



Nuestra Numeración Actual o el legado de Fibonacci.

Vernor Arguedas T.

vargueda@amnet.co.cr

Escuela de Matemática

Universidad de Costa Rica

Palabras claves: Fibonacci, Diofanto, algoritmo, edad media, numeración.

Decía Laplace en su obra "Información sobre la Matemática India":

"El ingenioso método de expresar cada número posible utilizando un conjunto de diez símbolos (cada símbolo tiene un valor de posición y un valor absoluto) surgió en la India. La idea parece tan simple que hoy en día su gran importancia ya no es apreciada. Su sencillez reside en la forma en que facilita el cálculo y colocó la aritmética en un lugar destacado entre las invenciones más útiles. La importancia de esta invención es más fácil de apreciar si se considera que fue más allá de los dos hombres más grandes de la Antigüedad, Arquímedes y Apolonio"

De Laplace podríamos decir muchas cosas, algunas referencias sobre él hicimos en nuestro artículo sobre el Teorema de Napoleón. En la dirección

http://es.wikipedia.org/wiki/Pierre_Simon_Laplace

se encuentran alguna información sobre el Sr. Marqués.

El mundo árabe musulmán tomó estas ideas y las introdujo en Europa, algunos ejemplos de cómo variaban estos numerales se ven en las siguientes tablas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠

Figura 1.1 Al- Sijzi 969 d.c.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠

Figura 1.2 Al -Biruni 1082 d.c.

Le corresponde a Leonardo de Pisa, póstumamente conocido como Fibonacci, el honor de introducir estos numerales indo-árabes en la Europa cristiana; eso aconteció entre el siglo XII y la primera parte del XIII. Hay muchas biografías de este matemático italiano, en las siguientes dos direcciones hay algunas referencias sobre este importantísimo personaje:

http://es.wikipedia.org/wiki/Leonardo_de_Pisa

<http://ciencia.astroseti.org/matematicas/articulo.php?num=3608>



Figura 1.3

En esa época de cruzadas, caballeros y deseos no contenidos de conquistar al mundo musulmán y recuperar Jerusalén para la cristiandad se ubica Leonardo. Gran parte de su obra se perdió, nos quedan:

“Liber Abaci”, “Libro de los Ábacos” o “Libro de los Cálculos”, escrito en 1202, una de sus obras más importante. En el 2002 al cumplirse 800 años de la publicación original se editó el libro en inglés moderno. El prof. Siegler hizo la traducción. Leemos en la presentación del libro –traducción libre–

“Primera edición en inglés 800 años después, de la obra escrita originalmente en latín. El libro introduce en Europa los numerales hindúes 0 hasta 9, la palabra cero, la noción de un algoritmo (nombre dado por el académico persa Abu ‘Abd Allah Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (ca. 780–850), así como el álgebra que viene en el libro de al-Khwarizmi”

El profesor francés Edouard Lucas publicó en lengua francesa en 1877 el libro “Recherches sur Plusieurs Ouvrages De Leonard de Pise” –Investigaciones sobre diversas obras de Leonardo de Pisa–. Este magnífico ejemplar se encuentra en la dirección

http://www.math.utah.edu/~beebe/software/java/fibonacci/lucas_book_leonard_de_pise.pdf

En su obra Lucas hace comentarios y referencias a diversos aspectos tratados por Leonardo y su impacto en el trabajo de personajes tan célebres como Gauss, Girard entre otros. En el “Liber Abaci” aparece el famosísimo problema del crecimiento de una población de conejos, que da origen al concepto de sucesión de Fibonacci.

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}; F_1 = 0, F_2 = 1, n \text{ entero positivo}$$

Me permito transcribirla en latín:

Quot paria coniculatorum in uno anno ex uno pario germinentur.

Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circumdatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant. Quia suprascriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum, erunt paria duo in uno mense. Ex quibus unum, scilicet primum, in secundo mense geminat; et sic sunt in secundo mense paria **3** ; ex quibus in uno mense duo pregnantur; et geminantur in tercio mense paria 2 coniculorum ; et sic sunt paria **5** in ipso mense; ex quibus in ipso pregnantur paria 3; et sunt in quarto mense paria **8**; ex quibus paria 5 geminant alia paria 5: quibus additis cum parijs 8, faciunt paria **13** in quinto mense; ex quibus paria 5, que geminata fuerunt in ipso mense, non concipiunt in ipso mense, sed alia 8 paria pregnantur; et sic sunt in sexto mense paria **21**; cum quibus additis parijs 13, que geminantur in septimo , erunt in ipso paria **34** cum quibus additis parijs 21, que geminantur in octauo mense, erunt in ipso paria **55**; cum quibus additis parijs [sic] 34, que geminantur in nono mense, erunt in ipso paria **89**; cum quibus additis rursus parijs 55, que geminantur in decimo mense **144**; cum quibus additis rursus parijs 89, que geminantur in undecimo mense, erunt in ipso paria **233**. Cum quibus etiam additis parijs 144 , que geminantur in ultimo mense, erunt paria **377**; et tot paria peperit suprascriptum par in prefato loco in capite unius anni. Potes enim uidere in hac margine, qualiter hoc operati fuimus, scilicet quod iunximus primum numerum cum secundo, uidelicet 1 cum 2; et secundum cum tercio; et tercium cum quarto; et quartum cum quinto, et sic deinceps, donec iunximus decimum cum undecimo, uidelicet 144 cum 233; et habuimus suprascriptorum cuniculorum summam, uidelicet 377 ; et sic posses facere per ordinem de infinitis numeris mensibus.

En negrita indico los números 3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377 que forman la sucesión de Fibonacci.

Del Liber Abaci se conservan 12 manuscritos, 3 completos; aparentemente hay varias versiones hechas por el mismo Leonardo una de 1202 y otra de 1228 ampliada. En este libro Leonardo nos muestra la superioridad del sistema posicional con los números 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 sobre métodos de conteo con los dedos o con los números romano, además de las reglas de cálculo con estos números. Analiza varios tipos de fracciones, cálculo de raíces cuadradas y problemas con palabras. Además en el liber se incluyen cálculos de interés para comerciantes, como méto-

Nuestra Numeración Actual. Vernor Arguedas T.

Derechos Reservados © 2009 Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/)

dos para determinar cambios de moneda o cálculo del interés.

En la edición de 1228 Leonardo se refiere a sus obras: "Practica Geometriae" (Geometría práctica) escrita entre 120-1221. Está dividido en siete capítulos en los que aborda problemas de geometría dimensional referente a figuras planas y sólidas. Es la obra más avanzada en su tipo que se encuentra en esa época en Occidente). Se basa en la obra de Euclides, Arquímedes y hace referencia a los trabajos de Platón de Tivoli (1145) y Liber Quadratorum (cuarto libro) y que no se encuentra completo, en él aparece la palabra congruente. Se considera la obra que continúa los trabajos de Diofanto de Alejandría (tal vez nace entre los años 200 y 214 d.c. y quizá muere entre los años 284 y 298 d.c, es muy probable que esas fechas estén equivocadas y hubiera nacido en otro siglo) de quien se tiene muy poca información. Es el padre antiguo de lo que hoy se llama teoría de números.

Indica Wikipedia sobre Diofanto:

Nacido en Alejandría, nada se conoce con seguridad sobre su vida salvo la edad a la que falleció, gracias a este epitafio redactado en forma de problema y conservado en la antología griega: *"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."*

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x \quad \text{donde } x \text{ es la edad que vivió Diofanto.}$$

Según esto, Diofanto falleció a la edad de 84 años. Se ignora, sin embargo en qué siglo vivió. Si es el mismo astrónomo Diofanto que comentó Hipatia (fallecida en 415), habría fallecido antes del siglo V, pero si se trata de personas distintas cabe pensar que vivía a finales de dicho siglo, ya que ni Proclo ni Papo le citan, lo que resulta difícil de entender tratándose de un matemático que pasa por ser el inventor del álgebra. En opinión de [Albufaraga](#), Diofanto vivía en los tiempos del emperador Juliano, hacia 365, fecha que aceptan los historiadores. Como se puede apreciar es poco lo que podemos indicar con certeza acerca de Diofanto, famoso por su obra Aritmética.



Figura 1.4

En http://ciencia.astroseti.org/matematicas/articulo_3629_biografia_diofanto_alejandria.htm hay un resumen extenso de esta obra extraordinaria de Diofanto. En su Liber Quadratorum Leonardo nos introduce a las ternas pitagóricas, dando métodos para su cálculo; a ecuaciones de grado 2 y diversos problemas de teoría de números. Otra de sus obras que se conserva es Flos (1225) en el que resuelve tres problemas que le fueron planteados por Johannes de Palermo. Es notable la solución aproximada que da a la ecuación: $10x + 2x^2 + x^3 = 20$.

Fibonacci prueba que la solución de la ecuación no es un entero ni una fracción, ni la raíz cuadrada de una fracción. Indica Fibonacci:

Y debido a que no es posible resolver esta ecuación de ninguna otra forma de las citadas anteriormente, trabajé para reducir la solución a una aproximación.

“Di minor guisa” (aritmética comercial) está perdido. Tampoco se encuentra el Comentario al Libro X de Euclides. Este libro de Euclides introduce el concepto de inconmensurable y por lo tanto inicia la discusión de los números irracionales.

En <http://www.youtube.com/watch?v=Xw4xFxzpy4s> Antonio Pérez nos presenta a Leonardo y su mundo. Por cierto su página <http://platea.pntic.mec.es/aperez4/> es muy interesante y varias veces la he recomendado.

Nuestra Numeración Actual. Vernor Arguedas T.

Derechos Reservados © 2009 Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/)

Leonardo insiste en toda su obra en la teoría y práctica de los conceptos que presenta, la matemática utilitaria sobre todo para el comercio y la matemática teórica que resuelve problemas aparentemente alejados de lo cotidiano, de lo inmediato, llena de valores estéticos. Con Leonardo –Fibonacci– no sólo se nos simplificó la aritmética elemental, sumar, restar y dividir se hizo un procedimiento sencillo, tan sencillo que lo aprende un niño o una niña sin dificultad, sino que se introdujo una simbología que permitía plantear una gran cantidad de problemas nuevos, se dio un paso gigantesco en la historia de la humanidad y comenzó el lento pero seguro renacer de las matemáticas.

Leonardo sintetiza la interacción de las culturas en las cuales él se movía, con sus contradicciones, sus defectos y sus virtudes. Cuando introdujo el cero escribió: “cero (quod arabice zephirum appellatur) (al que los árabes denominan zephyrum).” A partir de entonces Europa adoptó el sistema base 10.

Una nota final: El concepto del cero se desarrolló en las culturas mayas (más o menos 40 a.c), así como un sistema posicional de base 20. En la India apareció la idea varios siglos después. Para el año 525 existen pruebas de que el cero fue usado en Roma junto con los numerales romanos, pero como palabra y no como símbolo, para representar el valor nulo o nada. Con el tiempo, para la época de Brahmagupta siglo VII d.c., el concepto del cero se extendió a China y al mundo islámico.

En la obra principal de Brahmagupta(628 d.c): *Brahmasphuta-siddhanta* (La apertura del universo), se pueden leer cosas como:

- La suma de dos cantidades positivas es positiva
- La suma de dos cantidades negativas es negativa
- La suma de cero y una cantidad positiva es una cantidad positiva
- La suma de cero y cero es cero
- La suma de un positivo y un negativo es su diferencia, si son iguales es cero
- En la resta, el menor debe ser quitado del mayor, positivo de positivo
- En la resta, el menor debe ser quitado del mayor, negativo de negativo
- Si el más grande se resta del menor la diferencia debe invertirse
- Si un positivo se resta de un negativo y un negativo de un positivo, se deben agregar de manera conjunta

- El producto de una cantidad negativa por una positiva es negativa
- El producto de una cantidad negativa por una negativa es una cantidad positiva
- El 'producto de dos positivos es positivo'
- Positivo dividido por positivo es positivo. Negativo dividido por negativo es positivo
- Positivo dividido por negativo es negativo. Negativo dividido por positivo es negativo
- Un número positivo o un número negativo si es dividido por cero es una fracción con cero como denominador (ESTE ES UN CONCEPTO EQUIVOCADO)
- Cero dividido por un número negativo o positivo es cero o se expresa como una fracción con cero en el denominador y una cantidad finita en el denominador
- Cero dividido por cero es cero (ESTE ES UN CONCEPTO EQUIVOCADO)

¿Qué cálculo operacional habían desarrollado las mayas? No lo sabemos: por sus avances astronómicos se puede deducir que habían desarrollado algo equivalente o superior a lo que apareció hasta casi siete siglos después en el Brahmasphutasiddhanta, pero esto desde luego es una especulación pues los conquistadores destruyeron casi todo.