Recta de Euler en cuadriláteros

Mario Dalcín
Instituto de Profesores Artigas Uruguay
filomate@adinet.com.uy

Resumen

El circuncentro (O), baricentro (G) y ortocentro (H) de todo triángulo están alineados en la recta de Euler y verifican la relación $m\overline{GH} = 2 \cdot m\overline{OG}$. En el presente artículo se define baricentro (G) y ortocentro (H) de un cuadrilátero inscriptible de circuncentro (O) y se demuestra que dichos puntos están alineados y verifican la relación $m\overline{GH} = 3 \cdot m\overline{OG}$.

Palabras clave: recta de Euler, cuadriláteros, medianas, circuncentro, baricentro, ortocentro.

Revista Digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr), volumen 7, número 2.

1. Introducción

En los *Elementos* (Libro IV, Proposición 5) de Euclides ya figura la concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo en el circuncentro. Es en obras de Arquímedes donde aparece la concurrencia de medianas (*El equilibrio de los planos*, Proposición 13) y alturas de un triángulo (*Libro de los Lemas*, Proposición 5) en baricentro y ortocentro respectivamente. Durante 2000 años estos puntos tuvieron una existencia independiente uno del otro. Habría que esperar a Leonard Euler (1707 + 76 = 1783) para reparar en que dichos puntos estaban alineados y por si fuera poco que la distancia del baricentro al ortocentro era el doble de la distancia del circuncentro al baricentro.

El presente artículo busca responder a la siguiente interrogante: ¿Cuál será la situación de estos puntos en un cuadrilátero?.

Para ello tendremos que generalizar la idea de baricentro, circuncentro y ortocentro y buscar definirlos en un cuadrilátero.

Empecemos por señalar que sólo tendrá sentido hablar de circuncentro de un cuadrilátero en el caso en que este sea inscriptible.

2. Recta de Euler en triángulos

Proposición 1

El circuncentro (O), baricentro (G) y ortocentro (H) de un triángulo están alineados y verifican la relación $m\overline{GH} = 2.m\overline{OG}$.

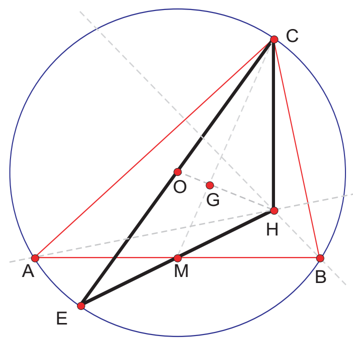

Figura 1:

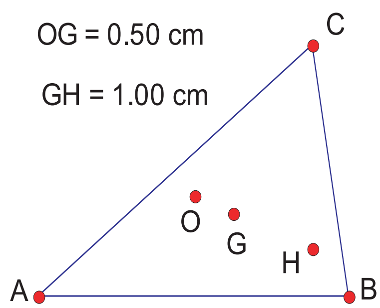

Figura 2:

Demostración

Aquí E el simétrico de C respecto de O, $\overline{AH}$ es perpendicular a $\overline{BC}$ por ser altura de ΔABC, $\overline{EB}$ es perpendicular a $\overline{BC}$ por ser $\overline{EC}$ diámetro de $\odot ABC$, por lo que $\overline{AH}$ es paralela a $\overline{EB}$; del mismo modo $\overline{BH}$ es paralela a $\overline{EA}$. El cuadrilátero $\square AEBH$ es paralelogramo por lo que sus diagonales $\overline{AB}$ y $\overline{EH}$ se cortan en su punto medio M por lo que $\overline{CM}$ es mediana de ΔABC y además mediana de ΔCEH. Como O es punto medio de $\overline{CE}$ el segmento $\overline{OH}$ es mediana de ΔCEH por lo que el punto G de intersección de $\overline{OH}$ y $\overline{CM}$ es baricentro de ΔCEH de donde usando la propiedad de las medianas de un triángulo que demostraremos a continuación podemos afirmar que O, G, H están alineados y $m\overline{GH} = 2 \cdot m\overline{OG}$.

3. Baricentro de un cuadrilátero

Entendiendo como baricentro de un segmento a su punto medio, definimos las medianas de un triángulo como los segmentos que unen cada vértice del triángulo con el baricentro del lado opuesto, se cumple la siguiente proposición.

Proposición 2

Las medianas de un triángulo concurren en un punto que divide a cada mediana en dos segmentos uno doble del otro.

Demostración

Las medianas $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$ se cortan en G, Q y R los puntos medios de $\overline{CG}$ y $\overline{AG}$ respectivamente.

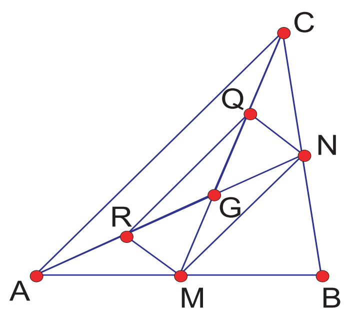

Figura 3:

$\overline{MN}$ y $\overline{QR}$ son paralelos e iguales entre sí por ser paralelos a $\overline{AC}$ e iguales a su mitad por lo que el cuadrilátero $\square MNQR$ es paralelogramo, de donde G es punto medio de sus diagonales $\overline{QM}$ y $\overline{RN}$.

En resumen: $\overline{AR} = \overline{RG} = \overline{GN}$ y $\overline{CQ} = \overline{QG} = \overline{GM}$. (1)

Procediendo de forma análoga: considerando que las medianas $\overline{AN}$ y $\overline{BP}$ se cortan en G', llamando Q' y S a los respectivos puntos medios de $\overline{AG'}$ y $\overline{BG'}$, como $\overline{NP}$ y $\overline{R'S}$ son paralelos a $\overline{AB}$ e iguales a su mitad el cuadrilátero $\square NPR'S$ es paralelogramo de donde G' es punto medio de sus diagonales SP y $\overline{R'N}$.

En resumen: $\overline{AR'} = \overline{R'G'} = \overline{G'N}$ y $\overline{BS} = \overline{SG'} = \overline{G'P}$.(2)

Por lo visto en (1) se cumple que $\overline{AR} = \overline{RG} = \overline{GN}$ y de lo visto en (2) se cumple que $\overline{AR'} = \overline{R'G'} = \overline{G'N}$ por lo que debe ser $G' = G$.

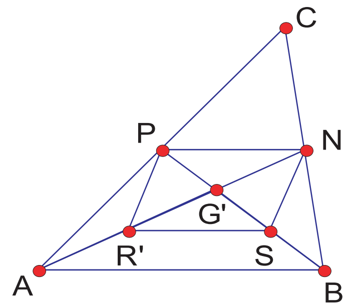

Figura 4:

Definición [Baricentro].

Llamaremos baricentro de un triángulo al punto de intersección de sus medianas.

Definición [Medianas de un cuadrilátero].

Definimos las medianas de un cuadrilátero como los segmentos que unen cada vértice con los baricentros de los triángulos que forman los tres vértices restantes.

Proposición 3

Se cumple la siguiente proposición:

Las medianas de un cuadrilátero concurren en un punto que divide a cada mediana en dos segmentos uno triple del otro.

Demostración

S y T los baricentros de ΔABC y ΔBCD respectivamente. $\overline{AT}$ y $\overline{DS}$ se cortan en G.

Por lo demostrado acerca de las medianas de un triángulo se cumple que $\dfrac{m\overline{NA}}{m\overline{NS}} = \dfrac{m\overline{ND}}{m\overline{NT}} = 3$ de donde por el recíproco de Tales podemos afirmar que $\overline{TS}$ y $\overline{DA}$ son paralelas y por tanto que los triángulos ΔGTS y ΔGAD son semejantes, se cumple así que $\dfrac{m\overline{GA}}{m\overline{GT}} = \dfrac{m\overline{GD}}{m\overline{GS}} = \dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{TS}}$ y como además $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{TS}} = \dfrac{m\overline{ND}}{m\overline{NT}} = 3$ podemos concluir que $m\overline{GA} = 3 \cdot m\overline{GT}$ y $m\overline{GD} = 3 \cdot m\overline{GS}$ (1)

Razonado de manera análoga, si las medianas $\overline{AT}$ y $\overline{BU}$ se cortan en G' se cumple que

$m\overline{G'A} = 3 \cdot m\overline{G'T}$ y $m\overline{G'B} = 3 \cdot m\overline{G'U}$. (2)

A partir de lo visto en (1) el punto G pertenece al segmento $\overline{AT}$ y cumple que $m\overline{GA} = 3 \cdot m\overline{GT}$ y por lo visto en (2) el punto G' pertenece al segmento $\overline{AT}$ también cumple que $m\overline{G'A} = 3 \cdot m\overline{G'T}$, de donde podemos concluir que $G' = G$.

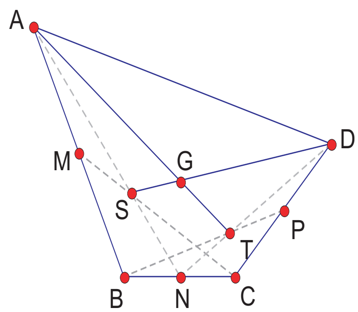

Figura 5:

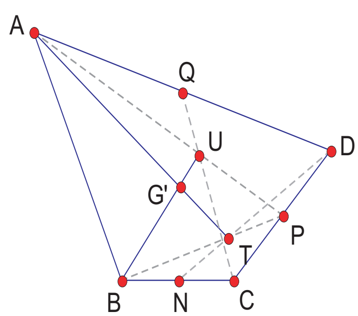

Figura 6:

Definición [Baricentro de un cuadrilátero].

Llamaremos baricentro de un cuadrilátero al punto de intersección de sus medianas.

4. Ortocentro de un cuadrilátero

Proposición 4

Sea ΔABC triángulo de circuncentro O. Sean $A',\ B',\ C'$ simétricos de O respecto de $\overline{BC},\ \overline{CA},\ y\ \overline{AB}$ respectivamente, entonces las circunferencias $\odot(OA, A'),\ \odot(OA, B'),\ \odot(OA, C')$ pasan por un mismo punto H.

Demostración

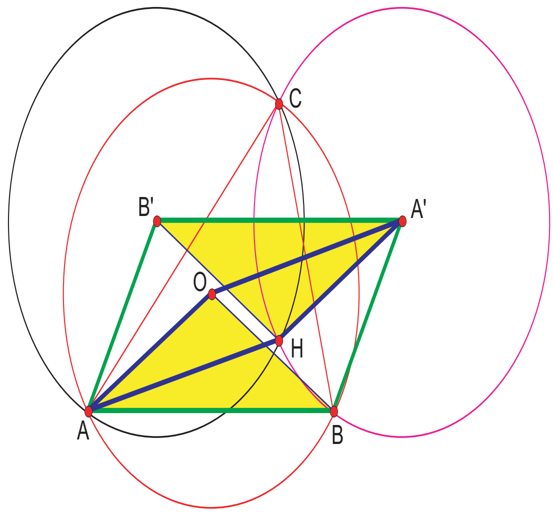

Figura 7:

El cuadrilátero $\square OAB'C$ es rombo al igual que el cuadrilátero $\square OCA'B$ por lo que el cuadrilátero $\square AB'A'B$ es paralelogramo, de donde $m\overline{AB} = m\overline{B'A'}$.

Las circunferencias $\odot(OA, A')$ y $\odot(OA, B')$ se cortan en H.

Los triángulos ΔAOB y $\Delta A'HB'$ son congruentes por tener los tres lados congruentes y como además por ser $\square ABA'B'$ paralelogramo $\overline{AB}$ es paralela a $\overline{B'A'}$ por lo que $\square OAHA'$ es paralelogramo. (1)

Procediendo de forma análoga, el cuadrilátero $\square OAC'B$ es rombo al igual que el cuadrilátero $\square OBA'C$ por lo que $\square AC'A'C$ es paralelogramo, de donde $m\overline{AC} = m\overline{C'A'}$.

Las circunferencias $\odot(OA, A')$ y $\odot(OA, C')$ se cortan en H'.

Los triángulos ΔAOC y $\Delta A'H'C'$ son congruentes por tener los tres lados congruentes y como además por ser $\square AC'A'C$ paralelogramo es $\overline{AC}$ paralela a $\overline{C'A'}$ por lo que $\square AOH'A'$ es paralelogramo. (2)

En (1) y (2) vimos que $\square OAHA'$ y $\square OAH'A'$ son paralelogramos que coinciden en tres de sus vértices por lo que debe ser $H' = H$.

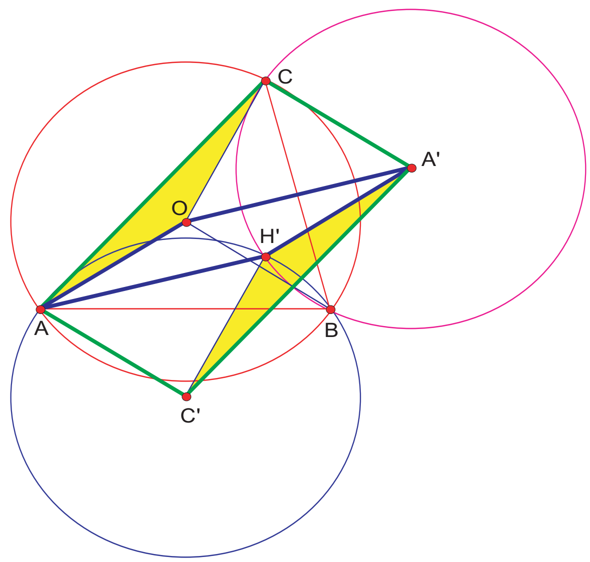

Figura 8:

Definición [Ortocentro de un triángulo.]

Definimos como ortocentro del triángulo ΔABC al punto H determinado en la propiedad anterior.

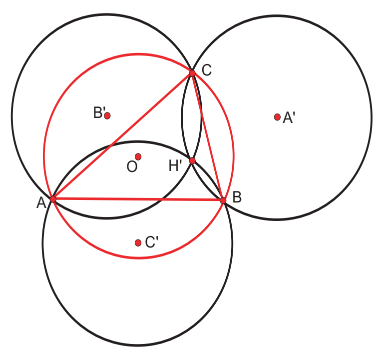

Figura 9:

¿Coincide el ortocentro del triángulo ΔABC definido de esta manera con el punto de intersección de sus alturas?

Como $\overline{OA'}$ es perpendicular a $\overline{BC}$, al ser $\square AOA'H$ paralelogramo, se cumple que $\overline{AH}$ también es perpendicular a $\overline{BC}$. De la misma forma $\overline{BH}$ y $\overline{CH}$ son perpendiculares a $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. H es entonces punto de intersección de las alturas de ΔABC.

Proposición 5

Sea ΔABC un triángulo cualquiera de ortocentro H y circuncentro O. Siendo M el punto medio de $\overline{AB}$ se cumple que $\overline{CH}$ es paralelo a $\overline{OM}$ y $m\overline{CH} = 2 \cdot m\overline{OM}$.

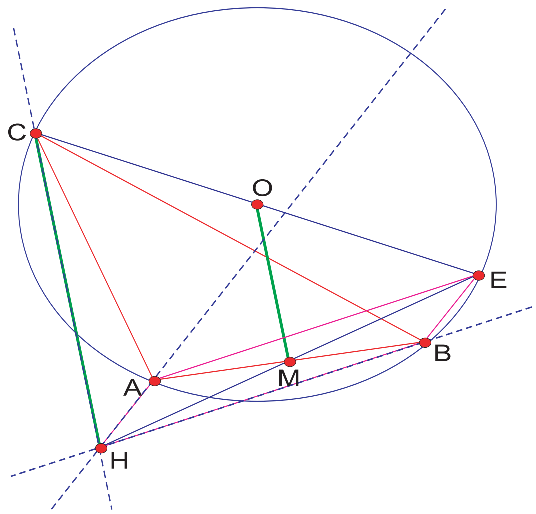

Figura 10:

Demostración

Si $\overline{CE}$ es diámetro de $\odot ABC$ se cumple: $\overline{AH}$ y $\overline{BE}$ son paralelas por ser ambas perpendiculares a $\overline{CE}$, al igual que $\overline{BH}$ y $\overline{EA}$ son paralelas por ser ambas perpendiculares a $\overline{CA}$, entonces $\square BEAH$ es paralelogramo y como M es punto medio de $\overline{AB}$ también M es punto medio de $\overline{EH}$ y como O es punto medio de $\overline{CE}$ se cumple que $\overline{OM}$ es paralelo a $\overline{CH}$ y $2 \cdot m\overline{OM}$.

Proposición 6

Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero inscrito en $\odot(OA, O)$, A', B', C', D' ortocentros de ΔBCD, ΔACD, ΔABD, ΔABC respectivamente. Las circunferencias $\odot(OA, A')$, $\odot(OA, B')$, $\odot(OA, C')$, $\odot(OA, D')$ pasan por un mismo punto H.

Demostración

Sean D' y A' ortocentros de ΔABC y ΔBCD respectivamente. Si N es el punto medio de $\overline{BC}$, por lo demostrado previamente $\overline{AD'}$ es paralela a $\overline{ON}$ y $m\overline{AD'} = 2 \cdot m\overline{ON}$, y también $\overline{DA'}$ es paralela a $\overline{ON}$ y $m\overline{DA'} = 2 \cdot m\overline{ON}$ por lo que $\overline{AD'}$ es paralela a $\overline{DA'}$ y $m\overline{AD'} = m\overline{DA'}$ de donde $\square AD'A'D$ es paralelogramo y por lo tanto $m\overline{AD} = \overline{DA'}$.

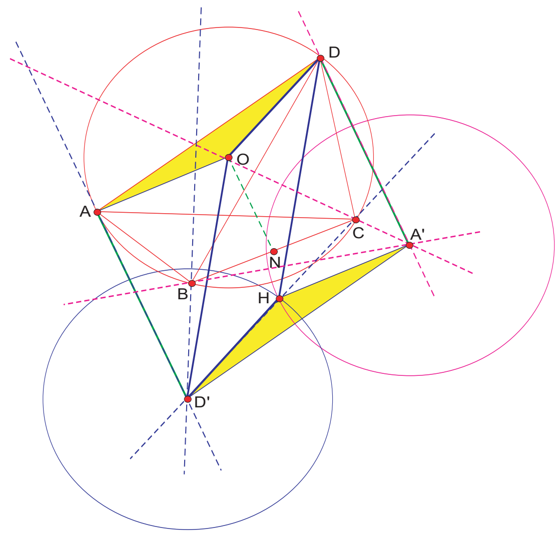

Figura 11:

Las circunferencias $\odot(OA, D')$ y $\odot(OA, A')$ se cortan en H y otro punto.

Los triángulos ΔAOD y $\Delta A'HD'$ son iguales por tener los tres lados iguales, entonces $\square OD'HD$ es paralelogramo. (1)

Procediendo de forma análoga, D' y C' ortocentros de ΔABC y ΔABD respectivamente.

Si M es el punto medio de $\overline{AB}$, por lo demostrado previamente $\overline{DC'}$ es paralela a $\overline{OM}$ y $m\overline{DC'} = 2{\cdot}m\overline{OM}$, y también $\overline{CD'}$ es paralela a $\overline{OM}$ y $m\overline{CD'} = 2{\cdot}m\overline{OM}$ por lo que $\overline{DC'}$ es paralela a $\overline{CD'}$ y $m\overline{DC'} = m\overline{CD'}$ de donde $\square DC'D'C$ es paralelogramo y por lo tanto $m\overline{CD} = m\overline{C'D'}$.

Las circunferencias $\odot(OA, D')$ y $\odot(OA, C')$ se cortan en H'.

Los triángulos ΔCOD y $\Delta C'H'D'$ son iguales, entonces $\square OD'H'D$ es paralelogramo. (2)

En resumen: por lo demostrado en (1) y (2) los cuadriláteros $\square OD'HD$ y $\square OD'H'D$ son paralelogramos que coinciden en tres de sus vértices, por lo tanto debe ser $H = H'$.

Razonando de la misma manera podemos demostrar que $\odot(OA, B')$ siendo B' ortocentro de ΔACD, pasa por H.

Definición [Ortocentro de un cuadrilátero.]

Definimos como ortocentro del cuadrilátero inscriptible $\square ABCD$ al punto H determinado en la propiedad

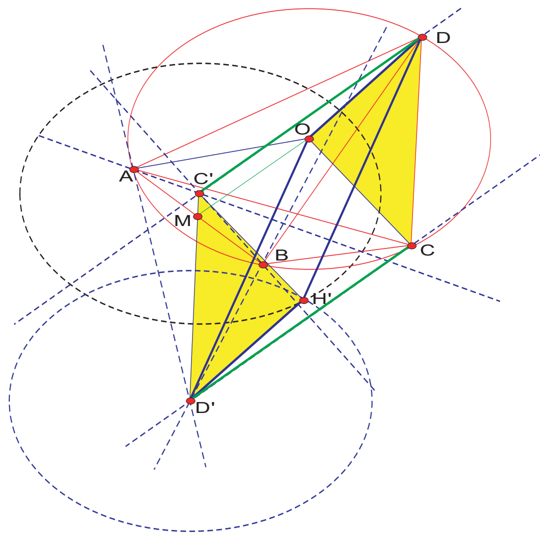

Figura 12:

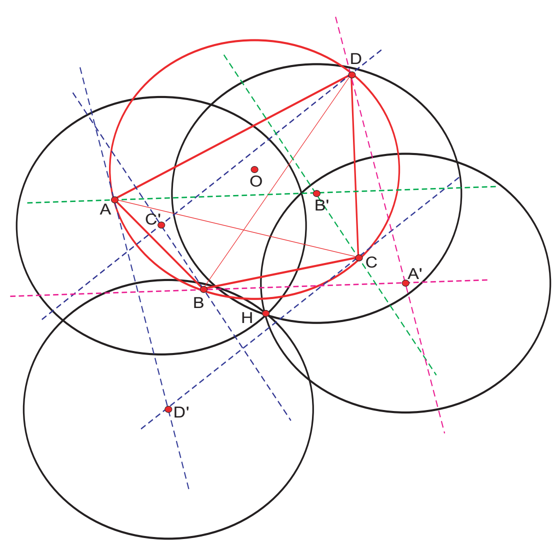

Figura 13:

anterior.

Los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$, al igual que O y H sus circuncentros respectivos se corresponden en una simetría central de centro P, punto de intersección de $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$.

De los visto hasta el momento $\square ABA'B'$, $\square BCB'C'$, $\square CDC'D'$, $\square DAD'A'$ son paralelogramos por lo que los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ tienen punto medio común P.

Los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ se corresponden entonces en una simetría central de centro P.

También se corresponden en la misma simetría central los puntos O y H, circuncentros de $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ respectivamente, por lo que P es punto medio de $\overline{OH}$.

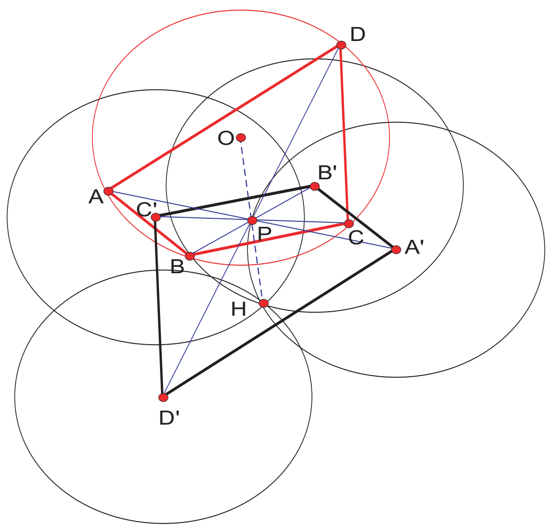

Figura 14:

5. Recta de Euler en cuadriláteros

Proposición 7

El circuncentro (O), baricentro (G) y ortocentro (H) de un cuadrilátero inscriptible están alineados y verifican la relación $m\overline{GH} = 3 \cdot m\overline{OG}$.

Demostración

O circuncentro de ΔABC (1)

D' ortocentro de ΔABC (2)

G_D baricentro de ΔABC (3)

Entonces de (1), (2), (3), se concluye que
O, G_D, D' alineados (4)
$m\overline{G'_D} = 2 \cdot m\overline{OG_D}$ (5)

$C_O(D) = E$ entonces O punto medio de $\overline{DE}$ entonces $\overline{D'O}$ mediana de $\Delta DED'$ (6)

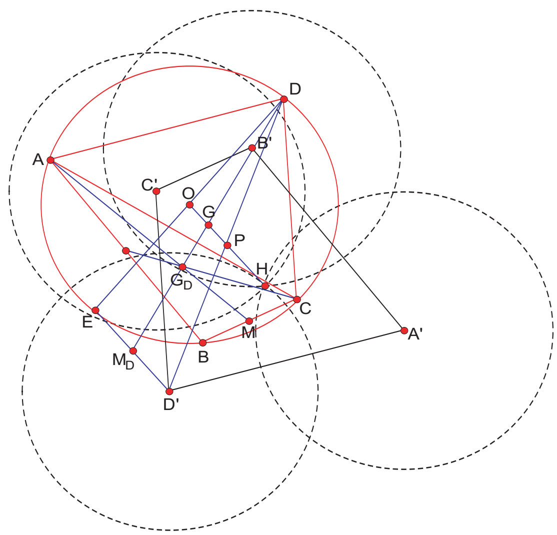

Figura 15:

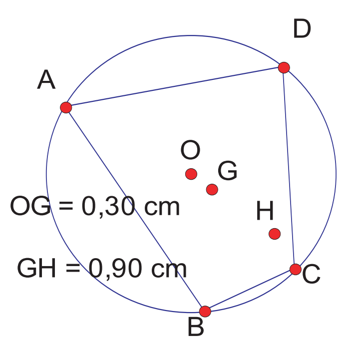

Figura 16:

Entonces de (4), (5), (6), se concluye que

G_D baricentro de $\Delta DED'$ (7)

M_D punto medio de $\overline{D'E}$ (8)

Entonces de (7), (8) se concluye que

$m\overline{DG_D} = 2 \cdot m\overline{G_D M_D}$ (9)

G_D baricentro de ΔABC (10)

Si G baricentro de $\square ABCD$ (baricentro de un cuadrilátero) entonces D, G, G_D alineados (11)

$m\overline{DG} = 3 \cdot m\overline{GG_D}$ (12)

Entonces de (9), (10), (11), (12) se concluye que

G punto medio de $\overline{DM_D}$ (13)

O punto medio de $\overline{DE}$ (14)

Si $\overline{OH} \cap \overline{DD'} = \{P\}$entonces$P$ punto medio de $\overline{DD'}$ (por lo visto en 6) (15)

M_D punto medio de $\overline{D'E}$ (16)

Entonces de (13), (14), (15), (16) se concluye que

G punto medio de $\overline{OP}$ (17)

P punto medio de $\overline{OH}$ (por lo visto en 6) (18)

Entonces de (17), (18), se concluye que

$\therefore$ O, G, H alineados y $m\overline{GH} = 3 \cdot m\overline{OG}$

6. Conclusiones

La forma en que fue definido el baricentro de un cuadrilátero cualquiera permite que pueda definirse por recurrencia el baricentro de un polígono cualquiera. También por recurrencia puede definirse el ortocentro de un polígono inscriptible cualquiera.

Para poder hablar de circuncentro de un polígono es necesario que este sea inscriptible.

La demostración vista para la recta de Euler en cuadriláteros inscriptibles permite una reformulación para polígonos inscriptibles cualesquiera: el circuncentro (O) baricentro (G) y ortocentro (H) de un polígono inscriptible de n lados están alineados y verifican la relación $m\overline{GH} = (n-1)m\overline{OG}$

7. Referencias

Heath, T. L. (1953). *The Works of Archimedes*. U.S.A.: Dover.

Jackiw, N. (1991). *The Geometer's Sketchpad* (Software). U.S.A.: Key Curriculum Press.

Euclides. (1992). *Elementos de Geometría*. México: UNAM.

Goloviná, L. I.; Yaglóm, I. M. (1981). *Inducción en la Geometría*. Rusia: Mir.

Yaglóm, I. M. (1975). *Geometric Transformations I*. U.S.A.: MAA.