Valores Propios y las Sucesiones Definidas de Forma Recursiva

Jorge Monge, Enrique Vílchez

Introducción

Este trabajo representa un esfuerzo conjunto[1] llevado a cabo con la principal finalidad, de exponer formalmente algunas de las aplicaciones de la teoría de los valores y vectores propios.

La importancia creciente del álgebra lineal como instrumento para poder abordar el estudio de otras disciplinas, es un hecho irrefutable en la actualidad. Propiamente, el uso de la teoría de los valores y vectores propios conduce a resolver importantes problemas en varias ciencias.

El rol que desempeña esta teoría transciende su uso fundamental para diagonalizar una matriz a interpretaciones concretas, como ejemplo, el signo de un valor propio nos concede una información relevante en diversos contextos, tales como en teoría de sistemas dinámicos lineales invariantes en el tiempo.

Esta artículo aborda la aplicación, de los valores y vectores propios para resolver una sucesión definida por una relación de recurrencia homogénea lineal con coeficientes constantes.

Descripción del Tema

En este artículo establecemos mediante el uso de los valores propios, un algoritmo que permite obtener el criterio de asociación explícito, para cierto tipo de sucesiones definidas por una relación de recurrencia homogénea lineal con coeficientes constantes.

Una sucesión de números reales es una aplicación $S : IN \cup \{0\} \longrightarrow IR$, $S(n)$ se llama el término n-ésimo de la sucesión y se le suele denotar por S_n. Además, denotamos la sucesión por $(S_n)_{n \in IN \cup \{0\}}$.

A menudo es posible desarrollar relaciones entre el término n-ésimo de una sucesión y algunos de los términos anteriores; tales relaciones se llaman relaciones de recurrencia. Una relación de recurrencia para una sucesión $(S_n)_{n \in IN \cup \{0\}}$ es una ecuación que relaciona S_n, con alguno de sus antecesores $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$; es decir, define indirectamente el término n-ésimo de la sucesión, que puede evaluarse si antes conocemos los términos $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$.

Las relaciones de recurrencia, por su misma naturaleza, ponen de manifiesto la necesidad de determinar mediante algún criterio el término n-ésimo de la sucesión; ya que para valores de n muy grandes, este término puede depender de un gran número de términos anteriores, lo cual hace a dicho criterio, un descriptor invaluable del n-ésimo término de la sucesión, a partir de un n específico.

Bajo esta perspectiva, los métodos para poder resolver una relación de recurrencia; es decir, encontrar un criterio de asociación explícito que permita definir el término general S_n, son indispensables.

Este artículo tiene por objetivo, resolver este problema para un tipo especial de relación de recurrencia, llamada recurrencia homogénea lineal de orden k.

Una relación de recurrencia homogénea lineal de orden k con coeficientes constantes para una sucesión $(S_n)_{n \in IN \cup \{0\}}$, es aquella de la forma:

$$S_{n+k} = \beta_{k-1} S_{n+(k-1)} + \beta_{k-2} S_{n+(k-2)} + \cdots + \beta_1 S_{n+1} + \beta_0 S_n$$

siendo los β_j $(\beta_j \neq 0)$ números reales fijos $\forall j, j \in IN \cup \{0\}, 0 \leq j \leq k-1$, que junto con las k condiciones iniciales:

$$S_j = c_j, \qquad c_j \in IR, \forall j, j \in IN \cup \{0\}, 0 \leq j \leq k-1$$

determinan de manera única los elementos de la sucesión.

El método que aquí desarrollamos, se fundamenta en el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} S_{n+k} = \beta_{k-1} S_{n+(k-1)} + \beta_{k-2} S_{n+(k-2)} + \cdots + \beta_1 S_{n+1} + \beta_0 S_n \\ S_{n+(k-1)} = S_{n+(k-1)} \\ S_{n+(k-2)} = S_{n+(k-2)} \\ \vdots \\ S_{n+1} = S_{n+1} \end{cases}$$

Este sistema, escrito en forma matricial, puede expresarse como:

$$X_{n+1} = \mathbf{A}X_n \tag{1}$$

siendo,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \cdots & \beta_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ una matriz } k \times k \text{ con entradas reales y}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} S_{n+(k-1)} \\ S_{n+(k-2)} \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix} \text{ un vector en } I\!R^k.$$

De aquí, se puede determinar X_n en términos de $X_0 = \begin{pmatrix} S_{k-1} \\ S_{k-2} \\ \vdots \\ S_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{k-1} \\ c_{k-2} \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix}$, de la manera siguiente:

$$\begin{cases} X_1 = \mathbf{A}X_0 \text{ por } (1) \text{ con } n = 0 \\ X_2 = \mathbf{A}X_1 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}X_0) = \mathbf{A}^2 X_0 \\ X_3 = \mathbf{A}X_2 = \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{A}^2 X_0\right) = \mathbf{A}^3 X_0 \\ \vdots \\ X_n = \mathbf{A}^n X_0 \end{cases}$$

Se infiere, entonces que:

$$X_n = \mathbf{A}^n X_0, \ \forall n \in IN \tag{2}$$

Lo afirmado anteriormente es una consecuencia del principio de inducción, veamos:

Prueba. Para $n = 1$

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathbf{A}X_0 \qquad \text{por } (1), \text{ para } n = 0 \\ &= \mathbf{A}^1 X_0 \end{aligned}$$

Supongamos que para algún $k \in IN$, $X_k = A^k X_0$ y probemos que:

$$X_{k+1} = A^{k+1} X_0$$

Prueba.

$X_{k+1} = \mathbf{A}X_k$ por (1)

$= \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^k X_0\right)$ por la hipótesis de inducción

$= \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{k} \right) X_0$ por asociatividad de matrices

$= \mathbf{A}^{k+1} X_0$ por definición de potencias de matrices

En consecuencia, por el primer principio de inducción: $X_n = A^n X_0 \ \forall n, n \in IN$

Como:

$$\mathbf{A}^n X_0 = \begin{pmatrix} S_{n+(k-1)} \\ S_{n+(k-2)} \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix},$$

entonces X_n queda determinada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} S_{n+(k-1)} \\ S_{n+(k-2)} \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \cdots & \beta_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} c_{k-1} \\ c_{k-2} \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix}$$

El producto $\mathbf{A}^n X_0$, es un vector $\vec{F}_k \in IR^k$, que denotamos por:

$$\vec{F}_k = \begin{pmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \\ \vdots \\ f_k(n) \end{pmatrix}$$

donde $f_i(n) \ (1 \leq i \leq k)$ es una función que depende únicamente de n.

Con esta notación se tiene que:

$$\begin{pmatrix} S_{n+(k-1)} \\ S_{n+(k-2)} \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \\ \vdots \\ f_k(n) \end{pmatrix} \text{ y } \underbrace{S_n = f_k(n)}_{\text{Por igualdad de matrices}}$$

Quedando claro que si se conociera la potencia $\mathbf{A}^n$, el problema de hallar explicitamente el término n-ésimo de la sucesión $(S_n)_{n \in IN \cup \{0\}}$, quedaría resuelto.

Si $\mathbf{A}$ es una matriz diagonalizable, sabemos que existe una matriz invertible P y una matriz diagonal D, tal que: $\mathbf{A} = PDP^{-1}$. Esto nos permite hallar $\mathbf{A}^n \ \forall n, n \in IN$ y expresarla en la forma:

$$\mathbf{A}^n = PD^nP^{-1} \tag{3}$$

Tratamiento del Problema

Para este tratamiento, consideremos los valores propios de la matriz A con multiplicidad uno; es decir, asumimos en principio que A es una matriz diagonalizable.

Por el isomorfismo existente entre el espacio vectorial $L_{IR}(IR^k)$ (espacio de transformaciones lineales sobre IR^k) y $M_k(IR)$ (espacio de matrices cuadradas de orden k con entradas en IR), sabemos que para la matriz **A** existe un endomorfimo $T : IR^k \rightarrow IR^k$ tal que: $\mathbf{A} = [T]_B$ con B la base canónica de IR^k. Podemos afirmar por la definición de los valores propios de un endomorfismo, que los valores propios de **A** son también los valores propios de T. Si tomamos una base $Y = \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ formada de vectores propios asociados a cada uno de los correspondientes k valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ de A, la matriz representativa de T en la base Y, la podemos obtener considerando:

$$\left.\begin{array}{l} T(y_1) = \lambda_1 y_1 = \lambda_1 y_1 + 0y_2 + \cdots + 0y_k \\ T(y_2) = \lambda_2 y_2 = 0y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + 0y_k \\ \vdots \\ T(y_k) = \lambda_k y_k = 0y_1 + 0y_2 + \cdots + \lambda_k y_k \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\textbf{Pues los valores propios de } A \textbf{ son} \\ \textbf{también los valores propios de } T\end{array}$$

En consecuencia:

$$[T]_Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix} = D$$

Lo que nos permite concluir que $D \sim \mathbf{A}$ por ser matrices representativas de un mismo endomorfismo.

Además por el teorema del cambio de base de matrices representativas se tiene que:

$$D = P^{-1}AP$$

siendo P la matriz de pasaje de la base B a la base Y, es decir:

$$P = [\boldsymbol{I}_{IR^k}]^{-1}_{(B,Y)} = [\boldsymbol{I}_{IR^k}]_{(Y,B)}$$

donde $\boldsymbol{I}_{IR^k}$ es el endomorfismo identidad sobre IR^k.

Como B es la base canónica, P es de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \end{pmatrix}$$

donde y_i es un vector (columna) propio correspondiente al valor propio λ_i, $\forall i,\ 1 \leq i \leq k$ y la matriz **A** puede ser expresada por $\mathbf{A} = PDP^{-1}$.

De (2) y (3) podemos concluir que :

$$X_n = PD^nP^{-1}X_0 \tag{4}$$

donde $X_0 = \begin{pmatrix} c_{k-1} \\ c_{k-2} \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix}$ y D es una matriz diagonal formada en su diagonal principal por los valores propios de **A**, es decir:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

De tal forma que si conociéramos estas dos matrices $(P$ y $D)$, quedaría determinado X_n. Es destacable que para hallar la matriz D, tenemos que encontrar primero los valores propios de A o, equivalentemente, su polinomio caractarístico. El polinomio característico de la matriz **A**, viene dado por:

$$P(\lambda) = \lambda^k - \beta_{k-1}\lambda^{k-1} - \beta_{k-2}\lambda^{k-2} - \dots - \beta_1\lambda - \beta_0$$

lo cual demostraremos a continuación, haciendo uso del primer principio de inducción.

Prueba. Probemos por inducción sobre k que si A es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \cdots & \beta_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$, su polinomio característico corresponde a:

$$P(\lambda) = \lambda^k - \beta_{k-1}\lambda^{k-1} - \beta_{k-2}\lambda^{k-2} - \dots - \beta_1\lambda - \beta_0 \text{ con } k \geq 1$$

En efecto:

Para $k = 1$

$$\det(\lambda I_k - \mathbf{A}) = |\lambda - \beta_0| = \lambda - \beta_0 = \lambda^1 - \beta_0$$

Supongamos para algún $k \in IN$ que:

$$\det(\lambda I_k - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - \beta_{k-1} & -\beta_{k-2} & \cdots & -\beta_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^k - \beta_{k-1}\lambda^{k-1} - \beta_{k-2}\lambda^{k-2} - \dots - \beta_1\lambda - \beta_0$$

Probemos que:

$$\det(\lambda I_{k+1} - A) = \lambda^{k+1} - \beta_k\lambda^k - \beta_{k-1}\lambda^{k-1} - \dots - \beta_1\lambda - \beta_0$$

Prueba.

$$\det(\lambda I_{k+1} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - \beta_k & -\beta_{k-1} & \cdots & -\beta_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - \beta_k) \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -\beta_{k-1} & -\beta_{k-2} & \cdots & -\beta_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

Por un desarrollo por cofactores, tomando la primera columna de la matriz.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-\beta_{k-1} & -\beta_{k-2} & \cdots & -\beta_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\beta_{k-1} & -\beta_{k-2} & \cdots & -\beta_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

Por la linealidad de un determinante.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\beta_{k-1} & -\beta_{k-2} & \cdots & -\beta_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-\beta_{k-1} & -\beta_{k-2} & \cdots & -\beta_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\beta_{k-1} & -\beta_{k-2} & \cdots & -\beta_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \underbrace{\lambda^k - \beta_{k-1}\lambda^{k-1} - \beta_{k-2}\lambda^{k-2} - \ldots - \beta_1\lambda - \beta_0 - \lambda^k}_{\text{Por la hipótesis inductiva}}$$

$$= -\beta_{k-1}\lambda^{k-1} - \beta_{k-2}\lambda^{k-2} - \ldots - \beta_1\lambda - \beta_0$$

$$\Rightarrow \det(\lambda I_{k+1} - A) = (\lambda - \beta_k)\lambda^k + \left(-\beta_{k-1}\lambda^{k-1} - \beta_{k-2}\lambda^{k-2} - \ldots - \beta_1\lambda - \beta_0\right)$$

$$\therefore \det(\lambda I_{k+1} - A) = \lambda^{k+1} - \beta_k\lambda^k - \beta_{k-1}\lambda^{k-1} - \beta_{k-2}\lambda^{k-2} - \ldots - \beta_1\lambda - \beta_0$$

Como se quería probar.

Podemos resumir nuestros resultados anteriores, diciendo que dada una sucesión definida por una relación de recurrencia homogénea lineal de orden *k*, de la forma:

$$S_{n+k} = \beta_{k-1} S_{n+(k-1)} + \beta_{k-2} S_{n+(k-2)} + \cdots + \beta_1 S_{n+1} + \beta_0 S_n,$$

sujeta a las condiciones iniciales $X_0 = \begin{pmatrix} c_{k-1} \\ c_{k-2} \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix}$, el término *n*-ésimo de la sucesión viene dado por:

$$X_n = \left(P^{-1} D^n P\right) X_0$$

siendo D la matriz diagonal cuyas entradas son las raíces del polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \cdots & \beta_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$; que corresponde a:

$$P(\lambda) = \lambda^k - \beta_{k-1}\lambda^{k-1} - \beta_{k-2}\lambda^{k-2} - \ldots - \beta_1\lambda - \beta_0$$

y P es la matriz constituida en sus columnas por vectores propios asociados a los valores propios de A o raíces del polinomio $P(\lambda)$.

Es destacable además, que:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix}$$

Matriz de Pasaje *P* en Términos de los Valores Propios de la Matriz *A*

Consideremos todos los valores propios de la matriz *A* que están dados por los elementos del conjunto $\{ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \}$. ξ_α denota el subespacio propio asociado al valor propio α, $\alpha \in \{ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \}$.

Dado que la matriz *A* tiene la forma $A = \begin{pmatrix} \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \cdots & \beta_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ consideremos un vector propio $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ asociado al valor propio α. Es decir, $Av = \alpha v$, lo que implica:

$$\begin{cases} x_1\beta_{k-1} + x_2\beta_{k-2} + \cdots + x_{k-1}\beta_1 + x_k\beta_0 = \alpha x_1 \\ x_1 = \alpha x_2 \\ x_2 = \alpha x_3 \\ \vdots \\ x_{k-1} = \alpha x_k \end{cases}$$

de donde se concluye que:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha^{k-1} x_k \\ x_2 = \alpha^{k-2} x_k \\ \vdots \\ x_{k-1} = \alpha x_k \end{cases}$$

lo que nos permite obtener la forma del vector propio *v*:

$$v = \begin{pmatrix} \alpha^{k-1} x_k \\ \alpha^{k-2} x_k \\ \vdots \\ \alpha x_k \\ x_k \end{pmatrix}$$

o bien:

$$v = x_k \begin{pmatrix} \alpha^{k-1} \\ \alpha^{k-2} \\ \vdots \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi_\alpha = Gen\{ \left(\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}, \ldots, \alpha, 1 \right) \}$$

En particular se concluye que dimξ_α = 1. Este resultado, constituye un punto medular frente a la pregunta: ¿podría ocurrir que no todos los valores propios de la matriz A sean simples y A sea una matriz diagonalizable?, o bien, si no todos los valores propios de la matriz A son simples, ¿este método que proponemos es aplicable?, claramente la respuesta es no para ambas, pues por la forma en que está definida la matriz A, ésta es diagonalizable sí y solo sí todos sus valores propios son simples.

También el resultado nos conduce a escribir explícitamente la matriz P de la siguiente forma:

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \ddots & \lambda_k^1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

y la expresión (4) podemos reescribirla nuevamente como:

$$X_n = \begin{pmatrix} < tex2html_comment_mark > 167 S_{n+(k-1)} \\ S_{n+(k-2)} \\ \vdots \\ S_n < tex2html_comment_mark > 168 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} < tex2html_comment_mark > 169 \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n < tex2html_comment_mark > 170 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot$$

En esta ecuación sería deseable conocer explícitamente la forma de la matriz P^{-1} para resolver nuestro problema inicial. La siguiente sección se ocupa de esta propuesta, utilizando el método de inducción finita.

Matriz Inversa de la Matriz de Pasaje *P* en Términos de los Valores Propios de la Matriz *A*

En la relación (5) es conveniente determinar la matriz P^{-1}. Es posible obtener para el caso 2×2 que la matriz P^{-1} está dada por:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} & \frac{-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \\ \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} & \frac{-\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} \end{pmatrix}$$

De igual forma para el caso 3×3 se tiene que:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)} & \frac{-(\lambda_2+\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)} & \frac{\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)} \\ \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} & \frac{-(\lambda_1+\lambda_3)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} & \frac{\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} \\ \frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} & \frac{-(\lambda_1+\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} & \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} \end{pmatrix}$$

Finalmente, por inducción finita se deduce que para el caso $k \times k$ se tiene:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^0 h_1 M_0^1 & (-1)^1 h_1 M_1^1 & \cdots & (-1)^{k-1} h_k M_{k-1}^1 \\ (-1)^0 h_2 M_0^2 & (-1)^1 h_2 M_1^2 & \cdots & (-1)^{k-1} h_2 M_{k-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^0 h_k M_0^k & (-1)^1 h_k M_1^k & \cdots & (-1)^{k-1} h_2 M_{k-1}^k \end{pmatrix}$$

donde $M_0^j = 1$ y:

$$M_t^j = \sum_{j_1=1}^k \sum_{j_2=j_1+1}^k \sum_{j_3=j_2+1}^k \cdots \sum_{j_t=j_{t-1}+1}^k \left(\prod_{\substack{r=1 \\ j_r \neq j}}^t \lambda_{j_r} \right) \quad \begin{array}{l} \forall r,t \in I\!N, 1 \le r \le t \le k-1 \\ \forall j, j \in I\!N, 1 \le j \le k \end{array}$$

$$h_q = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^k (\lambda_q - \lambda_j)^{-1} \quad \forall q, q \in I\!N, 1 \le q \le k$$

La expresión (5) en este punto de nuestra exposición, puede ser obtenida explícitamente.

Término *n*-énesimo de la Sucesión Definida por Recurrencia en Términos de los Valores Propios de la Matriz *A*

Se tiene entonces que:

$$X_n = \begin{pmatrix} S_{n+(k-1)} \\ S_{n+(k-2)} \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix} P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c_{k-1} \\ c_{k-2} \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix}$$

De la igualdad anterior es destacable nuestro interés, unicamente por la última fila de la matriz resultante del producto, en cuyo caso multiplicaremos únicamente la última fila de la matriz PD^n por P^{-1}, obteniéndose:

$$\begin{pmatrix} S_{n+(k-1)} \\ S_{n+(k-2)} \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ \sum_{j=1}^k h_j \lambda_j^n (-1)^0 M_0^j \quad \sum_{j=1}^k h_j M_1^j \lambda_j^n (-1)^1 \quad \cdots \\ \cdots \quad \sum_{j=1}^k h_j M_{k-1}^j \lambda_j^n (-1)^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{k-1} \\ c_{k-2} \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix}$$

Realizando la multiplicación indicada se tiene:

$$\begin{pmatrix} S_{n+(k-1)} \\ S_{n+(k-2)} \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ c_{k-1} \sum_{j=1}^k h_j \lambda_j^n (-1)^0 M_0^j + c_{k-2} \sum_{j=1}^k h_j M_1^j \lambda_j^n (-1)^1 + \cdots \\ \cdots + c_0 \sum_{j=1}^k h_j M_{k-1}^j \lambda_j^n (-1)^{k-1} \end{pmatrix}$$

Reescribiendo la última fila de la matriz derecha, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} S_{n+(k-1)} \\ S_{n+(k-2)} \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{m=1}^{k} \left[c_{k-m} \sum_{j=1}^{k} h_j \lambda_j^n M_{m-1}^j (-1)^{m-1} \right] \end{pmatrix}$$

Por igualdad de matrices se concluye que:

$$S_n = \sum_{m=1}^{k} \left[c_{k-m} \sum_{j=1}^{k} h_j \lambda_j^n M_{m-1}^{j} (-1)^{m-1} \right]$$

Finalmente, por la distributividad del producto respecto a la suma y por asociatividad y conmutatividad de la suma, se tiene que:

$$S_n = \sum_{j=1}^{k} \left[h_j \lambda_j^n \sum_{m=1}^{k} c_{k-m} (-1)^{m+1} M_{m-1}^{j} \right] \tag{6}$$

donde $M_0^j = 1$ y:

$$M_t^j = \sum_{j_1=1}^{k} \sum_{j_2=j_1+1}^{k} \sum_{j_3=j_2+1}^{k} \cdots \sum_{j_t=j_{t-1}+1}^{k} \left(\prod_{\substack{r=1 \\ j_r \neq j}}^{t} \lambda_{j_r} \right) \quad \begin{array}{l} \forall r,t \in \mathbb{N}, 1 \leq r \leq t \leq k-1 \\ \forall j, j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq k \end{array}$$

$$h_q = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{k} (\lambda_q - \lambda_j)^{-1} \quad \forall q, q \in \mathbb{N}, 1 \leq q \leq \ k$$

Ejemplos de Aplicación

Subsecciones

Sucesiones Definidas por una Relación de Recurrencia Homogénea Lineal con Coeficientes Constantes Sujeta a Dos Condiciones Iniciales

Dada la sucesión:

$$S_{n+2} = \beta_1 S_{n+1} + \beta_0 S_n$$

sujeta a las condiciones iniciales $S_0 = c_0$, y $S_1 = c_1$ el polinomio característico definido viene dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \beta_1 \lambda^1 - \beta_0$$

siendo λ_1, λ_2 sus raíces distintas dos a dos.

Recurriendo a la expresión (2):

$$\Rightarrow S_n = \sum_{j=1}^{2} \left[h_j \lambda_j^n \sum_{m=1}^{2} c_{2-m} (-1)^{m+1} M_{m-1}^{j} \right]$$

donde $M_0^j = 1$ y:

$$M_t^j = \sum_{j_1=1}^{2} \cdots \sum_{j_t=j_{t-1}+1}^{2} \left(\prod_{\substack{r=1 \\ j_r \neq j}}^{t} \lambda_{j_r} \right) \qquad \begin{array}{l} \forall r, t \in I\!N, 1 \leq r \leq t \leq 1 \\ \forall j, 1 \leq j \leq 2 \end{array}$$

$$h_q = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{2} (\lambda_q - \lambda_j)^{-1} \quad \forall q, q \in I\!N, 1 \leq q \leq 2$$

Lo que nos perminte obtener el término n-ésimo de dicha sucesión recursiva que viene dado por:

$$\Rightarrow S_{\mathrm{n}} = \lambda_1^n \frac{(c_1 - c_0 \cdot \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} + \lambda_2^n \frac{(c_1 - c_0 \cdot \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \qquad (1)$$

Ejemplo 1 *Definimos la sucesión recursiva* (*Sucesión de Fibonacci*) $S_{n+2} = S_{n+1} + S_n$ *sujeta a las condiciones* $S_0 = c_0 = 1$, $S_1 = c_1 = 1$, *El polinomio caracterítico viene dado por*

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

cuyas raíces son $\{ \lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \}$, $\{ \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \}$. *Por* (*3*) *se tiene que* S_n *corresponde a:*

$$S_n = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \tfrac{1}{2}\right)^n \frac{\left(1 - 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\right)}{\left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\right)} + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n \frac{\left(1 - 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\right)}{\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\right)}$$

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \tfrac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n+1}$$

De esta forma:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \right)^{n+1} \qquad \forall n,\ n \in I\!N$$

nos dá el criterio de asociación explícito de la sucesión definida por recurrencia.

Sucesiones Definidas por una Relación de Recurrencia Homogénea Lineal con Coeficientes Constantes de Orden Tres

Dada la sucesión:

$$S_{n+3} = \beta_2 S_{n+2} + \beta_1 S_{n+1} + \beta_0 S_n$$

sujeta a las condiciones iniciales $S_0 = c_0$, $S_1 = c_1$ *y* $S_2 = c_2$ *el polinomio característico definido para la matriz A está dado por:*

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \beta_2 \lambda^2 - \beta_1 \lambda - \beta_0$$

siendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *sus raíces distintas dos a dos.*

Recurriendo a la expresión (*6*)*:*

$$\Rightarrow S_n = \sum_{j=1}^{3} \left[h_j \lambda_j^n \sum_{m=1}^{3} c_{3-m} (-1)^{m+1} M^j{}_{m-1} \right]$$

donde $M_0^j = 1$ *y:*

$$M_t^j = \sum_{j_1=1}^{3} \cdots \sum_{j_t=j_{t-1}+1}^{3} \left(\prod_{\substack{r=1 \\ j_r \neq j}}^{t} \lambda_{j_r} \right) \qquad \begin{array}{l} \forall r, t \in I\!N, 1 \leq r \leq t \leq 2 \\ \forall j, j \in I\!N, 1 \leq j \leq 3 \end{array}$$

$$h_q = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{3} (\lambda_q - \lambda_j)^{-1} \quad \forall q, q \in I\!N, 1 \leq q \leq 3$$

$$(c_2 - c_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3) + c_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3) \qquad (c_2 - c_1 \cdot (\lambda_1 + \lambda_3) + c_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3)$$

$$\Rightarrow S_n = \lambda_1^{\,n} \frac{\quad}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)} + \lambda_2^{\,n} \frac{\quad}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)} \qquad (7)$$

$$+\lambda_3^{\,n}\frac{(c_2-c_1\cdot(\lambda_1+\lambda_2)+c_0\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}$$

Ejemplo 2 *Definimos la sucesión recursiva* $S_{n+3} = S_{n+2} + S_{n+1} + 2S_n$ *sujeta a las condiciones* $S_0 = 1$, $S_1 = 1$, $S_2 = 1$.

El polinomio característico de la matriz A es:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2$$

cuyas raíces son 2, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$. *Por* (7) *se tiene que* S_n *corresponde a:*

$$S_n = (2)^n \frac{\left(1-1\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\right)+1\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\right)}{\left(2-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\right)\left(2-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\right)} +$$

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^n \frac{\left(1-1\cdot\left(2+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\right)+1\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\right)}{\left(\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\right)\left(\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)-2\right)} +$$

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^n \frac{\left(1-1\cdot\left(2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\right)+1\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\right)}{\left(\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)-2\right)\left(\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\right)}$$

$$= \frac{3}{7}2^n + \frac{2\sqrt{3}}{7}\sin\left(\frac{2}{3}n\pi\right) + \frac{4}{7}\cos\left(\frac{2}{3}n\pi\right)$$

De esta forma:

$$S_n = \frac{3}{7}2^n + \frac{2\sqrt{3}}{7}\sin\left(\frac{2}{3}n\pi\right) + \frac{4}{7}\cos\left(\frac{2}{3}n\pi\right) \qquad \forall n,\ n \in IN \cup \{0\}$$

nos dá el criterio de asociación explícito de la sucesión definida por recurrencia.

Sucesiones Definidas por una Relación de Recurrencia Homogénea Lineal con Coeficientes Constantes de Orden Cuatro

Dada la sucesión:

$$S_{n+4} = \beta_3 S_{n+3} + \beta_2 S_{n+2} + \beta_1 S_{n+} + \beta_0 S_n$$

sujeta a las condiciones iniciales $S_0 = c_0$, $S_1 = c_1$, $S_2 = c_2$ *y* $S_3 = c_3$, *el polinomio característico definido para la matriz A está dado por:*

$$P(\lambda) = \lambda^4 - \beta_3\lambda^3 - \beta_2\lambda^2 - \beta_1\lambda - \beta_0$$

siendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ *sus raíces distintas dos a dos.*

Recurriendo a la expresión (6):

$$\Rightarrow S_n = \sum_{j=1}^{4}\left[h_j\lambda_j^n \sum_{m=1}^{4} c_{4-m}(-1)^{m+1} M_{m-1}^{\,j}\right]$$

donde $M_0^{\,j} = 1$ *y:*

$$M_t^{\,j} = \sum_{j_1=1}^{4} \cdots \sum_{j_t=j_{t-1}+1}^{4} \left(\prod_{\substack{r=1 \\ j_r \neq j}}^{t} \lambda_{j_r}\right) \quad \forall r,t \in IN, 1 \le r \le t \le 3 \quad \forall j, j \in IN, 1 \le j \le 4$$

$$h_q = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{4} (\lambda_q - \lambda_j)^{-1} \quad \forall q, q \in IN, 1 \le q \le 4$$

$$\Rightarrow S_n = \lambda_1^{\,n}\frac{(c_3-c_2\cdot(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)+c_1(\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4)-c_0\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot\lambda_4)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)} +$$

$$\lambda_2^{\,n}\frac{(c_3-c_2\cdot(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4)+c_1(\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_3\lambda_4)-c_0\cdot\lambda_1\cdot\lambda_3\cdot\lambda_4)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)} + \qquad (8)$$

$$\lambda_3^{\,n}\left(c_3 - c_2 \cdot (\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_4) + c_1(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_4) - c_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_4\right) +$$

$$(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)$$

$$\lambda_4^{\,n}\left(c_3 - c_2 \cdot (\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_3) + c_1(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3) - c_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3\right)$$

$$(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)$$

Ejemplo 3 *Definimos la sucesión recursiva* $S_{n+4} = \frac{7}{2} S_{n+3} - \frac{11}{2} S_{n+2} + S_{n+1} - S_n$ *sujeta a las condiciones* $S_0 = 2$, $S_1 = -3$, $S_2 = 4$, $S_3 = 7$.

El polinomio característico de la matriz A es:

$$P(\lambda) = \lambda^4 - \frac{7}{2}\lambda^3 + \frac{11}{2}\lambda^2 - 4\lambda + 1$$

cuyas raíces son $1, \frac{1}{2}, (1 - i), (1 + i)$. *Por* (8) *se tiene que* S_n *corresponde a:*

$$\begin{aligned} S_n = {} & (1)^n \frac{\left(7-4\cdot\left(\frac{1}{2}+(1-i)+(1+i)\right)-3\left(\frac{1}{2}\cdot(1-i)+\frac{1}{2}\cdot(1+i)+(1-i)\cdot(1+i)\right)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-i)\cdot(1+i)\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)(1-(1-i))(1-(1+i))} + \\ & \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{(7-4\cdot(1+(1-i)+(1+i))-3(1\cdot(1-i)+1\cdot(1+i)+(1-i)\cdot(1+i))-2\cdot 1\cdot(1-i)\cdot(1+i))}{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-(1-i)\right)\left(\frac{1}{2}-(1+i)\right)} + \\ & (1-i)^n \frac{\left(7-4\cdot\left(\frac{1}{2}+1+(1+i)\right)-3\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot(1+i)+1\cdot(1+i)\right)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+i)\right)}{((1-i)-1)\left((1-i)-\frac{1}{2}\right)((1-i)-(1+i))} + \\ & (1+i)^n \frac{\left(7-4\cdot\left(\frac{1}{2}+1+(1-i)\right)-3\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}(1-i)+1\cdot(1-i)\right)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1-i)\right)}{((1+i)-1)\left((1+i)-\frac{1}{2}\right)((1+i)-(1-i))} \\ = {} & -34 + \frac{168}{5}2^{-n} - \frac{21}{5}2^{\frac{1}{2}n}\cos\left(\frac{1}{4}n\pi\right) + \frac{68}{5}2^{\frac{1}{2}n}\sin\left(\frac{1}{4}n\pi\right) \end{aligned}$$

De esta forma:

$$S_n = -34 + \frac{168}{5}2^{-n} - \frac{21}{5}2^{\frac{1}{2}n}\cos\left(\frac{1}{4}n\pi\right) + \frac{68}{5}2^{\frac{1}{2}n}\sin\left(\frac{1}{4}n\pi\right)$$

$$\forall n, n \in I\!N \cup \{0\}$$

nos dá el criterio de asociación explícito de la sucesión definida por recurrencia.nos dá el criterio de asociación explícito de la sucesión definida por recurrencia.

Sucesiones Definidas por una Relación de Recurrencia Homogénea Lineal con Coeficientes Constantes de Orden Cinco

Dada la sucesión

$$S_{n+5} = \beta_4 S_{n+4} + \beta_3 S_{n+3} + \beta_2 S_{n+2} + \beta_1 S_{n+1} + \beta_0 S_n$$

sujeta a las condiciones iniciales $S_0 = c_0$, $S_1 = c_1$, $S_2 = c_2$, $S_3 = c_3$ *y* $S_4 = c_4$, *el polinomio característico definido para la matriz A está dado por:*

$$P(\lambda) = \lambda^5 - \beta_4\lambda^4 - \beta_3\lambda^3 - \beta_2\lambda^2 - \beta_1\lambda - \beta_0$$

siendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ *sus raíces distintas dos a dos.*

Recurriendo a la expresión (6):

$$\Rightarrow S_n = \sum_{j=1}^{5}\left[h_j \lambda_j^n \sum_{m=1}^{5} c_{4-m}(-1)^{m+1} M^j{}_{m-1}\right]$$

donde $M_0^j = 1$ *y:*

$$M_t^j = \sum_{j_1=1}^{5}\sum_{j_2=j_1+1}^{5}\cdots\sum_{j_t=j_{t-1}+1}^{5}\left(\prod_{\substack{r=1 \\ j_r \neq j}}^{t}\lambda_{j_r}\right) \quad \begin{array}{l} \forall r,t \in I\!N, 1 \le r \le t \le 4 \\ \forall j, j \in I\!N, 1 \le j \le 5 \end{array} ,$$

$$h_q = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{5}(\lambda_q - \lambda_j)^{-1} \quad \forall q, q \in I\!N, 1 \le q \le 5$$

tenemos que el término n-ésimo de la sucesión S_n, *corresponde a:* (9)

$$\lambda_1^n \frac{c_4-c_3(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)+c_2(\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_2\lambda_5+\lambda_3\lambda_4+\lambda_3\lambda_5+\lambda_4\lambda_5)-c_1(\lambda_2\lambda_3\lambda_4+\lambda_2\lambda_3\lambda_5+\lambda_3\lambda_4\lambda_5+\lambda_2\lambda_4\lambda_5)+c_0\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot\lambda_4\cdot\lambda_5}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_5)} +$$

$$\lambda_2^n \frac{c_4-c_3(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)+c_2(\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_1\lambda_5+\lambda_3\lambda_4+\lambda_3\lambda_5+\lambda_4\lambda_5)-c_1(\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_5+\lambda_3\lambda_4\lambda_5+\lambda_1\lambda_4\lambda_5)+c_0\cdot\lambda_1\cdot\lambda_3\cdot\lambda_4\cdot\lambda_5}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_5)} +$$

$$\lambda_3^n \frac{c_4-c_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5)+c_2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_4+\lambda_1\lambda_5+\lambda_2\lambda_4+\lambda_2\lambda_5+\lambda_4\lambda_5)-c_1(\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_5+\lambda_2\lambda_4\lambda_5+\lambda_1\lambda_4\lambda_5)+c_0\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_4\cdot\lambda_5}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_5)} +$$

$$\lambda_4^n \frac{c_4-c_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5)+c_2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_5+\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_5+\lambda_3\lambda_5)-c_1(\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_5+\lambda_2\lambda_3\lambda_5+\lambda_1\lambda_3\lambda_5)+c_0\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot\lambda_5}{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_5)} +$$

$$\lambda_5^n \frac{c_4-c_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)+c_2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4)-c_1(\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_2\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4)+c_0\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot\lambda_4}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_2)(\lambda_5-\lambda_3)(\lambda_5-\lambda_4)}$$

Ejemplo 4 *Definimos la sucesión recursiva $S_{n+5} = -2S_{n+4} + 9S_{n+3} - 18S_{n+2} + 52S_{n+1} - 40S_n$ sujeta a las condiciones $S_0 = 2$, $S_1 = -1$, $S_2 = -1$, $S_3 = 1$ y $S_4 = 1$.*

El polinomio característico de la matriz A es:

$$P(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^4 - 9\lambda^3 + 18\lambda^2 - 52\lambda + 40$$

cuyas raíces son 1, 2, - 5, 2i, - 2i. Por (9) se tiene que S_n corresponde a:

$$S_n = (1)^n \frac{1-1\cdot(2-5+2i-2i)-1\cdot(2\cdot(-5)+2\cdot(2i)+2\cdot(-2i)+(-5)\cdot(2i)+(-5)\cdot(-2i)+(2i)\cdot(-2i))+\cdots}{(1-2)(1+5)(1-2i)(1+2i)}$$

$$\frac{+(2\cdot(-5)\cdot(2i)+2\cdot(-5)\cdot(-2i)+(-5)\cdot 2i\cdot(-2i)+(2)\cdot 2i\cdot(-2i))+2\cdot 2\cdot(-5)\cdot(2i)\cdot(-2i)}{(1-2)(1+5)(1-2i)(1+2i)} +$$

$$(2)^n \frac{1-1\cdot(1-5+2i-2i)-1\cdot(1\cdot(-5)+1\cdot(2i)+1\cdot(-2i)+(-5)\cdot(2i)+(-5)\cdot(-2i)+(2i)\cdot(-2i))+\cdots}{(2-1)(2+5)(2-2i)(2+2i)}$$

$$\frac{+(1\cdot(-5)\cdot(2i)+1\cdot(-5)\cdot(-2i)+(-5)\cdot(2i)\cdot(-2i)+(1)\cdot(2i)\cdot(-2i))+2\cdot 1\cdot(-5)\cdot 2i\cdot(-2i)}{(2-1)(2+5)(2-2i)(2+2i)} +$$

$$\frac{+(1\cdot(-5)\cdot(2i)+1\cdot(-5)\cdot(-2i)+(-5)\cdot(2i)\cdot(-2i)+(1)\cdot(2i)\cdot(-2i))+2\cdot 1\cdot(-5)\cdot 2i\cdot(-2i)}{(2-1)(2+5)(2-2i)(2+2i)} +$$

$$(-5)^n \frac{1-1\cdot(1+2+2i-2i)-1\cdot(1\cdot 2+1\cdot(2i)+1\cdot(-2i)+2\cdot(2i)+2\cdot(-2i)+(2i)\cdot(-2i))+\cdots}{(-5-1)(-5-2)(-5-2i)(-5+2i)}$$

$$\frac{+(1\cdot 2\cdot(2i)+1\cdot 2\cdot(-2i)+2\cdot(2i)\cdot(-2i)+(1)\cdot(2i)\cdot(-2i))+2\cdot 1\cdot 2\cdot(2i)\cdot(-2i)}{(-5-1)(-5-2)(-5-2i)(-5+2i)} +$$

$$(2i)^n \frac{1-(1+2-5-2i)-(2-5-2i+2\cdot(-5)+2\cdot(-2i)+(-5)\cdot(-2i))+\cdots}{(2i-1)\cdot(2i-2)\cdot(2i+5)\cdot(2i+2i)}$$

$$\frac{+1\cdot 2\cdot(-5)+1\cdot 2\cdot(-2i)+2\cdot(-5)\cdot(-2i)+(1)\cdot(-5)\cdot(-2i)+2\cdot 1\cdot 2\cdot(-5)\cdot(-2i)}{(2i-1)\cdot(2i-2)\cdot(2i+5)\cdot(2i+2i)} +$$

$$(-2i)^n \frac{1-(1+2-5+2i)-(2-5+2i+2\cdot(-5)+2\cdot(2i)+(-5)\cdot(2i))+\cdots}{(-2i-1)\cdot(-2i-2)\cdot(-2i+5)\cdot(-2i-2i)}$$

$$\frac{+(1\cdot 2\cdot(-5)+1\cdot 2\cdot(2i)+2\cdot(-5)\cdot(2i)+(1)\cdot(-5)\cdot(2i))+2\cdot 1\cdot 2\cdot(-5)\cdot(2i)}{(-2i-1)\cdot(-2i-2)\cdot(-2i+5)\cdot(-2i-2i)}$$

$$= \frac{41}{15} - \frac{25}{28}2^{\,n} + \frac{10}{609}(-1)^n 5^n + \frac{83}{580}2^n \cos\frac{1}{2}n\pi - \frac{541}{580}2^n \sin\frac{1}{2}n\pi$$

De esta forma:

$$S_n = \frac{41}{15} - \frac{25}{28} 2^{\ n} + \frac{10}{609} (-1)^n 5^n + \frac{83}{580} 2^n \cos \frac{1}{2} n\pi - \frac{541}{580} 2^n \sin \frac{1}{2} n\pi$$

$$\forall n, n \in I\!N \cup \{0\}$$

nos dá el criterio de asociación explícito de

Para terminar, la resolución de problemas está intimamente relacionada con la capacidad del individuo para crear algoritmos. La lógica algorítmica es en esencia una lógica matemática. Desde este punto de vista, como docentes, nuestra responsabilidad en la enseñanza de la matemática debe estar orientada por este sentido pedagógico. El algoritmo desarrollado en este trabajo, es una aplicación que representa nuestra responsabilidad de enseñar a los estudiantes, a utilizar el conocimiento matemático de una manera sistemática. De tal modo, que éstos tengan la capacidad de conciliar la academia con sus necesidades reflejadas en problemas que de una u otra forma, impliquen su inventiva estructurada.

Bibliografía

Apostol, T. (1985) Calculus. México: Reverté.

Carter, T. (1998). State Transition Matrices for Terminal Rendezvous Studies: Brief Survey and New

Hill, R. (1997). Álgebra Lineal Elemental con Aplicaciones. México: Prentice-Hall.

Hoffman, K., & Kunze, R. (1971). Álgebra Lineal. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Hunter, R., & Bagby, S. (1998). Scientific Workplace (Versión 3.0) [Software de Computadora]. Washington: MacKichan.

Johnsonbaugh, R. (1988). Matemáticas Discretas. México: Iberoamérica.

Tucker, A. (1993). La Importancia Creciente del Álgebra Lineal en el Estudiante de Matemática. The College Mathematics Journal.