* a $\hat{\mathbf{n}}$, entonces como $\hat{\mathbf{u}}_\parallel = \mathbf{0}$, $\mathbf{q}\hat{\mathbf{u}}$ rota $\hat{\mathbf{u}}$ en el plano $\Pi : t\hat{\mathbf{u}} + s\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{u}}$, en dirección positiva, en un ángulo θ como se ve intuitivamente en la Figura 37. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}\hat{\mathbf{u}} &= (\cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta)\hat{\mathbf{u}} \\ &= \cos \theta \hat{\mathbf{u}} + \sin \theta \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{u}}, \text{ pues } \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \end{aligned}$$

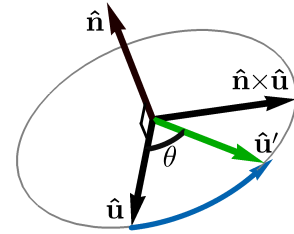


Figura 37: $\hat{\mathbf{u}}' = \mathbf{q}\hat{\mathbf{u}}$

Fuente: Elaboración propia

Si $\theta = \pi/2$, $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{u}}$.

Ejemplo 18 (Rotación en $\Pi^\perp$)

Este ejemplo es una continuación del Ejemplo 17.

Sea $\hat{\mathbf{n}} = (1/2, 1/\sqrt{2}, 1/2)$ y $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$. Consideremos una base de $\mathbf{H}$

$$\{\mathbf{1}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}\} \text{ con } \begin{cases} \hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}_\perp}{|\mathbf{u}_\perp|} \\ \hat{\mathbf{w}} = \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|} \end{cases}$$

Entonces tenemos dos planos, $\Pi : t\mathbf{1} + s\hat{\mathbf{n}}$ y $\Pi^\perp : t\hat{\mathbf{v}} + s\hat{\mathbf{w}}$

Sea $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$ con $\theta = \pi/4$. Vamos hacer un par de cálculos en $\Pi^\perp$ para

verificar que efectivamente, aplicar $\mathbf{C}_q(\mathbf{p}_2) = \mathbf{q}\mathbf{p}_2\bar{\mathbf{q}}$ rota $\mathbf{p}_2$ en un ángulo 2θ .

- Si $\mathbf{p} = \underbrace{2 + \hat{\mathbf{n}}}_{\mathbf{p}_1} + \underbrace{\sqrt{6}\hat{\mathbf{v}} + \sqrt{3}\hat{\mathbf{w}}}_{\mathbf{p}_2}$, entonces $\mathbf{p}_2 = 0 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -2, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

- $\mathbf{q}\mathbf{p}_2 = 0 + \left(\frac{1}{4}(5\sqrt{2} + 2), -\sqrt{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{4}(-3)(\sqrt{2} - 2)\right)$

- $(\mathbf{q}\mathbf{p}_2)\bar{\mathbf{q}} = 0 + \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{2}\right)$

Y se verifica que $\Delta\mathbf{p}_2, (\mathbf{q}\mathbf{p}_2)\bar{\mathbf{q}} = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

- $\mathbf{u} = \underbrace{0 \cdot \mathbf{1} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u})\hat{\mathbf{n}}}_{\mathbf{u}_{\parallel}} + \underbrace{|\mathbf{u}_{\perp}|\hat{\mathbf{v}} + 0 \cdot \hat{\mathbf{w}}}_{\mathbf{u}_{\perp}}$, entonces $\mathbf{u}_{\perp} = 0 + \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{4}\right)$

- $\mathbf{q}\mathbf{u}_{\perp} = 0 + \left(\frac{1}{8}(4 - \sqrt{2}), \frac{1}{4}(-\sqrt{2} - 1), \frac{3}{4\sqrt{2}}\right)$

- $(\mathbf{q}\mathbf{p}_2)\bar{\mathbf{q}} = 0 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

El código en MATHEMATICA es

```
Needs["Quaternions'"]
ClearAll[n, q, v, w, p2, uperp]
toQuaternion[v_] := Quaternion[0, v[[1]], v[[2]], v[[3]]];
toQuaternion[a_, v_] := Quaternion[a, v[[1]], v[[2]], v[[3]]];
theta = Pi/4; n = {1/2, 1/Sqrt[2], 1/2}; u = {0, 0, 1};
q = toQuaternion[Cos[theta], Sin[theta] n];
v = Normalize@(u - (n.u) n); w = Normalize@Cross[n, u];
(*p=2+n+Sqrt[6] v+Sqrt[3] w*)
p2 = toQuaternion[Sqrt[6] v + Sqrt[3] w];
(*Out[] Quaternion[0, 1/sqrt(2), -2, 3/sqrt(2)]*)
{q ** p2, (q ** p2) ** Conjugate[q]};
(*Out[]
  {Quaternion[0, 1/4 (5 sqrt(2) + 2), -sqrt(2) - 1/2, 1/4 (-3) (sqrt(2) - 2)], Quaternion[0, 5/2, -1/sqrt(2), -3/2]}*)
(*u=(n.u)n+ (u-(n.u)n)*)
uperp = toQuaternion[u - (n.u) n]
{q ** uperp, (q ** uperp) ** Conjugate[q]}
(*Out[] {Quaternion[0, 1/8 (4 - sqrt(2)), 1/4 (-sqrt(2) - 1), 3/(4 sqrt(2))], Quaternion[0, 1/sqrt(2), -1/2, 0]}*)
```

- **Rotaciones en $\mathbb{R}^3$.** Dado $\hat{\mathbf{n}}$ y un vector $\mathbf{u}$ no nulo ni paralelo con $\hat{\mathbf{n}}$, tomamos como base de $\mathbf{H}$ al conjunto

$$\{1, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}\} \text{ con } \begin{cases} \hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}_{\perp}}{|\mathbf{u}_{\perp}|} \\ \hat{\mathbf{w}} = \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|} \end{cases}$$

Tenemos dos planos ortogonales y complementarios, $\Pi : t\mathbf{1} + s\hat{\mathbf{n}}$ y $\Pi^{\perp} : t\hat{\mathbf{v}} + s\hat{\mathbf{w}}$

Como $\mathbf{u} = \underbrace{0 \cdot \mathbf{1} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u})\hat{\mathbf{n}}}_{\mathbf{u}_{\parallel}} + \underbrace{|\mathbf{u}_{\perp}|\hat{\mathbf{v}} + 0 \cdot \hat{\mathbf{w}}}_{\mathbf{u}_{\perp}}$ entonces si $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{q}\mathbf{u}\bar{\mathbf{q}} &= \mathbf{q}(\mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp})\bar{\mathbf{q}} \\ &= \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{q}\mathbf{u}_{\perp}\bar{\mathbf{q}} \\ &= \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{q}\mathbf{q}\mathbf{u}_{\perp} \end{aligned}$$

Esto se interpreta como una rotación positiva, de ángulo 2θ , de $\mathbf{u}$ alrededor de $\hat{\mathbf{n}}$ como se ve intuitivamente en las Figuras 38 y 39.

Finalmente, si $\mathbf{q} = \cos \pi/2 + \hat{\mathbf{n}} \sin \pi/2$, una rotación positiva, de ángulo θ , de $\mathbf{u}$ alrededor de $\hat{\mathbf{n}}$, se obtiene con la parte vectorial de $\mathbf{q}\mathbf{u}\bar{\mathbf{q}}$.

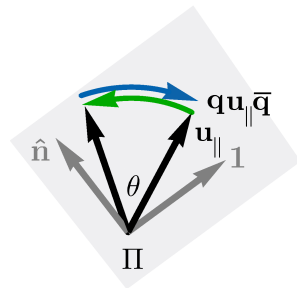


Figura 38: Idea intuitiva: $\mathbf{q}\mathbf{u}_{\parallel}\bar{\mathbf{q}}$

Fuente: Elaboración propia

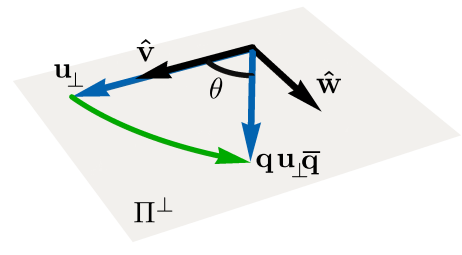


Figura 39: Idea intuitiva: $\mathbf{q}\mathbf{u}_{\perp}\bar{\mathbf{q}}$

Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 19

Para rotar contra-reloj $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$ alrededor del vector $\hat{\mathbf{n}} = (1, 1, 1)$, en un ángulo $\theta = \pi/3$ (ver Figura 40), tomamos la parte vectorial de $\mathbf{q}\mathbf{u}\bar{\mathbf{q}}$ con $\mathbf{q} = \cos \frac{\pi}{6} + \hat{\mathbf{n}} \sin \frac{\pi}{6}$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{V}(\mathbf{q}\mathbf{u}\bar{\mathbf{q}}) = (2, 0, 1)$$

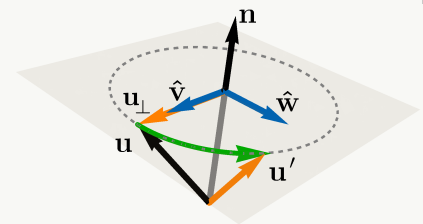


Figura 40: $\mathbf{u}' = \mathbf{V}(\mathbf{q}\mathbf{u}\bar{\mathbf{q}})$

Fuente: Elaboración propia

El código en MATHEMATICA es

```
Needs["Quaternions'"]
ClearAll[n, u, q, cu, theta, up, uprima]
toQuaternion[v_] := Quaternion[0, v[[1]], v[[2]], v[[3]]];
theta = Pi/3; n = Normalize[{1, 1, 1}]; u = {1, 0, 2};
q = toQuaternion[Cos[theta/2], Sin[theta/2] n];
cu = toQuaternion[u];
up = (q ** cu) ** Conjugate[q]
(*Quaternion[0,2,0,1]*)
uprima=List @@ up[[2 ;; 4]] (*{2,0,1}*)
```

Es innecesario, pero si se quiere, podemos obtener una expresión en términos de la fórmula eje-ángulo (ecuación 11). Ver apéndice C.

La implementación eficiente de la operación $\mathbf{q} \mathbf{u} \bar{\mathbf{q}}$ se hace usando la multiplicación “cruda” de cuaterniones. Por ejemplo, en Java

```
public final void mul(Quat4d q1, Quat4d q2) {
    x = q1.x * q2.w + q1.y * q2.z - q1.z * q2.y + q1.w * q2.x;
    y = -q1.x * q2.z + q1.y * q2.w + q1.z * q2.x + q1.w * q2.y;
    z = q1.x * q2.y - q1.y * q2.x + q1.z * q2.w + q1.w * q2.z;
    w = -q1.x * q2.x - q1.y * q2.y - q1.z * q2.z + q1.w * q2.w;
}
```

- $\mathbf{p}_2 \mathbf{q}$ es una rotación de $\mathbf{p}_2$ de ángulo θ , en *dirección negativa* y $\mathbf{p}_2 \mathbf{q} \in \Pi^\perp$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}} \mathbf{q} &= \hat{\mathbf{v}} \cos \theta + \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{n}} \sin \theta \\ &= \hat{\mathbf{v}} \cos \theta - \hat{\mathbf{w}} \sin \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{w}} \mathbf{q} &= \hat{\mathbf{w}} \cos \theta + \hat{\mathbf{w}} \hat{\mathbf{n}} \sin \theta \\ &= \hat{\mathbf{v}} \sin \theta + \hat{\mathbf{w}} \cos \theta\end{aligned}$$

$$\mathbf{p}_2 \mathbf{q} = t_1 \hat{\mathbf{v}} \mathbf{q} + s_1 \hat{\mathbf{w}} \mathbf{q} \in \Pi^\perp.$$

- $\bar{\mathbf{q}} \mathbf{p}_i$ y $\mathbf{p}_i \bar{\mathbf{q}}$ solo invierte la dirección de la rotaciones $\mathbf{q} \mathbf{p}_i$ y $\mathbf{p}_i \mathbf{q}$.

6.1. SLERP: Interpolación lineal esférica

“Slerp” es la abreviatura de “interpolación lineal esférica”, introducida en el contexto de la interpolación de cuaterniones para animar rotaciones 3D sobre una esfera. La fórmula que vamos a ver en realidad es una fórmula independiente de los cuaterniones, e independiente de la dimensión del espacio. Dados dos cuaterniones $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$ unitarios y linealmente independientes, podemos interpolar una trayectoria (la más corta posible) sobre una esfera unitaria. La trayectoria es el arco pequeño sobre un “gran círculo”, que va de $\mathbf{q}_1$ hasta $\mathbf{q}_2$ (Figura 41).

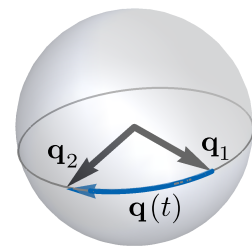


Figura 41: $q(t)$, $t \in [0, 1]$

Fuente: Elaboración propia

La fórmula usual de interpolación esférica¹⁵ es

$$\begin{aligned}\theta &= \arccos \mathbf{s}(\mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_2) \\ \mathbf{q}(t) &= \mathbf{q}_1 \frac{\sin[(1-t)\theta]}{\sin \theta} + \mathbf{q}_2 \frac{\sin(t\theta)}{\sin \theta}, \quad t \in [0, 1]\end{aligned}\tag{18}$$

Para un ángulo θ muy pequeño se usa interpolación lineal: $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_1 + t\mathbf{q}_2$

¹⁴Nos referimos a una rotación en un plano, alrededor del origen.

¹⁵En la librerías que se usan en animación pueden haber varios ajustes.

Hay varias maneras equivalentes para obtener la fórmula de interpolación esférica 18.

Método 1. Vamos a razonar con vectores y luego con cuaterniones. El proceso es similar en ambos casos.

- Primero observemos que si $\hat{\mathbf{u}}$ a $\hat{\mathbf{v}}$ son linealmente independientes con $\theta = \angle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}$, entonces si $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$, con $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}}$, resulta que $\mathbf{q}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}}$. Esto es así porque proyectando $\hat{\mathbf{u}}$ sobre $\hat{\mathbf{n}}$, queda $\hat{\mathbf{u}}_{\parallel} = 0$, por lo que $\mathbf{q}\hat{\mathbf{u}}$ rota $\hat{\mathbf{u}}$ en el plano $\Pi : t\hat{\mathbf{u}} + s\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{u}}$, en dirección positiva, en un ángulo θ (ver Figura 42). En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}\hat{\mathbf{u}} &= (\cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta)\hat{\mathbf{u}} \\ &= \cos \theta \hat{\mathbf{u}} + \sin \theta \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{u}} \\ &= \cos \theta \hat{\mathbf{u}} + \sin \theta \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{u}}, \text{ pues } \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \\ &= \hat{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

Entonces una parametrización del *camino sobre la esfera*, que va de $\hat{\mathbf{u}}$ a $\hat{\mathbf{v}}$ es

$$\mathbf{q}(t) = \cos(t\theta) \hat{\mathbf{u}} + \sin(t\theta) \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{u}}, \quad t \in [0, 1] \quad (19)$$

$\mathbf{q}(0) = \hat{\mathbf{u}}$ y $\mathbf{q}(1) = \hat{\mathbf{v}}$. Este camino es el “camino corto” pues vamos de $\hat{\mathbf{u}}$ a $\hat{\mathbf{v}}$ en el “gran círculo” y el ángulo no supera π . Por supuesto, la fórmula 18 es más simple y fácil de aplicar. La fórmula 19 es equivalente a la fórmula 18 pues, como

$$\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}} \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \hat{\mathbf{u}}$$

entonces, sustituyendo en 19 nos queda

$$\mathbf{q}(t) = \cos(t\theta) \hat{\mathbf{u}} + \sin(t\theta) \left(\hat{\mathbf{v}} \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \hat{\mathbf{u}} \right)$$

Desarrollando y usando la fórmula $\sin(\theta - t\theta) = \sin \theta \cos t\theta - \cos \theta \sin(t\theta)$,

$$= \frac{\sin[(1-t)\theta]}{\sin \theta} \hat{\mathbf{u}} + \frac{\sin(t\theta)}{\sin \theta} \hat{\mathbf{v}}, \quad t \in [0, 1]$$

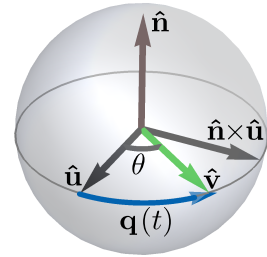


Figura 42: $\mathbf{q}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}}$

Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 20

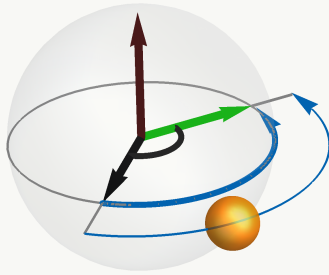
Sean $\hat{\mathbf{u}} = (0, 1, 0)$, $\hat{\mathbf{v}} = \frac{(0, -1, -1)}{\sqrt{2}}$, $\hat{\mathbf{w}} = \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}}$ y $\begin{cases} \mathbf{n}_1 = \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{n}_2 = \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{w}} \end{cases}$

Sea $\mathbf{q}(\theta, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, t) = \frac{\sin[(1-t)\theta]}{\sin \theta} \hat{\mathbf{u}} + \frac{\sin(t\theta)}{\sin \theta} \hat{\mathbf{v}}$, $t \in [0, 1]$.

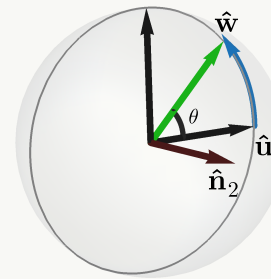
Vamos a dibujar las trayectorias de $\hat{\mathbf{u}}$ a $\hat{\mathbf{v}}$ y de $\hat{\mathbf{u}}$ a $\hat{\mathbf{w}}$ como se ve en las Figuras 43 y 44. En el primer caso incluimos una esfera moviéndose en esa trayectoria, pero escalada.

$$\theta_1 = \angle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\theta_2 = \angle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}} = \frac{\pi}{4}$$

**Figura 43:** $\hat{v} = q_1 \hat{u}$

Fuente: Elaboración propia

**Figura 44:** $\hat{w} = q_2 \hat{u}$

Fuente: Elaboración propia

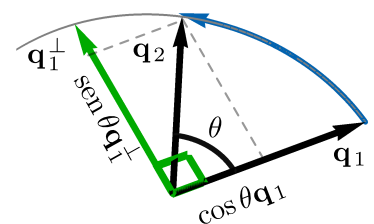
El código en MATHEMATICA para la Figura 43 es

```
ClearAll[n, u, v, nxu, theta, Slerp]
u = Normalize@{0, 1, 0}; v = Normalize@{0, -1, -1}; or3 = {0, 0, 0};
n = Normalize@Cross[u, v]; nxu = Cross[n, u]; theta = ArcCos[u.v];
Slerp[th_, a_, b_, t_] := Sin[(1 - t) th]/Sin[th] a + Sin[t th]/Sin[th] b;
Animate[
  With[{gr = Graphics3D[
    AbsoluteThickness[5.5], Arrowheads[0.06],
    Arrow[{or3, u}], Purple, Arrow[{or3, v}], Brown, Arrow[{or3, n} ]],
    (*Gran circunferencia*)
    First@ParametricPlot3D[Cos[t] u + Sin[t] nxu, {t, 0, 2 Pi},
      PlotStyle -> {Gray, Thick}],
    (*Arco*)
    First@ParametricPlot3D[Slerp[theta, u, v, t], {t, 0, 0.9},
      PlotRange -> All, PlotStyle -> Directive[{AbsoluteThickness[4], Blue,
        Arrowheads[.055]}]] /. Line[pts_] -> Arrow[pts, {0, -0.2}],
    (*Esfera*)
    Opacity[0.1], Specularity[White, 20], Sphere[or3, 1]
  ], Boxed -> False,
  PlotRange -> {{-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.9}, {-1.9, 1.9}},
  Lighting -> "Neutral", ViewPoint -> {-1.98, 2.035, -1.83},
  ViewVertical -> {-1.19, -0.09, -0.07}
], {t, 0, 1}, AnimationRunning -> False]
```

- Sean q_1, q_2 cuaterniones unitarios linealmente independientes y $\theta = \angle q_1, q_2$, es decir, $\cos \theta = \mathbf{s}(q_1 \overline{q_2})$.

Consideremos el plano Π generado por $\{q_1, q_2\}$. Podemos construir una base ortonormal $\{q_1, q_1^\perp\}$ para Π (ver Figura 45). Como

$$q_2 = \cos \theta q_1 + \sin \theta q_1^\perp$$

**Figura 45:** Idea intuitiva

Fuente: Elaboración propia

Entonces $\mathbf{q}_1^\perp = \mathbf{q}_2 \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \mathbf{q}_1$. El arco menor, en el “gran círculo”, que va de $\mathbf{q}_1$ a $\mathbf{q}_2$, se puede parametrizar como

$$\mathbf{q}(t) = \cos(t\theta) \mathbf{q}_1 + \sin(t\theta) \mathbf{q}_1^\perp, \quad t \in [0, 1]$$

Sustituyendo $\mathbf{q}_1^\perp$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \cos(t\theta) \mathbf{q}_1 + \sin(t\theta) \mathbf{q}_1^\perp \\ &= \cos(t\theta) \mathbf{q}_1 + \sin(t\theta) \left(\mathbf{q}_2 \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \mathbf{q}_1 \right) \\ &= \mathbf{q}_1 \left(\cos(t\theta) - \frac{\sin(t\theta) \cos \theta}{\sin \theta} \right) + \frac{\sin(t\theta)}{\sin \theta} \mathbf{q}_2 \\ &= \mathbf{q}_1 \frac{\sin[(1-t)\theta]}{\sin \theta} + \mathbf{q}_2 \frac{\sin t\theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

pues $\sin(\theta - t\theta) = \sin \theta \cos t\theta - \cos \theta \sin(t\theta)$.

Método 2. Sean $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ cuaterniones unitarios linealmente independientes. Operando algebraicamente, “para ir” de $\mathbf{q}_1$ hasta $\mathbf{q}_2$, multiplicamos por un cuaternión $\mathbf{q}$:

$$\text{Si } \mathbf{q}\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 \implies \mathbf{q} = \mathbf{q}_2 \overline{\mathbf{q}_1}$$

Como $\mathbf{q}$ es unitario,

$$\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$$

con $\theta = \mathbf{s}(\mathbf{q}_2 \overline{\mathbf{q}_1})$ y $\hat{\mathbf{n}}$ se obtiene normalizando $\mathbf{n} = \mathbf{v}(\mathbf{q}_2 \overline{\mathbf{q}_1})$.

Como nos estamos moviendo en el plano Π generado por $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$, podríamos “extraer” una fracción de un desplazamiento angular multiplicando por $\mathbf{q}^t$ con $t \in [0, 1]$.

Como $\mathbf{q}$ está en el plano generado por $\{1, \hat{\mathbf{n}}\}$,

$$\mathbf{q}^2 = \cos 2\theta + \hat{\mathbf{n}} \sin 2\theta$$

y podemos probar por inducción (apéndice D) que

$$\mathbf{q}^n = \cos n\theta + \hat{\mathbf{n}} \sin n\theta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esta fórmula, conocida como “Fórmula de D’Moivre”, se puede generalizar usando la función exponencial para cuaterniones. Esta fórmula se deduce de la expansión en serie de la función exponencial e^z (apéndice D),

$$\mathbf{q} = e^{\theta \hat{\mathbf{n}}} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$$

Por tanto, $\mathbf{q}^t = \cos t\theta + \hat{\mathbf{n}} \sin t\theta$

De esta manera, una parametrización de la trayectoria, que va de $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$ (sobre el respectivo “gran círculo”), es

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^t \mathbf{q}_1 = \cos t\theta \mathbf{q}_1 + \sin t\theta \hat{\mathbf{n}} \mathbf{q}_1, \quad t \in [0, 1]$$

Podemos llegar a la fórmula de interpolación esférica 18 sustituyendo

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}}\mathbf{q}_1 &= \left(\frac{\mathbf{q} - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right) \mathbf{q}_1 \\ &= \left(\frac{\mathbf{q}_2 \overline{\mathbf{q}_1} - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right) \mathbf{q}_1 \\ &= \frac{\mathbf{q}_2 - \cos \theta \mathbf{q}_1}{\operatorname{sen} \theta}\end{aligned}$$

Luego procedemos exactamente igual a como hicimos en el “Método 1”.

Ejemplo 21

Sean $\mathbf{q}_1 = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{q}_2 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Para interpolar podríamos usar la fórmula 18 que definitivamente es más sencilla. Pero vamos a ver la teoría en acción.

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_2 \overline{\mathbf{q}_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) = \cos \theta + \mathbf{n}$$

$$\theta = \arccos(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} \theta \text{ con } \hat{\mathbf{n}} = (1, 0, 0)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(t) &= (1/\sqrt{2} + (1/\sqrt{2}, 0, 0))^t \mathbf{q}_1 \\ &= (\cos t\theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} t\theta) \mathbf{q}_1 \\ &= (0, \cos(t\pi/4), \operatorname{sen}(t\pi/4))\end{aligned}$$

En MATHEMATICA

```
ClearAll[q, q1, q2, qt, Slerp, theta]
Needs["Quaternions"]
toQ[v_] := Quaternion[0, v[[1]], v[[2]], v[[3]]];
toQ[a_, v_] := Quaternion[a, v[[1]], v[[2]], v[[3]]];
pV[q_] := List @@ q[[2 ;; 4]]; pS[q_] := q[[1]];
q1 = Quaternion[0, 0, 1, 0]; q2 = Quaternion[0, 0, 1/Sqrt[2], 1/Sqrt[2]];
q = q2 ** Conjugate[q1];
theta = ArcCos[pS[q]]; (*theta=Pi/4*)
(*Quaternion[1/Sqrt[2], 1/Sqrt[2], 0, 0]*)
n = Normalize@{1/Sqrt[2], 0, 0}
(*q=Cos[theta]+ n Sin[theta]*)
q = toQ[1/Sqrt[2], n Sin[theta]];
q[t_] := pV[toQ[Cos[t theta], n Sin[t theta]] ** q1];
(* 0 tambi\en *)
qt[t_] := Quaternion[1/Sqrt[2], 1/Sqrt[2], 0, 0]^t**q1;
(* Mejor a\'un *)
Slerp[th_, t_, a_, b_] := Sin[(1 - t) th]/Sin[th] a + Sin[t th]/Sin[th] b;
Graphics3D[
```

```

AbsoluteThickness[5], Arrowheads[0.07],
Black, Arrow[{or3, pV[q1]}], verde, Arrow[{or3, pV[q2]}],
(*Arco*)
First@ParametricPlot3D[q[t], {t, 0, 0.85}, PlotRange -> All,
    PlotStyle -> Directive[{AbsoluteThickness[4], celeste,
    Arrowheads[.055]}]] /. Line[pts_] -> Arrow[pts, {0, -0.2}],
(*Esfera*)
Opacity[0.2], Gray, Specularity[White, 20], Sphere[or3, 1],
}, Boxed -> False, PlotRange -> All, Lighting -> "Neutral"
]

```

7. Conclusión

En su nacimiento y en su primer siglo de vida, la teoría de cuaterniones era de difícil lectura, no solo para nosotros actualmente, sino para los científicos y los estudiantes de la época [18]. Con el lenguaje usual del álgebra lineal, tal como aparece en [16] por ejemplo, las ideas sobre aplicación de cuaterniones en rotaciones en 3D, se vuelve una tarea natural, usando vectores, matrices, bases y dimensión. En general, en la literatura sobre aplicación de los cuaterniones a rotaciones en 3D, cuaterniones, no se muestra de manera intuitiva y clara, la derivación de las fórmulas para rotación e interpolación como parte de un curso de álgebra lineal¹⁶. Más bien se usan directamente las fórmulas sin ninguna intuición porque, aunque son aplicaciones de 3D, la derivación requiere navegar en un espacio vectorial de cuatro dimensiones. Pero todo se resuelve usando subespacios isomorfos a espacios 2D y 3D. Lo que hemos hecho es, usando la representación de un cuaternión unitario como $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta$, multiplicar en los planos inducidos por una base ortonormal $\{\mathbf{1}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}\}$ y verificar que se obtiene una rotación de ejes en cada uno de los planos inducidos por esta base. La aplicación directa ha sido sobre rotaciones en $\mathbb{R}^3$ e interpolación esférica. Las aplicaciones de los cuaterniones son muy extensa y pueden parecer construcciones extrañas, excepto que uno comprenda la intuición y las matemáticas que hay detrás.

Contribución de las personas autoras: Este trabajo fue realizado únicamente por el autor Walter Mora Flores, quien se encargó de todas las etapas del estudio y desarrollo del artículo.

Accesibilidad de datos: Los datos usados en este trabajo estarán disponibles para los interesados que lo soliciten por correo electrónico.

8. Bibliografía

- [1] Carl C. Cowen.(1997). Centrality of Linear Algebra On the Centrality of Linear Algebra in the Curriculum <https://www.maa.org/centrality-of-linear-algebra>.
- [2] H. Cheng, K. C. Gupta (1989). An Historical Note on Finite Rotations. Journal of Applied Mechanics. American Society of Mechanical Engineers. 56 (1): 139–145.

¹⁶Por supuesto hay libros que desarrollan la teoría buscando una perspectiva geométrica. En [6] se desarrolla la teoría usando una perspectiva geométrica basada en los números complejos. En [7] tenemos una exposición teórica usando álgebra lineal pero no en el estilo usual que encontramos en los libros de álgebra lineal.

- [3] Copy of a Letter from Sir William R. Hamilton to John T. Graves. *Philosophical Magazine*, 3rd series, 25 (1844), pp. 489–95. <https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/QLetter/QLetter.pdf>
- [4] F. Dunn, I. Parberry. (2011). *3D Math Primer for Graphics and Game Development*. A K Peters/CRC Press. 2nd Edition. <https://gamemath.com/>
- [5] F. R. Gantmacher. (1960). *The Theory of Matrices*. NY. Chelsea Publishing.
- [6] Ward, J.P. (1997). *Quaternions and Cayley Numbers: Algebra and Applications*. Kluwer Academic. ISBN 0-7923-4513-4.
- [7] Goldman, Ron. (2010). *Rethinking Quaternions. Theory and Computation*. Morgan & Claypool
- [8] J. Pujol. (2012). Hamilton, Rodrigues, Gauss, Quaternions, and Rotations: a Historical Reassessment. *Commun. Math. Anal.* 13 (2) 1 - 14.
- [9] Kleiner, I. (2007). History of Linear Algebra. In: Kleiner, I. (eds) *A History of Abstract Algebra*. Birkhäuser Boston. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4685-1_5
- [10] Kuo Kan Liang. (2018). Efficient conversion from rotating matrix to rotation axis and angle by extending Rodrigues formula. <https://arxiv.org/abs/1810.02999v1>
- [11] W. S. Massey. (1983). Cross Products of Vectors in Higher Dimensional Euclidean Spaces. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 90, No. 10 (Dec., 1983), pp. 697-701
- [12] T. Y. Lam. (2021). *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer New York, NY. GTM, volume 131.
- [13] Lambek, J. (1995). If hamilton had prevailed: quaternions in physics. *The Mathematical Intelligencer* 17, 7–15. <https://doi.org/10.1007/BF03024783>
- [14] M. Szilágye, L. Szilágye. (2000). Opinions on the Mathematical Activity of János Bol-yai. *APH N.S., Heavy Ion Physics* 11 (2000) 99–108. [https://www.ms.sapientia.ro/~lalo/concurs/Publications/ISI%20Journal%20Papers/2000%20ACTA%20PHYS%20HUNG%20NS%20HEAVY%20ION%20PHYS%2011\(1\)%2099-108.pdf](https://www.ms.sapientia.ro/~lalo/concurs/Publications/ISI%20Journal%20Papers/2000%20ACTA%20PHYS%20HUNG%20NS%20HEAVY%20ION%20PHYS%2011(1)%2099-108.pdf)
- [15] E. Brown, A. Rice. (2021). Cayley–Dickson Construction for Beginners: An Accessible Proof of Hurwitz’s Sums Of Squares Theorem <https://personal.math.vt.edu/brown/doc/Brown-Rice-DicksonHurwitz-0708.pdf>
- [16] S. Lang (1986). *Introduction to linear algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics (Second edition of 1970 original ed.). New York: Springer-Verlag.
- [17] T. Ell, N. Le Bihan, S. J. Sangwine. (2014). *Quaternion Fourier Transforms for Signal and Image Processing*. John Wiley & Sons, Inc.
- [18] Pritchard, C. (1998). Tendril of the Hop and Tendril of the Vine: Peter Guthrie Tait and the Promotion of Quaternions, Part I. *The Mathematical Gazette*, 82(493), 26–36. <https://doi.org/10.2307/3620147>
- [19] Stillwell, J. (2008). *Naive Lie Theory*. In *Undergraduate texts in mathematics*. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-78214-0>

Apéndice

A. Nota histórica

El conjunto de cuaterniones $\mathbf{H}$ se puede ver como una extensión de los números complejos. El conjunto de los números complejos $\mathbf{C}$ es un campo y además es un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$, de dimensión 2. Una base de $\mathbf{C}$ es $\{1, i\}$. Multiplicar por $z = \cos \theta + i \sin \theta$ aplica una rotación de ángulo θ contra-reloj. Una rotación debe mantener la longitud, por lo que la propiedad $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ es esencial en rotaciones, pues si z_1 unitario aplica una rotación, debe mantenerse la longitud: $|z_1 z_2| = |z_2|$. Pero no hay muchas de estas identidades multiplicativas en dimensiones $n > 2$.

En tres dimensiones no hay manera de definir una multiplicación de tal manera que podamos sumar, multiplicar y dividir como en $\mathbf{C}$. William Rowan Hamilton estuvo buscando durante años como definir una multiplicación en $\mathbb{R}^3$ que nos diera rotaciones como la multiplicación compleja hace en $\mathbb{R}^2$. Hamilton quería un conjunto de números 3D análogo a los números complejos, en el que la longitud de un número fuera multiplicativa $|w_1 w_2| = |w_1| |w_2|$ y, por tanto, la multiplicación por números de norma 1 tuviera el efecto de rotar el espacio, porque preserva la longitud y eventualmente ángulos, que es lo que hace una rotación).

Pero cosas como números de la forma $a + bi + cj$ ni cosas como elementos de $\mathbf{C} \times \mathbb{R}$ funcionan. En 1843 Hamilton cayó en la cuenta de que la buscada multiplicación se podía definir para cuádruples (a, b, c, d) . Esto era conocido por C. F. Gauss desde 1819, pero no publicó nada acerca de esto [8]. J. Bolyai preparó una memoria que incluía cuaterniones, en 1837, para un concurso sobre números complejos. Fue descartada por el jurado. Se encontró entre sus papapeles, en 1899 [14, pág 104]. Aunque J. Bolyai murió en 1860, la persistente falta de reconocimiento público lo desanimó y, aunque dejó 20 000 páginas de manuscritos matemáticos, solo publicó un apéndice de 24 páginas en un libro de su padre.

En 1877 que Frobenius Ferdinand Georg Frobenius probó [12, pp. 119-1120] que sorprendentemente, si un campo tiene dimensión n (como espacio vectorial), entonces $n = 1$, $n = 2$ o $n = 4$ (el caso no conmutativo). El teorema de Hurwitz de 1898 [15], establece que identidades con números complejos como

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = z_1^2 + \cdots + z_n^2, \text{ con cada } z_i \text{ función bilineal de las } x_i \text{ y } y_j,$$

solo es posible para $n = 1, 2, 4, 8$ (y $n = 16$ si se permiten “fracciones” en el lado derecho). Entonces la propiedad $|w_1 w_2| = |w_1| |w_2|$ está limitada a esas dimensiones.

Aunque los cuaterniones viven en un espacio 4- dimensional, son una maquinaria inmensamente apreciada por ser una forma compacta eficiente y estable para aplicar rotaciones en $\mathbb{R}^3$!. Para eso usamos la operación de similaridad $q w \bar{q}$. Este tipo de operador es familiar, se usa para rotación de ejes (matricialmente como $Q P Q^{-1}$) o simplemente para “ver las cosas desde otro punto de vista”. A. Einstein notó que esta operación además de describir rotaciones, también describe los cambios de coordenadas al pasar de una plataforma estacionaria a una en un tren en movimiento uniforme [13, pp. 10-11].

B. Matrices ortonormales en $\mathbb{R}^3$. Ángulo y eje de rotación.

Bien, en $\mathbb{R}^3$, una matriz ortonormal aplica una rotación. La pregunta es ¿cuál es el ángulo y cuál es el eje de rotación?

Para $\mathbf{R}$ ortonormal, vamos a determinar $\hat{\mathbf{n}}$ y θ (también sirve $-\hat{\mathbf{n}}$ y $-\theta$).

$$\text{Sea } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Recordemos que si $c = 1 - \cos \theta$, $s = \sin \theta$ y $\hat{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, n_3)$, entonces

$$\mathbf{R}(\hat{\mathbf{n}}, \theta) = \begin{bmatrix} 1 + (n_1^2 - 1)c & n_1 n_2 c - n_3 s & n_1 n_3 c + n_2 s \\ n_1 n_2 c + n_3 s & 1 + (n_2^2 - 1)c & n_2 n_3 c - n_1 s \\ n_1 n_3 c - n_2 s & n_2 n_3 c + n_1 s & 1 + (n_3^2 - 1)c \end{bmatrix} \quad (20)$$

Determinar el ángulo θ y el eje $\hat{\mathbf{n}}$ de rotación.

El eje de rotación esta generado por una recta $\mathbf{L}$ en dirección de $\hat{\mathbf{n}}$ y que pasa por el origen. Como $\mathbf{R}$ describe una rotación, $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$ para algún $\hat{\mathbf{n}}$ y θ . Tenemos dos casos dependiendo de si $\mathbf{R}$ es o no simétrica,

- Si $\mathbf{R}(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$ es simétrica, entonces por (20),
$$\begin{cases} r_{12} = r_{21} \\ r_{31} = r_{13} \\ r_{23} = r_{32} \end{cases} \implies \hat{\mathbf{n}} \sin \theta = 0 \implies \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases}$$

Si $\theta = 0$ no hay rotación.

Si $\theta = \pi$ entonces (20) simplifica y

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n_1^2 - 1 & 2n_1 n_2 & 2n_1 n_3 \\ 2n_1 n_2 & 2n_2^2 - 1 & 2n_2 n_3 \\ 2n_1 n_3 & 2n_2 n_3 & 2n_3^2 - 1 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} r_{11} + 1 = 2n_1^2 \\ r_{22} + 1 = 2n_2^2 \\ r_{33} + 1 = 2n_3^2 \\ r_{21} = 2n_1 n_2 \\ r_{31} = 2n_1 n_3 \\ r_{23} = 2n_2 n_3 \end{cases}$$

Hay varias posibilidades para resolver el sistema. Si empezamos despejando n_1 llegamos a que el eje de rotación se puede expresar como

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2(r_{11} + 1)}} (r_{11} + 1, r_{21}, r_{31}) \quad (21)$$

Observe que efectivamente, como $\mathbf{R}$ es ortonormal,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2(r_{11}+1)}} \|(r_{11}+1, r_{21}, r_{31})\| &= \frac{1}{\sqrt{2(r_{11}+1)}} \sqrt{r_{11}^2 + 2r_{11}^2 + 1 + r_{21}^2 + r_{31}^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2(r_{11}+1)}} \sqrt{2r_{11}^2 + 2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

- Si $\mathbf{R}(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$ no es simétrica $\mathbf{R} \neq \mathbf{R}^T$, el eje de rotación generado por un vector $\mathbf{n}$, se mantiene invariante (no rota) al aplicar $\mathbf{R}$, es decir, $\mathbf{R}\mathbf{n} = \mathbf{n}$ y también $\mathbf{R}^T\mathbf{n} = \mathbf{n}$. Sería una locura tratar de calcular $\mathbf{n}$ como un vector propio asociado a $\lambda = 1$!. En vez de eso, observamos que $\mathbf{R} - \mathbf{R}^T$ tiene la forma matricial del producto cruz! y esto nos ayuda a establecer paralelismo. Por lo tanto $\mathbf{n}$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$.

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & 0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} q_1 = r_{23} - r_{32} \\ q_2 = r_{31} - r_{13} \\ q_3 = r_{12} - r_{21} \end{cases}$$

$$\mathbf{0} = (\mathbf{R} - \mathbf{R}^T) \mathbf{n}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & 0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

$$= (q_1, q_2, q_3) \times (n_1, n_2, n_3)$$

Esto nos dice que $\mathbf{n}$ es paralelo a (q_1, q_2, q_3) , entonces en particular, podemos tomar como eje de rotación $\mathbf{n} = (q_1, q_2, q_3)$. Podemos tomar como eje de rotación

$$\mathbf{n} = (r_{23} - r_{32}, r_{31} - r_{13}, r_{12} - r_{21}) \quad \text{o} \quad \mathbf{n} = -(r_{23} - r_{32}, r_{31} - r_{13}, r_{12} - r_{21}).$$

Si el ángulo de rotación, que corresponde a la elección de $\mathbf{n}$, es θ , entonces

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\text{Tr}(\mathbf{R}) - 1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\text{Tr}(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{R})}{2} \end{cases}$$

Verificación: Recordemos de nuevo la forma matricial del producto cruz. Sea $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$.

$$\text{Si } \mathbf{K}_{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} = \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{u} \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}) = \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}}^2 \mathbf{u} \\ -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} = \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}}^3 \mathbf{u} = -\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{u} \end{cases}$$

Por tanto $\text{Tr}(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}}) = \text{Tr}(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}}^3) = 0$ y $\text{Tr}(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}}^2) = -2n_1^2 - 2n_2^2 - 2n_3^2 = -2$

La matriz de rotación alrededor de $\hat{\mathbf{n}}$ coincide con

$$\mathbf{R}(\hat{\mathbf{n}}, \theta) = \mathbf{I}_{3 \times 3} + \sin \theta \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}} + (1 - \cos \theta) \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}}^2$$

Entonces

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\mathbf{R}) &= \text{Tr}(\mathbf{R}(\hat{\mathbf{n}}, \theta)) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{I}_{3 \times 3} + \sin \theta \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}} + (1 - \cos \theta) \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}}^2) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{I}_{3 \times 3}) + \sin \theta \text{Tr}(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}}) + (1 - \cos \theta) \text{Tr}(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}}^2) \\ &= 3 + 0 - 2(1 - \cos \theta)\end{aligned}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\text{Tr}(\mathbf{R}) - 1}{2}$$

Esta ecuación $\cos \theta = (\text{Tr}(\mathbf{R}) - 1)/2$ en general tiene dos soluciones que difieren en el signo. Tenemos cuatro posibilidades para asociar eje y ángulo: $(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$, $(-\hat{\mathbf{n}}, \theta)$, $(\hat{\mathbf{n}}, -\theta)$ y $(-\hat{\mathbf{n}}, -\theta)$. Solo dos especifican de manera correcta la rotación: $(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$ o $(-\hat{\mathbf{n}}, -\theta)$. Por eso necesitamos también conocer $\sin \theta$, para poder asociar de manera correcta el ángulo con $\mathbf{n}$ o $-\mathbf{n}$. Esto se hace así [10],

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{n}}, \theta) &= \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}} + \sin \theta \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}}^2 + (1 - \cos \theta) \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}}^3 \\ &= \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}} + \sin \theta \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}}^2 - (1 - \cos \theta) \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}} \\ &= \sin \theta \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}}^2 + \cos \theta \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}} \\ \therefore \text{Tr}(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{R}) &= -2 \sin \theta \implies \sin \theta = -\frac{\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{R}}{2}\end{aligned}$$

En MATHEMATICA podemos usar la función `ArcTan[x, y]`. Esta función toma en cuenta el cuadrante en el que se encuentra (x, y) . Entonces,

$$\theta = \text{ArcTan}[(\text{Tr}[\mathbf{R}] - 1)/2, -\text{Tr}[\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{R}]/2].$$

Ejemplo 22

- Sea $\mathbf{R} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

- Un cálculo directo nos da $\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ y $\text{Det } \mathbf{R} = 1$ por tanto $\mathbf{R}$ aplica una rotación.
- $\mathbf{R}$ es simétrica (no la identidad) entonces aplica una rotación de ángulo $\theta = \pi$ alrededor de

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2(\mathbf{R}_{11} + 1)}} (\mathbf{R}_{11} + 1, \mathbf{R}_{21}, \mathbf{R}_{31}) = (1/3, 2/3, 2/3)$$

- Sea $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Un cálculo directo nos da $\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ y $\text{Det } \mathbf{R} = 1$ por tanto $\mathbf{R}$ aplica una rotación.
- La matriz $\mathbf{R}$ no es simétrica. Tenemos dos elecciones para el eje de rotación:

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm \frac{(\mathbf{R}_{23} - \mathbf{R}_{32}, \mathbf{R}_{31} - \mathbf{R}_{13}, \mathbf{R}_{12} - \mathbf{R}_{21})}{\|(\mathbf{R}_{23} - \mathbf{R}_{32}, \mathbf{R}_{31} - \mathbf{R}_{13}, \mathbf{R}_{12} - \mathbf{R}_{21})\|} = (0, 0, \pm 1)$$

El ángulo de rotación, respecto a $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, -1)$ es

$$\theta = \text{ArcTan}[(\text{Tr}[R]-1)/2, -\text{Tr}[\text{Kn}.R]/2] = -\frac{\pi}{4}$$

El ángulo de rotación, respecto a $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)$ es

$$\theta = \text{ArcTan}[(\text{Tr}[R]-1)/2, -\text{Tr}[\text{Kn}.R]/2] = \frac{\pi}{4}$$

En ambos casos, corresponde a la misma rotación alrededor del eje $\mathbf{z}$

C. Conjugación en términos de fórmula eje-ángulo.

Como $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ y $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$, entonces

$$\mathbf{q}\mathbf{q} = (\cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta)(\cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta) = \cos 2\theta + \hat{\mathbf{n}} \sin 2\theta$$

$$\hat{\mathbf{n}}\mathbf{u}_{\perp} = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{u} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u})\hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{q}\mathbf{q}\mathbf{u}_{\perp} \\ &= (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u})\hat{\mathbf{n}} + (\cos 2\theta + \hat{\mathbf{n}} \sin 2\theta)\mathbf{u}_{\perp} \\ &= (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u})\hat{\mathbf{n}} + \cos 2\theta\mathbf{u}_{\perp} + \sin 2\theta\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} \end{aligned}$$

D. Exponencial, logaritmo e interpolación

Podemos definir potencias, exponenciales y logaritmos de un cuaternión, pero la no conmutatividad cobra su precio y no tenemos muchas de las propiedades que tienen estas funciones en el caso de escalares.

D.1. Exponencial

Para definir $e^{\mathbf{q}}$ usamos la serie absolutamente convergente

$$e^{\mathbf{q}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{q}^k}{k!}$$

Como $e^{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = e^{\mathbf{q}\mathbf{p}} = e^{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ entonces, en general, solo podemos usar *los cuaterniones* $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_p$ pues $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{u}\alpha$. Entonces,

$$\mathbf{q} = \alpha + \mathbf{u} \implies e^{\mathbf{q}} = e^{\alpha+\mathbf{u}} = e^{\alpha}e^{\mathbf{u}}$$

e^{α} es algo conocido. ¿Qué es $e^{\mathbf{u}}$?

Si $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_p$ y $\phi = |\mathbf{u}|$ tenemos

$$e^{\mathbf{u}} = \cos \phi + \mathbf{u} \frac{\operatorname{sen} \phi}{\phi}$$

Verificación: como $\mathbf{u}^2 = -|\mathbf{u}|^2$, entonces

$$\mathbf{u}^2 = -\phi^2, \quad \mathbf{u}^3 = -\phi^2 \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^4 = \phi^4, \quad \mathbf{u}^5 = \phi^4 \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^6 = -\phi^6, \quad \dots$$

y tenemos entonces que

$$e^{\mathbf{u}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{u}^k}{k!} \quad (22)$$

$$= 1 + \frac{\mathbf{u}}{1!} - \frac{\phi^2}{2!} - \frac{\phi^2 \mathbf{u}}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + \frac{\phi^4 \mathbf{u}}{5!} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots \quad (23)$$

$$= 1 + \frac{\phi \mathbf{u}}{1! \phi} - \frac{\phi^2}{2!} - \frac{\phi^3 \mathbf{u}}{3! \phi} + \frac{\phi^4}{4!} + \frac{\phi^5 \mathbf{u}}{5! \phi} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots \quad (24)$$

$$= \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} \dots\right) + \frac{\mathbf{u}}{\phi} \left(\frac{\phi}{1!} - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} \dots\right) \quad (25)$$

$$= \cos \phi + \frac{\mathbf{u}}{\phi} \operatorname{sen} \phi \quad (26)$$

Por tanto,

- Si $\mathbf{q} = \alpha + \mathbf{u}$,

$$e^{\mathbf{q}} = e^{\alpha + \mathbf{u}} = e^{\alpha} \left(\cos |\mathbf{u}| + \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \operatorname{sen} |\mathbf{u}| \right) \quad (27)$$

En particular si $|\mathbf{u}|$ es “muy pequeño”, podríamos truncar las series de seno y coseno,

$$e^{\mathbf{u}} \approx 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \mathbf{u} \left(1 - \frac{\phi^2}{6}\right) \longrightarrow 1 \text{ si } \phi \longrightarrow 0.$$

- Si $\mathbf{u} = \theta \hat{\mathbf{n}}$, $\phi = |\theta \hat{\mathbf{n}}| = \theta$, y entonces

$$e^{\mathbf{q}} = e^{\alpha + \theta \hat{\mathbf{n}}} = e^{\alpha} (\cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} \theta) \quad (28)$$

- Si $\mathbf{q} = \theta \hat{\mathbf{n}}$,

$$e^{\mathbf{q}} = e^{\theta \hat{\mathbf{n}}} = (\cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} \theta) \quad (29)$$

D.2. Logaritmos

Si $\mathbf{q} = \alpha + \mathbf{u}$,

$$e^{\mathbf{q}} = e^{\alpha + \mathbf{u}} = e^{\alpha} \left(\cos |\mathbf{u}| + \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \operatorname{sen} |\mathbf{u}| \right)$$

entonces es natural definir

$$\log \mathbf{q} = \log (\alpha + \mathbf{u}) := \log |\mathbf{q}| + \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \arccos(\alpha/|\mathbf{q}|) \text{ pues } \theta = \arccos(\alpha/|\mathbf{q}|).$$

Y en particular si $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} \theta$ (unitario),

$$\log (\mathbf{q}) = \log (\cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} \theta) = \theta \hat{\mathbf{n}}, \quad \log (\mathbf{q}) \in \mathbf{H}_p$$

De esta manera

$$e^{\log \mathbf{q}} = \mathbf{q}$$

En el caso $\mathbf{q} = \alpha \in \mathbb{R}$, es decir, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$; hay una cantidad infinita de valores para $\log \mathbf{q}$. Por ejemplo, $e^{(2n+1)\pi \hat{\mathbf{u}}} = -1 + \mathbf{0}$, para cualquier $\hat{\mathbf{u}}$ y cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Entonces,

- Si $\mathbf{q} = \alpha$ es real positivo, la parte imaginaria de las ramas tiene forma $2n\pi\hat{\mathbf{u}}$, entonces si escogemos $n = 0$ tenemos $\log (\alpha + \mathbf{0}) = \log \alpha + \mathbf{0}$ que coincide con el logaritmo en $\mathbb{R}$.
- Si $\mathbf{q} = \alpha$ es real negativo, la parte imaginaria de las ramas tiene forma $(2n+1)\pi\hat{\mathbf{n}}$, entonces tomamos $\hat{\mathbf{n}} = (1, 0, 0)$, de esta forma tenemos $\log (\alpha + \mathbf{0}) = \log |\alpha| + ((2n+1)\pi, 0, 0)$ que coincide con el logaritmo en $\mathbb{R}$.

D.3. Fórmula de D'Moivre y potencias en general.

Primero observemos que si $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} \theta$, entonces como $\hat{\mathbf{n}}^2 = -1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^2 &= (\cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} \theta) \\ &= (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \hat{\mathbf{n}} \\ &= \cos(2\theta) + \operatorname{sen}(2\theta) \hat{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

En general, si $n \in \mathbb{Z}$ y $\mathbf{q} = e^{\theta \hat{\mathbf{n}}} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} \theta$, entonces

$$\mathbf{q}^n = e^{n\theta \hat{\mathbf{n}}} = (\cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} n\theta$$

Verificación: La prueba se hace por inducción. Para $n = 2$ es cierto, así que asumimos que es cierto para n . Entonces, usando las fórmulas

$$\cos(\phi + \theta) = \cos \theta \cos \phi - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad \operatorname{sen}(\theta + \phi) = \cos \theta \operatorname{sen} \phi + \operatorname{sen} \theta \cos \phi$$

obtenemos que

$$(\cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} \theta)(\cos \phi + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} \phi) = \cos(\theta + \phi) + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen}(\theta + \phi)$$

Ahora, procedemos con enteros positivos,

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^{n+1} &= (\cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} \theta)^{n+1} \\ &= (\cos n\theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} n\theta)(\cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} \theta) \\ &= \cos(n+1)\theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen}(n+1)\theta\end{aligned}$$

Para enteros negativos usamos el hecho de que para cuaterniones unitarios, $\mathbf{q}^{-1} = \bar{\mathbf{q}}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^{-1} &= \cos \theta - \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} \theta \\ \mathbf{q}^{-n} &= \cos(n\theta) - \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen}(n\theta) = \cos(-n\theta) + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen}(-n\theta)\end{aligned}$$

Potencias.

$\mathbf{q}^t$ es una potencia de $\mathbf{q}$. La definición de una potencia es

$$\mathbf{q}^t = e^{t \log \mathbf{q}}$$

Esta “potencia” $\mathbf{q}^t$ no tiene las propiedades de las potencias usuales!

Si $\mathbf{q} = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} \theta$, usando (29),

$$\mathbf{q}^t = e^{t \log \mathbf{q}} = e^{t\theta \hat{\mathbf{n}}} = \cos t\theta + \hat{\mathbf{n}} \operatorname{sen} t\theta \quad (\text{una fórmula de “interpolación angular lineal”})$$