Sección de Historia
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 9, N^o 1. 2008

Historia del Teorema Fundamental del Álgebra (TFA) y algunas curiosidades

Vernor Arguedas
vargueda@amnet.co.cr
Escuela de Matemáticas
Universidad de Costa Rica

Palabras clave: Historia de la matemática, Teorema Fundamental del Álgebra .

Podríamos enunciar el teorema fundamental del álgebra de la siguiente manera:

Teorema 1.1 *(TFA) Cada ecuación polinómica de grado* n, *con coeficientes complejos, tiene* n *raíces en el cuerpo de los complejos.*

De hecho existen muchas formulaciones equivalentes del TFA. Por ejemplo, que cada polinomio real puede ser expresado como producto de factores lineales reales o cuadráticos reales. Los babilonios pudieron resolver algunas ecuaciones de segundo grado y tercer grado hace bastantes siglos, la gran mayoría de esta información esta perdida.

El drama de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ en tiempos pitagóricos lo hemos comentado en varios artículos anteriores.

Los estudios (alrededor 800 d.C.) llevados a cabo por Al-Khwarizmi (780-750) quien dio origen a la palabra algoritmo sólo buscaban raíces reales positivas y el TFA como tal carecía de sentido.

En http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/conocer/alkhwarizmi.htm hay una corta pero concisa referencia a Al-Khwarizmi.

Al-jabr de la cual proviene la palabra álgebra significaba "lo que es útil".

Para Fibonnacci -Leonardo de Piza (1170-1250) no era posible resolver las ecuaciones de grado 3 por medio de radicales.

Cardano (1501-1576) fue el primero en darse cuenta que se podía trabajar con cantidades más generales que los números reales. El descubrimiento lo hizo al analizar las raíces de una cúbica. Esos métodos aplicados a la ecuación $x^3 = 15x + 4$ dieron una respuesta que implicaban la raíz cuadrada de -121, Cardano sabía que $x = 4$ era una solución de la ecuación y fue capaz de manipular los nuevos números (aunque no entendía como era que funcionaban).

Este médico, astrólogo y jugador empedernido a quien la Santa Inquisición persiguió de viejo, es una de las figuras más importantes en el desarrollo del álgebra, a pesar de todo el Papa le otorgó una pensión al final de sus días.

Una biografía de Cardano se encuentra en:

http://es.wikipedia.org/wiki/Cardano

La ecuación de tercer grado nos presenta una batalla sórdida entre dos personajes quienes afirmaban haberla resuelto: Scipione del Ferro (1465-1526) y Tartaglia (1499-1557), cuyo verdadero nombre era Niccolo Fontana. Tartaglia significa tartamudo, sobrenombre que le pusieron luego de una herida durante el asedio de su ciudad natal Brescia en 1512. Se le acusa de haber presentado como propia una traducción de una obra de Arquímedes.

En http://es.wikipedia.org/wiki/Niccol%C3%B2_Fontana_Tartaglia se puede leer una breve reseña.

Tartaglia empezó atrabajar el problema de la solución de la ecuación de tercer grado cuando se enteró que Scipione del Ferro había resuelto el problema. Este último no lo publicó y sus trabajos sobre el tema fueron dados a conocer después de muerto por uno de sus discípulos. Su yerno Annibale Nave también matemático quien estaba casado con la hija de del Ferro, Filippa.

En 1543, Cardano y Ludovico Ferrari (un alumno de Cardano) viajan a Bolonia en busca de Nave y del manuscrito de su suegro, para analizar este tema. Según cuenta Ferrari, ambos se encontraron con Nave en Bolonia y éste les muestra el manuscrito de del Ferro donde aparecía la resolución de la ecuación de tercer grado. Aunque el manuscrito no se conserva, hay conjeturas sobre si del Ferro trabajó sobre el tema como consecuencia de una visita que realizó Pacioli (1445-1517) a Bolonia. Pacioli (`http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/conocer/pacioli.htm`) enseñó en la Universidad de Bolonia entre 1501 y 1502 y discutió distintos temas matemáticos con del Ferro. No se sabe si trataron este tema, pero Pacioli lo incluyó en su famoso tratado Summa . En: `http://www.sil.si.edu/digitalcollections/incunabula/CF/image_details.cfm?goff=L-0315` se encuentran fotos muy hermosas de esta obra que había publicado en 1514.

Algún tiempo después de la visita de Pacioli, parece que del Ferro había resuelto uno de los dos casos con coeficientes positivos. En 1925, de acuerdo a manuscritos del siglo XVI, se atribuye a del Ferro un método para resolver el caso: $3x^3 + 18x = 60$.

Hoy se cree que del Ferro sólo podía resolver cúbicas de esa forma $x^3 + mx = n$, con m y n positivos. Se sabe, que el caso general, $y^3 - by^2 + cy - d = 0$, se reduce a este por medio del cambio lineal $y = x + b/3$. Obteniéndose la cúbica reducida anterior con los valores $m = c - b/3$, $n = d - bc/3 + 2b/27$.

De esta disputa nos ha llegado que Tartaglia retó públicamente a Nava a resolver una serie de problemas, disputa que nos da una cierta idea de los conocimientos de esa época. Hasta donde sabemos el combate lo ganó ampliamente Tartaglia, eso incluía las bebidas y la comida. Estos acontecimientos llegaron a oídos de Cardano quien le solicitó a Tartaglia los métodos que él usaba para resolver la ecuación de tercer grado. En 1539 Tartaglia le trasmitió a Cardano sus secretos -en la forma de un poema cifrado-con la condición de que no los revelara. En 1543 Cardano pudo finalmente ver los trabajos originales de del Ferro que mostraban que éste había resuelto la ecuación de tercer grado antes que Tartaglia. De esta manera Cardano consideró que quedaba libre del compromiso con Tartaglia.

En su obra Ars Magna(1545) Cardano describe el método y se lo atribuye a del Ferro.

Bombelli(1526-1572) en su Algebra, publicado en 1572, dió unas reglas para manipular estos nuevos números.

En la siguiente referencia:

`http://web.educastur.princast.es/ies/elpiles/ARCHIVOS/paginas/depar/matematicas/bombelli.htm`

se encuentra algunos datos adicionales.

Con Descartes - 1596- 1650 comienza una nueva época en su Geometría introduce el concepto de número imaginario.
No podemos dejar de mencionar que ese apéndice del Discurso del Método, es una de las obras más importantes en la Historia con mayúscula de la Matemática.

Con Franciscus Vieta(1540-1603) comienza otro momento en esta milenaria historia. Algunos historiadores afirman que con Vieta se inician los fundamentos de lo que 4 siglos después sería el álgebra moderna.El afirmó que todo polinomio de grano n, admite n soluciones, no fue el primero, el matemático flamenco Albert Girard en 1629 en su L'invention en algebre, hizo tal afirmación, sin embargo no indicó que fueran complejos; o sea, números de la forma $a+bi$, a,b reales.

De hecho, ese fue el problema del TFA durante muchos años puesto que los matemáticos aceptaban la afirmación de Albert Girard como inmediata!. Aceptaban que una ecuación de grado n debe tener n raíces, el problema para ellos era demostrar que tenían la forma $a+bi$, a, b reales.

Aunque parece que Harriot sabía que un polinomio que tiene una raíz a (en un cuerpo), era divisible por $x-a$. Esto fue establecido por Descartes en 1637 en La géométrie. Albert Girard no dio estas razones para entender el concepto de raíz. Una demostración de la falsedad del TFA fue dada por Leibniz en 1702 (demostrando así que todos nos equivocamos) cuando aseguró x^4+1 no podía ser escrito como el producto de dos factores cuadráticos complejos. Su error fue no darse cuenta que la unidad imaginaria i tiene dos raíces cuadradas complejas

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Euler, en 1742 demostró que el contraejemplo de Leibniz era falso.

Volvamos a Vieta, el matemático belga Adrian van Roomen planteó como problema a todos los matemáticos del mundo, la siguiente ecuación de grado 45 en 1593, el embajador belga le comentó en una visita al rey Enrique IV, que pena, que ningún matemático francés, pudiera resolver ese problema. El rey mandó a llamar a Vieta: la leyenda dice que Vieta la vio, reconoció inmediatamente unas relaciones trigonométricas y la resolvió.

En su euforia el rey imitando a Pitágoras ofreció sacrificar cien ovejas para celebrar la ocasión.

La ecuación es la siguiente:

$$\begin{aligned} A &= 45x-3795x^3+95634x^5-1138500x^7+7811375x^9-34512,075x^{11}\\ &\quad +105306075x^{13}-232676280x1^{15}+384942375x^{17}-488494125x^{19}\\ &\quad +483841800x^{21}-378658800x^{23}+236030652x^{25}-117679100x^{27}\\ &\quad +46955700x^{29}-14945040x^{31}+3764565x^{33}-740259x^{35}\\ &\quad +111150x^{37}-12300x^{39}+945x^{41}-45x^{45}+x^{45}45 \end{aligned}$$

En donde

$$A=\sqrt{\frac{7}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}-\sqrt{\frac{15}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}}$$

El matemático aficionado Larry Freeman mantiene un blog y la solución de Vieta se puede leer en:

`http://fermatslasttheorem.blogspot.com/2007/02/van-roomens-problem-solution-explained.html`

La historia continúa:

En 1746, D'Alembert hizo el primer intento serio de demostración del TFA. Para un polinomio f, tomó dos números reales b, c tal que $f(b)=c$. Entonces, demostró que existen dos números complejos z_1 y w_1 tal que

$|z_1| < |c|$ y $|w_1| < |c|$ con $f(z_1) = w_1$

Luego, hace un proceso de iteración el proceso para encontrar una raíz de f. Su demostración tenía varias debilidades. En primer lugar, usa un lema sin demostración que no fue demostrado hasta 1851, por Puiseau, pero cuya demostración usa el TFA! En segundo lugar, no usó ningún criterio de compacidad para la existencia de la convergencia. No obstante, las ideas de la esta demostración son muy importantes. Eso ha pasado muchas veces y posiblemente pasará, los métodos se van perfeccionando y las teorías se van afinando.

Al poco tiempo, Euler fue capaz de probar que todo polinomio real con grado, $n < 7$, tiene exactamente n raíces complejas. En 1749, intentó una demostración del caso general, o sea, el TFA para polinomios reales. Su demostración, que aparece en Recherches sur les racines imaginaires des équations, está basada en descomponer un polinomio mónico reducido (con $a_{n-1} = 0$), de grado $n = 2^r$ como el producto de dos polinomios mónicos de grados iguales, 2^{r-1}. Multiplicando posiblemente el polinomio inicial por un factor de la forma ax^k y aplicando después un cambio lineal para convertirlo en uno mónico reducido y de grado potencia de dos. Ya en el Ars Magna de Cardano aparece el cambio de variable para hacer cero el coeficiente de la segunda potencia más grande de la indeterminada. O sea, en descomponer un polinomio mónico de grado $2n$ en dos de grados $m = 2n - 1$.

En 1772, Lagrange planteó objeciones a la demostración de Euler. Afirmó que las funciones racionales podían conducir eventualmente a la contradicción $\frac{0}{0}$. Lagrange usó su conocimiento de las permutaciones de las raíces para encontrar todos los puntos débiles de la demostración de Euler. El único incoveniente es que el propio Lagrange estaba usando que las raíces existían y que podía trabajar con ellas y deducir diferentes propiedades.

En 1795, Laplace trató de probar el TFA usando el discriminante de un polinomio. Su demostración era muy elegante solo que de nuevo suponía la existencia de las raíces.

A Gauss se le concede el crédito de la primera demostración del TFA. En 1799, en su tesis doctoral presentó su esquema de demostración y también todas las objeciones a las anteriores. Fue el primero en observar que todas ellas suponían la existencia de las raíces y deducían propiedades de ellas. Él mismo no afirmó tener la demostración, sino que una demostración rigurosa debía ir en esos términos. Esta primera demostración de Gaus es en esencia topológica y tiene serios inconvenientes. Hoy día no es aceptada.

En 1814, el contable suizo Jean Robert Argand publicó una demostración del TFA que posiblemente sea la más simple de todas. Su demostración está basada en una idea de d'Alembert de 1746. Argand había esquematizado esas ideas en una publicación anterior, Essai sur une manière de représenter les quantitiés imaginaires dans les constructions géometriques. En ese artículo interpretaba la unidad imaginaria i como un giro de 90 en el plano, haciendo surgir lo que hoy día llamamos plano de Argand o diagrama de Argand; o sea, la representación geométrica de los números complejos. En su artículo Réflexions sur la nouvelle théorie d'analyse, Argand simplifica la idea usando un teorema general sobre la existencia de un mínimo de una función continua.

En 1820, Cauchy le dedicó un capítulo completo de su Cours d'analyse a la demostración de Argand (aunque sorprendentemente no adjudica el crédito a nadie, o sea no nombra a Argand). Esta demostración en aquella época no es completamente rigurosa, ya que el concepto de extremo inferior no había sido desarrollado todavía. La demostración de Argand fue recogida por Chrystal en su libro de texto Algebra en 1886. Este libro fue muy divulgado y la demostración de Argand se hizo famosa.

En 1816, dos años mas tarde de la demostración de Argand, Gauss dió una demostración del TFA. Gauss usó la aproximación de Euler pero en vez de operar con raíces que pueden no existir, Gauss opera con indeterminadas. Esta demostración completa la de Euler y parece correcta. Otra demostración (tercer intento) de Gauss también de 1816 es, como la primera, de naturaleza topológica. Gauss introduce en 1831 el término 'número complejo'. En 1821, Cauchy había introducido el término "conjugado".

Sin embargo, las críticas de Gauss a la demostración de Lagrange-Laplace del TFA no fueron aceptadas en Francia. En la segunda edición, de 1828, del tratado de ecuaciones de Lagrange no aparece todavía ninguna demostración salvo la incorrecta de Laplace-Lagrange.

En 1849, 50 años después de su primer intento, Gauss produjo la primera demostración del enunciado general de que una ecuación de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces complejas. La demostración es similar a la primera (con los mismos inconvenientes), lo único que hace es deducir el resultado para coeficientes complejos a partir del resultado sobre polinomios reales. Merece la pena resaltar que, a pesar de la insistencia de Gauss de no suponer la existencia de las raíces cuando se trata de demostrar su existencia. Él mísmo creía, como todos en su época, que había una jerarquía de cantidades imaginarias de las cuales los números complejos eran solo los más simples. Gauss los llamó "sombra de sombras".

En 1843, buscando esas generalizaciones de los números complejos, Hamilton descubrió los cuaternios, aunque estos no son conmutativos. Tienen todas las propiedades de un cuerpo salvo la conmutativa del producto. La primera demostración de que el único cuerpo (conmutativo) algebraico que contiene a los números reales es C, la dió Weierstrass en sus lecciones de 1863. Ésta fue publicada en el libro de Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme.

Naturalmente, todas las demostraciones anteriores son válidas, una vez que se establece el resultado de la existencia del cuerpo de descomposición de cualquier polinomio. Frobenius, en la celebración en Besel del bicentenario del nacimiento de Euler dijo: Euler dió la demostración más algebraica de la existencia de las raíces de una ecuación, basándose en que una ecuación real de grado impar tiene, por continuidad, que tener una raíz real. Es injusto atribuir la demostración totalmente a Gauss, que en realidad sólo añadió los toques finales.

La célebre demostración de Argand del TFA es un teorema de existencia que no es constructivo. Sin embargo, en 1940,el matemático alemán Hellmuth Kneser(1898-1973). publicó una versión constructiva de la demostración de Argand. H. Kneser, Der Fundamentalsatz der Algebra und der Intuitionismus, Math. Zeitschrift, 46, 1940, pp. 287-302. Esa demostración fue simplificada en 1981, por su hijo Martin Kneser. M. Kneser, Ergaeanzung zu einer Arbeit von Hellmuth Kneser Äuber den Fundamentalsatz der Algebra, Math. Zeitschrift, 177, 1981, pp. 285-287.

En la Universidad de Nijmegen en Holanda se estableció un proyecto de investigación sobre el TFA , el cual creo llegó hasta el año 2000.

En la dirección `http://www.cs.ru.nl/~freek/pubs/kneser.pdf` se puede bajar un artículo muy interesante al respecto en donde se presenta un versión constructiva del TFA en base a los trabajos de los Knessers. El grupo sobre el TFA mantiene una página en `http://www.cs.ru.nl/~freek/fta/` que da información valiosa a quienes deseen ver los lenguajes de computación que utilizan en algunas soluciones constructivas. Incluso hay algoritmos en Coq (el programa desarrollado por el INRA de Francia) implementando el teorema de Kneser.