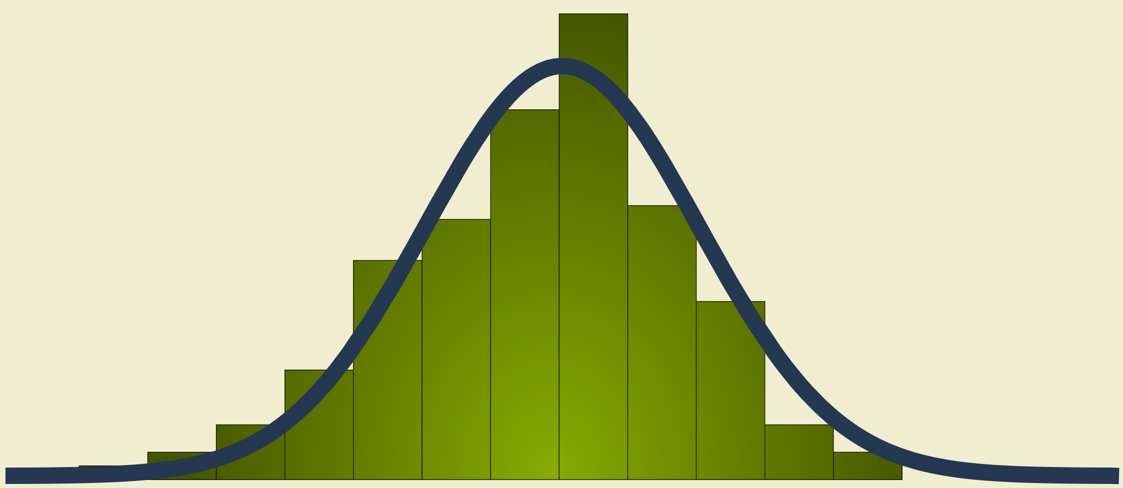
2011- 2013

ENCUENTRO sobre DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA, PROBABILIDAD Y EL ANÁLISIS DE DATOS (EDEPA)

II EDEPA
I ESCUELA DE VERANO

CONTRIBUCIONES 2011 - 2013 EN ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD: SU DIDÁCTICA, APLICACIONES Y TECNOLOGÍA

Instituto Tecnológico de Costa Rica



Revista digital
Matemática, Educación e *Internet* (www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/)

ENCUENTRO SOBRE DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA, LA PROBABILIDAD Y EL ANÁLISIS DE DATOS (EDEPA).

Contribuciones 2011−2013 en estadística y probabilidad: su didáctica, aplicaciones y tecnología

Editores

Walter Mora Flores
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Greivin Ramírez Arce
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Correo Electrónico: wmora2@gmail.com
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Apdo. 159-7050, Cartago
Teléfono (506)25502225
Fax (506)25502493

Mora Flores, Walter.
Encuentro sobre didáctica de la estadística, la probabilidad y el análisis de datos/Walter Mora F.
Greivin Ramírez Arce, (Editores). – 1ra ed.
– Escuela de Matemática,Instituto Tecnológico de Costa Rica. 2013.
162 p.
ISBN Obra Independiente: 978-9968-641-14-2
1. Didáctica 2. Estadística. 3. Probabilidad 4. Análisis de datos.

Prólogo

El Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR) organiza cada dos años, desde el 2009, el Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos (EDEPA). El evento reúne a profesionales y docentes de primaria, secundaria y de universidad, nacionales y extranjeros, con el objetivo de discutir y resaltar la importancia de la enseñanza de estos temas a través de conferencias, talleres, ponencias, reportes de investigación y charlas, entre otras actividades.

Inicialmente se presenta una serie de contribuciones seleccionadas de los extensos expuestos en el II EDEPA realizado en noviembre de 2011. La presentación se hace en tres partes claramente diferenciadas: didáctica, aplicaciones y uso de software.

Luego se aporta un par de extensos como resultado de su presentación en la I Escuela de Verano del EDEPA que se llevó a cabo en diciembre de 2012, actividad previa al III EDEPA. Por último, se presenta una invitación a participar en el III EDEPA que se llevará a cabo los días 27, 28 y 29 de noviembre de 2013 en Costa Rica, en la sede del ITCR ubicada en Cartago. Se exhorta enviar sus aportes pedagógicos sobre probabilidad, estadística y la didáctica del análisis de datos.

Atentamente,

EDITORES

Cartago, Costa Rica. Marzo 2013.

Contenido

III Parte.

Anexos.

PARTE I

II ENCUENTRO SOBRE DIDACTICA DE LA ESTADISTICA, LA PROBABILIDAD Y EL ANALISIS DE DATOS, EDEPA 2011.

Comité Organizador

Giovanni Sanabria Brenes
(co-coordinador general)
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Félix Núñez Vanegas
(co-coordinador general)
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Greivin Ramírez Arce
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Esteban Ballestero
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Edwin Chávez Esquivel
Universidad Nacional de Costa Rica

Comité Científico

Dr. Javier Trejos Zelaya
Universidad de Costa Rica

Dr. Santiago Cambronero Villalobos
Universidad de Costa Rica

Dr. Oldemar Rodríguez Rojas
Universidad de Costa Rica

M.Sc. Marcela Alfaro Córdoba
Universidad de Costa Rica

Dr. Edwin Chávez Esquivel
Universidad Nacional de Costa Rica

M.Sc. Giovanni Sanabria Brenes
Instituto Tecnológico de Costa Rica

M.Sc. Félix Núñez Vanegas
Instituto Tecnológico de Costa Rica

MSc. Greivin Ramírez Arce
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Presentación

Durante el 28 y 29 de noviembre del 2011 la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica organizó el Segundo Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos (II EDEPA) cuyo idioma oficial fue español.

Este evento, dirigido a docentes de secundaria e investigadores, se desarrolló de forma excelente gracias a la colaboración de profesores e investigadores, nacionales e internacionales, que a través de 4 conferencias, 8 talleres, 31 ponencias, actividades de integración y de una mesa redonda, rescataron la importancia que tienen la Estadística, la Probabilidad y el Análisis Multivariado de Datos en un mundo cada vez más competitivo e informatizado.

Las diferentes actividades desarrolladas durante el II EDEPA se vieron enriquecidas por investigadores nacionales (de diferentes carreras y universidades) e internacionales (particularmente de España, México, Chile y el Salvador).

Los objetivos generales fueron:

1. Evidenciar los esfuerzos realizados para el mejoramiento de la enseñanza de la Estadística, Probabilidad y Análisis de Datos en secundaria y a nivel universitario.
2. Incentivar al participante a realizar investigaciones cuantitativas utilizando la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos.
3. Constituir un espacio de crítica, debate y comunicación sobre el estado actual y desarrollo reciente de la investigación en Didáctica de la Estadística, de la Probabilidad y del Análisis de Datos a nivel nacional e internacional.
4. Establecer un grupo de trabajo interesado en fomentar el mejoramiento de la enseñanza de la Estadística y Probabilidad en secundaría.

Los temas prioritarios que pueden ser considerados en los nuevos programas del Ministerio de Educación Pública y que se desarrollaron en el evento fueron:

- La resolución de problemas en la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística.
- Generación de una cultura Estadística en la comunidad educativa nacional.

- El rol del contexto en la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística.
- La evaluación dentro de la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística.
- Las creencias y mitos sociales sobre Probabilidad y Estadística.

Otros temas que fueron desarrollados:

- Didáctica de la Estadística.
- Didáctica de la Probabilidad.
- Didáctica del Análisis de Datos.
- Experiencias docentes en la enseñanza de la Probabilidad, la Estadística y el Análisis de Datos.
- Propuestas en la enseñanza de la Probabilidad, la Estadística y el Análisis de Datos.
- Aplicaciones prácticas de la Probabilidad, la Estadística y el Análisis de Datos.
- Aplicaciones de la Probabilidad, la Estadística y el Análisis de Datos en trabajos de graduación.
- Uso de la tecnología en la enseñanza de la Probabilidad, la Estadística y el Análisis de Datos.

El evento contó con una participación de 160 personas, entre ellas profesores de secundaria, estudiantes universitarios, profesores e investigadores universitarios de distintas carreras quienes mostraron gran aceptación para con el evento.

A continuación se presentan los datos obtenidos de las evaluaciones aplicadas a los participantes en el evento.

	Excelente	Muy buena	Buena	Regular	Deficiente
Organización	55	26	7	1	0
Calidad de las conferencias	29	45	14	1	0
Calidad de las ponencias	22	39	24	2	0
Calidad de la mesa redonda	37	33	18	1	0
Calidad de los expositores	31	33	24	2	0
Impacto y pertinencia del evento para su formación	50	25	15	0	0
Cumplimiento de sus expectativas	37	26	21	2	0
Atención brindada	60	25	4	1	0
Opinión general sobre el II EDEPA	42	35	11	1	0

Tabla 0.1: Criterios de evaluación general II EDEPA

El comité organizador del EDEPA agradece a las autoridades del Instituto Tecnológico de Costa Rica, a la Escuela de Matemática y a todos los involucrados por el apoyo brindado para la realización del evento, de tal manera que su aporte fue fundamental para alcanzar el éxito. Así como al Ministerio de Educación Pública de Costa Rica por el permiso brindado a los profesores para que participaran en el evento. Al Colegio de Licenciados y Profesores (COLYPRO) por el apoyo económico dado a algunos participantes. A la Fundación Tecnológica (FUNDATEC) por la administración de los recursos del EDEPA.

Agradece además, a la Universidad de Granada y la Universidad de Huelva, España; al Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México; a la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile;

a la Universidad de El Salvador; a la Universidad Nacional y la Universidad de Costa Rica, por el apoyo brindado a sus profesores para que aportaran al evento como organizadores, ponentes, miembros del comité organizador o científico o bien como participantes.

El EDEPA tiene el agrado de presentar una selección de los extensos expuestos en el evento clasificados en tres partes: Didáctica, Aplicaciones y Uso de software.

Atentamente,

COMITÉ ORGANIZADOR EDEPA

Cartago, Costa Rica. Febrero 2013.

Didáctica

1 PANORAMA ACTUAL DE LOS ESTÁNDARES EDUCATIVOS EN ESTOCÁSTICA

Jesús Humberto Cuevas Acosta.
humberto.cuevas@itchihuahuaii.edu.mx
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México

Resumen. En este ensayo se presenta una reflexión sobre la situación actual que guarda el movimiento en pro del establecimiento de estándares de contenido y desempeño curricular en el campo de la estocástica. Se examinó la importancia que se otorga a la enseñanza de estas disciplinas y sus mecanismos para medir el desempeño de los estudiantes en ellas por parte de dos naciones que han llevado a cabo reformas educativas de grandes dimensiones. Paralelamente, se hace un planteamiento para conducir una investigación sistemática que permita caracterizar la práctica educativa actual en estas disciplinas y obtener elementos de prueba para crear recursos y programas de formación del profesorado acordes a las necesidades de una cultura estocástica en ellos y en sus estudiantes.

Palabras Clave: Estándares educativos, educación en estocástica, cultura estocástica

Abstract. . This essay presents a reflection on the current situation that keeps the movement for the establishment of standards of content and performance curriculum in the field of the stochastic. There was examined the importance it attaches to the teaching of these disciplines and their mechanisms to measure the performance of students in them by two Nations that have carried out large-scale educational reforms. At the same time, it is an approach to conduct a systematic research to characterize the current educational practice in these disciplines and obtain evidence to create resources and teacher training programmes according to the needs of a stochastic culture in them and their students.

KeyWords: Educational standards, education in stochastic, stochastic culture.

1.1 Introducción

Hoy en día, nos encontramos en tiempos de cambios notables y vertiginosos. Así, pueden observarse transformaciones en las formas de interacción en diversos sectores de interés para la sociedad. Entre los más representativos se pueden enunciar la economía y finanzas, la comunicación –a través de sus distintos medios-, las relaciones humanas, los vínculos laborales, así como la educación. Éste último es quizá uno de los que ha experimentado cambios más extraordinarios.

En la última década se ha intensificado la promoción de la mejora y el cambio educativo en diversas naciones. Esta promoción se ha instrumentado desde el marco discursivo de los diversos organismos multilaterales –Banco Mundial (BM), Banco Interamericano de Desarrollo (BID), Fondo Monetario Internacional (FMI), Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), entre otros-que desde el siglo pasado han impulsado políticas de apertura financiera, comercial y de libre tránsito de productos y servicios de bien común.

En virtud de que esta promoción se inscribe en un contexto internacional, diversas comunidades epistémicas se han pronunciado al respecto. En un ejercicio clasificatorio, pueden ubicarse dos posturas diametralmente opuestas pero ampliamente representativas en el ámbito académico.

Una de estas comunidades considera la posibilidad de que una de las razones del excepcional interés por la mejora y cambio en la educación se deba al evidente fracaso del modelo económico dominante en las últimas tres décadas. Destacan los continuos *sobresaltos* económicos de naciones otrora *inmunes* en estos rubros, cuyos efectos se hacen patentes a nivel global. En términos de Ralston (2005), lo anterior se puede traducir en una vuelta al determinismo económico del siglo XIX enmascarado en el siglo XXI. Así, de acuerdo con la lógica "globalista", es imperativo impulsar la mejora de la productividad económica a través de la apertura y liberación de los mercados, privatizar los servicios públicos –incluyendo la educación en todos sus niveles- y estandarizar las tasas impositivas a la sociedad independientemente del estatus socioeconómico.

Aducen que esta postura política e ideológica establece una correlación directa entre educación y competitividad en sus distintas acepciones. Así, se advierte una asociación de la productividad educativa con la competitividad económica. El desarrollo de capital humano, productivo y eficiente, es uno de los propósitos fundamentales. Su-gieren que lo anterior es un indicio de la concepción dominante en términos de los fines de la educación. Sokol (2006), indica que ya no se observa al estudiante como persona con alma y espíritu, sino como un producto.

Según Hargreaves & Fink (2006), diversas naciones han adoptado políticas del racionalismo económico con el propósito de mejorar el desempeño en la escuela. Derivado de lo anterior, a la par del inicio del siglo XXI, surgió un interés extraordinario por medir el desempeño estudiantil principalmente mediante la aplicación de pruebas estándar en diversos niveles educativos, particularmente en educación básica.

Entre los efectos más representativos de esta política se puede encontrar el establecimiento de estándares educativos aplicables a estudiantes, profesores y autoridades con facultades en la toma de decisiones. De forma análoga, se advierte una propensión a uniformizar currículos, métodos de enseñanza, programas de formación del profesorado y mecanismos de gestión escolar. Los estándares se operacionalizan a través de diversos medios, aunque destaca la administración de múltiples pruebas orientadas a medir desempeños estudiantiles en matemáticas, ciencias y lenguaje.

Por otra parte, existe otra comunidad epistémica que ha promocionado activamente la puesta en marcha de reformas en todos los niveles educativos. Esta comunidad centra sus argumentos en dos aspectos torales, a saber, calidad en los aprendizajes y equidad en el acceso al saber a través de la educación escolar. Ferrer (2006) hace alusión a que actualmente existe un interés internacional por establecer estándares en educación que contrasta con acciones de reforma anteriores que tenían como objetivo garantizar el acceso universal a la escolaridad.

Los partidarios del movimiento en pro del establecimiento de estándares generalmente cuestionan las reformas educativas implantadas en las últimas décadas del siglo XX. Particularmente hacen alusión al fracaso de las mismas en términos del incumplimiento de la calidad y equidad originalmente planteadas. Específicamente, esta comunidad hace hincapié en que el problema fundamental en la gestión de los sistemas educativos estriba en la ausencia de estándares de calidad respecto a los resultados que obtienen los estudiantes en términos de aprendizaje (PREAL, 2007), (Ferrer, 2007), (Ferrer &

Valverde, s/f).

Ya en 1995, Diane Ravicht hacía mención que en educación los estándares se estaban internacionalizando, especialmente en matemáticas y ciencia. Planteaba que eso sucedía por dos razones fundamentales, a saber, la larga tradición en la aplicación de evaluaciones internacionales a estudiantes en muchos países, y porque estas materias siempre se han considerado internacionales en su cobertura.

En el caso de la matemática, generalmente se reconoce que son parte del patrimonio cultural de la sociedad. Por tanto, se asume que su conocimiento, entendimiento y adecuada aplicación, proporciona a cualquier individuo una oportunidad de tener un futuro mejor (NCTM, 2000). Desde mediados del siglo XX, ha destacado lo relacionado con su enseñanza en todos los niveles educativos. Es pertinente indicar que es en esta ciencia donde tradicionalmente se presentan problemas como altos índices de reprobación, deserción y rezago escolar. En consecuencia, campos de la matemática como el álgebra, cálculo diferencial e integral, geometría y probabilidad y estadística –estocástica-, han constituido el objeto de estudio principal de la investigación educativa realizada y en la que se han tratado los problemas mencionados anteriormente. No obstante, desde finales del siglo XX se ha observado un interés creciente por realizar investigación educativa en probabilidad y estadística. En la actualidad es notable el incremento de publicaciones, cátedras y reuniones de carácter académico que tienen relación con estas disciplinas.

Son varios los factores que han generado el interés por efectuar estudios en estos campos del saber. Uno de los más importantes es el relacionado con el impulso dado por diversas asociaciones y organismos internacionales para instrumentar programas de alfabetización cuantitativa en los ciudadanos. Otro factor es el que hace alusión a las políticas educativas internacionales que promueven el establecimiento de estándares en todos los niveles educativos, particularmente en el básico y medio superior. Este último factor tiene una estrecha relación con la reconfiguración curricular y la incorporación de tópicos relativos a la estocástica en los planes y programas de estudio. También el debate existente entre la elección de los métodos de enseñanza y evaluación adecuados para obtener aprendizajes, ha constituido una causa importante por llevar a cabo investigaciones a corto, mediano y largo plazo.

El propósito de este ensayo es reflexionar sobre la situación actual de los estándares educativos en las disciplinas de probabilidad y estadística. Interesa examinar la importancia que se otorga a la enseñanza de estas disciplinas y sus mecanismos para medir el desempeño de los estudiantes en ellas por parte de dos naciones que han llevado a cabo reformas educativas de grandes dimensiones. Paralelamente, se plantea la necesidad de conducir una investigación sistemática que permita caracterizar la práctica educativa actual en estas disciplinas y obtener elementos de prueba para crear recursos y programas de formación del profesorado acordes a las necesidades actuales de desarrollar una *cultura estocástica* en ellos y en sus estudiantes.

1.2 Estándares en educación: Apuntes generales sobre su surgimiento

Resulta difícil establecer con precisión el origen del movimiento en pro de los estándares en educación. No obstante, generalmente se reconoce al Reino Unido, Nueva Zelanda y Australia como los iniciadores. El movimiento se extendió rápidamente a otras naciones, principalmente a los Estados Unidos de América. Es importante aclarar que en este país ya existían estándares educativos desde finales de la década de 1980, aunque únicamente en algunas disciplinas específicas como la matemática. Una muestra de lo anterior son los estándares establecidos por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas en 1989.

Debido a la influencia económica, política y cultural de esta nación en el ámbito internacional, resulta pertinente examinar el proceso de desarrollo e incorporación de los estándares en su sistema educativo.

El caso de los Estados Unidos de América. A finales de la década de 1970, la sociedad estadounidense comenzó a percibir que su sistema educativo no estaba cumpliendo con la meta implícita de formar a los estudiantes más educados del mundo y notaba una pérdida de competitividad industrial con respecto a otras naciones. Se debatía si lo anterior se debía al bajo desempeño de sus estudiantes con respecto a sus homólogos extranjeros en el desarrollo de las habilidades y destrezas necesarias para sostener la economía nacional. En consecuencia, el gobierno federal decidió realizar una investigación con el objetivo de examinar la calidad de la educación que se impartía y hacer un reporte a la nación. Así, en 1983, durante la administración de Ronald Reagan, se presentó el informe *Nation at Risk: The Imperative for Educational Reform* en la que se señalaba el declive de la educación estadounidense, especialmente en ciencia y matemática. En el mismo informe, se proponían líneas de acción inmediata. Una de ellas *consistió en concientizar a la sociedad de la gravedad del problema que enfrentaba el* sistema educativo nacional y las implicaciones en la formación académica de las nuevas generaciones que tendrían la responsabilidad de conducir el desarrollo científico y tecnológico del país. Otra línea de acción consistió en indagar de manera rigurosa las causas del problema y contar con información fidedigna para configurar proyectos de trabajo específicos.

Posteriormente, esta "crisis" se vio acentuada debido a los resultados obtenidos en el *Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias* (TIMMS) publicado en 1995. El informe del estudio puso en evidencia la desigualdad en el desempeño entre los estudiantes estadounidenses y sus contrapartes de otras naciones, principalmente europeas y asiáticas. Ferrer (2006), señala que los resultados de este estudio permitieron efectuar un análisis pormenorizado y científicamente sustentado de los serios problemas existentes en su oferta curricular. Por ende, esta nación propuso diversas medidas de reforma con el propósito de generar alternativas de solución a los problemas de calidad y equidad imperantes. El resultado de estas medidas permitió establecer líneas de acción que se reflejaron en la legislación de las metas 2000 (Goals, 2000), y se asentaron las bases para la planeación y configuración de estándares nacionales y sus correspondientes sistemas de evaluación.

Cabe destacar que de forma inmediata, la comunidad académica y científica del país se puso en acción. Se examinó el problema desde diversas perspectivas como la psicológica, sociológica y de política educativa. Después de intensos debates, se consideró que la configuración, establecimiento y monitoreo de estándares era la vía más adecuada para subsanar la problemática de calidad y equidad educativa.

La promesa de establecer estándares claros, la asignación de responsabilidades para los distintos agentes interactuantes, el establecimiento de mecanismos de difusión de resultados y el diseño y validación de pruebas estandarizadas aplicables en todos los niveles educativos, fueron quizá los factores principales por los que la cultura de los estándares se insertó como política de estado.

No obstante, pese al gran esfuerzo realizado en la creación e implantación de estándares de carácter nacional, éste tuvo un éxito relativo. La causa principal fue el alto grado de descentralización y autonomía de los estados e instituciones educativas, por lo que la estructura subyacente a los estándares no prescribía lineamientos de trabajo didáctico y curricular, sino que únicamente promovían procesos de diseño, implantación, experimentación, análisis y reformulación de estrategias de enseñanza que tuvieran como propósito apoyar a los estudiantes en el cumplimiento de las metas de aprendizaje establecidas.

Es importante señalar que en los Estados Unidos de América, la definición de los estándares se ha efectuado principalmente bajo los auspicios de organismos colegiados de profesores de diferentes asignaturas, que han reavivado y perpetuado su influencia cobre el currículo escolar y lo que debe considerarse importante dentro de ese ámbito (Hargraeves, Earl, Moore & Manning, 2001). Es probable que el gobierno federal y los gobiernos estatales hayan aprobado desde el principio el papel de estos organismos porque de alguna manera permitieron legitimar el movimiento de los estándares y sus correspondientes evaluaciones.

Por otra parte, el impulso estadounidense al movimiento en pro de los estándares ha tenido una influencia notable en otras naciones. En la última década se ha podido observar como los elementos de este sistema se han exportado a otros países, independientemente de su grado de desarrollo humano, social y económico. Entre las consecuencias más representativas de esta influencia, destaca la realización de una gran cantidad de estudios comparativos y la confección y aplicación de evaluaciones de carácter internacional.

1.3 Mundialización de los estándares educativos y evaluaciones internacionales: El caso de PISA.

La mundialización de los estándares educativos ha generado que diversos organismos multilaterales –en su mayoría de carácter financiero- incentiven la configuración de evaluaciones globales que funjan como medios de obtención de información abundante y detallada que ayude a los gobiernos nacionales a adoptar las decisiones y políticas públicas para mejorar el nivel educativo de sus habitantes.

La OCDE es uno de los organismos que ha ejercido mayor influencia en el establecimiento y monitoreo de estándares educativos y en el diseño de pruebas estandarizadas para evaluar la calidad educativa. En 1997 creó el Programa Internacional para la Evaluación de los Estudiantes (PISA), cuyo propósito central es dar seguimiento a los resultados en los sistemas educativos en los países miembros –y también de los que libremente se adhieren-, utilizando instrumentos de evaluación con sólidas propiedades de medida, autenticidad y validez educativa. Según este organismo, diversos aspectos[1] conforman las preguntas básicas cuyas respuestas necesitan conocer autoridades educativas y la opinión pública en su conjunto (OCDE, 2004). El programa evalúa si los estudiantes de 15 años son capaces de utilizar lo que han estudiado en situaciones similares a las que quizá afrontarán en su vida diaria. Específicamente, se examina si son capaces de analizar, razonar y comunicar sus ideas de forma efectiva, y si tienen la capacidad de seguir aprendiendo durante su vida.

De alguna manera, el programa de la OCDE ha constituido una “directriz” para el establecimiento de estándares en sus países miembros, lo cual ha implicado la adecuación de los currículos escolares y sus respectivas evaluaciones nacionales, especialmente en los campos de lectura, matemáticas y ciencia.

En relación con lo que PISA contempla en el campo de la matemática, se evalúan saberes y habilidades en los estudiantes a partir de tres dimensiones relacionadas con los conceptos, procesos y situaciones de aplicación. Aproximadamente la cuarta parte de los reactivos en este campo están orientados a medir el desempeño estudiantil en probabilidad y estadística. Cabe mencionar que en el marco de trabajo para la evaluación en ciencia, lectura y cultura matemática, se confiere especial importancia a estas disciplinas en áreas como la *producción, análisis y presentación de datos,* además de la *probabilidad e inferencia*. Sin embargo, es factible que esta valoración provenga de las múltiples recomendaciones para que estas disciplinas tengan un espacio más prominente en los currículos escolares. Las recomenda-

[1]Como la preparación de los estudiantes para afrontar los retos presentes y futuros, dudas sobre la capacidad de analizar, razonar y comunicar ideas adecuadamente, así como la incertidumbre sobre la capacidad de los jóvenes para lograr aprendizajes a lo largo de sus vidas.

ciones a las que se hace alusión, fueron realizadas principalmente por el *Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools* en 1982 y el *National Council of Teachers of Mathematics* en los años 1988 y 2000 (OCDE, 2006).

En virtud de la importancia de estas disciplinas para la cultura de la sociedad moderna, resulta necesario revisar la situación actual en torno a las recomendaciones internacionales de incorporarlas a los currículos escolares y diseñar las pruebas para medir el grado de cumplimiento de los estándares.

1.4 Estándares educativos en estocástica: Algunos antecedentes.

En las últimas tres décadas, múltiples organizaciones y asociaciones internacionales han promovido el desarrollo de una alfabetización cuantitativa en los ciudadanos. El interés se remonta aproximadamente a mediados del siglo XX cuando diversas comunidades epistémicas comenzaron a efectuar y publicar estudios sobre lo que llamaban *Education for Numeracy y Quantitative Literacy*. No obstante, fue a partir de la década de 1980 que la publicación de informes de investigación sobre esta temática se hizo más frecuente. Son particularmente representativos los estudios deWhite (1981), Cockcroft (1982), Paulos (1988), Gal (1997, 2002, 2003), Gal & Garfield (1997), Gal, & Ginsburg, (1994), Wolfe (1993), Barbella et al (1994), Ginsburg (1997), Garfield (1994, 1995, 1999, 2002, 2003), Garfield & Ben-Zvi (2005), Garfield, del Mas & Chance (2007), Wilkins (2010).

Sin embargo, hasta hace pocos años, la información cuantitativa únicamente estaba disponible para un limitado sector de la población. Hoy en día esta información es ampliamente diseminada a través de distintos medios, lo cual hace necesario desarrollar habilidades en acopio, lectura, escritura, interpretación y análisis de datos.

Hablar de alfabetización cuantitativa incluye referirse a las disciplinas de probabilidad y estadística. Las razones son múltiples, destacan sus aplicaciones como herramienta, técnica o método y porque han evolucionado como lenguaje de apoyo científico, lo cual les ha permitido ser consideradas por diversas comunidades epistémicas como una ciencia propia de los datos. Ya en 1991, Moore señalaba que la estadística es una disciplina autónoma y con métodos específicos de razonamiento. No obstante, es pertinente hacer algunas aclaraciones. Primero, la probabilidad y la estadística son ciencias matemáticas, pero no son un sub-campo de ella. Segundo, aunque son disciplinas de carácter metodológico, no son una simple colección de métodos. Tercero, una de las características particulares de estas disciplinas es la posibilidad de razonamiento a partir de datos susceptibles de ser probados empíricamente.

De acuerdo de lo expuesto líneas atrás, es imperativa una alfabetización cuantitativa global para todo ciudadano que aspire desenvolverse adecuadamente en el mundo actual. Por consiguiente, muchas naciones han diseñado, implantado y monitoreado actividades con el propósito de impulsar el uso adecuado de estas disciplinas en diversos contextos.

Derivado de lo anterior, en los últimos años, la enseñanza de estas disciplinas se ha hecho presente en el currículo escolar de todos los niveles educativos. En el caso de la educación superior, su enseñanza tiene ya un espacio propio en la formación de profesionistas. En educación básica, la evolución de su enseñanza ha tenido un comportamiento diferente debido a diversos factores. Uno de los más representativos es el debate relacionado con la incorporación de tópicos estocásticos en educación básica y la dificultad en el establecimiento de estándares precisos, aunque desde finales de la década de 1980, organismos colegiados como el NCTM han hecho propuestas en este sentido. En la tabla (1.1) se presentan algunos de los más representativos y que fueron planteados en el año 2000.

Nivel	Debe ser capaz de:
Preescolar	Plantear preguntas y recopilar datos sobre si mismos y sus alrededores. Ordenar y clasificar objetos segunún sus caraterísticas y organizar datos sobre ellos.
Estudiantes de tercero a grado	Diseñar investigaciones para contestar una pregunta y considerar cómo los métodos de acopio de datos afectan el conjunto global. Recoger datos de observación, encuestas y experimentos. Representar datos en tablas, gráficos de línea, puntos y barras. Reconocer las diferencias al representar datos numéricos y categóricos. Usar las medidas de posición central-particularmente la mediana- y comprender qué es lo que cada una indica sobre el conjunto de datos. Comparar distintas representaciones de los mismos datos y evaluar qué aspectos importantes se muestran mejor con cada una de ellas.
Estudiantes de sexto a octavo grado	Seleccionar, crear y usar representaciones gráficas apropiadas de datos, incluyendo histogramas, diagramas de cajas y de dispersión. Encontrar, usar e interpretar medidas de tendencia central y de dispersión, incluyendo la media y rango intercuartil. Discutir y entender la correspondencia entre grupos de datos y sus representaciones gráficas, especialmente histogramas, diagramas de tallo y hojas, diagramas de caja y de dispersión. Utilizar las observaciones sobre diferencias entre dos o más muestras para hacer conjeturas sobre las poblaciones de donde las muestras fueron tomadas. Hacer conjeturas sobre relaciones posibles entre dos características de una muestra en base a los diagramas de dispersión de los datos y de las líneas aproximadas de ajuste.
Estudiantes de noveno a doceavo grado	Calcular estadísticas básicas y poder diferenciar entra un estadístico y un parámetro. Para mediciones de datos univariados, ser capaz de representar su distribución, describir su forma y calcular resúmenes estadísticos. Para mediciones de datos bivariados, construir gráficas de dispersión, describir su forma, determinar ecuaciones de regresón y coeficientes de correlación usando herramientas tecnológicas. Identifique tendencias en datos bivariados y encuentre las funciones que modelan o transforman los datos. Usar la simulación para explorar la variabilidad de la muestra de una población conocida y construir distribuciones muestrales. Calcular e interpretar el valor esperado de variables aleatorias en casos simples. Entender el concepto de probabilidad condicional y eventos independientes.

Tabla 1.1: Algunas recomendaciones por nivel escolar

Puede notarse que el NCTM promueve a partir de la educación preescolar una enseñanza orientada a los datos. Por otra parte, aunque estos estándares fueron desarrollados para el sistema educativo estadounidense, su influencia se ha extendido a diversos países que los han adoptado total o parcialmente en sus procesos de reforma curricular.

El caso de México. El caso de México es un ejemplo representativo de esta influencia. Desde finales de la década de 1990 se han aplicado pruebas estándares nacionales, particularmente desde el año 2002 cuando el Gobierno Federal creó el Instituto Nacional para la Evaluación Educativa (INEE), otorgándole independencia de la Secretaría de Educación Pública. El instituto se creó para evaluar en forma válida, confiable y eficiente el logro escolar de los estudiantes mexicanos de educación básica y media superior, además de retroalimentar al Sistema Educativo Nacional y a las políticas que lo sustenta. Backhoff y Díaz (2005) indican que para lograr este propósito el INEE elaboró una nueva generación de pruebas nacionales que se conocen como *Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos* (*EXCALE*). El diseño de estas pruebas inició en febrero de 2004 y su primera aplicación a nivel nacional se realizó en junio de 2005. La prueba comprende varios ejes temáticos en las cuales se miden las habilidades desarrolladas por los estudiantes y uno de los ejes se refiere a la presentación, tratamiento de la información y probabilidad.

Pero *EXCALE* no es la única prueba de estas características que se aplica en México. La SEP somete a todas las escuelas públicas y privadas de nivel básico y medio superior a una *Evaluación Nacional de Logros Académicos en Centros* (ENLACE) cuyo propósito es generar una sola escala de carácter nacional que proporcione información comparable de los conocimientos y habilidades que tienen los estudiantes evaluados. En educación básica, originalmente se examinaba el desempeño en español y matemáticas, pero desde 2008 se evalúa una tercera asignatura (en 2008 Ciencias, en 2009 Formación Cívica y Ética, en 2010 Historia y en 2011 Geografía). Con respecto a la educación media superior, se evalúan competencias disciplinares básicas en matemáticas y comprensión lectora (SEP, 2010). Es necesario señalar que en ambos niveles educativos la prueba incluye reactivos para medir habilidades en manejo de información y experimentos aleatorios.

Como se indicó anteriormente, ambas pruebas –*EXCALE y ENLACE*- son de carácter nacional y se diseñaron para aplicarse en Instituciones de Educación Mexicanas. Sin embargo, al ser México miembro permanente de la OCDE, también se ha sometido a la prueba PISA en todas sus ediciones. Es importante destacar que el amplio y entusiasta apoyo a la aplicación periódica de estas pruebas constituye un motivo de orgullo para las autoridades del Gobierno Federal. La satisfacción es de tal magnitud que en múltiples foros internacionales, funcionarios del más alto rango continuamente mencionan que México es uno de los países más comprometidos con las políticas de medición del desempeño estudiantil en Educación Básica y Media Superior.

Uno de los productos más representativos de esta política son los estándares de contenido y desempeño curricular que fueron elaborados en el año 2008 por académicos de reconocido prestigio internacional. En relación a los estándares en matemáticas, básicamente están organizados en cuatro áreas de conocimiento, a saber, *números y operaciones; forma, espacio y medida; variación y cambio e información y azar*. Estas áreas representan a las áreas de conocimiento del currículum de las matemáticas, como son la aritmética, el álgebra, la geometría, la probabilidad y la estadística.

En relación a los estándares en estocástica, se pretende que los estudiantes tengan herramientas que le permitan resolver situaciones que necesitan el manejo de información cualitativa y cuantitativa, y aquellas en las que el azar está presente, así como una visión crítica que se hace en los diferentes medios de comunicación del manejo de la información. De manera global, se espera que al concluir su educación básica, los estudiantes sean capaces de *comprender, representar matemáticamente y predecir resultados en fenómenos o situaciones en las que la incertidumbre y el manejo de la información se encuentran presentes* (SEP, 2008). En la siguiente tabla se muestra el desglose del estándar.

<table>
<tr><th colspan="3">Estándar 1: Comprender, representar matemáticamente y predecir resultados en fenómenos o situaciones en las que la incertidumbre y el manejo de la información se encuentran presentes</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Manejo de la información</td><td>NIV. Organice, analice y represente información en tablas o gráficas para obtener conclusiones generales, tomar decisiones o realizar previsiones para un futuro con cierto grado de incertidumbre.</td><td>•A partir de investigaciones estadísticas en la escuela: Seleccionar y usar la gráfica y la escala que mejor represente la información.
•Obtener información de una situación al relacionar los datos de dos o más gráficas o de dos o más variables.</td></tr>
<tr><td>NIII. Interprete y use las medidas de tendencia central en la elaboración de modelos y resolución de problemas.</td><td>•Resolver problemas que implique elegir la medida de tendencia que mejor represente los datos.
•Calcular las medidas de tendencia central para resolver un problema.</td></tr>
<tr><td>NII. Analice la información contenida en gráficas diversas.</td><td>•Analizar e interpretar información de periódicos, revistas, televisión, experimentos, etc., así como el manejo que se hace de dicha información en el medio correspondiente.</td></tr>
</table>

	NI. Analice información matemática de fuentes diversas.	•A partir de la información que aparece en periódicos o revistas plantear y resolver el problema.
Fenómenos aleatorios	NV. Decida cuándo el cálculo de probabilidades es más conveniente o adecuado a la situación que otros modelos matemáticos.	•Análisis de situaciones o fenómenos de la vida real que funcionan bajo modelos aleatorios o deterministas.
	NIV. Tome decisiones, emita un juicio o realice una predicción en situaciones con incertidumbre.	•Analizar situaciones que funcionan bajo el modelo probabilístico.
	NIII. Anticipe resultados, realice actividades de simulación en diversos contextos que le permitan formular y comprobar conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno aleatorio.	•Resolver situaciones de la vida real a mediante simulaciones y argumente el comportamiento del fenómeno simulado.
	NII. Detecte errores habituales en la interpretación del azar.	•Analizar situaciones en diversos contextos en que los resultados son producto del uso de la probabilidad y argumentar los errores en la interpretación.
	NI. Calcule la probabilidad teórica a partir de la determinación del espacio muestral.	•Calcular la probabilidad de eventos simples y compuestos usando métodos diversos (Listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).

Tabla 1.2: Estándar en manejo de información y fenómenos aleatorios

Después de examinar con detenimiento el desglose del estándar, queda la duda si los técnicos y especialistas responsables de su diseño colocaron el "listón" demasiado alto, tanto para que los estudiantes lo alcancen, como para que el profesor realice un tratamiento didáctico adecuado.

Se advierte que de manera similar a los estándares del NCTM, hay una tendencia hacia una enseñanza orientada a los datos. Para alcanzar la meta, el estudiante debe ser capaz de analizar situaciones reales y/o ficticias con un alto grado de precisión. De no ser así, el proceso de acopio, identificación (ubicar el tipo de dato, nivel de medición, gráfica (s) asociada (s), medidas a calcular, entre otros aspectos), organización y análisis de la información fracasará. En este mismo sentido, el estándar exige desarrollar la habilidad de leer en discontinuo, es decir, leer con fluidez tablas, cuadros, figuras y gráficas, lo cual implica confeccionar actividades áulicas precisas y contar con recursos didácticos adecuados.

En consecuencia, se infiere que para alcanzar la meta, el estudiante deberá desarrollar una *cultura estadística* adecuada. Cabe mencionar que este término se ha empleado de varias maneras en los últimos años. Katherine K. Wallman (1993) lo define como la habilidad para entender y evaluar críticamente los resultados que impregnan la vida de los ciudadanos día a día, a la par de la habilidad para apreciar las aportaciones que el pensamiento estadístico puede hacer en nuestra toma de decisiones en el ámbito personal y profesional. Garfield (1999) lo describe como el entendimiento del lenguaje estadístico en función de palabras, símbolos y términos, que permitirán a su vez interpretar gráficos y tablas, aunado a la lectura con sentido de la estadística encontrada en notas y medios en general. Para Gal (2002), el término se refiere a la habilidad de las personas para interpretar y evaluar críticamente información y argumentos en el campo de la estadística. Dicha información puede encontrarse en diversos contextos, como los medios de comunicación pero sin circunscribirse a ellos.

1.5 Conclusiones

Desde el inicio del siglo XXI se ha intensificado la promoción de la mejora y el cambio educativo en numerosas naciones de los cinco continentes. La promoción se ha gestado y operacionalizado desde el seno de organismos internacionales y se ha materializado en el establecimiento de reformas educativas que integran una serie de objetivos comunes, entre los que destacan la calidad de los aprendizajes, la equidad en el acceso al conocimiento a través de la educación escolar y la rendición de cuentas a la sociedad. Puede decirse entonces que hoy se asiste a la socialización de una cosmovisión internacional sobre la educación, la cual se ha traducido en el diseño e incorporación de categorías, conceptos, indicadores e instrumentos para ponderar y medir la calidad de los sistemas educativos de cada nación.

Entre los productos más representativos de esta política destacan el establecimiento de estándares aplicables a todos los agentes interactuantes en el proceso educativo, y la configuración de pruebas estandarizadas nacionales e internacionales para medir el desempeño, especialmente en los campos de matemáticas, ciencia y lenguaje. El programa PISA es quizá la evaluación sobre la calidad educativa más respetada a nivel internacional. Los resultados de su aplicación tienen un efecto fundamental en la clasificación de los sistemas educativos debido a que generalmente se asocia la calidad con los puntajes que alcanzan sus estudiantes en la prueba.

Sobresale el énfasis que se otorga a la confección de estándares educativos en matemáticas y sus correspondientes mecanismos de medición. Es probable que lo anterior se deba a dos factores, a saber, el "viejo" objetivo de promover una alfabetización cuantitativa global que se planteó desde mediados del siglo pasado, y por la necesidad actual de desarrollar una *cultura estadística* en los ciudadanos.

Por otra parte, actualmente se reconoce la importancia de ser competente en probabilidad y estadística debido a la necesidad de su aplicación como lenguaje y método de investigación científica en múltiples áreas del saber. En otros contextos más generales, los medios de comunicación masivos diariamente utilizan grandes cantidades de datos que agrupan en tablas y gráficos para presentarlos, interpretarlos y sustentar la nota. Caso similar se presenta en las aulas de clase de todos los niveles educativos, donde cada vez es más común el trabajo con este tipo de representaciones.

Es pertinente aclarar que en todos los contextos mencionados anteriormente, frecuentemente se observan errores en la presentación y valoración de los datos, es decir, tablas y gráficas mal elaboradas, concepciones erróneas de conceptos estadísticos elementales, selección inadecuada de estadísticos de prueba, entre otros. Lo anterior tiene implicaciones desfavorables para la sociedad que los lee, analiza, observa o escucha.

En consecuencia, se considera pertinente que comunidades de profesores, investigadores y funcionarios educativos examinen con detenimiento cada estándar en términos de las necesidades sociales y establezcan mecanismos para dotar de recursos, programas de formación docente y condiciones idóneas para que los principales agentes educativos desarrollen una cultura en estas disciplinas más allá del propósito eficientísta del estándar.

Un primer paso para lograr lo anterior es realizar una investigación sistemática que permita caracterizar la práctica educativa actual en estas disciplinas. Los resultados que se obtengan servirán para crear recursos y programas de formación docente acordes a las necesidades actuales no sólo de las "nuevas" reformas educativas vigentes, sino principalmente para coadyuvar en el desarrollo de una cultura estocástica en profesores y estudiantes.

En virtud de las características de la investigación y de los resultados que se espera obtener, se sugiere trabajar en fases claramente diferenciadas pero relacionadas entre sí. En la fase 1 se requiere examinar el origen social del profesor. También es necesario indagar las características generales de las instituciones y sus correspondientes programas de formación del profesorado. Luego, es indispensable efectuar un análisis de contenido de los textos y materiales de mayor recomendación y uso para preparar a los futuros docentes y actualizar a los que ya se encuentran ejerciendo la profesión. Para la fase 2, es necesario realizar un estudio de campo que permita caracterizar el tratamiento didáctico hecho por el profesor en al menos dos situaciones que impliquen el manejo de información estadística y requieran el análisis de fenómenos aleatorios. En función del análisis de los datos obtenidos en la fase anterior, en la fase 3 se procederá a diseñar y poner al alcance del profesorado actividades, recursos y herramientas que le puedan ser de utilidad en la enseñanza de la probabilidad y la estadística. Finalmente, en la cuarta y última fase es forzoso que se establezca un mecanismo de evaluación que permita recibir retroalimentación respecto de las actividades, recursos y herramientas que se pusieron a disposición de los profesores, y de ser posible, medir los efectos en su práctica docente.

Se recomienda dedicar especial atención al proceso de indagación del origen del profesor. Tenti & Steinberg (2011) describen ampliamente la importancia de este aspecto cuando indican que los primeros años de vida de los docentes dejan huellas relevantes a lo largo de su vida. También comentan que el capital cultural de los docentes no se desarrolló únicamente en las instituciones donde se formaron académicamente, sino también mediante sus experiencias en el ámbito familiar.

Bibliografía

[1] Backhoff, E. y Díaz, M.A. (2005). Plan General de Evaluación del Aprendizaje. México: INEE.

[2] Barbella, P. et al (1994). *Exploring Measurements*. Palo alto, CA: Dale Seymour Publications

[3] Cockcroft, W. (1982). *Mathematics counts*. London: Her Majesty's Stationery Office.

[4] Ferrer, G. (2006). *Estándares en educación. Tendencias internacionales e implicancias para su aplicación en América Latina*. PREAL: Chile.

[5] Ferrer, G. (2007). *Estudio comparado internacional sobre procesos de elaboración e implementación de estándares de curriculum en América Latina*. PREAL: Chile.

[6] Ferrer, G, Valverde, G. & Esquivel, J. (s/f). *Aspectos del curriculum prescrito en América Latina: Revisión de tendencias contemporáneas en curriculum, indicadores de logro, estándares y otros instrumentos. Informe de trabajo*. PREAL: Chile

[7] Gal, I., Stoud, A. (1997) Numeracy: Becoming Literate With Numbers. *Adult Learning*, 9:2, 13.

[8] Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70 (1), 1-51.

[9] Gal, I. (2003). Expanding conceptions of statistical literacy: An analysis of products from statistics agencies. *Statistics Education Research Journal*, 2 (1), 3- 21. Extraído el 7 de Abril de 2008 desde http://fehps.une.edu.au/serj

[10] Gal, I. & Garfield, J. (1997). Curricular goals and assessment challenges in statistics education. En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 1-13). Amsterdam: IOS Press.

[11] Gal, I. & Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: Toward an assessment framework. *Journal of Statistics Education*, 2 (2). Recuperado el 6 de Marzo de 2003 desde http://www.amstat.org/publications/jse/v2n2/gal.html

[12] Garfield, J. (1994). Beyond testing and grading: Using assessment to improve student learning. *Journal of Statistics Education*, 2 (1). Extraído el 24 de Abril desde http://www.amstat.org/publications/jse/v2n1/garfield.html

[13] Garfield, J. (1995). How Students Learn Statistics. *International Statistical Review*, 63, 25-34.

[14] Garfield, J. (1999), Thinking about statistical reasoning, thinking and literacy. First Annual Roundtable on Statistical Thinking, Reasoning, and Literacy. (STRL-1).

[15] Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education*, 10 (3). Extraído el 24 de Abril del 2008 desde www.amstat.org/publications/jse/v10n3/garfield.html

[16] Garfield, J. (2003). Assessing statistical reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 2 (1), 23-38.

[17] Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2005). A framework for teaching and assessing reasoning about variability. *Statistics Education Research Journal*, 4 (1), 92-99.

[18] Garfield, J., del Mas, B. & Chance, B. (2007). Using students' informal notions of variability to develop an understanding of formal measures of variability. En M. C. Lovett y P. Shah, (Eds). *Thinking With Data*. EUA: Psychology Press.

[19] Ginsburg, L. (1997). Numeracy Education: More Than Mathematics. *Adult Learning*, 9:2 -13.

[20] Hargreaves, A. & Fink, D. (2006). Estrategias de cambio y mejora en educación caracterizadas por su relevancia, difusión y continuidad en el tiempo. *Revista de Educación*, (339), 43-58.

[21] Hargraeves, A., Earl, L., Moore, S. & Manning, S. (2001). *Aprender a cambiar. La enseñanza más allá de las materias y los niveles*. España: Octaedro.

[22] Kozol, J. (2006): *The Shame of the Nation: The restoration of apartheid schooling in America*. New York: Crown publishers.

[23] National Commission on Excellence in Education (1983). *Nation at Risk: The imperative for Educational Reform*. Washington, D.C: USA.

[24] NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics. New England Mathematics Journal, 34 (2), 6-25. Extraído el 13 de Septiembre del 2007 de http://standardstrial.nctm.org/document/index.htm

[25] OCDE. (2004). *Learning for Tomorrow's World First Results from PISA 2003*. París, Francia: Autor

[26] OCDE. (2006). *Assessing cientific, readingand mathematical literacy: A framework for PISA 2006*. París, Francia: Autor.

[27] Paulos, J. (1988). *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and its Consequences*. New York, NY: Hill and Wang.

[28] PREAL. (1998). El futuro está en juego. Informe de la Comisión Internacional sobre Educación, Equidad y Competitividad Económica: Chile

[29] Ralston,S. (2005): *The Collapse of Globalism: And the reinvention of the world*. Toronto: Viking Canada.

[30] Ravitch, D. (1995). *National Standars in American Education. A Citizen Guide*. EUA: Brooking Institution

[31] SEP (2010). Taller inormativo de ENLACE. En línea: http://enlace.sep.gob.mx/gr/ Consultado el 1 de septiembre del 2011

[32] SEP, et al. (2008). Referentes para la mejora de la educación básica. Estándares de contenido y desempeño curricular. En línea: http://referenteseducativos.net/index.php?option=com_content&view=article&id=49:estandares-de-contenido-y-desempeno-curricular&catid=35:fundamentos&Itemid=59. Consultado el 8 de agosto del 2011

[33] Tenti, E. & Steinberg, C. (2011). *Los docentes mexicanos. Datos e interpretaciones en perspectiva comparada*. México. Siglo XXI Editores

[34] Wallman, K. (1993). Enhancing statistical literacy: enriching our society. *Journal of the American Statistical Association,* 88(421) 1-8.

[35] White, S. (1981). *The New Liberal Arts. New York*, NY: Alfred P. Sloan Foundation.

[36] Wilkings (2010), Modeling Quantitative Literacy. *Educational and Psychological Measurement* 70: 267-290

[37] Wolfe, C. (1993). *Quantitative Reasoning Across a College Curriculum*. College Teaching, 41:1 3-9.

2 SESGOS EN EL RAZONAMIENTO SOBRE PROBABILIDAD CONDICIONAL E IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

Carmen Batanero.
batanero@ugr.es
Universidad de Granada
España

J. Miguel Contreras.
jmcontreras@ugr.es
Universidad de Granada
España

Carmen Díaz.
carmen.diaz@dpsi.uhu.es
Universidad de Huelva
España

Resumen. En este trabajo analizamos algunos de los sesgos frecuentes en la comprensión de la probabilidad condicional. También presentamos algunos resultados obtenidos en dos estudios de evaluación realizados con estudiantes de Psicología y futuros profesores de matemáticas en España. Finalizamos con algunas reflexiones sobre la enseñanza de la probabilidad.

Palabras Clave: Probabilidad condicional, sesgos, evaluación

Abstract. In this paper we analyze some biases that are frequent in understanding conditional probability. We also present results from two assessment studies carried our with Psychology students and prospective secondary school mathematics teachers in Spain. We conclude with some reflections on the teaching of probability.

KeyWords: Conditional probability, biases, assesment

2.1 Introducción

La probabilidad condicional es un concepto base al aplicar la Estadística, porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios, a medida que adquirimos nueva información. Es también un concepto teórico requerido en la construcción del espacio muestral producto. Por ello, su correcta comprensión y el razonamiento sobre la misma son requisitos en el estudio de la inferencia estadística, tanto clásica como bayesiana, así como en el estudio de la asociación entre variables, la regresión y los modelos lineales. En el terreno profesional y la vida cotidiana, la toma de decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre se basa en gran medida en el razonamiento condicional. Todo ello hace que el tema se incluya tanto en la educación secundaria, como en la universidad en muchos países.

A pesar de que este tema se enseña en estos dos niveles educativos, la investigación psicológica y didáctica sugiere la existencia de intuiciones incorrectas, sesgos de razonamiento y errores de comprensión y aplicación de este concepto. En lo que sigue analizamos algunas de estas investigaciones y mostramos los resultados obtenidos en dos investigaciones propias, donde se aplicaron diversos ítems que evalúan la presencia de estos sesgos.

En la primera de estas investigaciones [1] participaron 414 estudiantes de las universidades de Granada (cuatro grupos de estudiantes; $n = 307$), y Murcia (dos grupos; $n = 106$). Todos los participantes cursaban Primer Curso de Psicología y eran alumnos de la Asignatura de Análisis de Datos. La mayoría de los alumnos tenían una edad de 18 o 19 años. Los estudiantes habían estudiado el tema durante dos semanas, aproximadamente un mes antes que se pasase el cuestionario. Se realizó la toma de datos después del examen parcial que incluía el tema, para asegurarse que los alumnos lo habían estudiado.

En España el acceso a profesor de matemáticas de secundaria se realiza mediante un concurso. Para poder realizar este concurso, actualmente se exige un título específico de Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de matemáticas (en lo sucesivo Máster de Secundaria). Aproximadamente el 50% de los que acceden a dicho Máster son Licenciados de Matemáticas y el resto tienen diversas titulaciones científicas o técnicas. Por otro lado, dentro de la Licenciatura de Matemáticas, el 90% de los egresados realizan el concurso para profesor de matemáticas de secundaria, al finalizar su formación. En consecuencia, los profesores de matemática en España provienen en la misma proporción de dos tipos de estudios: (a) o bien son licenciados en Matemáticas (el 90% de dichos titulados) o bien son egresados del Máster de Secundaria. Para conseguir una muestra representativa de futuros profesores de secundaria españoles en el segundo estudio [2] se decidió tomar estos dos tipos de alumnos, eligiendo varias universidades para lograr un tamaño de muestra adecuado y mejorar la representatividad, puesto que el número de alumnos, tanto en la licenciatura de matemáticas, como en el Máster es pequeño en cada universidad. Participaron 196 futuros profesores de matemáticas de educación secundaria (95 alumnos de último curso de la licenciatura de Matemáticas de las Universidades de Granada, La Laguna y Salamanca y 101 alumnos del Máster de Secundaria, de las Universidades de Alicante, Barcelona, Cádiz, Extremadura, Granada, Salamanca, Santiago de Compostela, Pública de Navarra y Valladolid). El rango de edad fue de 22 a 30 años.

La finalidad de este trabajo es analizar algunas dificultades con las que nos enfrentamos al razonar sobre la probabilidad condicional, mostrando ejemplos de tareas que permiten evaluarlas, así como las respuestas típicas a las mismas. Creemos que esta información es valiosa para la planificación de la enseñanza de la probabilidad y la evaluación del aprendizaje.

2.2 Definición de la Probabilidad Condicional e Independencia

La probabilidad condicional puede definirse con diversos grados de formalización. Intuitivamente podemos decir que la probabilidad condicional $P(A/B)$ de un suceso A dado otro suceso B es la probabilidad de que ocurra Asabiendo que B se ha verificado. Desde un punto de vista más formal, se define mediante la expresión:

$$P(A/B) = \quad P(A \cap B)/P(B), \text{ siempre que } \; P(B) > 0.$$

El primer punto en nuestros estudios fue ver si estas definiciones se comprenden, para lo cual se pidió a los alumnos que dieran de una definición intuitiva de probabilidad simple y de probabilidad condicional, aportando un ejemplo de cada una. Los resultados (Tabla 1) sugieren que, aunque una parte importante de los alumnos define correctamente las probabilidades, la tercera parte no da respuesta o tiene imprecisiones en la definición.

Algunos participantes utilizaron expresiones imprecisas para definir algunas de las probabilidades, como por ejemplo: *"En la probabilidad condicional, para que se dé un suceso, se tiene que dar otro"*. Este alumno indica correctamente que en la probabilidad condicional intervienen dos sucesos, pero la respuesta es imprecisa porque matemáticamente podemos definir la probabilidad condicional, indepen-

	Futuros profesores ($n = 196$)		Psicología ($n = 414$)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Define incorrectamente ambas probabilidades	33	16,9	119	28,7
Define imprecisamente una probabilidad	6	3,2	28	6,8
Define correctamente una probabilidad	12	6,0	90	21,7
Define imprecisamente ambas probabilidades	114	58,1	50	12,1
Define correctamente ambas probabilidades	31	15,8	127	30,7
Total	196	100,0	414	100,0

Tabla 2.1: Respuestas en la definición de la probabilidad simple y condicional.

dientemente de que el suceso ocurra o no. Otro ejemplo de definición imprecisa sería: *"Probabilidad simple: aquella en la que hay un sólo elemento y en la probabilidad condicional intervienen dos sucesos"*. La respuesta es imprecisa, porque en la probabilidad conjunta también intervienen dos sucesos. La respuesta: *"La probabilidad simple es la probabilidad de que ocurra una variable y la condicional que ocurra sabiendo que ha ocurrido otra que la condiciona"* es imprecisa porque el alumno se refiere a variables y no a sucesos. Como se muestra en la tabla los resultados fueron peores en los futuros profesores de matemáticas que en los estudiantes de psicología.

Un concepto relacionado con la probabilidad condicional es el de independencia. Matemáticamente puede deducirse de la regla del producto de probabilidades, mediante la expresión:

$$A \text{ y } B \textit{ son independientes si y sólo si } P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Este concepto se relaciona con el de probabilidad condicional, ya que dos sucesos son independientes si la probabilidad de uno de ellos no cambia al condicionarlo por el otro [3]. Aunque también en este caso la definición es simple, desde un punto de vista psicológico y didáctico es difícil, en muchos casos, saber si dos sucesos son o no independientes, al resolver un problema o al tomar una decisión. Maury analizó la comprensión intuitiva de la probabilidad condicional de 374 estudiantes de los últimos cursos de Bachillerato, usando cuatro problemas en un contexto de extraer bolas de urnas; con y sin reemplazamiento. También utilizó dos tipos de vocabulario (técnico y cotidiano) al plantear, observando que sólo la cuarta parte de los alumnos daban respuestas correctas en el cálculo de probabilidad condicional mientras que los mismos alumnos obtuvieron un 60% de aciertos en problemas de probabilidad simple.

Maury ([3]) supuso que la dificultad no está ligada, en sí, a la noción de independencia, sino al hecho de que los dos sucesos (azul /rojo) sean no equiprobables que introduce un distractor que aumenta la dificultad de la tarea. Esta suposición se confirmó en otro experimento [4] en la que plantea a 290 alumnos de entre 13 y 16 años un problema similar en el contexto de lanzamiento de una moneda, obteniendo en este caso un 70 % de éxitos, lo que para Maury indica el reconocimiento intuitivo de la independencia por parte de los alumnos. Nuestra versión del problema en un contexto de lanzamiento de dados es el siguiente:

Problema 1. Una persona lanza un dado y anota si saca un número par o impar. Se trata de un dado no sesgado (es decir todos los números tienen la misma probabilidad). Estos son los resultados al lanzarlo 15 veces: par, impar, impar, par, par, impar, par, par, par, par, impar, impar, par, par, par. Lanza el dado de nuevo ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par en esta nueva tirada?

En la Tabla 2 presentamos los resultados del problema 2, donde la mayoría de los alumnos da una respuesta correcta, siendo los resultados mucho mejores en los futuros profesores de matemáticas. Un

5% de futuros profesores y 20% de estudiantes de Psicología obtiene una estimación frecuencial de la probabilidad, es decir, calculan la probabilidad a partir de la frecuencia relativa obtenida en los ensayos que se describen en el ítem, dando cómo valor de la probabilidad el valor 10/15 (hay un total de 10 pares en los quince lanzamientos). Un 16,8% de futuros profesores y 27% de estudiantes de psicología da respuestas son erróneas, que pueden clasificarse en tres categorías: (1) o bien se calcula la probabilidad de ocurrencia en función de los resultados anteriores, cometiendo la falacia del jugador, donde se espera que una serie corta de ensayos se equilibre [5] y [6]; (2) tratan de aplicar la fórmula de la probabilidad condicional, pero comete un error en la fórmula, (3) hacen una interpretación incorrecta del enunciado o no responden.

	Futuros profesores ($n = 196$)		Psicología ($n = 414$)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
No responde o asume dependencia	33	16,8	112	27,0
Estimación frecuencial probabilidad	10	5,1	84	20,3
Respuesta correcta	153	78,1	218	52,7
Total	196	100,0	414	100,0

Tabla 2.2: Respuestas al problema 1

La dificultad del concepto de independencia no es exclusiva de los participantes en nuestro estudio pues Sánchez ([6]) pasa un cuestionario de probabilidad a 88 profesores de Matemáticas que participaban en México en un programa de actualización, proponiéndoles el problema 2, encuentra que sólo 44 de los profesores hicieron intentos sistemáticos por resolver el problema.

Problema 2. Se extrae una carta al azar de una baraja americana: sea A el evento "se extrae un trébol" y B el evento "se extrae una reina" ¿Los eventos A y B son independientes?

De los profesores que tratan de resolverlo, 39 llegaron a una respuesta, pero sólo 4 lo hicieron correctamente, utilizando la regla del producto. En las respuestas incorrectas encuentra dos tipos de razonamiento:

1. Creer que eventos independientes son lo mismo que eventos excluyentes: "*No son independientes porque tenemos la reina de tréboles*". Este es un error muy extendido, y ha sido descrito, entre otros autores, por Kelly y Zwiers [5]. Los autores sugieren que el error puede ser debido a la imprecisión del lenguaje ordinario, en que "independiente" puede significar, a veces, separado. Por otro lado, tanto en la definición formal de independencia como en la de sucesos excluyentes interviene la operación de intersección. Usualmente decimos que dos sucesos son independientes cuando la aparición/no-aparición de uno de ellos no proporciona información sobre la ocurrencia del otro. En el caso de sucesos excluyentes la aparición de uno implica la no-aparición del otro, por tanto dos sucesos excluyentes son siempre dependientes.

2. Creer que sólo se puede aplicar la idea de independencia a sucesiones de experiencias: "S*i extraemos una carta para verificar el evento A y se vuelve a colocar en la baraja para verificar el evento B entonces A y B son independientes. Si se extrae la carta para verificar A y no se regresa, entonces A y B no son independientes*".

En nuestra investigación propusimos este mismo problema, pero se incluyeron en las respuestas alternativas los errores descritos por Sánchez ([6]), quedando de la siguiente forma:

Problema 3. Se extrae una carta al azar de una baraja española (40 cartas con cuatro palos: oros, bastos, espadas y copas. Cada palo tiene los números del 1 al 7, sota caballo y rey). Sea A el suceso "se extrae una carta de oros" y B el suceso "se extrae un rey". ¿Los sucesos A y B son independientes?

1. No son independientes, porque en la baraja hay un rey de oros.
2. Sólo si sacamos primero una carta para ver si es rey y se vuelve a colocar en la baraja y luego sacamos una segunda para ver si es oros.
3. Sí, porque $P(\text{rey de oros}) = P(\text{rey}) \times P(\text{oros})$.
4. No, porque $P(\text{rey}/\text{oros}) \neq P(\text{rey})$.

	Futuros profesores ($n = 196$)		Psicología ($n = 414$)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a.) No son independientes porque en la baraja hay un rey de oros.	63	32,1	118	28,5
b.) Sólo si sacamos primero una carta para ver si es rey y se vuelve a colocar en la baraja y luego sacamos una segunda carta para mirar si es oros.	64	32,7	61	14,7
c.) No, porque $P(\text{rey}/\text{oros}) \neq P(\text{rey})$.	17	8,7	82	19,8
d.) Sí, en todos los casos.	51	26,0	120	29,0
En blanco.	1	0,5	33	8,0
Total	196	100,0	414	100,0

Tabla 2.3: Respuestas al problema 3

En la Tabla 3 mostramos las respuestas de nuestros estudiantes a este problema, donde vemos que un 26% de futuros profesores y 29% de alumnos de Psicología responden correctamente. El error más frecuente entre nuestros alumnos fue confundir independencia con mutua exclusividad (alrededor del 30% en cada grupo), algo que coincide con los resultados de Sánchez ([6]). El distractor (b) evalúa el error de suponer que el concepto de independencia sólo se puede aplicar a experimentos que se suceden en el tiempo, fue cometido por un 14,7% de los estudiantes de psicología y en el doble de futuros profesores. Fue algo mayor la proporción de estudiantes de psicología que piensan que los sucesos no son independientes precisamente porque se cumple la relación de independencia y también que no responden que los futuros profesores.

2.3 Condicionamiento, Causación y Temporalidad

La causalidad es un concepto científico, filosófico y psicológico complejo, a pesar de que intuitivamente es comprendido y aceptado por la mayoría de personas ya que construimos nuestro conocimiento del mundo sobre la base de relaciones de causa y efecto entre diferentes sucesos. Desde el punto de vista probabilístico, si un suceso A es causa de otro suceso B, siempre que suceda A, sucederá B, por lo que $P(B/A) = 1$. La relación causal estricta es difícil de hallar en el mundo real y hablamos de relación de *causa débil* cuando al suceder A cambia la probabilidad de que ocurra B. Es decir, cuando $P(B/A)$ es diferente de $P(B)$, por lo cual una relación de causalidad implica una dependencia de tipo estadístico entre los sucesos implicados.

Sin embargo, en contra de la creencia popular, dos sucesos pueden ser estadísticamente dependientes, sin que uno de ellos sea causa del otro. Por ejemplo, es sabido que los países con mayor esperanza de vida tienen una menor tasa de natalidad, pero esto no implica que la tasa de natalidad sea causa de la esperanza de vida o al contrario, ya que si conseguimos aumentar la natalidad de un país esto no incide automáticamente en la esperanza de vida de sus habitantes. La existencia de una relación condicional indica que una relación causal es posible, pero no segura. Una asociación estadística entre variables puede ser debida a otras variables intervinientes o incluso ser espúrea y no implica relación causal. En el ejemplo, ambas variables pueden depender del nivel de renta de un país que es mayor si hay mayor proporción de mujeres trabajando; este trabajo de las mujeres contribuye a elevar el nivel de renta y este la esperanza de vida. Pero la mayor dedicación de las mujeres a la vida profesional hace que estas decidan tener un menor número de hijos, disminuyendo la tasa de natalidad.

Desde el punto de vista psicológico, la persona que evalúa una probabilidad condicional $P(A/B)$ va a percibir dos relaciones muy diferentes entre A (suceso condicionado) y B (suceso condicionante) dependiendo del contexto. Si dentro del contexto se percibe que B es una causa de A, la persona establecerá entre A y B una *relación causal*, por ejemplo, al preguntar cuál es la probabilidad de que una niña tenga los ojos azules si su padre tiene los ojos azules. Si dentro del contexto se percibe A como una causa de B, la persona establecerá entre A y B una *relación diagnóstica*, por ejemplo, al preguntar cuál es la probabilidad de que un padre tenga los ojos azules si una niña tiene los ojos azules [7]. Aunque matemáticamente los dos enunciados son equivalentes, desde un punto de vista psicológico no son percibidos como idénticos por las personas. En la primera opción, A sería que la niña tenga los ojos azules (efecto), B que la madre tenga los ojos azules (causa). En este caso al calcular $P(A/B)$ el estudiante tendrá que realizar un razonamiento causal, estimando el efecto dado cierto conocimiento de las causas. Por el contrario, en la segunda opción, Asería que la madre tenga los ojos azules (causa) y Bque la niña tenga los ojos azules, por tanto $P(A/B)$, es una relación diagnóstica.

Numerosos estudios indican que la creencia que las relaciones causales son más fuertes que las relaciones diagnósticas. La relación de causalidad también se asocia, a menudo, con la secuencia temporal. El problema 4 [8] ilustra como algunos estudiantes tienen problemas con la condicionalidad cuando se invierte el eje de tiempo en que los sucesos ocurren de una forma natural.

Problema 4. Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin reemplazamiento.

1. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar, habiendo extraído una bola negra en primer lugar? $P(N2/N1)$
2. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar? $P(N1/N2)$

Mientras los alumnos de Falk [8] no tenían dificultad para resolver la primera parte del problema 4, muchos fueron incapaces de dar una solución a la segunda, a la que responden que el resultado en la segunda extracción no afecta a la primera. Otros estudiantes dan como respuesta 1/2, teniendo en cuenta sólo la composición de la urna y sin utilizar el dato del resultado posterior. Estos resultados sugieren la confusión entre condicionamiento y causación. En la primera parte del problema 4, la inferencia causal es una situación natural y compatible con el eje temporal, pero la segunda parte pide hacer una inferencia inversa, que requiere un razonamiento probabilístico que es indiferente al orden temporal, lo que puede crear dificultades psicológicas, pues el resultado en la segunda extracción depende causalmente del resultado en la primera extracción, pero no al contrario. Sin embargo, el resultado en cualquiera de las dos extracciones modifica la estimación de probabilidades del resultado en la otra. Si, por ejemplo, en la segunda extracción ha salido una bola negra, sabemos que esta bola ya no puede ser uno de los posibles resultados en la primera extracción, por tanto ha habido una reducción del espacio muestral y$P(N_1/N_2)$ sería un tercio, igual que la $P(N_2/N_1)$.

La creencia de que un suceso que ocurre después del que juzgamos no puede afectar a la probabilidad del primero se conoce como *falacia del eje temporal*. Es importante erradicar esta creencia, pues la probabilidad de un suceso debe ser revisada a la luz de resultados posteriores en algunas situaciones, sobre todo al aplicar el Teorema de Bayes, donde la actualización de las probabilidades a la luz de los resultados juega un papel tan importante [9].

	Futuros profesores ($n = 196$)		Psicología ($n = 414$)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a.) 1/ 2	7	3,6	23	5,6
b.) 1/ 6	52	26,5	70	16,9
c.) 1/ 3	126	64,3	285	68,8
d.) 1/ 4	8	4,1	30	7,3
En blanco.	3	1,5	6	1,4
Total	196	100,0	414	100,0

Tabla 2.4: Respuestas al problema 4 (parte 1)

En las tablas 4 y 5 presentamos los resultados de la aplicación del problema 4 en nuestros dos estudios. La mayoría de los alumnos de psicología (68,8%) y de futuros profesores (64,3 %) han respondido correctamente a la primera parte del problema. El error más frecuente en esta parte en ambos grupos fue confundir la probabilidad condicional y conjunta aplicando la regla del producto $(1/2) \times (1/3) = 1/6$.

	Futuros profesores ($n = 196$)		Psicología ($n = 414$)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a.) 1/3	58	29,6	99	23,9
b.) No se puede calcular	41	20,8	103	24,9
c.) 1/6	25	12,8	38	9,2
d.) 2	64	32,7	151	36,5
En blanco.	8	4,1	23	5,5
Total	196	100,0	414	100,0

Tabla 2.5: Respuestas al problema 4 (parte 2)

En la segunda parte del problema, son sólo el 29,6% de futuros profesores y el 23,9% de estudiantes de Psicología los que dan la respuesta correcta, mientras que un 20,8% y un 24,9% respectivamente indican que no se puede calcular, mostrando explícitamente la falacia del eje temporal. El sesgo de equiprobabilidad lo presenta un 32% y 36,5% de estudiantes y el resto confunde probabilidad condicional y conjunta (distractor c). Nuestros resultados reproducen los obtenidos en [8].

2.4 Intercambio de Sucesos en la Probabilidad Condicional

Falk [8] sugirió que muchos estudiantes no discriminan adecuadamente entre las dos direcciones de la probabilidad condicional $P(A/B)$ y $P(B/A)$ y denominó a este error *falacia de la condicional transpuesta*. Aparece con frecuencia en contextos médicos, donde se confunde la probabilidad de tener una enfermedad cuando ha sido positivo el test de diagnóstico con la probabilidad de un resultado positivo en el test de diagnóstico, dado que se tiene la enfermedad [10]. La prevalencia de este error puede tener consecuencias importantes; por ejemplo la confusión entre la probabilidad de que un niño afectado con síndrome de Down dé una amniocentesis prenatal positiva, que es alta y el hecho de que, siendo la prueba positiva el niño realmente tenga síndrome de Down, que es mucho menor. Un problema de este tipo se presentó a nuestros estudiantes para evaluar la presencia de este sesgo presentamos (Problema 5). Algo más del 40% de futuros profesores y alrededor de tercio de estudiantes de Psicología escoge la respuesta correcta (alternativa b), siendo los resultados en nuestro caso algo mejores que en el estudio de Pollatsek y cols. [7]. Lo más frecuente en ambos grupos es considerar la misma confianza en ambas predicciones, lo que de acuerdo a Pollatsek et al., indica la falacia de la condicional transpuesta.

Problema 5. Un test diagnóstico de cáncer fue administrado a todos los residentes de una gran ciudad en la que hay pocos casos de cáncer. Un resultado positivo en el test es indicativo de cáncer y un resultado negativo es indicativo de ausencia de cáncer. ¿Qué te parece más probable?

1. Que una persona tenga cáncer si ha dado positivo en el test de diagnóstico.
2. Que un test de diagnóstico resulte positivo si la persona tiene cáncer.
3. Los dos sucesos tienen la misma probabilidad.

	Futuros profesores ($n = 196$)		Psicología ($n = 414$)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a.) Predecir que una persona tiene cáncer si ha dado positivo en el test de diagnóstico.	27	13,8	24	5,8
b.) Predecir un resultado positivo en el test de diagnóstico si la persona tiene cáncer.	81	41,3	133	32,1
c.) Tengo la misma confianza en ambas predicciones.	83	42,3	245	59,2
En blanco.	5	2,6	12	2,9
Total	196	100,0	414	100,0

Tabla 2.6: Respuestas de futuros profesores y alumnos de Psicología al problema 5

La falacia de la condicional transpuesta aparece con frecuencia al interpretar el nivel de significación α en los contrastes de hipótesis. El nivel de significación αse define como la probabilidad condicional de obtener un resultado R en la región de rechazo cuando la hipótesis nula H_o es cierta, es decir $\alpha = P(R/H_o)$. Cuando un contraste de hipótesis resulta significativo (lo que quiere decir que R ha ocurrido) y alguien pregunta por la probabilidad de haber cometido un error (la probabilidad de que H_0 sea cierta) a menudo se contesta con α. En esta situación se estaría confundiendo $P(R/H_o)$ con $P(H_o/R)$. También se ha encontrado en la interpretación de tablas de contingencia por parte de estudiantes donde, según [11] alrededor del 20% de los estudiantes del curso preuniversitario en su trabajo confunden "porcentaje de fumadores que contraen cáncer de pulmón" con "porcentaje de personas con cáncer de pulmón que fuman".

Una posible explicación dada por Falk [8] de la prevalencia de este error es que el lenguaje ordinario, que es el que usamos en el enunciado de los problemas de probabilidad condicional no tiene la suficiente precisión. Cuando escribimos una probabilidad condicional usando la notación matemática es claro cuál es el suceso condicionante y cuál el condicionado, pero en el lenguaje ordinario la probabilidad condicional (tener cáncer si se es fumador) y su inversa (ser fumador si se tiene cáncer) no siempre se distinguen claramente entre sí. También en el caso del contraste estadístico de hipótesis la definición de αcomo "probabilidad de cometer error tipo I" podría contribuir a su incorrecta interpretación porque en la anterior frase sólo se hace referencia a un suceso (error tipo I) y no a una probabilidad condicional.

2.5 Confusión de Probabilidad Condicional y Probabilidad Conjunta

Pollatsek et al. [7] coinciden con Falk [8] en que muchas de las dificultades que las personas tienen con la comprensión de la probabilidad condicional pueden deberse a dificultades de comprensión del lenguaje de los enunciados de la probabilidad condicional y que la ejecución de tareas que implican probabilidades condicionales depende de cómo se redacten los enunciados. Un ejemplo lo encontraron Einhorn y Hogarth [12] con los enunciados que usan la conjunción "y". Para estos autores estos enunciados pueden llevar a confundir la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional. Los autores plantearon a 24 estudiantes la pregunta: *"¿Cuál es la probabilidad de ir al supermercado y comprar café?"*. Esta pregunta se refiere a la probabilidad conjunta, pero 9 de los 24 estudiantes la interpretaron en forma condicional como P(comprar café/ ir al supermercado). También en [13] la mitad de los sujetos del estudio interpretaron la intersección como condicionamiento.

Un error relacionado es la *falacia de la conjunción* [14] o creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que la de uno de ellos por separado o la de su unión. Según Tversky y Kahneman el error es resultado de considerar la conjunción como más representativa de la población generadora que cada evento separado o bien del hecho que la conjunción hace que los sujetos recuerden o imaginen más ejemplos de una categoría o modelo más restringido. Díaz [15], en su estudio sobre la falacia de la conjunción, hace hincapié en la influencia de los sucesos que intervienen en los problemas. Cuando uno de los sucesos tiene una probabilidad muy alta en comparación con el otro, la intersección de los dos se ve más probable que el suceso de mayor probabilidad, por lo que aparece la falacia. Un ejemplo sería el Problema 6, cuya solución correcta es la (a), ya que al ser sucesos independientes esta va a ser menor que la probabilidad dada en el distractor (b), en la que intervienen los sucesos ganar el segundo y tercer set.

Problema 6. Supón que Rafa Nadal alcanza la final de Roland Garros en 2004. ¿Cuál de los siguientes sucesos consideras más probable?

1. Rafa Nadal pierde el primer set
2. Rafa Nadal pierde el primer set pero gana el partido
3. Los dos sucesos son iguales de probables

Como vemos en la Tabla 7, el 57,1% de los futuros profesores dio una solución correcta; por tanto estos alumnos distinguen correctamente entre probabilidad conjunta, condicional y simple. Los resultados son bastante mejores en este ítem que los de Díaz, cuyo porcentaje de respuestas correctas fue sólo del

	Futuros profesores ($n = 196$)		Psicología ($n = 414$)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a.) Rafa Nadal pierde el primer set.	112	57,1	103	24,9
b.) Rafa Nadal pierde el primer set pero gana el partido.	23	11,8	39	9,4
c.) Los dos sucesos son iguales de probables.	58	29,6	256	61,8
En blanco.	3	1,5	16	3,9
Total	196	100,0	414	100,0

Tabla 2.7: Respuestas al problema 6

24,9%. Un 11,7% de futuros profesores y un 9,4% de estudiantes de Psicología optaron por la opción (b); se tratan de estudiantes que están incurriendo en la falacia de la conjunción. En consecuencia, la falacia de la conjunción tiene poca incidencia en ambos estudios. Un 29,6% de futuros profesores y un 61,8% de la de Psicología eligieron la opción (c), manifestando el sesgo de equiprobabilidad descrito en los experimentos de Lecoutre [16]. Esta autora describe la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio, incluso en aquellos en que no es aplicable el principio de indiferencia o donde no hay una simetría física.

2.6 Situaciones Sincrónicas y Diacrónicas

Otra variable que influye en la dificultad de las tareas de probabilidad condicional es si se percibe o no el experimento compuesto como una serie de experimentos simples sucesivos. A este respecto se pueden distinguir dos tipos de situaciones relacionadas con la probabilidad condicional:

- *Situaciones sincrónicas:* Se trata de situaciones estáticas, en las que no subyace una secuencia de experimentos, sino que los experimentos aleatorios se realizan simultáneamente. Un ejemplo lo encontramos en el problema 2, en que se extrae una carta de una baraja pero se consideran dos experimentos (ver el palo y la figura de la carta).

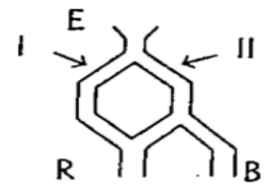
- *Situaciones diacrónicas*: Son situaciones en las que hay una clara secuencia temporal, donde se realizan un experimento detrás de otro. Un ejemplo se muestra en el problema 1 en que se lanza varias veces seguidas un dado.

Cuando calculamos una probabilidad condicional, es clave que cambiemos el espacio muestral al suceso condicionante, pero algunos estudiantes encuentran difícil identificar el espacio muestral cuando hay un suceso condicionante. Las situaciones sincrónicas dificultan especialmente el cambio de espacio muestral, como comprueba Ojeda [13] al plantear un problema de este tipo a 26 alumnos de entre 14 y 16 años, el 60% de los cuáles hicieron una restricción incorrecta del espacio muestral.

La autora propone también los problemas 4a y 7 a 255 alumnos de Bachillerato, después de estudiar probabilidad condicional. Estos dos problemas tienen la misma estructura matemática, pero el problema 4a se percibe más fácilmente como una secuencia de experimentos. La proporción de respuestas correctas subió del 25% (problema 7) al 40% (problema 4a), aunque los alumnos todavía siguen con dificultades y no reducen convenientemente el espacio muestral al resolver el problema. En nuestro estudio también observamos un alto porcentaje de respuestas correctas tanto en futuros profesores como en estudiantes de Psicología en el ítem 7a.

Problema 7. Una bola se suelta en E. Si sale por R, ¿Cuál es la probabilidad de que haya pasado por el canal I?

1. 0,50
2. 0,33
3. **0,66**
4. No se puede calcular



En la tabla 8 presentamos los resultados del problema 7 en nuestros dos estudios. El resultado (c) es el correcto ya que para resolver este ítem, el alumno ha de tener en cuenta que si la bola pasa por el canal *II* puede caer por R o por B, y si pasa por I, sólo puede caer por R. El espacio muestral de este experimento sería: {(I,R), (II,R), (II,B)}. Puesto que a R llega el doble de bolas desde I que desde II, $P(I/R) = 2/3$. Esta solución es sin embargo obtenida por muy pocos estudiantes de Psicología y sólo la cuarta parte de los futuros profesores. Contrastan estos resultados con lo de Ojeda [13] quien obtiene mucho mejores resultados con este ítem que con los anteriores. La diferente forma en que se da el enunciado podría explicar la discrepancia de resultados.

	Futuros profesores ($n = 196$)		Psicología ($n = 414$)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a.) 0,50	132	67,3	318	76,8
b.) 0,33	15	7,7	37	8,9
c.) 0,66	46	23,5	41	9,9
d.) No se puede calcular.	2	1,0	7	1,7
En blanco.	1	0,5	11	2,7
Total	196	100,0	414	100,0

Tabla 2.8: Respuestas al problema 7

La mayoría de los estudiantes en ambos estudios elige el distractor (a) y por tanto, no está teniendo en cuenta las bolas que caen por el orificio B, es decir no se tiene en cuenta el condicionamiento por un suceso posterior, haciendo una incorrecta restricción del espacio muestral.
El resto de los estudiantes elige el distractor (b) se está confundiendo el suceso condicionado ya que se está calculando la probabilidad de que habiendo salido la bola por R, la bola haya pasado por *II* o bien indica que no se puede calcular la probabilidad.

2.7 Implicaciones Para la Enseñanza de la Estadística

En este trabajo hemos descrito algunos sesgos que aparecen en las investigaciones en Psicología y Educación sobre comprensión de la probabilidad condicional y mostrado nuestros propios datos en dos estudios empíricos que muestran la extensión de estos sesgos no sólo en estudiantes de Psicología, sino también en futuros profesores de matemáticas.
Como vemos, el porcentaje que incurre en los diferentes sesgos es alto, tanto en el estudio de Díaz [1] como en el de Contreras [2]. Es especialmente preocupante la presencia de estos sesgos en los futuros

profesores. Por ejemplo, hay una gran incidencia de la falacia del eje de tiempos por la que los sujetos tienen dificultad para resolver un problema de probabilidad condicional si el suceso condicionante ocurre después del condicionado. Sin embargo, esta es una situación muy común en la vida real e incluso en el trabajo profesional del futuro profesor (por ejemplo en la evaluación de los alumnos, el suceso condicionante sería el resultado del examen y el condicionado los conocimientos del estudiante). También aparece con frecuencia en inferencia estadística donde conceptos como intervalo de confianza o nivel de significación están definidos mediantes condicionales en que el eje de tiempos se ha invertido.

También observamos dificultad en la percepción de los experimentos compuestos en el caso de situaciones sincrónicas. Se confunde independencia y exclusión, se cambian los términos de la probabilidad condicional, se confunde ésta con la conjunta y se asigna a la probabilidad conjunta un valor mayor que a la probabilidad simple, violando las reglas lógicas del cálculo de probabilidades.
Estos resultados son motivo de preocupación, ya que los futuros profesores de nuestra muestra tenderán a fallar en la enseñanza de la probabilidad así como en algunas actividades profesionales que requieren del razonamiento probabilístico, tales como "*averiguar lo que los estudiantes saben, la elección y la gestión de las representaciones de las ideas matemáticas, la selección y modificación de los libros de texto, decidir entre los cursos alternativos de acción*" [17, p. 453]. En consecuencia, se sugiere la necesidad de mejorar la educación sobre probabilidad que estos futuros profesores reciben durante su formación.

Como indicamos en la introducción, la probabilidad condicional es un concepto básico para la comprensión de muchos otros que tiene que enseñar el futuro profesor de educación secundaria y Bachillerato. Las distribuciones de los estadísticos en el muestreo, el nivel de significación y potencia en un contraste de hipótesis, las distribuciones marginales, las rectas de regresión, entre otros conceptos, se definen mediante una probabilidad condicional. Es, por tanto, necesario asegurarnos que el profesor supera sus sesgos sobre este tema, si queremos evitar que los transmita a sus estudiantes.

Por otro lado, la compleja relación entre los conceptos probabilísticos y la intuición [18] se muestran también en los resultados, puesto que la alta preparación matemática no fue suficiente para evitar sesgos de razonamiento. Al igual que en otras investigaciones [19] los resultados sugieren la necesidad de prestar más atención a la enseñanza de heurísticas en la resolución de problemas matemáticos y la importancia que en la resolución de los problemas matemáticos tienen los procesos psicológicos.

Los problemas que hemos mostrado como ejemplos a lo largo del trabajo pueden usarse para diagnosticar las dificultades de los futuros profesores y organizar acciones formativas que les ayuden a superarlos. Las soluciones erróneas pueden discutirse colectivamente y la simulación de las experiencias descritas en los problemas, con ayuda de tablas de números aleatorios, calculadoras u ordenadores permitirá la superación gradual de estos sesgos. El uso de diversas representaciones, como árboles, o diagramas rectangulares puede también contribuir a la mejora del aprendizaje.

Agradecimientos: Este trabajo forma parte del proyecto: EDU2010-14947, MICINN- FEDER y grupo PAI FQM126.

Bibliografía

[1] Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología.* Universidad de Granada: Tesis doctoral.

[2] Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

[3] Maury, S. (1985). Influence de la question dans una épreuve relative á la notion d'independance. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 283-301.

[4] Maury, S. (1986). *Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problémes.* Tesis doctoral. Universidad de Montpéllier II.

[5] Kelly, I. W. y Zwiers, F. W. (1986). Mutually exclusive and independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory. *Teaching Statistics, 8*, 96-100.

[6] Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Educación Matemática* (pp. 389-404). México.

[7] Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding Conditional Probabilities. *Organitation, Behavior and Human Decision Processes. 40*, 255 – 269.

[8] Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292–297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

[9] Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle *Recherches en Didactique des Mathématiques, 15*(1), 49-95.

[10] Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. En D. Kahneman, P. Slovic y Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases.* New York: Cambridge University Press.

[11] Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. y Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 151–169.

[12] Einhorn, H. J. y Hogart, R.M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin, 99*, 3–19.

[13] Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO, 5*, 37-55.

[14] Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

[15] Díaz, C. (2005). Evaluación de la falacia de la conjunción en alumnos universitarios. *Suma, 48*, 45-50.

[16] Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in purely random situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 557-568.

[17] Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

[18] Borovcnik, M. y Peard, R. (1996). Probability. En A. Bishop, et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 239-288). Dordrecht: Kluwer.

[19] Aguilar, M., Navarro, J.I., López, J.M. y Alcalde, C. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema, 14*(2), 382-386.

Aplicaciones

3 ANÁLISIS DE REGRESIÓN PARA LA POBLACIÓN DE COSTA RICA.

Luis A.Acuña P.
lacuna@itcr.ac.cr
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Resumen. Breve introducción al análisis de regresión y a la transformación de algunos problemas no lineales en problemas lineales. Aplicación al caso de la población de Costa Rica como función del tiempo.

Palabras clave: Regresión, regresión lineal, regresión no lineal, predicción, crecimiento exponencial.

Abstract. Short introduction to regression analysis and the transformation of some non-linear problems to linear problemas. Application to the case of Costa Rica's population as a function of time.

KeyWords: Regression, linear regression, non-linear regression, prediction, exponential growth.

3.1 ¿Qué es la regresión?

El análisis de regresión es una técnica estadística que permite encontrar una ecuación que aproxime una variable como función de otras. Típicamente, las variables son atributos de los individuos en una población, y el análisis trabaja a partir de los valores de los atributos para alguna muestra de individuos. La variable que se escribe como función de las otras se llama *resultado*, y las otras son los *predictores*. La *regresión simple* se usa cuando hay un solo predictor.

Como ejemplo de esto, al relacionar la edad x en años con la estatura y en centímetros para niños menores de doce años, se busca una función $y = f(x)$. Si además la función buscada es lineal, $y = a + bx$, entonces se habla de *regresión lineal simple*.

Uno de los usos más comunes de la regresión es el de predecir el valor de y para un valor de x que no esté en la muestra. Por ejemplo, suponga que a partir de una muestra de niños con edades respectivas 3, 5, 6, 8, 9 y 11, en años, se ha encontrado la ecuación $y = 82.6 + 5.8x$ para la estatura en centímetros como función de la edad. Entonces se puede usar esa ecuación para predecir la estatura de un niño de 12 años: $x = 12$ resulta en $y = 82.6 + 5.8(12) \approx 152\,\text{cm}$, y esa es la estatura estimada a los doce años. El análisis de regresión lineal simple ha sido estudiado profundamente y sus mayores problemas ya están resueltos. Incluso muchas calculadoras de bolsillo pueden calcular los coeficientes a y b en la ecuación $y = a + bx$, a partir de algunos datos muestrales.

Cuando la regresión simple no es lineal, se habla de *regresión no lineal simple*, y este no es un problema que esté completamente resuelto. Para algunos casos particulares, sin embargo, existen técnicas para transformar un problema no lineal en uno lineal, en el que se puedan aplicar los resultados existentes de la regresión lineal. En las siguientes secciones se darán dos ejemplos de esto. Si el resultado y es función de varios predictores, entonces el problema es de *regresión múltiple*, que también puede ser lineal o no lineal. En regresión lineal múltiple, el resultado y se escribe como función lineal de los predictores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en la forma $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$.

El problema de regresión lineal múltiple también es bien conocido y presenta pocas dificultades. En particular, la regresión polinomial, en la que se busca escribir un resultado y como función polinomial de uno o varios predictores, puede transformarse fácilmente a uno de regresión lineal múltiple. Como ejemplo concreto, considere el problema de encontrar una ecuación cuadrática $y = at^2 + bt + c$ que exprese el resultado y en términos del predictor t. Si se definen dos nuevas variables $x_1 = t$ y $x_2 = t^2$, entonces la ecuación se convierte en $y = ax_2 + bx_1 + c$, que tiene la forma usual en regresión lineal múltiple.

3.2 Un ejemplo: Temperatura de agua enfriándose

La siguiente tabla muestra la temperatura, en grados centígrados, de agua en un recipiente mientras se enfría durante varios minutos (“Min” es el número de minutos transcurridos).

Min	Grados	Min	Grados	Min	Grados	Min	Grados
0.00	97.0	3.30	79.0	11.28	56.0	18.25	46.5
0.43	95.0	4.43	74.0	13.18	53.0	21.55	43.5
1.10	90.0	6.27	68.0	15.00	50.5	24.72	41.0
2.42	83.0	8.88	61.0	16.35	49.0	34.55	35.5

Tabla 3.1

Se denotará con x al tiempo en minutos y con y a la temperatura. En el siguiente gráfico se observa que la relación entre las variables x y y es aparentemente exponencial (con base menor que 1), pero trasladada hacia arriba. En efecto, es de esperar que conforme $x \to \infty$, el valor límite de y no será 0 como en una exponencial decreciente, sino que la temperatura límite convergerá a la temperatura ambiente.

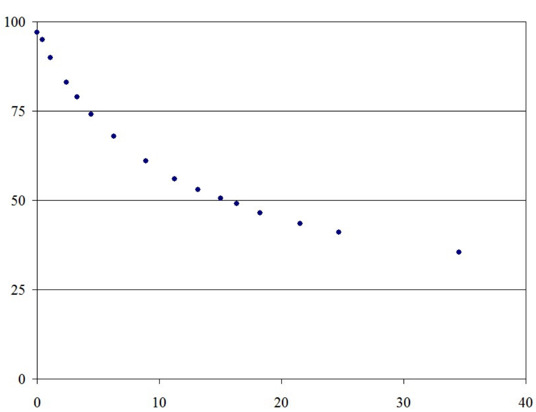


Figura 3.1: Temperatura como función del tiempo

Si se denota con TA esa temperatura ambiente, entonces puede conjeturarse que la ecuación que expresa y como función de x tiene la forma

$$y = ab^x + TA$$

donde a y b son constantes por determinar. La ecuación anterior puede convertirse en lineal de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y &= ab^x + TA \\ y - TA &= ab^x \\ \ln(y - TA) &= \ln(ab^x) \\ &= \ln a + x \ln b \\ y_1 &= a_1 + b_1 x \end{aligned}$$

donde $y_1 = \ln(y - TA)$, $a_1 = \ln a$ y $b_1 = \ln b$.

Luego de un poco de prueba y error[2] se encuentra que una buena estimación para la temperatura ambiente es $TA = 31.5$. Entonces se obtiene una nueva tabla de valores para x (que sigue siendo el número de minutos) y $y_1 = \ln(y - 31.5)$:

x	y_1	x	y_1	x	y_1	x	y_1
0.00	4.1821	3.30	3.8607	11.28	3.1987	18.25	2.7081
0.43	4.1510	4.43	3.7495	13.18	3.0681	21.55	2.4849
1.10	4.0690	6.27	3.5973	15.00	2.9444	24.72	2.2513
2.42	3.9416	8.88	3.3844	16.35	2.8622	34.55	1.3863

Tabla 3.2

Al graficar esos puntos se nota que ellos son casi colineales, lo que significa que la regresión lineal sí dará una aproximación muy cercana.

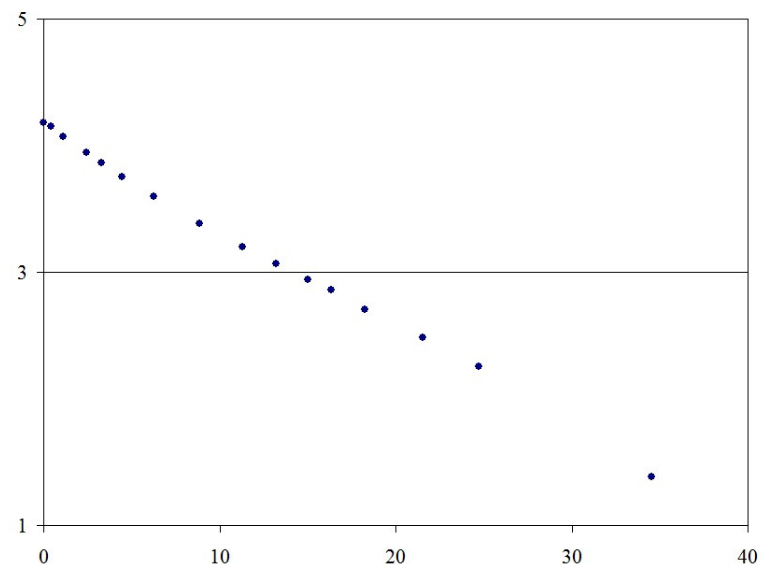


Figura 3.2: $y_1 = \ln(y - 31.5)$ como función de x

De hecho, el análisis de regresión lineal para y_1 como función de x resulta en los coeficientes $a_1 = 4.13295$ y $b = -0.078626$. Recordando que $a_1 = \ln a$ y que $b_1 = \ln b$, se despeja

$$a = e^{a_1} = 62.3619 \quad \text{y} \quad b = e^{b_1} = 0.924385$$

Finalmente, la ecuación $y = ab^x + TA$ se convierte en

$$\text{Temperatura} = 62.3619 \cdot 0.924385^{\text{Minutos}} + 31.5$$

[2] Se calcula el coeficiente de correlación lineal entre x y y_1 para varios valores de TA, buscando alguno que dé un coeficiente muy cercano a 1... o más bien a -1, ya que la relación es decreciente.

Al graficar los puntos en la figura **??** junto con esta ecuación se comprueba que efectivamente la ecuación describe las observaciones muy precisamente.

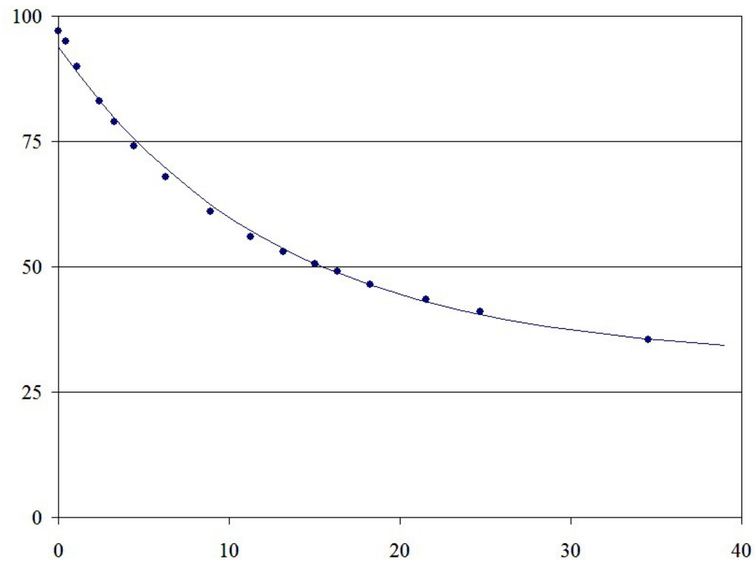


Figura 3.3: Regresión para la temperatura como función del tiempo

3.3 Evolución de la población de Costa Rica

En la figura 3.4 se ve la evolución de la población de Costa Rica, entre los años 1522 y 2000, según datos del Instituto Nacional de Estadística y Censos.

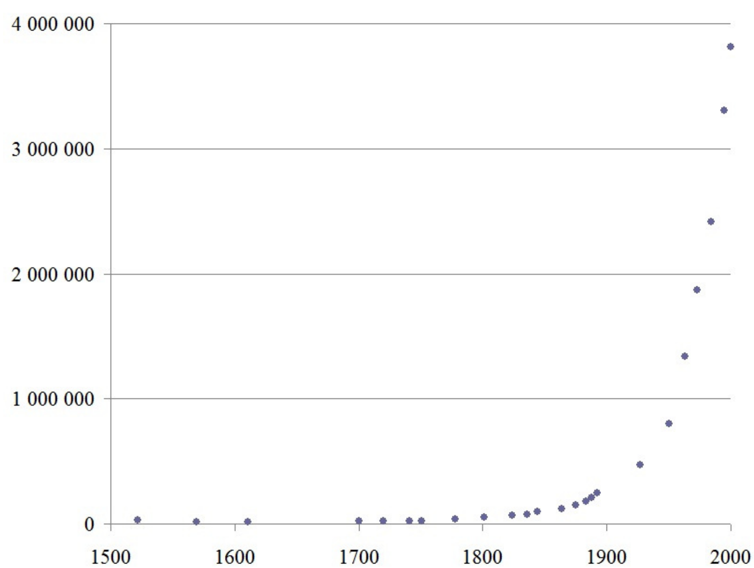


Figura 3.4: Población de Costa Rica como función del año

La fuente de datos para ese gráfico es la siguiente tabla.

Año	Población	Año	Población	Año	Población
1522	27 200	1801	52 591	1892	243 205
1569	17 479	1824	65 393	1927	471 524
1611	15 538	1836	78 365	1950	800 875
1700	19 293	1844	93 871	1963	1 336 274
1720	19 437	1864	120 499	1973	1 871 780
1741	24 126	1875	153 250	1984	2 416 809
1751	24 022	1883	182 073	1995	3 301 210
1778	34 212	1888	205 731	2000	3 810 179

Tabla 3.3

En el gráfico es claro que la relación entre población y tiempo no es lineal. Más bien parece exponencial, y entonces puede plantearse una ecuación de la forma

$$y = ab^t$$

donde y es la población y t el año.

Si la ecuación propuesta es correcta, entonces al tomar logaritmo natural en ambos lados se obtiene la relación lineal

$$\ln y = \ln(ab^t) = \ln a + t \ln b$$

o bien

$$y_1 = a_1 + b_1 t$$

donde $y_1 = \ln y$, $a_1 = \ln a$ y $b_1 = \ln b$.

La siguiente tabla contiene los valores de los datos transformados.

t	y_1	t	y_1	t	y_1
1522	7.3278	1801	7.4961	1892	7.5454
1569	7.3582	1824	7.5088	1927	7.5637
1611	7.3846	1836	7.5153	1950	7.5756
1700	7.4384	1844	7.5197	1963	7.5822
1720	7.4501	1864	7.5305	1973	7.5873
1741	7.4622	1875	7.5364	1984	7.5929
1751	7.4679	1883	7.5406	1995	7.5984
1778	7.4832	1888	7.5433	2000	7.6009

Tabla 3.4

Y el gráfico de y_1 como función de t es el siguiente.

¡Sorpresa! Tampoco la relación entre y_1 y t es lineal, de modo que la propuesta $y_1 = a_1 + b_1 t$ no es satisfactoria. El gráfico sugiere que la relación entre t y y_1 es más bien cuadrática: $y_1 = at^2 + bt + c$.

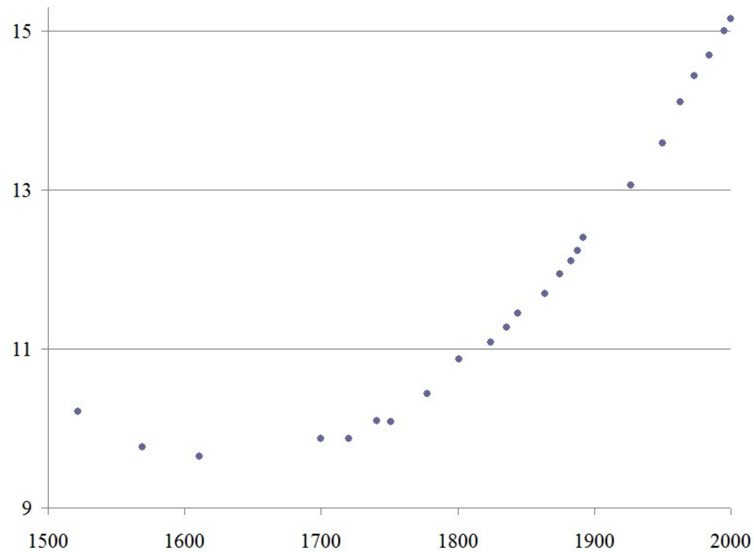


Figura 3.5: $y_1 = \ln y$ como función de t

Para estimar los coeficientes a, b y c en la ecuación anterior podrían usarse técnicas de regresión múltiple, como se mencionó en la primera sección. Pero otra opción es escribir la relación cuadrática en la forma

$$y_1 = a(t-h)^2 + k$$

que es una forma alterna para la ecuación de una parábola, donde el punto (h,k) es el vértice. La ventaja de esta forma en el caso en estudio es que fácilmente se estima h de manera visual para no necesitar regresión múltiple. En efecto, se observa en el gráfico que $h \approx 1640$ (el valor de t donde se alcanza el vértice), así que la ecuación puede escribirse como

$$y_1 = ax + k$$

donde se define la nueva variable $x = (t-1640)^2$. Esta ecuación, $y_1 = ax + k$, también es lineal, pero no se puede confiar en que sea aceptable antes de ver el gráfico. Afortunadamente, en el gráfico de x vs y_1, a continuación, se nota que la relación sí es casi exactamente lineal.

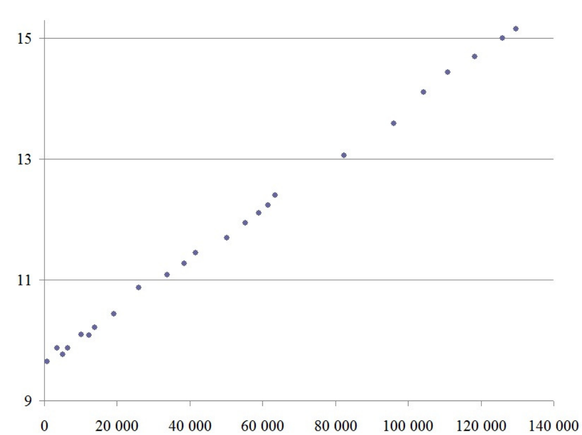


Figura 3.6: y_1 como función de $x = (t-1640)^2$

El análisis de regresión para $y_1 = ax + k$ arroja los coeficientes $a = 4.2629 \times 10^{-5}$, $k = 9.6273$. Entonces, devolviendo los cambios de variables que se hicieron, resulta

$$\begin{aligned} y_1 &= 4.2629 \times 10^{-5} x + 9.6273 \\ \ln y &= 4.2629 \times 10^{-5} (t-1640)^2 + 9.6273 \\ y &= \exp\left[4.2629 \times 10^{-5} (t-1640)^2 + 9.6273\right] \\ &= 15173.8 \cdot 1.00004263^{(t-1640)^2} \end{aligned}$$

(donde exp es la función exponencial natural).

El gráfico siguiente muestra los puntos que habíamos visto en la figura 3.4 junto con el gráfico de la ecuación anterior. Como se ve, la regresión es bastante precisa.

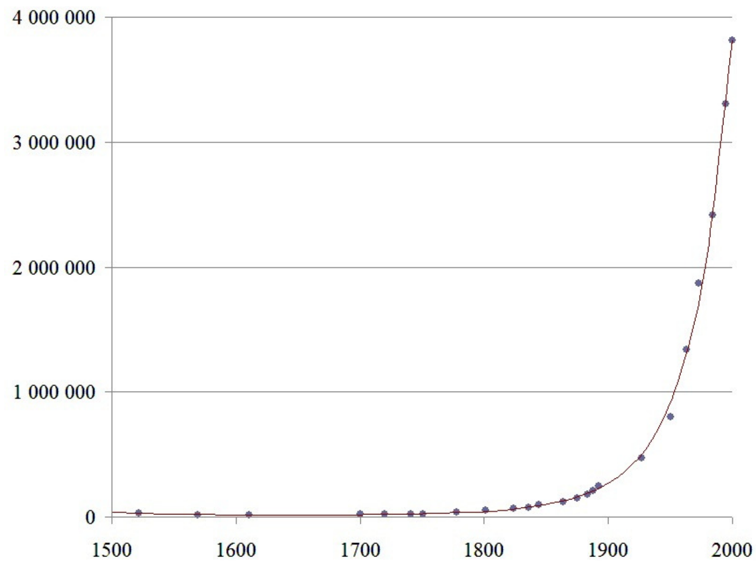


Figura 3.7: Curva de regresión para la población como función del tiempo

Finalmente, se acepta la siguiente ecuación como aproximación de la población de Costa Rica en función del año:

$$\text{Población} = 15173.8 \cdot 1.00004263^{(\text{Año}-1640)^2}$$

Bibliografía

[1] Acuña, L. (2004). *Estadística aplicada con Fathom* (1era ed). Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

[2] Devore, J. (2006). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias* (6ta ed). México: Thomson Paraninfo.

4

APLICACIÓN DEL MODELO DE RASCH, EN EL ANÁLISIS PSICOMÉTRICO DE UNA PRUEBA DE DIAGNÓSTICO EN MATEMÁTICA.

Karol Jiménez Alfaro.
karol.jimenez@ucr.ac.cr
Instituto de Investigaciones Psicológicas
Universidad de Costa Rica

Eiliana Montero Rojas.
eiliana.montero@ucr.ac.cr
Instituto de Investigaciones Psicológicas
Universidad de Costa Rica

Resumen. El presente trabajo pretende generar evidencias empíricas en torno a la validez de la prueba de "Diagnóstico de conocimientos y destrezas en matemática del estudiante al ingresar a la universidad", de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica, desde la aplicación del modelo de Rasch. La muestra corresponde a 2624 examinados del 2008. Los objetivos del estudio se dirigieron primeramente a establecer evidencias de validez y confiabilidad para el instrumento. Por medio de análisis de factores exploratorio se verificó la unidimensionalidad de la escala y con el modelo de Rasch se generaron evidencias para concluir un grado aceptable de confiabilidad. Con la participación de 5 jueces expertos se establecieron niveles sustantivos de desempeño, clasificando los ítems según dificultad, y según procesos y contenidos necesarios para su resolución.

Para validar las valoraciones de los jueces se contrastaron sus clasificaciones de dificultad con las estimaciones obtenidas al aplicar el modelo de Rasch, y por medio de un análisis de concordancia con la medida Kappa de Cohen se logró determinar el grupo de los 3 jueces que se acercaban más a las estimaciones de Rasch y cuyas valoraciones fueron consideradas para establecer los niveles de desempeño.

Palabras clave: Pruebas estandarizadas, Matemática, validez,confiabilidad, modelos de Rasch, juicio experto, niveles de desempeño.

Abstract. The study intended, by means of the Rasch model, to provide empirical evidences regarding the validity of the test called "Diagnostic of knowledge and skills in Mathematics of the student entering the University", developed by the School of Mathematics at the University of Costa Rica. The sample consisted of 2624 examinees in the year 2008. The research objectives first addressed the issue of establishing validity and reliability evidences for the instrument. Using exploratory factor analysis the unidimensionality of the scale was confirmed, and employing the Rasch model evidence was generated to conclude an acceptable degree of reliability. With the participation of 5 expert judges substantive levels of performance were established, classifying the items according to difficulty, and according to necessary processes and contents for their solution.

To validate the judges' assessments, their difficulty classifications were contrasted with the difficulty estimations from the Rasch model, and, making use of a concordance analysis with Cohen's Kappa the group of the 3 judges that were closer to Rasch estimations was determined. These 3 judges' appraisals were considered to establish the performance levels.

KeyWords: Standardized testing, Math, validity, reliability, Rasch models, expert judgement, performance levels.

4.1 Introducción

La prueba de Diagnóstico de conocimientos y destrezas en matemática del estudiante al ingresar a la universidad, a la que en adelante se le llamará DiMa, surge como proyecto de la Vicerrectoría de Docencia de la Universidad de Costa Rica, en el año 2003 con los profesores MSc. Carlos Arce Salas y MSc. Liliana Jiménez Montero como investigadores responsables (Arce y Jiménez, 2003). El principal objetivo de esta prueba es contribuir a la solución de los problemas de bajo rendimiento académico, en los cursos de matemática de la Universidad de Costa Rica, mediante el diagnóstico de los conocimientos y destrezas en matemática con que ingresan los estudiantes a la universidad y el seguimiento de sus resultados en los cursos universitarios de matemática.

Hasta el 2006, se aplicaba a estudiantes de primer ingreso cuyo plan de estudio incluye cursos de cálculo diferencial para las carreras de las áreas de: economía, ciencias básicas e ingenierías, ciencias de la salud y agroalimentarias. A partir del 2006 y hasta el 2008, también lo realizaron estudiantes de las carreras de computación, matemáticas e informática empresarial.

Con las mediciones realizadas con esta prueba, se pretende poder conocer hasta qué punto los resultados obtenidos, de la aplicación de la prueba en un momento determinado, proporcionan una estimación adecuada del nivel real o dominio que posee el evaluado en los contenidos que se están pretendiendo medir. Con el propósito de poder contribuir en la nivelación de los estudiantes, los responsables del proyecto ubicaban a cada estudiante en un nivel, de acuerdo con la nota obtenida en la prueba. Dependiendo del nivel, y de la sede en la que estubiera inscrita la persona, se le daba una recomendación de llevar un taller de nivelación de un mes o un curso de un semestre.

Los análisis de ítems (cálculos de los índices de dificultad y discriminación) eran basados en la Teoría Clásica de los Test (TCT). Con la aplicación del modelo de Rasch, de la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI), además de obtener un análisis detallado de la calidad técnica y del aporte de cada ítem, independientemente del conjunto de individuos sobre el que fue aplicada la prueba, lo cual es fundamental para la conformación de un banco de ítems, da cuenta del error de medida asociado a la medición realizada, permite obtener una estimación del dominio que posee el estudiante en los conocimientos evaluados e ir más allá ya que se puede:

1. estudiar la relación entre el nivel de habilidad de los evaluados y el nivel de dificultad de cada ítem, con lo cual se podría determinar los distintos niveles de desempeño de los estudiantes y poder realizar recomendaciones más acertadas en cuanto si llevar un taller de nivelación de un mes o un curso semestral;

2. realizar evaluaciones de profesores constructores de ítems y evaluadores, con el propósito de poder ir seleccionando los más competentes y conocedores de la temática y así conformar un equipo de expertos encargados de la construcción y validación de la prueba.

El aplicar un enfoque psicométrico basado en TRI en cada proceso, tanto en el desarrollo de la prueba (construcción, juzgamiento, ensamblaje) como en su administración y calificación, permite contar con más evidencias empíricas y validaciones científicas, que deben ser consideradas en las inferencias que se derivan de los resultados, a partir del uso de la prueba, para la toma de decisiones.

4.2 Referente Conceptual

4.2.1 Los conceptos de validez y confiabilidad

Las dos propiedades fundamentales de una “buena” medición son la validez y la confiabilidad (Nunnally & Bernstein, 1995; AERA et al, 1999; Martínez et al 2006).

La confiabilidad significa precisión, consistencia, estabilidad en repeticiones. Una definición conceptual bastante ilustrativa indica que un instrumento es confiable si aplicado en las mismas condiciones a los mismos sujetos produce los mismos resultados (Nunnally & Bernstein, 1995).

La evidencia de confiabilidad es condición necesaria pero no suficiente para la validez (Babbie, 2010). En efecto, el instrumento puede medir con precisión, pero eso no implica que esté midiendo el constructo de interés. Entre los indicadores de confiabilidad que usamos con más frecuencia en psicometría se incluyen el índice de discriminación, medido por la correlación item-total en Teoría Clásica de los Tests (TCT), el Alfa de Cronbach en TCT, la cantidad de error de medición en Teoría de Respuesta a los Items (TRI) y el modelo de Rasch, y el tamaño de la función de información en TRI y Rasch (Martínez et al, 2006; Muñiz, 2003; Prieto & Delgado, 2003).

A su vez el concepto de validez sufrió, a partir de los años 1990, una importante transformación conceptual gracias al trabajo de Samuel Messick (1989). Mientras que la definición tradicional de validez nos refería prácticamente a una tautología “un instrumento es válido si mide lo que con él se pretende medir”, Messick provocó una pequeña revolución en la comunidad de la medición educativa definiendo validez como el grado de propiedad de las inferencias e interpretaciones derivadas de los puntajes de los tests, incluyendo las consecuencias sociales que se derivan de la aplicación del instrumento (Padilla et al, 2006).

El artículo seminal de Messick, publicado en la revista Educational Researcher en 1989 se tituló “Meaning and values in test validation: The science and ethics of assessment” (Significado y valores en la validación de pruebas: la ciencia y la ética de la evaluación), ha provocado la escritura de cientos de obras y textos que discuten, presentan, interpretan o critican a Messick, desde diversas ópticas.

Desde nuestra perspectiva las mayores contribuciones de Messick incluyen su definición de validez como un concepto unitario, misma que fue adoptada formalmente en los Standards for Educational and Psychological Testing, publicación conjunta de la AERA (American Educational Research Association), APA (American Psychological Associaton) y NCME (National Council on Measurement in Education), y que puede considerarse el “ISO 9000” internacional en cuanto a estándares de calidad de las pruebas educativas y psicológicas.

Así, en vez de hablar de diferentes tipos de validez, Messick indica que la idea es recolectar diferentes tipos de evidencias, de acuerdo con los propósitos y usos de los instrumentos, entre ellas evidencias de contenido, predictivas y de constructo, pero concibiendo todas esas evidencias como contribuyentes a la validez de constructo.

Otro de los más importantes aportes de Messick se refiere a su reflexión en torno a que la validez no es una propiedad intrínseca de los instrumentos, sino que se define de acuerdo al propósito de la medición, la población a la que va dirigida y el contexto específico de aplicación, así un instrumento puede exhibir un grado aceptable de validez para un propósito específico y para una población particular, pero no para otros.

Además, el proceso de validación no termina, es permanente, dado que al igual que el resto de actividades de la ciencia moderna, exige comprobaciones empíricas continuas. Igualmente nos recuerda Messick que la validez no es un rasgo dicotómico, sino una cuestión de grado, no se puede decir de manera contundente que una prueba es válida, sino más propiamente se puede afirmar que la prueba exhibe un grado aceptable de validez para ciertos usos específicos y con ciertas poblaciones.

Finalmente, Messick hace recapacitar a la comunidad de medición educativa cuando afirma que el constructor(a) del instrumEl modelo de Rasch y sus propiedades ento no solo debe poner atención a lo científico- técnico sino también a lo ético: debe preocuparse por el uso que se da a los instrumentos y por las consecuencias derivadas de la aplicación de los mismos (Messick, 1989; Padilla et al, 2006). Desde esta perspectiva, la validez psicométrica de un instrumento es solo una parte de la sistemática y rigurosa recolección de evidencia empírica, desde diferentes dimensiones, que debe emprenderse cuando se hace la pregunta: ¿Qué tan apropiadas son las inferencias generadas a partir de los puntajes de la prueba?

4.2.2 Validación psicométrica

El proceso de recolección de evidencias empíricas para la validación de un instrumento implica normalmente la consulta a jueces expertos, pero usualmente esto no es suficiente para generar evidencia de validez sólida y suficientemente creíble, hace falta al menos una aplicación piloto del instrumento y un análisis piscométrico del instrumento y de los ítems que lo componen. Entre los métodos y modelos de análisis que utilizamos en este proceso se pueden mencionar los siguientes:

Análisis de factores exploratorio y confirmatorio

Teoría Clásica de los Tests (TCT)

Teoría de Respuesta a los Items (TRI)

Modelo de Rasch

Teoría G (Generalizabilidad)

Siendo el modelo de la Teoría Clásica de los Tests (TCT) el más antiguo y conocido, incluyendo su resultado de mayor importancia práctica, el coeficiente Alfa de Cronbach, indicador de confiabilidad en términos de consistencia interna para un instrumento (Muñiz, 2003). Este es un indicador con el que se mide la precisión de la prueba en términos de su consistencia interna y apunta hacia el grado de estabilidad de los puntajes. Estima qué proporción de la variabilidad observada en los puntajes corresponde a variancia verdadera, es decir variancia debida a diferencias en el constructo que se desea medir. Su valor máximo es 1, cuanto más se aproxime a 1 mayor es el nivel de confiabilidad. En general, los programas internacionales de pruebas educativas consideran aceptables valores de Alfa mayores a 0.8, aunque autores como Nunnally & Bernstein (1995) son más estrictos cuando se habla de pruebas de altas consecuencias en donde de toman decisiones directas sobre los examinados e indican que tales exámenes debería exhibir una confiabilidad al menos de 0.9 en la medida Alfa de Cronbach. Por otra parte, si se trata de instrumentos que van a ser utilizados solamente para procesos de investigación se puede ser más flexible en el criterio. En ese caso se consideran aceptables valores de Alfa iguales o mayores a 0.7

Por su parte, los análisis de factores exploratorio y confirmatorio son técnicas multivariadas que nos permiten explorar la dimensionalidad subyacente en los datos (Martínez et al, 2006; Nunnally & Bernstein, 1995). El análisis factorial exploratorio es una técnica de la estadística multivariada que se usa en psicometría para obtener evidencias de las dimensiones subyacentes, factores o componentes que están presentes en el instrumento. A nivel global, las cargas factoriales de los ítems (que representan el peso o nivel de importancia del ítem en cada factor) se consideran óptimas si son iguales o mayores a 0.3, en valor absoluto. Antes de realizar un análisis psicométrico con la TCT, la TRI o Rasch es importante evidenciar, utilizando el análisis factorial exploratorio, que el instrumento mide fundamentalmente solo un rasgo o constructo, pues este es un supuesto que debe cumplirse para que la aplicación de estos modelos de medición sea válida.

Finalmente, con los modelos TRI (Teoría de Respuesta a los ítems) y Rasch se obtienen estimaciones de los parámetros del ítem que son menos dependientes de la muestra de examinados y estimaciones de los niveles del constructo en los evaluados que son menos dependientes de la muestra particular de ítems aplicada. Además, en estos modelos existe una estimación específica del error de medición para cada puntaje en la prueba (a diferencia de la TCT donde se asume que el error es constante) (Martínez et al, 2006; Montero, 2001). En el caso del modelo de Rasch, las estimaciones de las habilidades de los examinados y la dificultad de los ítems están en las mismas unidades de medición, propiedad que resulta sumamente atractiva a nivel aplicado y de interpretación sustantiva, pues permite evaluar el desempeño del examinado en términos de modelos criteriales, es decir valorando en términos absolutos lo que puede o no hacer (Bond & Fox, 2001; Prieto & Delgado, 2003).

4.2.3 Teoría de Respuesta al Item (TRI)

La Teoría Clásica de los Test (TCT) nos presenta una serie de estadísticos, como el error típico de medida, los índices de dificultad y discriminación de los ítems, el coeficiente de confiabilidad de Cronbach, que representan elementos esenciales en la validación de las pruebas. Sin embargo, en concordancia con Martínez (2005) a pesar del uso tan generalizado y de la enorme utilidad práctica que se ha hecho de la TCT y de todos sus estadísticos asociados, esta teoría parte de supuestos generales débiles, de escasa plausibilidad real, que constituyen tanto su fuerza como su debilidad.

De acuerdo con Muñiz (1997) la Teoría de Respuesta al Item (TRI) nace como un nuevo enfoque en la teoría de las pruebas que permite superar algunas de las limitaciones de la Teoría Clásica de los Test.

Para Barbero (1999) la década de los 60 es cuando la TRI comienza su gran desarrollo, mucho debido a la publicación del trabajo de Rasch en 1960 titulado "*Probabilistic models for some intelligence and attainment test*", y la aparición del libro de Lord y Novick en 1968 titulado "*Statistical theories of mental test scores*".

La TRI, a diferencia de la TCT, se centra más en las propiedades individuales de los ítems que en las propiedades globales del test, de ahí su nombre. Se puede decir que uno de sus propósitos es intentar obtener la puntuación que corresponde a una persona en una dimensión o rasgo, como por ejemplo, su inteligencia, su nivel en un cierto rasgo de personalidad, su dominio en una cierta materia, etc.

Dos objetivos generales de la TRI son: 1) proporcionar mediciones de las variables psicológicas y educativas que no estén en función del instrumento utilizado, y 2)disponer de instrumentos de medida cuyas propiedades no dependan de los objetos medidos, que sean invariantes respecto de las personas evaluadas. (Muñiz, 1997, p.18).

Es importante tomar en cuenta que los modelos matemáticos planteados en la TRI especifican que la probabilidad que tiene un evaluado de contestar correctamente un ítem depende de su nivel de aptitud y de las características de los ítems. Estos modelos consideran supuestos acerca de los datos que son más restrictivos que los planteados en la TCT y "la viabilidad de estos supuestos no puede determinarse directamente, pero pueden recogerse algunas evidencias que establecen el grado de concordancia entre los supuestos del modelo y los datos” (Martínez, 2005, p.248).

Para Muñiz (1997) los dos supuestos son *la curva característica de los ítems* (CCI) y *la unidimensionalidad*, Martínez (2005) además de estos presenta como supuesto de la TRI *la independencia local*. La CCI de forma general especifica que a medida que aumente el nivel de aptitud, la probabilidad de acertar correctamente un ítem también lo hará. Su formulación es una función matemática que establece la relación que existe entre la escala de aptitud o habilidad de los sujetos evaluados (usualmente se emplea la escala estandarizada, con media 0 y desviación estándar 1) y la probabilidad de acertar correctamente un ítem. La función más utilizada como CCI es la función logística, definida por tres parámetros, específicamente:

$$\begin{aligned} P_i(\theta_s) &= c_i + (1-c_i)\frac{e^{Da_i(\theta_s-b_i)}}{1+e^{Da_i(\theta_s-b_i)}} \\ &= \frac{c_i + e^{Da_i(\theta_s-b_i)}}{1+e^{Da_i(\theta_s-b_i)}} = c_i + \frac{1-c_i}{1+e^{-Da_i(\theta_s-b_i)}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde D es una constante mayor a 0, a la cual se le asigna generalmente el valor de 1.7 (para buscar semejanza con la función de distribución normal); θ_s es el valor del constructo o rasgo que se desea estimar en cada examinado, a_i es el parámetro de discriminación, b_i el de la dificultad,y c_i representa la probabilidad de acertar el ítem al azar.

Según Muñiz (1997) y Martínez (2005), dependiendo de la función matemática que define la CCI y el número de parámetros a considerar se generarán diferentes modelos, siendo los que utilizan la función logística, y que pueden ser de uno, dos o tres parámetros, los que han recibido más atención. Lo cierto es que como lo menciona Muñiz (1997), cada modelo se ajusta mejor a unas situaciones que a otras, y el uso de uno u otro dependerá del caso que se desee tratar.

Se dice que el más general y realista de ellos pero el más difícil de estimar en ocasiones, es el de tres parámetros, cuya expresión matemáticamente es la mostrada en 4.1. El modelo de dos parámetros, asume que el parámetro de azar es igual a cero, es decir, al igual que el anterior, la CCI viene dada por la función logística, pero contempla únicamente dos parámetros, el índice de dificultad y el índice de discriminación. Finalmente, se tiene el modelo de un parámetro formulado originalmente por Rasch en 1960, de ahí que sea conocido también como modelo de Rasch. En este modelo, además de asumir que la probabilidad de acertar el ítem al azar es cero, se supone que el parámetro de discriminación es constante para todos los ítems. Su expresión matemática sería entonces

$$P_i(\theta_s) = \frac{e^{D(\theta_s-b_i)}}{1+e^{D(\theta_s-b_i)}}. \tag{4.2}$$

En este modelo, lo usual es que se asuma para la constante D el valor de 1.

Si el modelo se ha parametrizado correctamente, $P(\theta)$ dependerá únicamente de θ_s (nivel de habilidad del sujeto examinado), es decir, “la TRI asume implícitamente en su formulación que los ítems destinados a medir la variable θ_s constituyen una sola dimensión” (Muñiz, 1997, p.25).

Sin embargo, como lo sostiene Martínez (2005), aunque se asuma que el rendimiento de un ítem es explicable por una sola aptitud o rasgo, se debe ser consciente de que no puede cumplirse completamente este supuesto dado a los múltiples factores que pueden afectar en un momento dado a las respuestas de la prueba, por ejemplo, la atención, la motivación de los examinados, el contexto, la ansiedad, etc., pero sí se puede hablar de una aptitud fundamental representada en el grupo de ítems que conforman la prueba.

Por lo tanto, es necesario poder comprobar la unidimensionalidad antes de aplicar alguno de los modelos TRI. El método más utilizado para esta comprobación es el análisis factorial. Se sabe que es muy difícil lograr encontrar una unidimensionalidad perfecta, o sea, que un solo factor explique por completo la varianza total de las puntuaciones, por tanto, "la unidimensionalidad se convierte en una cuestión de grado: cuanta más varianza explique el primer factor, "más unidimensionalidad" existirá" (Muñiz, 1997, p.26).

Por otro lado, los modelos de la TRI asumen que las respuestas de los evaluados (en un mismo nivel de aptitud) a un ítem son independientes a las respuestas de los otros ítems. Por tanto, bajo la TRI, no es permitido el uso de ítems encadenados en los que la respuesta de uno dependa de la de otro. Muñiz (1997) indica que "la independencia local puede expresarse diciendo que la probabilidad de que un sujeto acierte n ítems es igual al producto de las probabilidades de acertar cada uno de ellos" (p.27). También se puede hablar de independencia local de los sujetos, en el sentido de que el rendimiento de un sujeto en un test no depende del rendimiento de los otros sujetos en el mismo test.

4.2.4 El modelo de Rasch y sus propiedades únicas

De acuerdo con Prieto y Delgado (2003), el modelo de Rasch descansa sobre los siguientes supuestos:

1. El atributo que se desea medir se puede representar en una única dimensión, en la que conjuntamente se situarían a personas e ítems.

2. El nivel de la persona en el atributo (habilidad) y la dificultad del ítem determinan la probabilidad de obtener la respuesta correcta. Rasch utilizó el modelo logístico (se obtiene al despejar de la ecuación 4.2, $(\theta_s - b_i)$ y asumiendo $D = 1$)

$$\ln\left(\frac{P_{is}}{1 - P_{is}}\right) = \theta_s - b_i \tag{4.3}$$

   donde P_{is} representa la probabilidad de que la persona s responda correctamente el ítem i, θ_s es el nivel de habilidad de la persona s en el atributo que se desea medir, y b_i es el nivel de dificultad del ítem i.

Nótese que en la ecuación 4.3, $P_{is} = \frac{1}{2}$ es equivalente a $\theta_s = b_i$, es decir, la probabilidad de acertar la pregunta es $\frac{1}{2}$ cuando la habilidad del individuo iguala la dificultad del ítem. De la misma forma, $P_{is} > \frac{1}{2}$ es equivalente a $\theta_s > b_i$, es decir, la probabilidad de acertar el ítem es superior a $\frac{1}{2}$ si la habilidad del individuo está por encima de la dificultad del ítem, y $P_{is} < \frac{1}{2}$ es equivalente a $\theta_s < b_i$, así, cuando la habilidad es menor que la dificultad del ítem, la persona tiene mayor probabilidad de fallar la respuesta que de acertarla.

Es importante observar que, al despejar P_{is} de la ecuación 4.3 se obtiene

$$P_{is} = \frac{e^{\theta_s - b_i}}{1 + e^{\theta_s - b_i}} = \frac{1}{1 + e^{b_i - \theta_s}} \tag{4.4}$$

la cual es la formulación más utilizada del modelo.

4.2.5 Sobre la escala utilizada en Rasch

En realidad, si en un modelo se asume que la probabilidad de acierto P_{is} es una función de la diferencia entre el nivel del examinado en la habilidad y la dificultad del ítem $(\theta_s - b_i)$, entonces se está midiendo al examinado y al ítem en una misma escala. Para Prieto y Delgado (2003) la escala más utilizada es la llamada "*logit*", definida por

$$\ln\left(\frac{P_{is}}{1-P_{is}}\right) = \theta_s - b_i. \tag{4.5}$$

De acuerdo con esta expresión, se podrían obtener valores entre $]-\infty,\infty[$, pero en la práctica, según Prieto y Delgado (2003), en la gran mayoría de los casos, los valores obtenidos se encuentran en el rango $[-5,+5]$.

Dado que

$$(\theta_s + n) - (b_i + n) = \theta_s - b_i$$

la localización del punto 0 de la escala se puede elegir arbitrariamente, pero en la práctica lo común en el modelo de Rasch, de acuerdo con Prieto y Delgado (2003), es localizar el 0 en la dificultad media de los ítems que integran el test. En este caso, $\theta_s > 0$ significa que la persona s tiene probabilidad superior a $\frac{1}{2}$ de éxito en los ítems de dificultad media.

4.2.6 Sobre la escala utilizada en Rasch

En realidad, si en un modelo se asume que la probabilidad de acierto P_{is} es una función de la diferencia entre el nivel del examinado en la habilidad y la dificultad del ítem $(\theta_s - b_i)$, entonces se está midiendo al examinado y al ítem en una misma escala. Para Prieto y Delgado (2003) la escala más utilizada es la llamada "*logit*", definida por

$$\ln\left(\frac{P_{is}}{1-P_{is}}\right) = \theta_s - b_i. \tag{4.6}$$

De acuerdo con esta expresión, se podrían obtener valores entre $]-\infty,\infty[$, pero en la práctica, según Prieto y Delgado (2003), en la gran mayoría de los casos, los valores obtenidos se encuentran en el rango $[-5,+5]$.

Dado que

$$(\theta_s + n) - (b_i + n) = \theta_s - b_i$$

la localización del punto 0 de la escala se puede elegir arbitrariamente, pero en la práctica lo común en el modelo de Rasch, de acuerdo con Prieto y Delgado (2003), es localizar el 0 en la dificultad media de los ítems que integran el test. En este caso, $\theta_s > 0$ significa que la persona s tiene probabilidad superior a $\frac{1}{2}$ de éxito en los ítems de dificultad media.

4.2.7 Ventajas del Modelo de Rasch

Siguiendo a Prieto y Delgado (2003) algunas de las ventajas más relevantes de aplicar Rasch son:

1. La *medición conjunta*: al poderse expresar los parámetros de las personas y de los ítems en las mismas unidades, se pueden representar en el mismo continuo, lo que permite analizar las interacciones entre los individuos y los ítems.

2. La *objetividad específica:* la diferencia entre las habilidades de dos personas no depende de los ítems específicos con la que sea estimada. De la misma manera, la diferencia entre las dificultades de dos ítems no depende de las personas específicas que se utilicen para su estimación. Por

ejemplo, supongamos que dos personas de distinto nivel de habilidad contestan el mismo ítem, entonces se tendría: $\ln\left(\frac{P_{i1}}{1-P_{i1}}\right) = \theta_1 - b_i$ para el sujeto 1, y $\ln\left(\frac{P_{i2}}{1-P_{i2}}\right) = \theta_2 - b_i$ para el sujeto 2, entonces, la diferencia entre las habilidades de ambas personas sería

$$\ln\left(\frac{P_{i1}}{1-P_{i1}}\right) - \ln\left(\frac{P_{i2}}{1-P_{i2}}\right) = (\theta_1 - b_i) - (\theta_2 - b_i) = \theta_1 - \theta_2.$$

De manera similar, si una misma persona de una habilidad θ_s contesta dos ítems de diferente dificultad, se tendría $\ln\left(\frac{P_{1s}}{1-P_{1s}}\right) = \theta_s - b_1$ para uno de los ítems, y $\ln\left(\frac{P_{2s}}{1-P_{2s}}\right) = \theta_s - b_2$ para el otro. La diferencia en dificultad entre estos ítems será

$$\ln\left(\frac{P_{1s}}{1-P_{1s}}\right) - \ln\left(\frac{P_{2s}}{1-P_{2s}}\right) = (\theta_s - b_1) - (\theta_s - b_2) = b_1 - b_2.$$

3. La *propiedad de intervalo:* a diferencias iguales entre un individuo y un ítem le corresponden probabilidades idénticas de una respuesta correcta, es decir, diferencias iguales en el constructo están asociadas a diferencias iguales en los puntajes.

4. El modelo de Rasch permite: a) cuantificar la cantidad de información (y la cantidad de error) con la que se mide en cada punto de la dimensión; b) seleccionar aquellos ítems que permiten incrementar la información en regiones del constructo previamente especificadas, es decir, por ejemplo para una prueba de admisión a una universidad se desea seleccionar individuos en un nivel alto del construto, por lo que se pueden utilizar los ítems con mayor información en ese nivel.

4.3 Metodología

Esta investigación se podría enmarca dentro de los estudios exploratorios en el sentido que se pretende examinar el DiMa en búsqueda de evidencias teóricas y empíricas de validez para los usos e interpretaciones que se pueden generar de los resultados de su aplicación. Además, se puede ubicar dentro de los estudios descriptivos, pues se realiza un análisis de calidad técnica detallado de los ítems que componen la prueba, aplicando TRI. También, se puede decir que contempla elementos de estudios correlacionales, pues por ejemplo se estudia cuán relacionados están los ítems entre sí, la correlación entre los ítems y la prueba, la relación entre los niveles en la habilidad de los evaluados y el nivel de dificultad de los ítems.

Se utilizó la base de datos del 2008 con el total de la población que aplicó para el DiMa en ese año (2624 casos). Para el análisis de los ítems se estudió el fórmulario 1. Un detalle importante por aclarar es que para cada año existían 4 versiones de la prueba, se diferenciaban unas de otras por el orden que los investigadores le daban a las opciones de respuesta, pero una vez pasada la aplicación, recodificaban según la fórmula 1, y se analizaba la población completa. No fue posible poder volver a separar la población de acuerdo al número de formulario que había resuelto, por lo que los análisis se realizaron de acuerdo con el formato que tenían en la fórmula 1 de cada año.

Para la obtención de estas bases de datos se conversó con el director de la Escuela de Matemática de la UCR en el 2009, el máster Carlos Arce Salas, quién además en ese momento era el investigador principal del proyecto de investigación de esta prueba.

El aporte de los investigadores MSc. Carlos Arce y MSc. Liliana Montero, aunado con una revisión teórica que se realizó sobre tipos de pruebas, permitieron la realización de la siguiente fase, una descripción detallada del DiMa con el propósito de poder conocer más el constructo que se pretende medir con ella y realizar una mejor valoración en los análisis.

Luego, se continuó con la validación interna, lo primero fue realizar un análisis factorial exploratorio, utilizando el método de Análisis de Componentes Principales (ACP) para obtener una aproximación de los constructos subyacentes de cada uno de las pruebas, además de ver si se cumplía en grado razonable el supuesto de unidimensionalidad. Para este análisis se utilizó el programa estadístico SPSS para Windows 15.0.

Con la aplicación del modelo de Rasch, además de depurar el análisis de la calidad técnica de los ítems, y analizar los ajustes de los datos al modelo, también se pretendía poder determinar los distintos niveles de desempeño de estas poblaciones en el constructo, esto con el propósito de poder contar con más evidencias científicas para poder dar una mejor recomendación a los estudiantes de acuerdo con su desempeño en la prueba.

También se deseaba ejemplificar uno de los usos del modelo de Rasch para la evaluación de jueces expertos, con el objetivo de poder identificar expertos que puedan realizar mejores valoraciones en el análisis de los ítems. Así que antes de su aplicación, se realizó un trabajo con 5 jueces expertos conocedores de las temáticas evaluadas en el DiMa. Dicho trabajo consistió en solicitarles a los jueces resolver en forma individual la prueba DiMa 2008 y clasificar cada ítem de acuerdo con: su dificultad, su contenido y procesos presentes en su solución. Los contenidos y procesos presentados a los jueces fueron una combinación entre los temas y destrezas definidas por los creadores del DiMa y la categorización de procesos mentales propuetos en la prueba de Habilidades Cuantitativas del Proyecto de Pruebas Específicas de la Universidad de Costa Rica, coordinada en ese momento por la Licda. Jeannette Villalobos.La información aportada de las valoraciones de los jueces fue tabulada y procesada para ser utilizada en el análisis posterior.

El siguiente paso fue analizar los ítems pero ahora desde el panorama de la Teoría de Respesta al Item, específicamente aplicando el modelo de Rasch. Para el análisis se utilizó el paquete computacional Winsteps versión 3.64.2, pues es exclusivo para llevar a cabo análisis de Rasch y además de contar con los elementos también generados con otros paquetes como el BILOG, se cuenta con uno más que resultaba muy valioso en el análisis que se pretendía realizar con los ítems y los aportes de los jueces expertos, el mapa de distribución conjunta de examinados e ítems.

Con el propósito de poder contar con evidencia estadística sobre los niveles de acuerdo entre los jueces según la dificultad de los ítems, los contenidos y los procesos, se aplicó el índice Kappa, el cuál fue calculado utilizando el SPSS para Windows 15.0. Para la clasificación de los ítems según nivel de dificultad se terminó considerando solo tres niveles: fáciles (agrupando los que se habían clasificado como muy fáciles y fáciles), mediano y difíciles (agrupando los clasificados como difíciles y muy difíciles). Primero se comparó la valoración de cada juez con los resultados obtenidos del análisis con Rasch; luego después de analizar los niveles de concordancia entre jueces, éstos fueron agrupados en 3 grupos, y se compararon los resultados de las valoraciones, según cada grupo de jueces, con los obtenidos en Rasch. Esto permitió la elaboración de tablas, en las que se reunió y organizó la información más relevante de cada ítem de la prueba DiMa 2008.

4.4 Resultados de los análisis

Se procedió con el análisis factorial exploratorio, con el objetivo de buscar evidencia de validez asociada a la estructura factorial y para ver si se cumple, en grado razonable, el supuesto de unidimensionalidad.

Se aplicó el estadístico de Kolmogorov-Smirnov, para comprobar si los datos se distribuían normalmente, y el resultado fue que la hipótesis de normalidad en este caso se rechaza, pues el nivel de significancia fue menor a 0.05, por lo que todas las variables (ítems en nuestro caso) no proceden de poblaciones con distribuciones normales.

Dado lo anterior, se decidió realizar un Análisis de Componentes Principales (ACP) aplicando método de extracción componentes principales, pues para este método no se demanda el cumplimiento del supuesto de normalidad.

Para el DiMa 2008 la muestra analizada fue de 2624 examinados. El valor del determinante de la matriz de correlaciones es $1.71(10^{-6})$ por lo que se puede confirmar, de acuerdo con Cea D'Ancona (2002), la existencia de intercorrelaciones elevadas entre las variables, ello permite que se pueda realizar el análisis factorial.

El índice de medida de adecuación muestral Kaiser-Meyer-Olkin (*KMO*) obtenido fue de 0.976, de acuerdo con Cea D'Ancona (2002) entre más próximo a 1 sea, indica que las correlaciones entre pares de variables pueden explicarse por otras variables, por lo que en este caso sería una evidencia más de que se puede realizar el análisis de factores.

En la figura 4.1 se presenta el gráfico de sedimentación del DiMa 2008. De acuerdo con este criterio, el número de factores está delimitado por el punto en el que se presenta un cambio importante en la trayectoria de caída de la pendiente, Catell, citado por Cea D'Ancona (2002), sugiere que se consideren todos aquellos factores situados antes de este punto, en este caso, este criterio sugiere la existencia de un componente predominante.

En tabla 4.1 se presenta un extracto de la tabla de varianza total explicada. Se puede apreciar que aproximadamente un 22.18% de la varianza total es explicada por el primer componente, ya el aporte del segundo componente principal es muy bajo (2.7%).

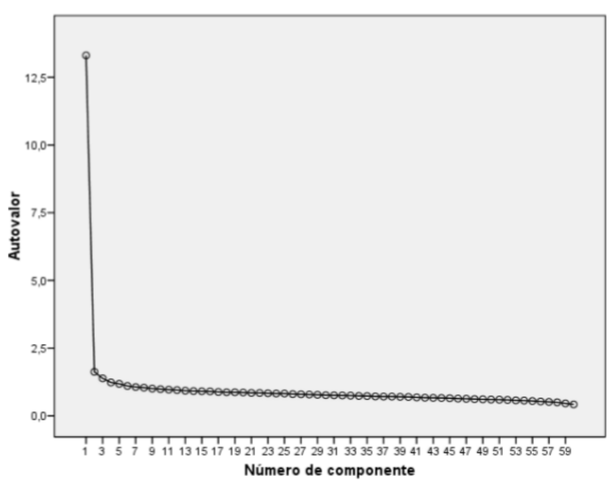


Figura 4.1: Gráfico de sedimentación DiMa 2008

Componente	Autovalores iniciales			Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	13.308	22.180	22.180	13.308	22.180	22.180
2	1.624	2.707	24.887	1.624	2.707	24.887
3	1.384	2.306	27.193	1.384	2.306	27.193
4	1.232	2.053	29.246	1.232	2.053	29.246
5	1.182	1.970	31.216	1.182	1.970	31.216
6	1.102	1.837	33.053	1.102	1.837	33.053
7	1.062	1.771	34.823	1.062	1.771	34.823
8	1.040	1.733	36.556	1.040	1.733	36.556
9	1.005	1.675	38.232	1.005	1.675	38.232
10	0.983	1.639	39.871			
11	0.967	1.612	41.483			
12	0.950	1.583	43.066			
13	0.927	1.545	44.611			

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

Tabla 4.1: Varianza explicada DiMa 2008

El programa sugiere la extracción de 9 componentes, basados en el criterio del valor del autovalor superior a 1, pero debemos recordar que en nuestro caso, el objetivo de este análisis factorial no es realizar interpretaciones sustantivas de lo que significan los componentes, sólo se aplica el análisis factorial exploratorio en busca de evidencias de unidimensionalidad, y además, es muy difícil encontrar unidimensionalidad perfecta, por lo cual, como lo menciona Muñiz (1997) "la unidimensionalidad se convierte en una cuestión de grado: cuanta más varianza explique el primer factor, "más unidimensionalidad" existirá" (p.26). Lo anterior permite afirmar que en el caso del DiMa 2008 se tienen evidencias de que la prueba tendiera a ser unidimensinal, por lo que se puede continuar con los análisis de confiabilidad y también, poder aplicar el modelo de Rasch en esta muestra de datos.

4.5 Aplicación del modelo de Rasch

El estudio se realizó inicialmente a partir de las respuestas obtenidas por los 2624 individuos que realizaron la prueba, la cual está conformada por 60 ítems. En la tabla 4.2 se presentan las estadísticas de confiabilidad tanto para personas como para los ítems, obtenidas aplicando Rasch, de acuerdo con este modelo, la medida de confiabi-lidad de los examinados indica qué tan consistentes son los resultados, es decir, si al mismo grupo de examinados se les aplicara otro conjunto de ítems del mismo universo al que pertenece el conjunto que se está analizando, se obtendrían los mismos resultados. Para el DiMa 2008, la confiabilidad de los examinados fue de 0.93, el cual es un valor satisfactorio para este tipo de pruebas de diagnóstico.

En cuanto a la confiabilidad de los ítems, ésta lo que indica es qué tan consistentes son las estimaciones del parámetro de dificultad si el mismo conjunto de ítems se aplicara a otro conjunto de examinados con las mismas características del grupo analizado. Para este caso, el valor de la confiabilidad de los ítems es de 1, lo cual indica que las estimaciones de Rasch son muy consistentes, esto era de esperar dado que es una muestra grande de examinados.

Número Casos	Número ítems	Índice confiabilidad personas	Índice confiabilidad ítems
2624	60	0.93	1.00

	Puntajes Obtenidos	Medida estimada (personas)	Error estándar de la estimación
Media	27.00	-0.22	0.32
Desviación estándar	13.30	1.21	0.08

Tabla 4.2: Estadísticos descriptivos y de confiabilidad DiMa 2008

No se debe olvidar que uno de los objetivos con este análisis es poder identificar aquellos examinados que contestaron correctamente a ítems dentro de su nivel de habilidad y además, ítems que fueron contestados correctamente por individuos que se encuentran dentro del nivel de habilidad para hacerlo, es decir, identificar tanto los ítems como los examinados que se ajusten al modelo.

Para el modelo de Rasch, se cuenta con el índice Infit MNSQ el cual es calculado con las medias cuadráticas sin estandarizar, Wright y Linacre (1994), citados en Bond y Fox (2001), proponen como valores aceptables de Infit MNSQ, para tipos de pruebas de escogencia única, los ubicados en el rango 0.8 y 1.2; siguiendo este criterio, el único ítem del DiMa 2008 que no se ajustaría al modelo sería el p58 pues posee un valor 1.35, los otros ítems si poseen valores infit dentro del rango establecido. El ítem que resultó más difícil es el p58 con una dificultad de 1.91, en escala logit, seguido del p57 con una dificultad de 1.67, y el ítem más fácil es el p1 con una dificultad de -2.22. Se puede decir que en general se obtuvo una buena precisión de la medida realizada pues los errores asociados son cercanos a 0. De los 2624 examinados, 31 tenían un valor de Infit MNSQ superior a 1.2 y 7 poseían un valor inferior de 0.8, es decir, aproximadamente 1.45%, no se ajustaban al modelo.

Una vez detectados los ítems y personas que no cumplían con las espectativas del modelo, fueron eliminados de la base original y se volvió a correr el análisis en el Winsteps. Las nuevas estadísticas descriptivas y de confiabilidad son las que se presentan en la tabla 4.3. La confiabilidad de los examinados fue finalmente de 0.92, el cual es un valor satisfactorio para este tipo de pruebas y en cuanto a la confiabilidad de los ítems, el valor obtenido es de 0.99, lo que indica que las estimaciones del parámetro de dificultad en Rasch son muy consistentes. También se puede notar que en la estimación de la habilidad, existe una variabilidad alta y bastante simétrica, pues los puntajes oscilan entre los valores -5.51 y 5.48 en la escala logit; el promedio de ítems contestados correctamente es de 27, lo que equivale a una ubicación en la escala de la habilidad de -0.17 logits.

En las estimaciones de las dificultades de los ítems, del error estándar asociado a la medición hecha y los estadísticos de ajuste, pero ahora considerando solo los datos de los ítems y personas que si se ajustaron al modelo. Se tiene que el ítem más difícil es el p57 con una dificultad ahora de 1.74, en escala logit, mientras que el ítem más fácil es el p1 con una dificultad de -2.25. La precisión de la medición sigue siendo buena pues se continúa obteniendo valores bajos de errores estándar.

En la figura 4.2 se muestra el mapa de distribución conjunta de los individuos y los ítems en una escala logit. A la izquierda del gráfico se distribuyen los examinados según su nivel de habilidad (de arriba hacia abajo de mayor a menor puntaje en la habilidad) y a la derecha se distribuyen los ítems según su dificultad (de arriba hacia abajo de mayor dificultad a menor dificultad). Se puede observar que el promedio del nivel de habilidad de los examinados (letra M al lado izquierdo) está muy cercano a la dificultad promedio de los ítems (fijada en 0, letra M al lado derecho); de hecho, en la tabla 4.3 se puede observar que el valor de la media de las estimaciones para la habilidad es de -0.17 logits, lo anterior indica que el conjunto de ítems resultó muy levemente difícil para esta población.

Número Casos	Número ítems	Índice confiabilidad personas	Índice confiabilidad ítems
2586	59	0.92	0.99

	Puntajes Obtenidos	Medida estimada (personas)	Error estándar de la estimación
Media	27.00	-0.17	0.33
Desviación estándar	13.40	1.30	0.14
Puntajes acierto Máx.	59.00	5.48	1.83
Puntajes acierto Mín.	0.00	-5.51	0.27

Tabla 4.3: Estadísticos con datos que ajustaron

Por otro lado, en la figura 4.2 se puede observar al lado izquierdo que existe un grupo de examinados que tiene la probabilidad de contestar correctamente todos los ítems, se debe recordar que el ítem más difícil es el p57 (dificultad de 1.74 logits, ubicado a más de una desviación estándar por encima del promedio) y analizando los resultados de las salidas obtenidas con el Winsteps, se obtuvo que de 2586 examinados 215 (un 8% aproximadamente) poseen un valor en la habilidad superior a 1.74 logits.

También, se puede apreciar que existe un grupo muy pequeño de examinados con una habilidad muy baja que tienen una alta probabilidad de fallar todos los ítems, el ítem más fácil es el p1 con dificultad -2.25, ubicado a más de dos desviaciones estándar por debajo del promedio, y existe 47 examinados, aproximadamente un 1,8% de la población examinada, que poseen un valor en la habilidad inferior a -2.25 logits, lo cual indicaría que requieren una nivelación en todos los temas evaluados en esta prueba. Pero lo que resalta más es que existe un grupo de interés de 645 examinados (un 25% aproximadamente) con habilidades entre -1.10 y -2.24 logits para los cuales no existen ítems con dificultades en ese mismo rango, que permitan hacer un diagnóstico apropiado de estos estudiantes.

Para los examinados que están en el promedio de habilidad ($\theta = -0.17$), se puede indicar que del total de 59 ítems, tienen una baja probabilidad de contestar correctamente 36 ítems (equivalente al 61% de los ítems con dificultades superiores a -0.17), y una alta probabilidad de contestar correctamente 22 ítems (equivalente al 37,3% con dificultades inferiores a -0.17).

```
INPUT: 2586 PERSONS  59 ITEMS  MEASURED: 2586 PERSONS  59 ITEMS  2 CATS
3.64.2
---------------------------------------------------------------------------
--

       PERSONS - MAP - ITEMS
               <more>|<rare>
    5             .  +
                     |
                     |
                     |
                  .  |
                     |
    4                +
                     |
                     |
                  .  |
                     |
                 .#  |
    3                +
                 .#  |
                     |
                 .#  |
                 .# T|
                 .#  |
    2            .#  +
                 .#  |
               .###  |  P57
                 .#  |
                ###  |T P18
                 ##  |
    1         .#### S+  P17    P21    P41
              .####  |  P23    P27
             .#####  |S P22    P48    P54    P55
             .#####  |  P46    P51    P8     P9
            .######  |  P10    P30    P52
             .#####  |  P19    P38    P43    P47    P53    P6
    0        .#####  +M P12    P15    P16    P20    P25    P34    P36    P49
            .###### M|  P13    P24    P29    P3     P33    P37    P39    P44
                        P59
       .###########  |  P14    P31    P32    P42    P50
         .#########  |  P45
           .#######  |S P11    P2     P26    P40    P56    P7
       .###########  |  P35    P4     P5
   -1 .############  +  P28    P60
             .#####  |
        .########## S|T
               .###  |
             .#####  |
                .##  |
   -2            .#  +
                  .  |
                  .  |  P1
                  .  |
                    T|
                  .  |
   -3                +
                  .  |
                     |
                  .  |
                     |
                     |
   -4                +
                     |
                  .  |
                     |
                     |
                     |
   -5             .  +
               <less>|<frequ>
 EACH '#' IS 17.
```

Figura 4.2: Distribución conjuntade examinados e ítems

La mayoría de los ítems se encuentran concentrados en niveles intermedios de la habilidad, casi no hay ítems que brinden información en niveles altos o bajos, es de esperar que si se trata de una prueba de diagnóstico, ésta cuente con ítems de buena calidad técnica en todos los niveles de la habilidad, en especial, se debe recordar que uno de los objetivos de esta prueba es poder ubicar a los estudiantes de acuerdo con su desempeño y dependiendo de éste, se les da la recomendación de realizar una nivelación en conocimientos básicos de matemática, la cual puede ser llevar un taller de un mes o un curso de un semestre, por lo tanto, se hace necesario poder contar con suficientes ítems que brinden información en niveles bajos de la habilidad que se está midiendo.

4.6 Establecimiento de niveles de desempeño sustantivo

Para dar una mejor recomendación a los estudiantes de si llevar un taller de un mes o un curso de un semestre es necesario contar con más evidencias científicas que brinden información de acuerdo con el desempeño en la prueba y considerando los procedimientos involucrados en la resolución de los ítems.

Por otro lado, hasta el momento la construcción de ítems para la prueba se ha orientado más que nada en la intuición y experiencia de los expertos en los temas evaluados, pero no existe una guía que describa las características que deben considerarse en la construcción del tipo de ítems que se requieren, ni existe la forma de valorar si quienes tienen a cargo esta labor son conocedores del constructo y de la población meta. Para ejemplificar cómo realizar una evaluación de jueces expertos aplicando el modelo de Rasch, se trabajó sobre las estimaciones de dificultad y descripción de contenidos y procesos de los ítems según 5 jueces. Se le solicitó a cada juez que clasificara cada ítem de acuerdo con: a) su dificultad, en muy fácil, fácil, mediano, difícil y muy difícil; la estimación la debían realizar pensando en un estudiante promedio de 11Âº año de un colegio público de nuestro país; b) su contenido y procesos presentes en su solución.

Es importante recordar que los contenidos y procesos propuestos a los jueces fueron una combinación entre los temas y destrezas definidas por los creadores del DiMa y la categorización de procesos mentales propuetos en la prueba de Habilidades Cuantitativas del Proyecto de Pruebas Específicas de la UCR. De manera resumida, los contenidos eran: (C1) Operatoria con números reales, (C2) Algebra, (C3) Función exponencial y función logarítmica, (C4) Funciones algebraicas, (C5)Trigonometría. En cuanto a los procesos que los jueces debían indicar si estaban presentes o al menos eran los más representativos en la solución del ítem, una breve descripción fue la siguiente:

Pr1 Procesos aritméticos: cálculos sencillos con operaciones aritméticas. Se pide explícitamente que se efectúe la operación, sin relacionar la operación con otros conceptos y usando la notación y vocabulario que es usual en los materiales didácticos de mayor difusión.

Pr2 Procesos comparativos: agrupar, comparar, discriminar, relacionar. Incluye ítems que requieren operaciones del tipo anterior, pero que se presentan en conjunto con otro concepto, expuesto o no explícitamente.

Pr3 Procesos algebraicos: aplicación de leyes, sustitución, aplicación de fórmulas, despejar variables. Se presentan en forma explícita, leyes de potencia y radicales, propiedades de logaritmos o de la función exponencial, identidades trigonométricas, o algún teorema o definicición básica, para que se reconozca su validez.

Pr4 Interpretación: interpretar, traducción de lenguaje verbal al algebraico. Capacidad para plantear ecuaciones, o trasladar una ecuación a una forma equivalente. Leer y poder entender la definición de un concepto nuevo.

Pr5 Visualización espacial: extraer información de un dibujo. En algunas ocasiones, dada la descripción algebraica de una función se requiere que se visualice el gráfico de la función, para reconocer algunos elementos de las funciones. En otros casos, dado el gráfico de una función en una variable real, se requiere reconocer los elementos de la función (el ámbito, los intervalos de monotonía, entre otros).

Pr6 Proceso deductivo: de una ley general, se infieren afirmaciones para casos particulares, es decir, de una generalidad se pasa a particularidades.

Pr7 Proceso Inductivo: obtener conclusiones generales a partir de premisas que contienen datos particulares.

Pr8 Uso de hipótesis: se requiere asumir ciertas hipótesis para llegar a una solución.

Pr9 Razonamiento en contexto negativo (uso de negación en el planteamiento del ítem).

Uno de los objetivos del trabajo era determinar distintos niveles de desempeño en el constructo basados en los resultados obtenidos con el modelo de Rasch, como en el caso del DiMa 2008, los resultados obtenidos al aplicar Rasch muestran que no hay suficientes ítems en niveles muy altos, ni en bajos de la habilidad que puedan dar información, por lo que para poder continuar con el estudio, fue necesario considerar aquellos ítems ubicados a una distancia mayor a 0.55 logits por debajo de la media en dificultad de los ítems, como ítems relativamente fáciles (Nivel 1, 12 de 59 ítems), y aquelleste proceso Pr6 os ubicados a una distancia mayor a 0.55 logits por encima de esta media como ítems relativamente difíciles (Nivel 3, 11 de 59 ítems), el resto de ítems (Nivel 2, 36 ítems) se consideraron de dificultad media. Es necesario recordar que en el mapa de distribución conjunta de examinados e ítems, se ubican los ítems de abajo hacia arriba del más fácil al más difícil, de acuerdo con las estimaciones de dificultad obtenidas en el modelo de Rasch.

La estimación de dificultad de los ítems emanada por cada juez, se trasladó al mapa obtenido en Rasch. Por ejemplo, en la figura 4.3 se muestra la representación de las valoraciones de uno de los jueces. Se dibujaron líneas para identificar los tres niveles que se establecieron según las dificultades obtenidas en Rasch (la parte superior representa el nivel 3, la que está en medio de las líneas el nivel 2, y la parte inferior el nivel 1) y se identificó con color rojo, aquellos ítems clasificados como fáciles por el juez, con color verde los clasificados como medianos y con color azul los difíciles (figura 4.3).

En la tabla 4.4 se indica la cantidad de ítems en los que cada uno de los jueces concuerda con la estimación de dificultad obtenida con el modelo de Rasch, se puede apreciar que el juez 5 es el que coincide más con lo estimado por el modelo (51% de acierto), mientras que el juez 1 es el que más se aleja a la clasificación obtenida con el modelo de Rasch.

	Niveles de Dificultad según Rasch				
Jueces	Nivel 1 12 ítems	Nivel 2 36 ítems	Nivel 3 11 ítems	Total ítems concordancia Rasch-Juez	
J1	11	9	2	22	37%
J2	6	19	3	28	47%
J3	3	16	7	26	44%
J4	5	17	5	27	46%
J5	7	21	2	30	51%

Tabla 4.4: Concordancia en dificultad, Rasch-Jueces

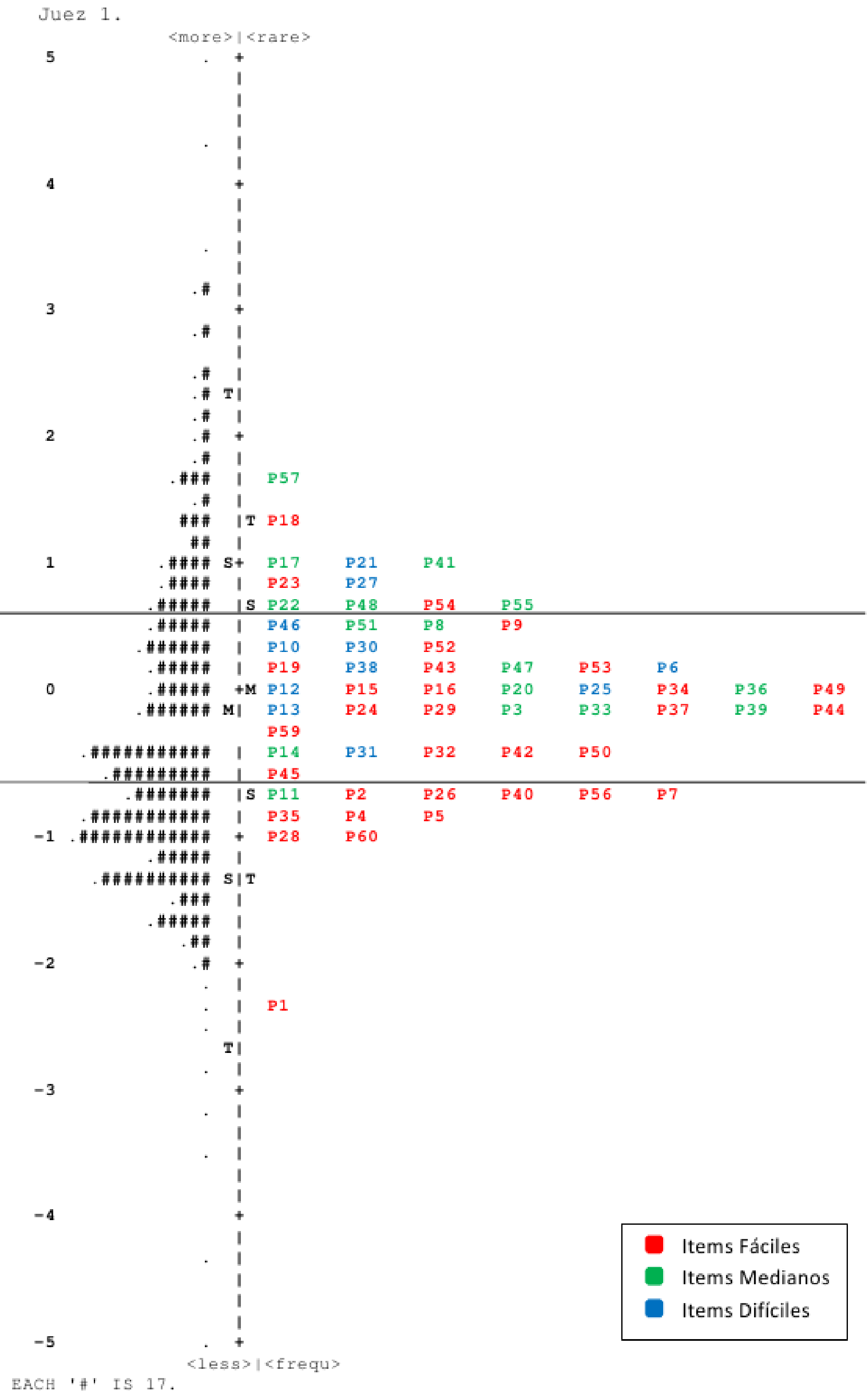


Figura 4.3: Clasificación del ítem por dificultad Juez 1 vrs Rasch

Aquí podemos valorar la importancia de uno de los usos del modelo de Rasch, pues vemos como se puede implementar en la evaluación de los jueces, se debe recordar que los resultados procedentes del modelo son los obtenidos a partir de los datos observados en la muestra analizada, mientras que los resultados de los jueces son tan solo estimaciones, valoraciones a su criterio. Es importante resaltar que la aplicación del modelo de Rasch permite de esta manera identificar aquellos jueces que parecen conocer más la población a evaluar y el constructo que se está pretendiendo medir.

Con el propósito de poder contar con evidencia estadística sobre los niveles de acuerdo entre los jueces según la dificultad de los ítems, se aplicó el índice Kappa, el cual brinda una medida de la concordancia entre dos jueces, al clasificar de forma individual un conjunto de ítems en un mismo conjunto de categorías; el valor de este índice se considera moderado si es superior a 0.41 (Landis y Koch, 1977). En el caso de este estudio los resultados obtenidos muestran que solo las parejas de jueces J2-J4 y J3-J4, se acercan a un valor moderado en este índice, 0.397 y 0.434 respectivamente, además, con el juez 1 se obtienen los valores más bajos al compararlo con los jueces 2, 3 y 4.

Para poder analizar cuales son los procesos más representativos en cada uno de los ítems, se requiere identificar en cuales de ellos existe más concordancia entre jueces y entre jueces y Rasch. Por los resultados obtenidos, se decide estudiar 3 subgrupos de jueces:

- Grupo 1, el formado por los jueces J2, J3, J4 y J5, sin considerar J1 porque cuando se estudió la concordancia de cada juez con el modelo Rasch, fue el que más se alejaba de lo estimado por el modelo.

- Grupo 2, el formado por J2, J4 y J5, porque cuando se estudiaron en forma individual, fueron los que se acercaron más a las dificultades estimadas con el modelo de Rasch.

- Grupo 3, el formado por J2, J3 y J4, pues cuando se hizo el cálculo de los índices de concordancia entre jueces (índice Kappa) según la dificultad del ítem, fue con estos jueces con los que se obtuvieron valores moderados.

El siguiente paso era identificar, para cada grupo, en cuales ítems había más concordancia y en cuales no se llegaba a un acuerdo entre jueces. Para esto, se procedió, en cada grupo, a medir la variabilidad entre jueces, se consideraron estos como sujetos y los ítems como variables, donde los datos correspondían a 1 si el juez lo clasificó como fácil, 2 si lo calificó como de mediana dificultad y 3 si lo consideró difícil, se calcularon los estadísticos descriptivos media y desviación estándar; así, si el ítem se ubicaba a menos de 0.6 desviaciones estándar de la media respectiva, se consideraba que había consenso entre las respuestas dadas por los jueces del respectivo grupo porque existía poca variabilidad. Si existía concordancia, en términos de las calificaciones hechas por los jueces en la dificultad, entonces se consideró, para el grupo 1, la clasificación de dificultad, según lo indicado por al menos 3 de los 4 jueces; para los grupos 2 y 3, la clasificación de dificultad, según lo indicado por 2 de los 3 jueces.

Una vez clasificados los ítems de acuerdo con el consenso entre jueces según su dificultad, se trasladó esta información al mapa de distribución conjunta entre examinados e ítems obtenido en Rasch, volviendo a identificar con líneas los tres niveles establecidos según Rasch, como se hizo por ejemplo en la figura 4.3, e identificando nuevamente con color rojo, aquellos clasificados como fáciles por el grupo, con color verde los medianos, con color azul los difíciles y los de color negro son los ítems en los que no se logró un consenso en dificultad en el grupo. En la figura 4.4 se puede observar la representación del grupo 3. De los tres grupos, justamente el 3, conformado por los jueces J2, J3 y J4, fue el que más se acercó a lo estimado con el modelo de Rasch (53% de acierto) según la dificultad de los ítems. Por todo lo anterior, para el estudio de los contenidos y procesos presentes en los ítems se decidió trabajar con lo propuesto por éste grupo.

Con el propósito de poder contar con evidencia estadística sobre los niveles de acuerdo entre los jueces según el contenido en que clasificaron los ítems, se aplicó el índice de Kappa para los jueces del grupo 3, los valores obtenidos oscilaron entre 0.821 y 0.860, los cuales son considerados muy buenos, es decir, existe bastante acuerdo entre estos jueces con respecto a la categoría de contenido en la que clasificaron los ítems.

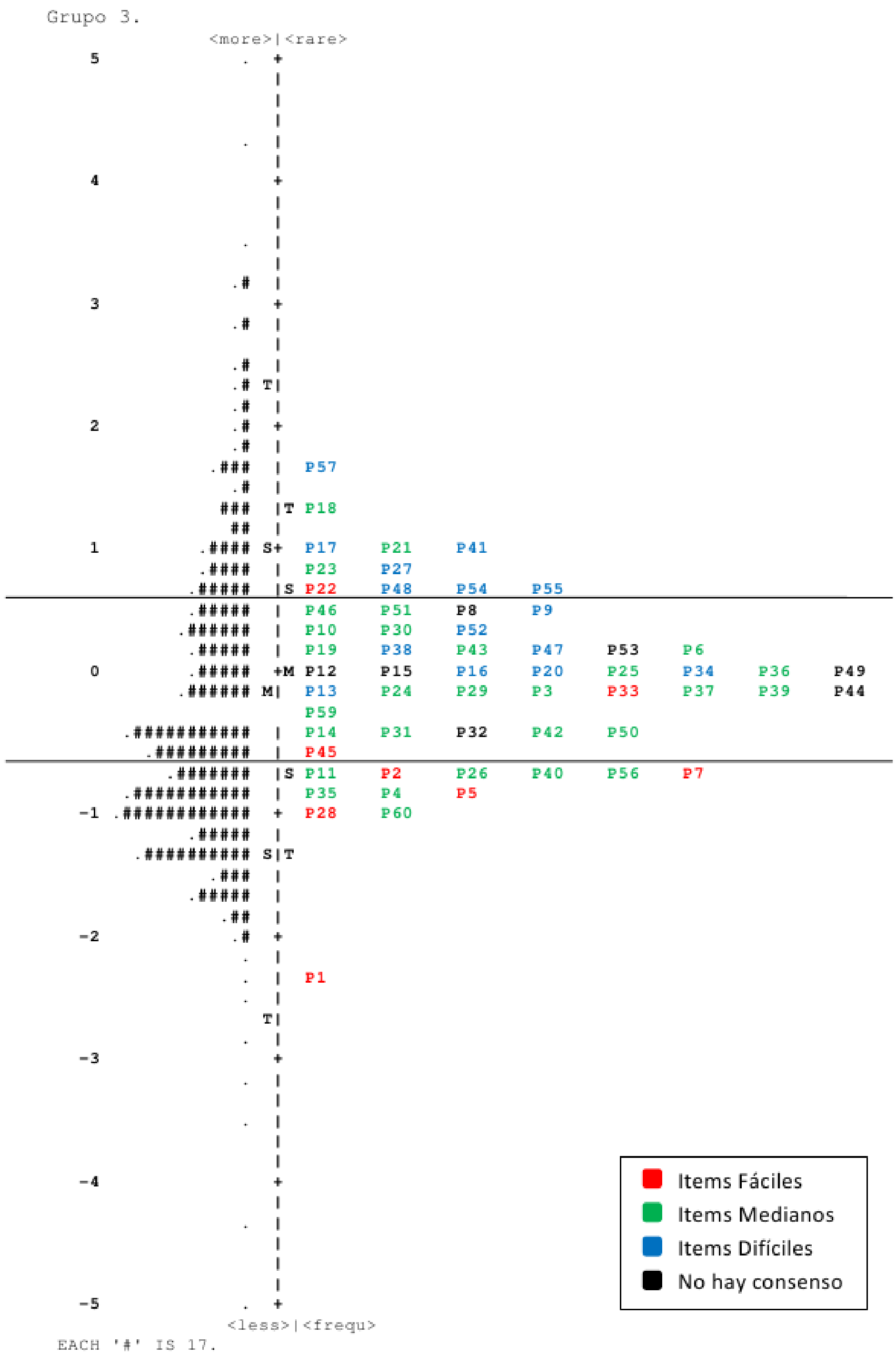


Figura 4.4: Clasificación del ítem por dificultad, Grupo 3 vrs Rasch

Las tablas 4.5, 4.6 y 4.7 son una primera aproximación a lo que se le puede llamar una tabla de especificaciones para la construcción de ítems que pueden formar parte de esta prueba, además, dan una idea de los distintos niveles de desempeño o competencia en el constructo medido, con lo cual se le podría indicar al examinado en el informe que se le da no solo en cuales contenidos debe fortalecerse sino que también a cuales procesos debe prestarle más atención. En el mapa de la distribución conjunta entre ítems y examinados, se puede observar, de acuerdo con la posición del examinado, cuales ítems representan un grado de mayor dificultad para la persona, y teniendo ubicados estos ítems en los distintos niveles de dificultad, se puede valorar los contenidos y procesos presentes en ese nivel.

En estas tablas se reunió y organizó la información más relevante de los ítems: dificultad obtenida según Rasch, contenido en el que quedarían clasificados y los procesos más representativos en la resolución de cada ítem, según la coincidencia de al menos 2 de los 3 jueces. Para este grupo de jueces, los procesos Pr7, Pr8 y Pr9 no están presentes en ninguno de los ítems analizados, por lo que no se consideraron en las tablas.

Items ubicados en el Nivel 1 según Rasch

Item	Indice de Dificultad	Contenido	Pr1	Pr2	Pr3	Pr4	Pr5	Pr6
p11	-0.62	C2			1			
p2	-0.68	C1	1					
p40	-0.71	C4				1	1	1
p26	-0.72	C2		1	1			
p56	-0.74	C5					1	
p7	-0.75	*	1		1			
p5	-0.79	C1	1					
p35	-0.81	C4					1	
p4	-0.82	C1	1					
p60	-0.96	C5			1	1	1	
p28	-1.09	C2		1	1			
p1	-2.22	C1	1					
		Total	5	2	5	2	4	1
		Porcentaje	**42%**	17%	**42%**	17%	33%	8%

* En este ítem no hubo consenso entre jueces.

Tabla 4.5: Tabla de especificaciones. Nivel 1.

En la tabla 4.6 se puede apreciar que para los ítems que pertenecen al nivel 1, según el criterio de estos jueces los procesos más representativos en su solución son el Pr1 (procesos aritméticos) y el Pr3 (procesos algebraicos), lo cual indicaría que si se desea confeccionar ítems que midan en niveles bajos de este constructo, se requiere que estén presentes estos procesos.

Items ubicados en el Nivel 2 según Rasch

Item	Indice de Dificultad	Conte-nido	Pr1	Pr2	Pr3	Pr4	Pr5	Pr6
p8	0.47	C2	1	1	1			
p46	0.43	C4		1	1			1
p51	0.41	C3			1	1		1
p9	0.41	C2		1	1			1
p52	0.37	C3		1	1	1		
p10	0.3	C1		1	1			1
p30	0.28	C4		1		1		
p43	0.18	C4				1	1	
p47	0.16	C3			1	1		
p6	0.12	C1		1	1			
p38	0.12	C4			1	1		
p19	0.1	C2			1			1
p53	0.09	C3		1	1	1		
p25	0.01	C2		1	1			
p20	0.01	C2		1	1			1
p12	0,00	C2		1	1	1		1
p15	-0.02	C2		1	1			
p16	-0.02	C2		1	1			1
p36	-0.03	C4			1	1		
p34	-0.06	C4			1			1
p49	-0.09	C3		1			1	
p29	-0.12	C4					1	
p39	-0.13	C2			1	1		
p24	-0.14	C2		1	1			
p44	-0.18	C4		1		1		
p59	-0.2	C5		1	1	1		1
p3	-0.23	C1	1					
p13	-0.23	C2		1	1	1		1
p33	-0.25	C4				1	1	
p37	-0.27	C4		1	1	1		
p50	-0.3	C3			1	1		1
p14	-0.32	C3		1	1			1
p31	-0.33	C4			1	1		
p32	-0.41	C4			1	1		
p42	-0.45	C2	1		1	1		
p45	-0.48	C4		1	1	1		
		Total	3	21	29	20	4	13
		Porcentaje	8%	**58%**	**81%**	**56%**	11%	**36%**

Tabla 4.6: Tabla de especificaciones. Nivel 2.

En el caso de los ítems del nivel 2 (ver tabla 4.6), los procesos más relevantes serían Pr2 (procesos comparativos), Pr3 (procesos algebraicos) y Pr4 (interpretación), es decir, pareciere que para este tipo de ítems, además de requerir un dominio en los procesos presentes en los del nivel 1, se requiere también realizar comparaciones, agrupaciones interpretaciones de definiciones de conceptos nuevos, traducir del lenguaje verbal al algebraico y viceversa, saber como plantear ecuaciones.

Items ubicados en el Nivel 3 según Rasch

Item	Indice de Dificultad	Conte-nido	Pr1	Pr2	Pr3	Pr4	Pr5	Pr6
p57	1.67	C5		1		1		1
p18	1.29	C2			1			
p17	1.03	C2		1	1			1
p41	0.97	C2		1	1	1		
p21	0.96	C2			1			1
p27	0.78	C2	1	1	1			1
p23	0.72	C2		1	1	1		
p54	0.61	C5		1	1	1	1	
p55	0.6	C5		1	1	1	1	
p22	0.57	C2	1		1			
p48	0.55	C3			1	1		
		Total	2	7	10	6	2	4
		Porcentaje	18%	**64%**	**91%**	**55%**	18%	**36%**

Tabla 4.7: Tabla de especificaciones. Nivel 3.

Finalmente, en la tabla 4.7 se muestran la clasificación en contenidos y procesos realizada por los jueces del grupo 3, para los ítems del nivel 3 (ítems relativamente difíciles), aquí se puede apreciar de manera muy general que los procesos más representativos en este caso son Pr2 (procesos comparativos), Pr3 (procesos algebraicos) y Pr4 (interpretación), lo cual no marcaría una diferencia con los ítems del nivel 2, y esto era de esperar, pues hay que recordar que en realidad no se trata de ítems difíciles y que se escogieron los que se consideraban relativamente difíciles con el propósito de poder ilustrar uno de los usos del modelo de Rasch. Lo que sí se puede apreciar en la tabla 9 es como para aquellos ítems que tienden a ser los más difíciles en este nivel, el proceso Pr6 (proceso deductivo) tiende a estar más presente, una hipótesis podría ser entonces que, para contar con ítems que midan en niveles altos de la habilidad, se requiere la presencia de este proceso Pr6.

4.7 Conclusiones y recomendaciones

Al aplicar el modelo de Rasch, se obtiene que la medida de confiabilidad de los examinados y la correspondiente a los ítems resultaron bastante consistentes y existe una medición bastante precisa en cuanto a la dificultad de los ítems.

En los mapas de las distribuciones conjuntas de los individuos y los ítems, se puede observar que el promedio del nivel de habilidad de los examinados está muy cercano (por debajo) a la dificultad promedio de los ítems, la mayor parte de la población se ubicó por debajo de la dificultad promedio de los ítems, esto indica que la prueba resultó levemente difícil para los examinados. Pero, la gran mayoría de los ítems se encuentran concentrados en niveles intermedios de la habilidad, casi no hay ítems que brinden información en niveles altos o en niveles bajos, al tratarse de una prueba de diagnóstico es deseable disponer de ítems con niveles óptimos, en cuanto a calidad técnica, en todos los niveles de la habilidad; en especial para el caso de esta prueba, se requieren más ítems en niveles bajos de la habilidad, ya que uno de los objetivos del DiMa es poder hacer recomendaciones a los estudiantes que no obtuvieron un buen desempeño, para lograr una nivelación.

Además, con el uso del modelo de Rasch, al poder tener a los evaluados e ítems representados en un mismo continuo, se pudo analizar las interacciones entre éstos y las interpretaciones de las puntuaciones se pudieron hacer identificando los ítems que el examinado tiene mayor o menor probabilidad de acertar. Según la TCT, si dos individuos poseen la misma calificación, ésta lo que indica es que ambos acertaron la misma cantidad de ítems, pero de acuerdo con Rasch, podemos identificar si uno de ellos acertó mayor cantidad de ítems de niveles altos en el constructo.

El utilizar el modelo de Rasch permitió hacer una evaluación de 5 jueces quienes analizaron y clasificaron los ítems, según su dificultad, contenido y procesos presentes en su solución. Con los resultados obtenidos fue posible elaborar tablas con la información más relevane de los ítems del DiMa 2008: dificultad del ítem, según Rasch; contenido, procesos más representativos presentes en la solución del ítem. Al poder identificar los jueces que más concuerdan con los resultados del modelo de Rasch, se puede hacer una mejor escogencia de evaluadores de ítems que conocen mejor el constructo, y que en el momento de hacer la valoración de ítems experimentales, serán más certeros.

Este estudio realizado con los jueces y el uso del modelo de Rasch, constituye una primera aproximación para la construcción de una tabla de especificaciones tan necesaria para el trabajo de construcción de ítems, sin embargo, uno de los problemas mayores en este estudio fue la ubicación de la mayoría de los ítems en niveles intermedios, por tanto, para poder generar los tres niveles de desempeño fue necesario realizar ajustes ad hoc, los cuales no serían necesarios si se contaran con suficientes ítems en los tres niveles estándar establecidos en Rasch (entre -3 y -1 fáciles, entre -1 y 1 medianos, entre 1 y 3 difíciles), por lo cual, más allá de los resultados obtenidos, su mayor valor está en el aporte metodológico, procedimental y de interpretación desarrollado.

Es importante continuar con este análisis, pero estudiando con más detalle los procesos involucrados en la solución de los ítems, desde la psicología cognitiva, para lograr identificar qué procesos deparan diferentes niveles de dificultad en los ítems y poder identificar las características que comparten los ítems de un nivel de dificultad similar, así, se le podría indicar a un constructor de ítems los procesos que deben estar presentes en un ítem para que resulte con el nivel de dificultad que se desea y elaborar pruebas más adaptadas a las necesidades; pues con Rasch se sabe que no se asume el supuesto de que la prueba mide con la misma confiabilidad siempre, sino que si se tienen ítems fáciles, se sabe que los parámetros de los sujetos de niveles bajos en la habilidad se estimarán con mayor precisión, o si se cuenta con examinados ubicados en niveles altos de la habilidad, con estos se podrá estimar los parámetros de los ítems difíciles con mayor precisión.
Por todo lo expuesto anteriormente, se puede afirmar que el aplicar este enfoque psicométrico, que incluye el modelo de Rasch, en el proceso de construcción, juzgamiento y calificación de los ítems y de la prueba, permite dar un soporte más científico al DiMa y por tanto, aporta más evidencias de validez, que deben ser consideradas en las inferencias que se derivan de los resultados, a partir del uso de la prueba, para la toma de desiciones.

Bibliografía

[1] AERA (American Educational Research Association), APA (American Psychological Association) & NCME (National Council on Measurement in Education). (1999). *The Standards for Educational and Psychological Testing.* Washington: AERA (American Educational Research Association).

[2] Arce C. y Jiménez L. (2003). *Diagnóstico de conocimientos y destrezas en matemática del estudiante al ingresar a la Universidad*. Propuesta de Investigación. Sistema de formulación de proyectos 2003-2004 UCR.

[3] Babbie, E. (2010). *The Practice of Social Research*. Belmont, California: Wadsworth.

[4] Barbero, M. (1999). Desarrollos recientes de los modelos psicométricos de la teoría de respuesta a los ítems. *Psicothema*, *11*(1), 195-210. Recuperado de http://www.doredin.mec.es/documentos/017199930016.pdf

[5] Bond, T. & Fox, C. (2001). *Applying the Rasch model: fundamental measurement in the human Sciences.* Mahwah, New Jersey: LEA.

[6] Cea D'Ancona, M. (2002). *Análisis multivariable*. España: Editorial Síntesis, S.A.

[7] Landis J. R., Koch G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data.*Biometrics*, 33, 159-174.

[8] Martínez, M. R. (2005). *Psicometría: Teoría de los Test Psicológicos y Educativos*. Madrid: Editorial SINTESIS, S.A.

[9] Martínez, M. R., Hernández M.J. & Hernández, M.V. (2006). *Psicometría*. Madrid: Alianza Editorial.

[10] Messick, S. (1989). Meaning and values in test validation: The science and ethics of assessment. *Educational Researcher*, 18(2), 5-11.

[11] Messick, S. (1989). Validity. In R.L. Linn (Ed.), *Educational measurement* (3rd ed., pp. 13-103). New York: Macmillan.

[12] Montero, E. (2001). La teoría de respuesta a los ítems: una moderna alternativa para el análisis psicométricos de instrumentos de medición. *Revista de Matemática: teoría y aplicaciones*. Centro de Investigaciones en matemática pura y aplicada (CIMPA) y la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica. 7(1-2), 217-228.

[13] Muñiz, J. (1997). *Introducción a la Teoría de Respuesta a los ítems*. Madrid: Ediciones Pirámide, S.A.

[14] Muñiz. J. (2003). *Teoría Clásica de los Tests*. Madrid: Ediciones Pirámide, S.A.

[15] Nunnally, J.C. & Bernstein, I.J. (1995). *Teoría psicométrica* (3ra ed). México, D.F.: Editorial McGrawHill Latinoame-ricana.

[16] Padilla J.P. et al (2006). La evaluación de las consecuencias del uso de los tests en la teoría de validez. *Psicothema*, 18(2), 307-312.

[17] Prieto, G. & Delgado A.R. (2003). Análisis de un test mediante el modelo de Rasch. *Psicothema*, 15(1), 94-100.

[18] Prieto, G. y Delgado, A. (2010). Fiabilidad y Validez.*Papeles del Psicólogo*, *31*(1), 67-74. Recuperado de http://www.papelesdelpsicologo.es/pdf/1797.pdf

Uso de Software

5 UN TALLER DE SIMULACIONES: FATHOM, GEOGEBRA Y EXCEL PARA RESOLVER PROBLEMAS CONTROVERSIALES DE PROBABILIDAD

Greivin Ramírez Arce.
gramirez@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Resumen. El taller pretende utilizar la simulación, en Fathom, GeoGebra y Excel con el fin de desarrollar el pensamiento instintivo y confrontarlo con el pensamiento analítico en el estudio de las distribuciones y probabilidades condicionales, y que lo anterior ayude a resolver problemas considerados controversiales de probabilidad. Los participantes trabajarán con actividades guiadas, podrán apreciar la riqueza didáctica de la simulación hecha con paquetes dinámicos y comparar las potencialidades que cada uno ofrece en la solución de diversos problemas.

Palabras Clave: Simulación, Probabilidad, Fathom, GeoGebra y Excel.

Abstract. The workshop will use simulation in Fathom, GeoGebra and Excel to compare instinctive thinking to analytical thinking in the study of probability distributions and conditional probability, with the goal of improving problem solving in non-intuitive probability problems. Participants will work with guided activities, will acquire an appreciation of the richness of the simulation of dynamic packages, and will compare the potential offered by each of the various tools in solving problems.

KeyWords: Simulation, Probability, Fathom, GeoGebra y Excel.

Introducción

Rossman (1995) citado por North, Scheiber y Ottaviani (2010) indica que, la literatura sobre educación estadística debe ser una demostración de que las estadísticas ideales se deben enseñar utilizando un enfoque basado en datos, con datos reales para enfatizar los principios y procedimientos estadísticos, en lugar del enfoque tradicional teórico donde el énfasis está simplemente en la identificación de la fórmula correcta y la realización de un cálculo. La formación de profesionales en matemática y estadística presenta grandes desafíos y uno de ellos es para los educadores la integración de la tecnología para optimizar la calidad de la enseñanza.

La simulación computacional es una alternativa en el estudio de la estocástica; ya que como lo refiere Erickson (2010), parece interesante ver como un programa que logre la simulación orientada de datos y dinámicos, puede guiar o interferir en mejor entendimiento matemático de conceptos tales como: valores esperados, variabilidad, cálculo de probabilidades y forma de las distribuciones desde su construcción en la solución de problemas.

Al enseñar Probabilidad y Estadística debe considerarse el desarrollo cognitivo del estudiante, puesto que en dichos campos, algunas veces, se trata con ideas abstractas y no tan relacionadas con su experiencia directa; además, debe hacerse a partir de situaciones prácticas y cotidianas, mediante el empleo de proyectos y asignaciones que favorezcan su comprensión según Batanero y Godino (2001). Es necesario plantear actividades que estimulen la experimentación, el desarrollo de conjeturas y la búsqueda de explicaciones en un ambiente donde, en la medida de lo posible, se promueva el uso de la tecnología en procesos de representación, exploración y análisis de la información que resulta ser un componente importante en el desarrollo del pensamiento estadístico.

Objetivo del taller

El taller busca colaborar con el impacto de la simulación computacional, hecha con Fathom, GeoGebra y Excel, en la solución de problemas difíciles de resolver con el formalismo estocástico.

Justificación de pertinencia e interés del taller

Inzunsa (2006) resume el éxito de los estudiantes al usar la simulación computacional (sugerida por Shaughnessy, 1992; Burrill, 2002; Sánchez, 2002; Lipson, 2002):

> Los estudiantes encuentran sentido a la resolución de problemas de distribuciones mediante la simulación en Fathom una vez que se apropiaron de los recursos del software y después de haber abordado algunas actividades. Son capaces de construir por ellos mismos las distribuciones, generando las poblaciones, tomando muestras, definiendo estadísticos y calculado sus probabilidades. (p. 215)

GeoGebra, por otro lado, ha demostrado ser una herramienta con un potencial didáctico para el cumplimiento de objetivos didácticos, pero además provee un ambiente que estimula al estudiante para que formule hipótesis, según Ferrerira y otros (2009).

Al respecto, el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2005) refiere que "es conveniente que se parta de lo concreto, en los temas que es posible, estimular al estudiante, para que empiece a crear sus propias estrategias y a resolver problemas en forma autónoma, sin tener que recurrir a recetas preestablecidas".

Todo esto justifica lo fundamental que es una culturalización de los estudiantes en procesos estocásticos a través de la simulación.

Plan y metodología del taller

El taller se dividirá en tres etapas:

Primera etapa: El uso de simulación en la resolución de problemas. Etapa introductoria donde se les habla a los participantes de la importancia de incluir en el aula herramientas tecnológicas, esto con el fin de poder utilizar la simulación para mejorar la enseñanza aprendizaje de la estocástica.

Segunda etapa: problemas guiados con procesos de simulación. Se resolverán dos actividades guiadas, una en Fathom y otra en GeoGebra, con el fin de que se familiaricen con los paquetes en la resolución de los problemas 1 y 2.

Problema 1. Frecuencias relativas y absolutas (Fathom). Al lanzar una moneda justa, ¿cuál de los siguientes eventos considera que es más probable?

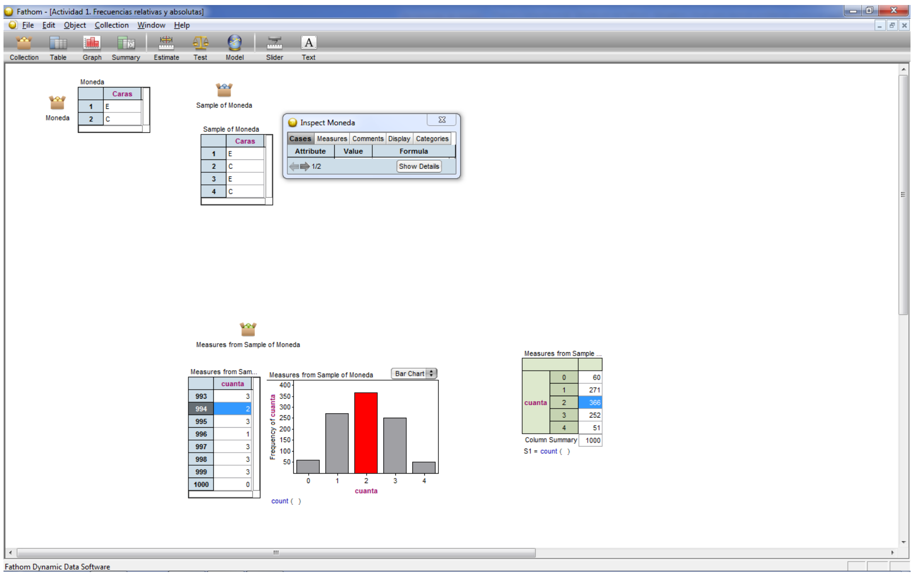
( ) Obtener dos escudos en cuatro intentos

( ) Obtener 50 escudos en 100 intentos

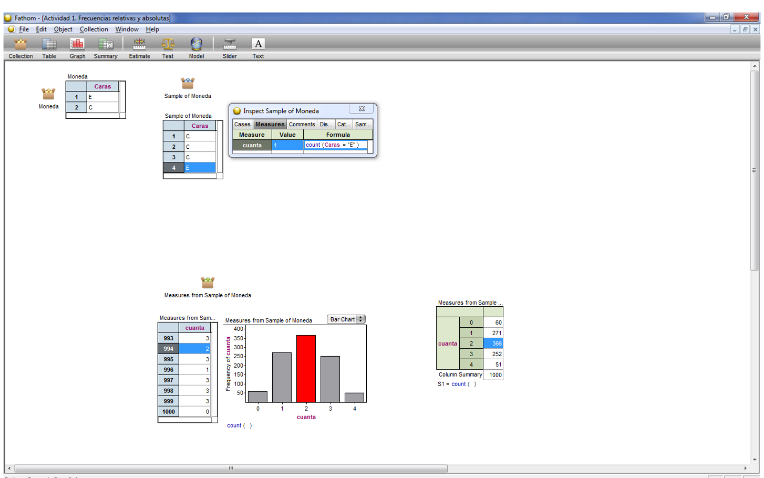
( ) Los dos anteriores son igualmente probables

Una propuesta de algoritmo de simulación en Fathom es la siguiente:

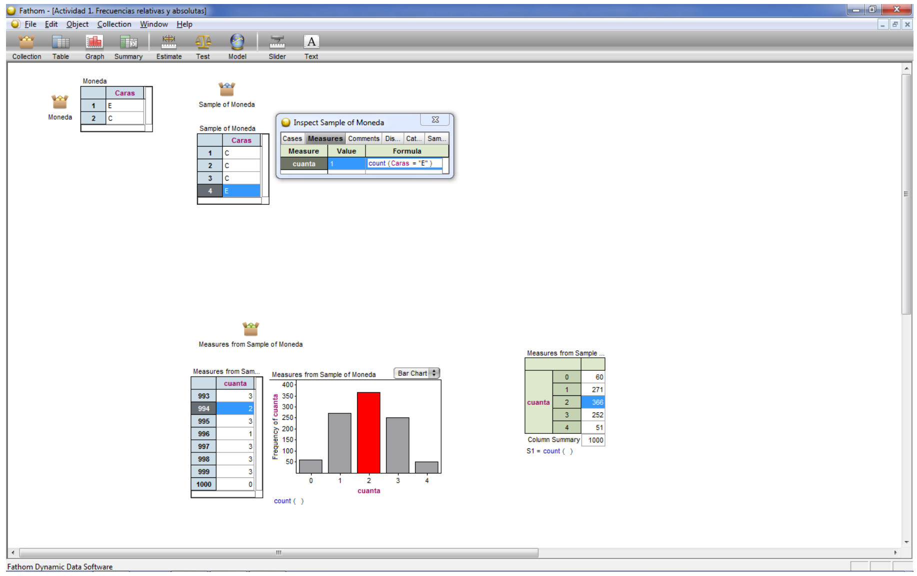
1. Se construye una moneda convencional con caras Corona (C) y Escudo (E).



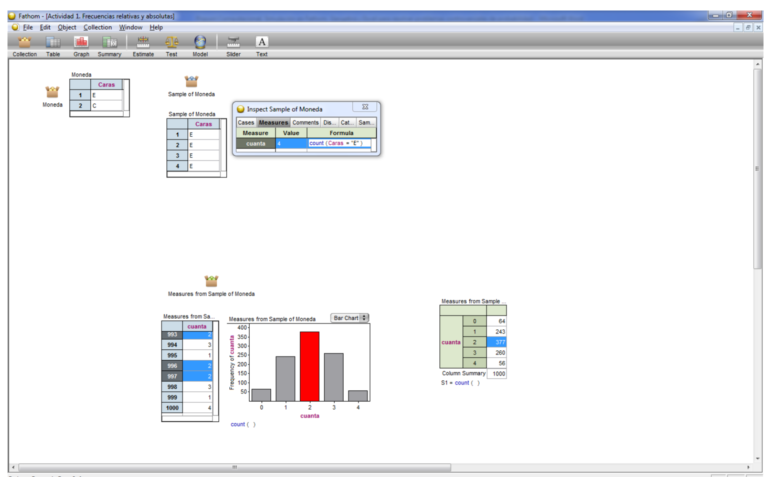
2. Se lanza la moneda cuatro veces y se cuenta las veces que ocurrió escudo.



3. Se repite el experimento muchas veces (se recomiendan 1000) y se construye un diagrama de barras con las frecuencias absolutas de la cantidad de escudos obtenidos.

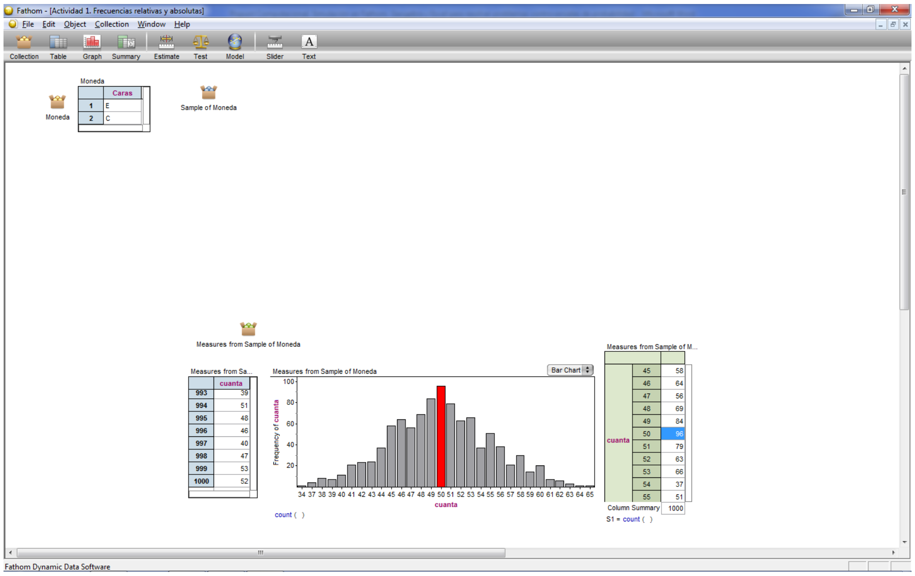


4. Se construye una tabla de frecuencias absolutas para determinar el número de veces en los que se obtuvo dos escudos de los 1000 experimentos realizados.



5. La probabilidad de obtener dos escudos en cuatro intentos fue de $\frac{377}{1000} = 0.377$

6. Se repite el algoritmo del paso a. al e. para determinar el número de escudos que se obtiene al lanzar la moneda 100 veces. En un ejemplo particular, donde se repite el experimento 1000 ocasiones, la probabilidad de obtener 50 escudos en 100 intentos fue de $\frac{96}{1000} = 0.096$

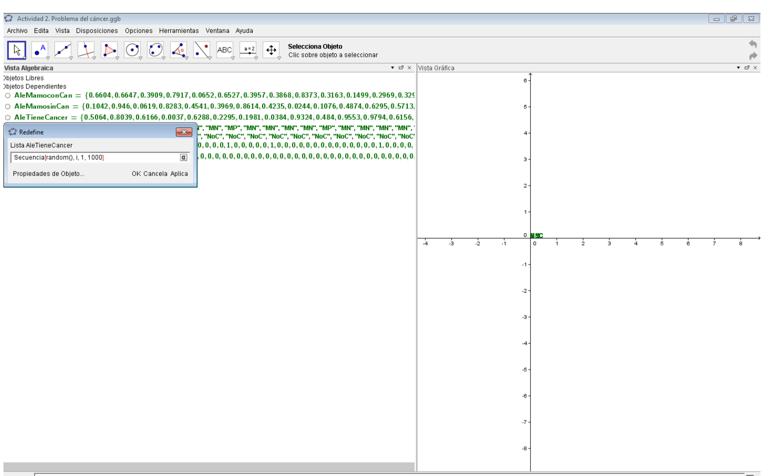


En el gráfico del punto c, donde se lanza la moneda cuatro veces en muchas ocasiones, se puede observar que la variabilidad es menor que el gráfico del punto f, donde se lanza la moneda cincuenta veces en la misma cantidad de ocasiones. Razón por la cual es más probable obtener dos escudos en cuatro intentos, que cincuenta en cien intentos.

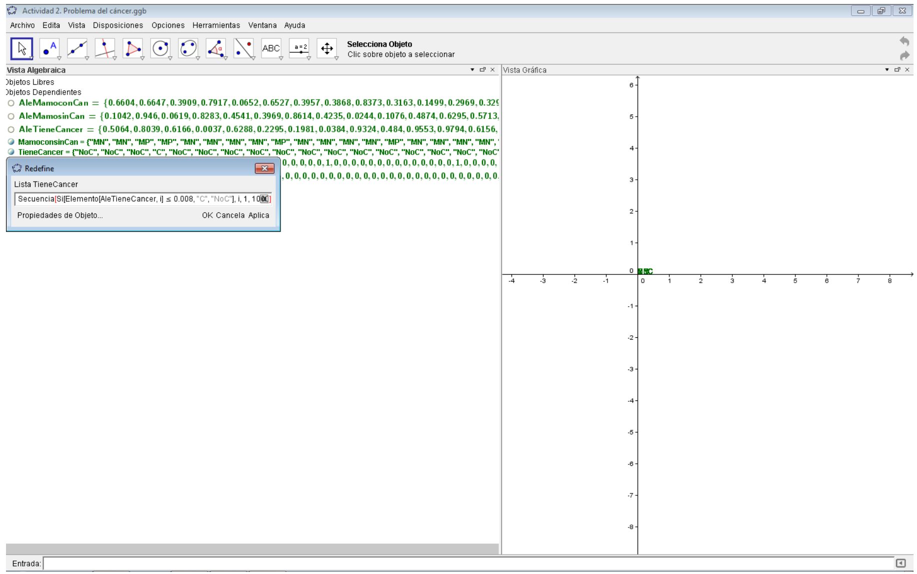
Problema 2. Problema del cáncer (GeoGebra) (en Shaughnessy, 1992). La probabilidad para una mujer de tener cáncer de mama sin haber presentado síntomas previos es de 0.8%. Si tiene cáncer y se realiza la mamografía, la probabilidad de salir positiva es del 90%, pero el 7% de mujeres sanas dan positivo en este examen. Suponga que una mujer decide hacerse una mamografía y el resultado es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la mujer tenga cáncer?

Una propuesta de algoritmo de simulación en GeoGebra es la siguiente:

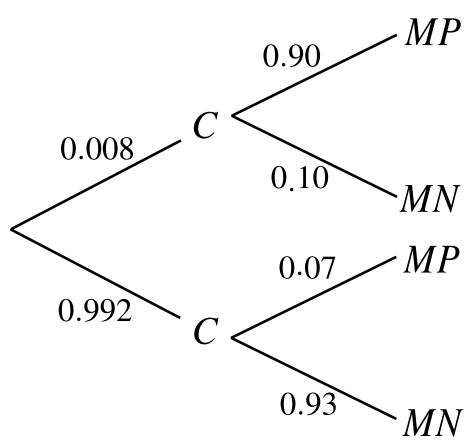
1. Se obtienen 1000 números aleatorios entre 0 y 1 que representarán a 1000 mujeres cualesquiera (se sugiere tomar mayor número de mujeres si así lo desea):



2. De estos 1000 valores los que sean menores que el 0.8% (0.008) serán las mujeres que tienen cáncer sin haber presentado síntomas previos, las demás (99.2%) no tienen cáncer:

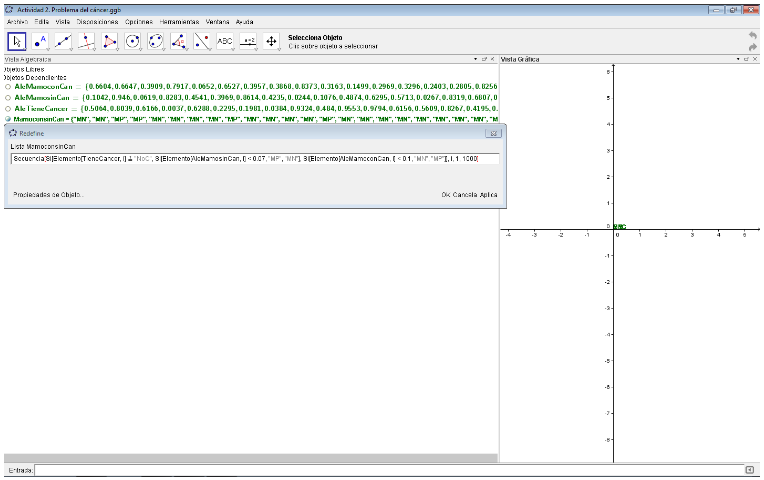


3. Con la idea intuitiva de un árbol,

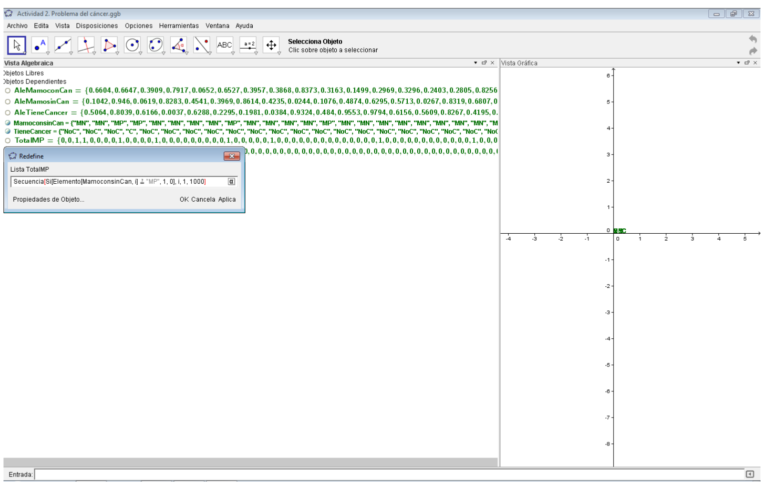


(a) Se obtienen 1000 números aleatorios entre 0 y 1 que serán las mujeres que cumplen la condición de estar sanas. De estos valores, los que sean menores que 7% (0.07) serán las mujeres que se realizan la mamografía y resulta positiva, para las demás, su mamografía es negativa (93%).

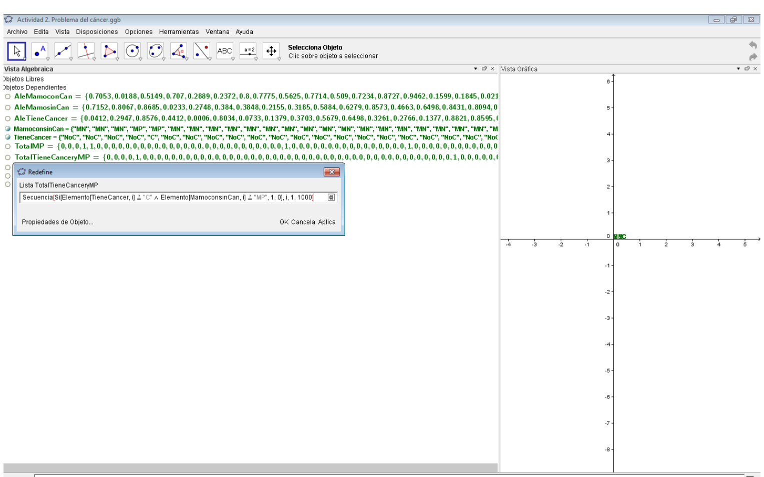
(b) Se obtienen 1000 números aleatorios entre 0 y 1 que serán las mujeres que cumplen la condición de tener cáncer. De estos valores, los que sean menores que 10% (0.1) serán las mujeres que se realizan la mamografía y resulta negativa, para las demás, su mamografía resultó positiva (90%).



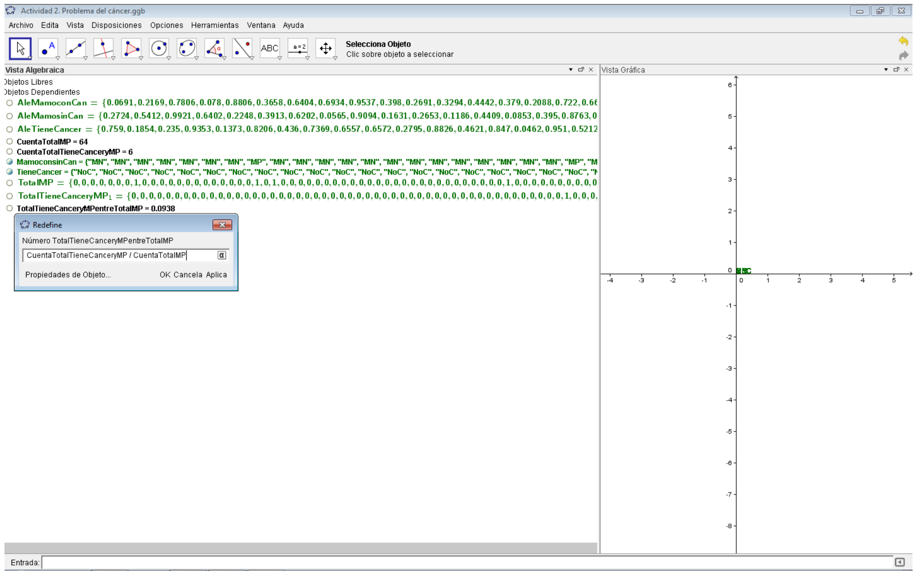
4. Interesa contar de las 1000 mujeres que se realizan la prueba, cuántas resultaron con mamografía positiva:

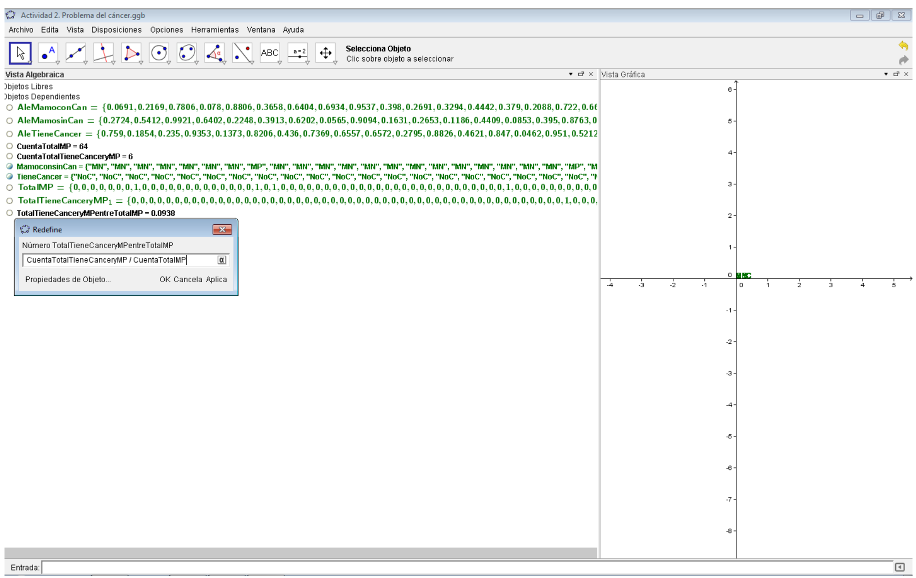


5. También interesa determinar de las 1000 mujeres, cuántas resultaron con cáncer y su mamografía fue positiva:



6. Se obtiene el cociente entre las mujeres que resultaron con cáncer y su mamografía fue positiva sobre el total de mujeres cuya mamografía fue positiva:





Problemas complementacios para etapa 2.

Problema 3. Dilama de Monty. En un concurso, un presentador le ofrece al concursante la posibilidad de elegir entre tres puertas, atrás de dos de ellas hay una cabra y en la otra se encuentra un auto. El concursante elige una puerta, y de forma inmediata el presentador abre dentro de las otras dos opciones aquella que tiene una cabra y le ofrece al concursante la posibilidad de cambiar su escogencia original. ¿Será bueno cambiar de puerta o quedarse con la selección original?

Problema 4. Problema del taxi (en Shaughnessy, 1992) (GeoGebra) Una cierta noche un taxi se ve involucrado en un accidente en la que pega y se escapa. En la ciudad operan dos compañías, la de los taxis verdes con el 85% y la de los azules con el 15%. Un observador de la escena identifica al taxi que se escapó como un taxi azul. Este observador fue probado bajo condiciones normales de visibilidad e hizo una correcta identificación del color en 80% de los casos. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi fugado sea azul y no verde?

Tercera etapa: problemas abiertos con procesos de simulación.

Se resolverán los problemas 5 y 6 con Excel y Fathom respectivamente sin tener una guía formal, sino que sean los participantes que desarrollen las etapas del proceso de simulación con cada paquete.

Problema 5. El fenómeno de Falk (en Shaughnessy, 1992) (Excel). Una caja tiene en su interior tres bolas rojas y tres bolas azules. Se extraen dos bolas sin reemplazar la primera.

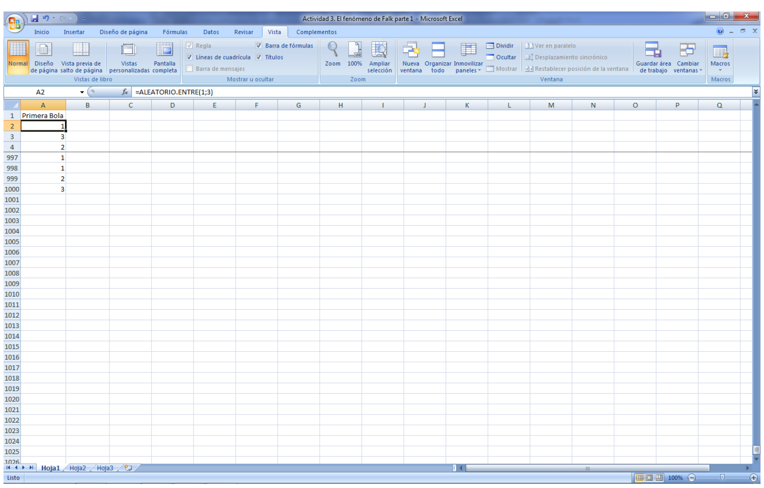
- ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja dado que la primera fue roja?

- ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja, dado que la segunda es roja?

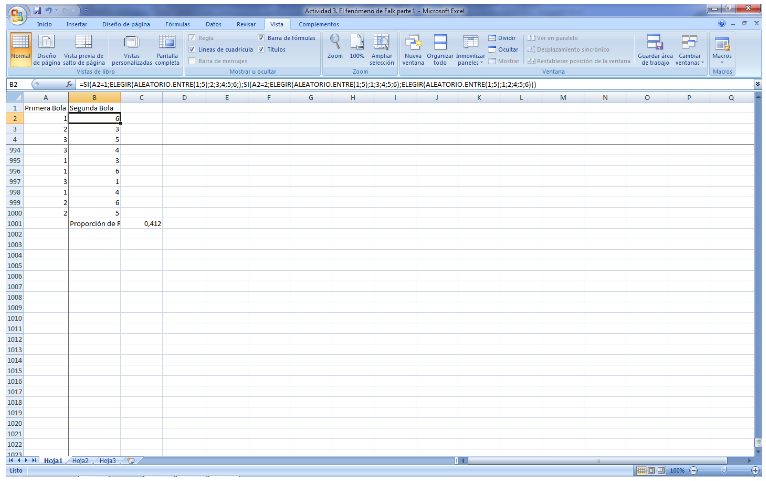
Para simular estos dos problemas se supone que las bolas numeradas del 1 al 3 son rojas y del 4 al 6 son azules. Aunque las bolas son indistinguibles cuando son del mismo color, se hará solo para facilitar el proceso de simulación.

Pregunta 1. Una propuesta de algoritmo de simulación en Excel es la siguiente:

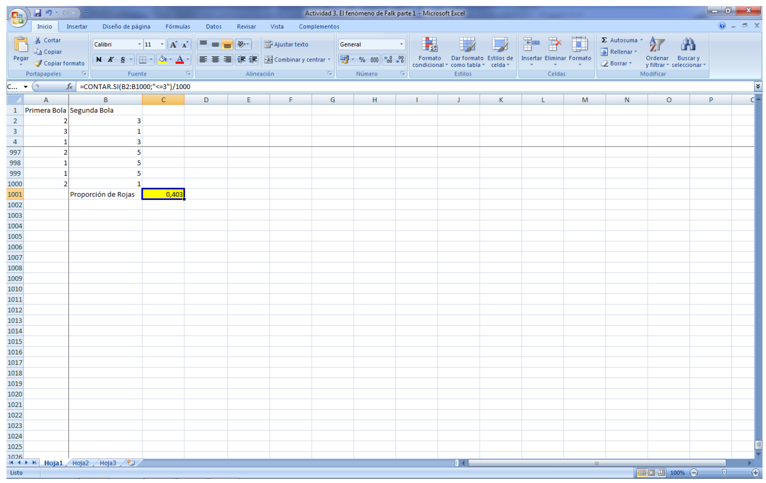
1. Se define una primera columna en donde se obtiene la extracción de la primera bola. Sabemos que la primera bola es roja. Así que se realizan 1000 extracciones de bolas donde cada una será un número aleatorio entre 1 y 3 (con garantía es roja).



2. Dado que es sin reemplazo, en la segunda columna se debe extraer una bola entre las cinco opciones que quedan en la caja. Se tomará un número aleatorio entre 1 y 6 menos el valor extraído en la primera bola.

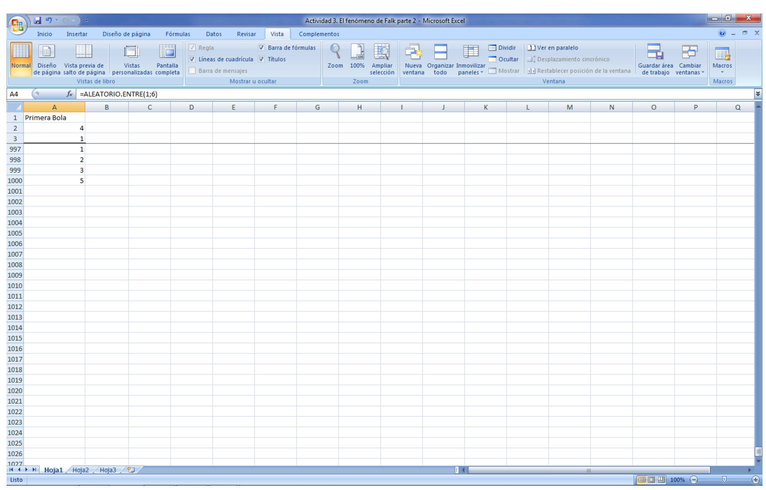


3. Por último se cuenta la cantidad de veces que la bola es roja (menor o igual a 3) en la segunda extracción de las 1000 realizadas.

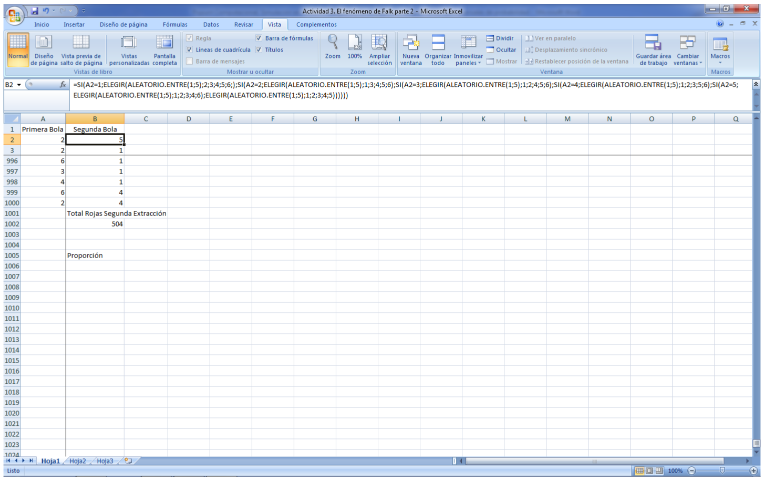


Pregunta 2. Una propuesta de algoritmo de simulación en Excel es la siguiente:

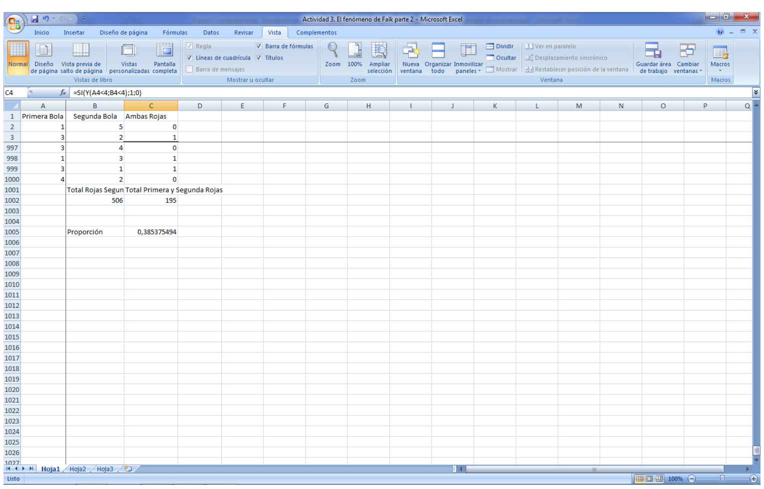
1. Se define la primera columna en donde se obtiene la extracción de la primera bola. Inicialmente se tienen en la caja 6 bolas, así que se realizan 1000 extracciones de bolas donde cada una será un número aleatorio entre 1 y 6 (podría ocurrir cualquier color):



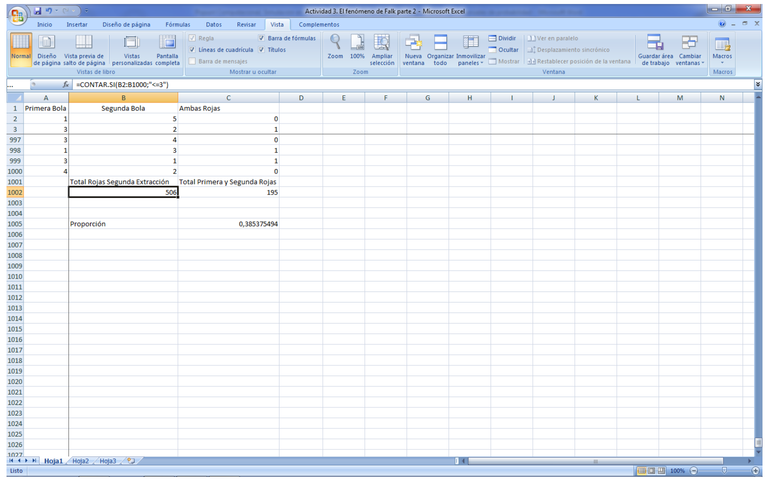
2. En la segunda columna se debe extraer una bola entre las cinco opciones que quedan en la caja. Se tomará un número aleatorio entre 1 y 6 menos el valor extraído en la primera bola:

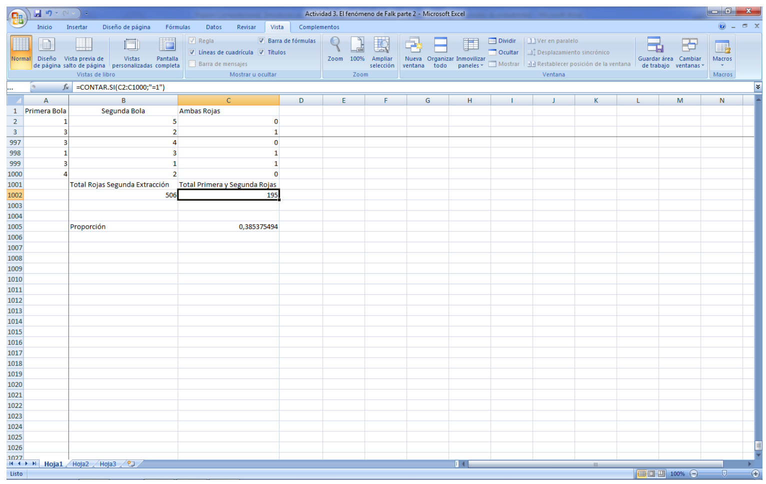


3. Se crea una tercera columna para determinar si ambas bolas extraídas son rojas. Esto es si ambos son valores menores o iguales a tres:

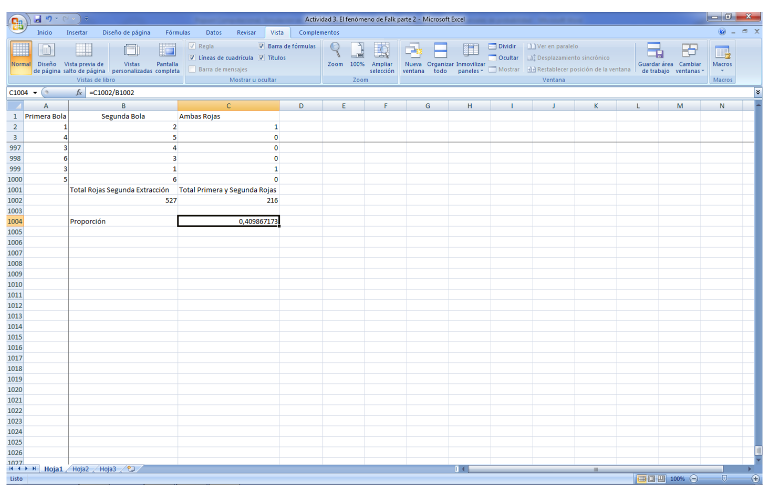


4. Se cuenta, de las 1000 extracciones, la cantidad de veces en las que ambas extracciones son rojas. Además la cantidad de veces en las que la segunda bola fue roja:





5. Se obtiene la proporción de ambas bolas rojas sobre la cantidad de veces en las que la segunda es roja:



Problema 6. Probabilidad condicional (en Shaughnessy, 1992) (Fathom) Se tienen tres monedas cuyas caras son de colores e igualmente probables de extracción. Una moneda es "blanca" por un lado y "roja" por el otro, otra tiene "rojo" por ambas caras y la otra "blanco" por ambas caras. Si se introducen las monedas en una bolsa y se extrae una al azar sin ver uno de sus lados, ¿qué es más

probable con respecto al color que está por el revés de esta misma moneda si el lado visto de la moneda ocurrió que era rojo?

( ) Que sea rojo

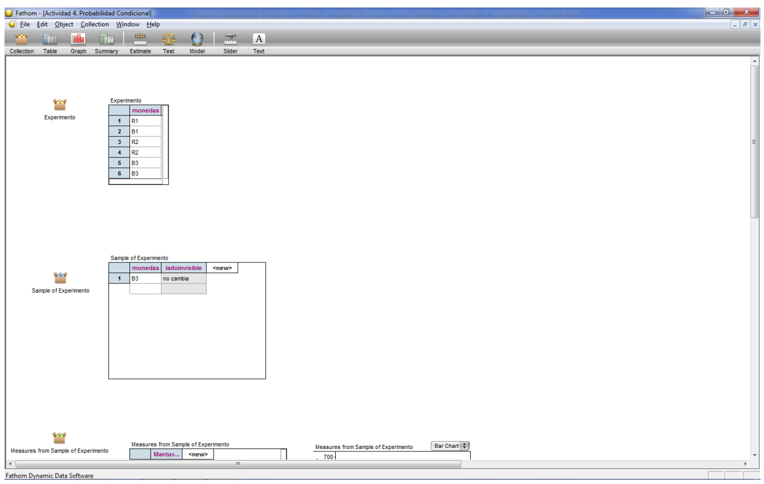
( ) Que sea blanco

( ) Son igualmente probables

( ) No se puede determinar

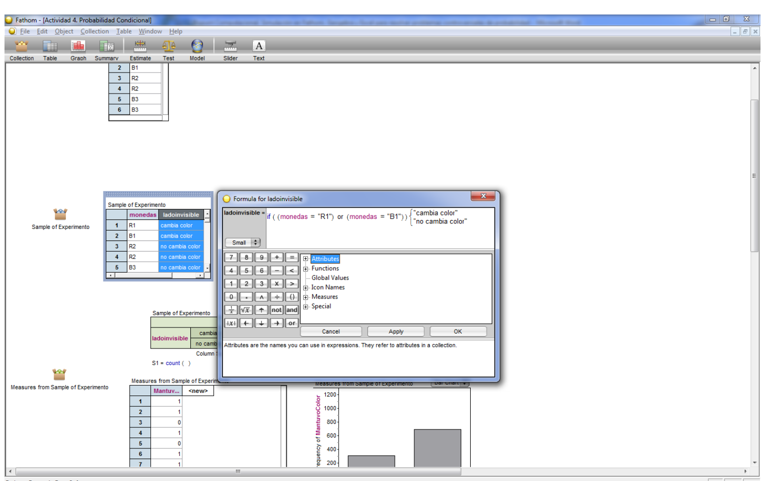
Una propuesta de algoritmo de simulación en Fathom es la siguiente:

1. Se define la caja con las monedas (con los colores y clasificación de las mismas):

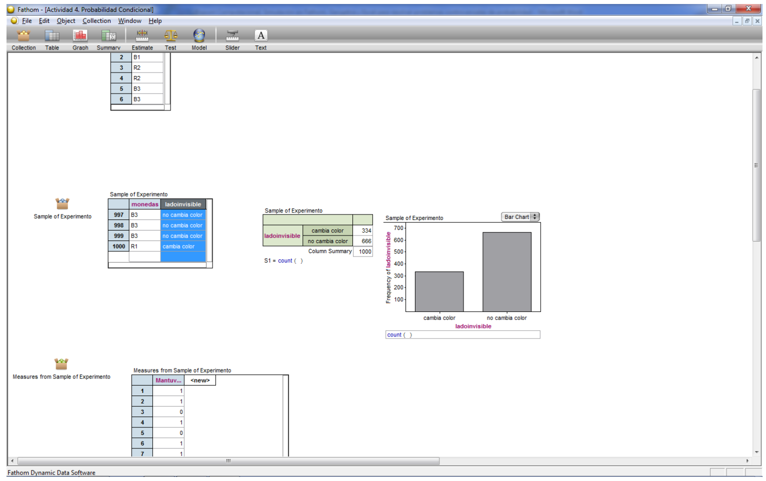


- R1 y B1 significa que es la moneda uno que tiene rojo por un lado y blanco por otro.
- R2 y R2 significa que es la moneda dos que tiene rojo por ambas caras.
- B3 y B3 significa que es la moneda tres que tiene blanco por ambas caras.

2. Se extrae una moneda y observamos el color de una cara. Determinamos si el lado no visto de esa moneda es del mismo color de la cara vista o cambia de color.



3. Se repite el experimento 1000 veces y se cuanta cuántas veces el lado no visto cambia de color y cuántas veces permanece el mismo color:



4. Si el lado de una moneda es de cualquier color, ya sea blanco o rojo, es más probable que no cambie de color a su lado inverso. Así que si se sabe que fue rojo en uno de sus lados, es más probable que mantenga el mismo color rojo en su lado inverso. Además, se pueden obtener la proporción de veces que resultó no cambiar de color que es de $\frac{2}{3}$.

Bibliografía

[1] Batanero, C y Godino J. (2001). Análisis de Datos y su Didáctica. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

[2] Burrill, G. (2002). Simulation as a tool to develop statistical understanding. En B. Phillips (Ed). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town South Africa.

[3] Erickson, T. (2010). Exploring risk though simulation. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eight International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)*. Ljubljana, Slovenia.

[4] Inzunsa, S. (2006). Significados que estudiantes universitarios atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica. Tesis doctoral no publicada. CINVESTAV-IPN. México.

[5] Lipson, K. (2002). The role of computer based technology in developing understanding of the concept of sampling distribution. En B. Phillips (Ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town South Africa.

[6] Ministerio de Educación Pública (2005). Programa de Estudio de Matemática: Tercer Ciclo, Costa Rica.

[7] Ministerio de Educación Pública (2005). Programa de Estudio de Matemática: Cuarto Ciclo, Costa Rica.

[8] North, D. Scheiber, J. and Ottaviani, M. (2010). Training teachers to teach statistics in South Africa: realities and attitudes.In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8, July, 2010)*, Ljubljana, Slovenia.

[9] Sánchez, E. (2002). Teacher's beliefs about usefulness of simulation with the educational software Fathom for developing probability concepts statistics classroom. En B. Phillips (Ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town South Africa.

[10] Shaughnessy, M. (1992). Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions. En Grouws, D. A.(Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York. Macmillan Publishing Company, 465-494.

Apéndice A

Anexos

ACTIVIDAD 1

FRECUENCIAS RELATIVAS Y ABSOLUTAS

Objetivos:

- Realizar experimentos aleatorios.
- Analizar las frecuencias relativas para experimentos aleatorios.
- Analizar la variabilidad en experimentos aleatorios.
- Comprender las diferencias entre las frecuencias relativas y absolutas en la ley de los grandes números y su efecto en eventos aleatorios.

Actividades.

1. Cree una colección llamada *Experimento,* denote al atributo con el nombre de *moneda* y cree manualmente los casos E (escudo) y H (corona).

2. Tome una muestra con reemplazo de la colección *Experimento* de tamaño 4. Debe utilizar el comando *Sample Cases* del menú *Collection*.

3. En este momento nos interesa contar cuántas ocasiones ocurrió E (Escudo) Utilizando la pestaña *Measures* del *Inspect Sample* y el comando *Count*, determine cuántas veces moneda = "E".

*

4. Repita este experimento 1000 veces. Esto es realizar una colección de medidas con el comando *Collect of Measure* sobre la colección aleatoria obtenida.
5. Construya un histograma con los resultados obtenidos en el punto anterior. ¿Cómo describiría usted la gráfica obtenida?
6. Construya ahora un diagrama de caja con los mismos datos, ¿cómo explicaría usted el comportamiento de la gráfica?
7. Determine, de esos 1000 experimentos, cuántas veces se obtuvo exactamente 2 escudos. Esto es utilizando una tabla *Summary* y arrastrando el atributo a la tabla y dejando la tecla Shift presionada
8. ¿Cuál es el valor de la desviación estándar de la variable obtenida?
9. Repita nuevamente desde al paso 2 hasta el paso 8, pero tomando muestras de tamaño 100 y averiguando de los 1000 experimentos, cuántas veces se obtuvo exactamente 50 escudos.
10. Con base en el punto 7 y 8, ¿cuál de los siguientes eventos considera que es más probable?

- ( ) Obtener dos escudos en cuatro intentos
- ( ) Obtener 50 escudos en 100 intentos
- ( ) Los dos anteriores son igualmente probables

¿Por qué crees que sucede esto?

11. Con base en el punto 6, ¿en cuál distribución hay mayor variabilidad, en la de 4 lanzamientos o en la de 100 lanzamientos?

¿Por qué crees que sucede esto?

ACTIVIDAD 2

PROBLEMA DEL CÁNCER

Objetivos:

- Realizar experimentos aleatorios.
- Analizar las frecuencias relativas para experimentos aleatorios.
- Analizar la variabilidad en experimentos aleatorios.
- Comprender la probabilidad condicional como frecuencia relativa.

Actividades.

1. Cree una variable llamada `AleTieneCancer`, a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo $]\mathbf{0},\mathbf{1}]$. Esto es utilizamos el comando: `AleTieneCancer = Secuencia[random(), i, 1, 1000]`
2. Cambie las opciones para que se trabaje con 4 decimales. Esto es del menú `Opciones`, en la opción `Redondeo, selecciones trabajar con {4 Lugares decimales`.
3. Definamos la variable `TieneCancer`, que se le define la probabilidad para una mujer de tener cáncer según los valores de la variable `AleTieneCancer` anterior.Así: `TieneCancer = Secuencia[Si[Elemento[AleTieneCance i] ⩽ 0.008, "C", "NoC"], i, 1, 1000]`

4. Ahora cree la variable `AleMamoconCan,` a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo $]\mathbf{0},\mathbf{1}]$. Esto es: `AleMamoconCan = Secuencia[random(), i, 1, 1000]`

5. En forma similar se crea la variable `AleMamosinCan,` a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo $]\mathbf{0},\mathbf{1}]$. Esto es: `AleMamosinCan = Secuencia[random(), i, 1, 1000]`

6. Definamos la variable `MamoconsinCan`, que se le define la probabilidad para una mujer de que la mamografía sea positiva según los valores de las variables `AleMamoconCan` y `AleMamosinCan` anterior. Así: `MamoconsinCan = Secuencia[Si[Elemento[TieneCancer, i]` $\stackrel{?}{=}$ `"NoC", Si[Elemento[AleMamo` `i] <0.07, "MP", "MN"], Si[Elemento[AleMamoconCan, i] <0.1, "MN", "MP"]], i, 1, 1000]`

7. Ahora obtenemos el total de mamografías positivas, para ellos definimos la variable `TotalMP` y le asignamos: `TotalMP =Secuencia[Si[Elemento[MamoconsinCan, i]` $\stackrel{?}{=}$ `"MP", 1, 0], i, 1, 1000]`

8. Además, obtenemos el total de veces que se tuvo cáncer y a la vez sus mamografías resultaron positivas, para ellos definimos la variable `TotalTieneCanceryMP` y le asignamos:

   `TotalTieneCanceryMP =Secuencia[Si[Elemento[TieneCancer, i]` $\stackrel{?}{=}$”C”$\wedge$ `Elemento[MamoconsinCan, i]` $\stackrel{?}{=}$ `"MP", 1, 0], i, 1, 1000]`

9. Por último contamos para las variables de los dos últimos pasos cuántos unos obtenemos respectivamente. Creamos las variables a y b y les asignamos:

   $a =$ `CuentaSi[x` $\stackrel{?}{=}$ `1, TotalTieneCanceryMP]`

   $b =$ `CuentaSi[x` $\stackrel{?}{=}$ `1, TotalMP]`

10. Obtenemos la frecuencia relativa de veces en las que resulto tener cáncer y su mamografía fue positiva con respecto al total de veces en la que la mamografía resultó positiva. Finalmente: $c = a/b$

11. Entonces, si una mujer decide hacerse una mamografía y el resultado es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la mujer tenga cáncer?

ACTIVIDAD 3 .

EL FENÓMENO DE FALK. I Parte

Objetivos:

- Realizar experimentos aleatorios.
- Analizar la probabilidad condicional de eventos causales y eventos condicionados a priori.

Actividades.

1. Cree una variable llamada `Primera_Bola,` a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero$[\mathbf{1},\mathbf{3}]$. Esto es utilizamos el comando: `=ALEATORIO.ENTRE(1;3)`

2. Cree otra variable llamada `Segunda_Bola,` a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero $[\mathbf{1},\mathbf{6}]$. Así:

```
=SI(A2=1;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);2;3;4;5;6;);SI(A2=2;
ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;3;4;5;6);ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;2;4;5;6)))
```

3. Se obtiene, de los 1000 valores, la proporción de extracciones en las que la segunda bola fue roja dado que la primera fue roja. Así: `Proporción de rojas =CONTAR.SI(B2:B1000;"<=3")/1000`

4. Una urna tiene en su interior tres bolas rojas y tres bolas azules. Se extraen dos bolas sin reemplazar la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja dado que la primera fue roja?

ACTIVIDAD 3.

EL FENÓMENO DE FALK. II Parte

Objetivos:

- Realizar experimentos aleatorios.
- Analizar la probabilidad condicional de eventos causales y eventos condicionados a priori.

Actividades.

1. En un nuevo archivo, cree una variable llamada `Primera_Bola`, a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero$[\mathbf{1},\mathbf{6}]$. Esto es utilizamos el comando: `=ALEATORIO.ENTRE(1;6)`

2. Cree otra variable llamada `Segunda_Bola`, a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero $[\mathbf{1},\mathbf{6}]-$**Primera_Bola**. Así:

```
=SI(A2=1;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);2;3;4;5;6;);
SI(A2=2;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;3;4;5;6);
SI(A2=3;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;2;4;5;6);
SI(A2=4;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;2;3;5;6);
SI(A2=5;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;2;3;4;6);
ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;2;3;4;5))))))
```

3. Se obtiene, de los 1000 valores de la segunda extracción, la cantidad total de bolas que resultaron ser rojas. Esto es: `Total Rojas Segunda Extracción = CONTAR.SI(B2:B1000;"<=3")`

4. Se define una nueva variable llamada `Ambas_Rojas`, que será la que contabilice las ocasiones en las que en ambas extracciones resultaron bolas rojas. Para cada pareja de extracciones se le asigna a esta variable un "1" si ambas resultaron ser rojas o un "0" en caso contrario. Así: `=SI(Y(A2<4;B2<4);1;0)`

5. Se obtiene, de los 1000 valores anteriores, la cantidad total de parejas en las que ambas extracciones resultaron ser rojas. Esto es: `Total Primera y Segunda Rojas = CONTAR.SI(C2:C1000;"=1")`

6. Se obtiene, de los 1000 valores, la proporción de extracciones en las que la primera bola fue roja dado que la segunda fue roja. Así:

$$\textbf{Proporción} = \frac{\text{Total Primera y Segunda Rojas}}{\text{Total Rojas Segunda Extracción}}$$

7. Una urna tiene en su interior tres bolas rojas y tres bolas azules. Se extraen dos bolas sin reemplazar la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja, dado que la segunda es roja?

Actividad 4

PROBABILIDAD CONDICIONAL.

Objetivos:

- Realizar experimentos aleatorios.
- Analizar la variabilidad en experimentos aleatorios.
- Utilizar simulación y el cálculo de frecuencias relativas para el cálculo intuitivo de probabilidades

1. Cree una colección llamada `Experimento`, denote al atributo con el nombre de `monedas` y cree manualmente los casos R1 (rojo moneda 1), B1 (blanco moneda 1), R2 (rojo moneda 2), R2 (rojo moneda 2), B3 (blanco moneda 3) y B3 (blanco moneda 3).
2. Tome una muestra con reemplazo de la colección `Experimento` de tamaño 1.
3. Cree un nuevo atributo llamado `lado invisible` y utilice el condicional de que si sale una moneda con igual color en ambas caras entonces el color se mantiene en el dorso de la moneda, sino el color cambia.
4. Luego cuente cuántas veces el color se mantuvo. Utilizando la pestaña `Measures` del `Inspect Sample` y el comando `Count`.
5. Repita este experimento 1000 veces. Esto es realizar una colección de medidas con el comando `Collect of Measure` sobre la colección aleatoria obtenida.
6. Construya un gráfico de barras con los resultados obtenidos en el punto anterior. Esto es arrastrando el atributo al gráfico y dejando la tecla Shift presionada. ¿Cómo describiría usted la gráfica obtenida?
7. Determine, de esos 1000 experimentos, la frecuencia relativa del número de veces que cambia de color el dorso de la moneda y cuántas veces se mantiene. Esto es utilizando una tabla `Summary` y arrastrando el atributo a la tabla y dejando la tecla Shift presionada
8. Se tienen tres monedas cuyas caras son de colores e igualmente probables de extracción. Una moneda es "blanca" por un lado y "roja" por el otro, otra tiene "rojo" por ambas caras y la otra "blanco" por ambas caras.

   Si se introducen las monedas en una bolsa y se extrae una al azar sin ver uno de sus lados, ¿qué es más probable con respecto al color que está por el revés de esta misma moneda si el lado visto de la moneda ocurrió que era rojo?

   ( ) Que sea rojo
   ( ) Que sea blanco
   ( ) Son igualmente probables
   ( ) No se puede determinar

6 HIDROESTA, SOFTWARE PARA CÁLCULOS HIDROLÓGICOS Y ESTADÍSTICOS APLICADOS A LA HIDROLOGÍA.

Máximo Villón B.
mvillon@itcr.ac.cr,
Escuela de Ingeniería Agrícola
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Resumen. Este trabajo de investigación desarrollado en el 2004 en el TEC, se orientó a la elaboración de una herramienta computacional bajo el título HidroEsta, software para cálculos hidrológicos, utilizando Visual Basic. El cual pretende ser una aplicación que permita facilitar y simplificar los cálculos laboriosos, que se deben realizar en los estudios hidrológicos.

El software permite el cálculo de los parámetros estadísticos, cálculos de regresión lineal, no lineal, simple y múltiple así como regresión polinomial, evaluar si una serie de datos se ajustan a una serie de distribuciones, calcular a partir de la curva de variación estacional o la curva de duración, eventos de diseño con determinada probabilidad de ocurrencia, realizar el análisis de una tormenta y calcular intensidades máximas, a partir de datos de pluviogramas, los cálculos de aforos realizados con molinetes o correntómetros, el cálculo de caudales máximos, con métodos empíricos y estadísticos, cálculos de la evapotranspiración y cálculo del balance hídrico.

En la investigación se probaron diferentes métodos numéricos para la solución de las ecuaciones, seleccionándose el más adecuado para cada situación. El producto del trabajo proporciona al ingeniero civil, agrícola, agrónomo, hidrólogo y otros especialistas que trabajen en este campo, una herramienta que permite realizar cálculos, simulaciones rápidas, y determinar los caudales o precipitaciones de diseño.

Palabras Clave: 1. Estadística, 2. Probabilidades, 3. Funciones de distribución, 4. Hidrología, 5. Caudales, 6. Precipitaciones, 7. Momentos lineales

Abstract. This investigation work was guided to the elaboration of a computation system named HidroEsta, software for hydrological calculations, using Visual Basic. Which seeks to be an application that allows to facilitate and to simplify the laborious calculations that should be carried out in the hydrological studies.

The software allows the calculation of the statistical parameters, calculations of lineal regression, not lineal, simple and multiple as well as regression polinomial, to evaluate if a series of data is adjusted to a series of distributions, to calculate starting from the curve of seasonal variation or the duration curve, design events with certain occurrence probability, to carry out the analysis of a storm and to calculate maximum intensities, the calculations of seating capacity carried out with brandishes, the calculation of maximum flows, with empiric and statistical methods, calculations of the evapotranspiration and calculation of the water balance.

In the investigation different numeric methods were proven for the solution of the equations, being selected the most appropriate for each situation. The product of the work provides the civil, agricultural, agricultural engineer, hidrologic engineer and other specialists that work in this field, a tool that allows to carry out calculations, quick simulations, and to determine the flows or design precipitations.

KeyWords: 1 1. Statistics, 2. Probabilities, 3. Distribution functions, 4. Hydrology, 5. Flows, 6. Precipitations, 7. L-moments

6.1 Introducción

Los estudios hidrológicos requieren del análisis de cuantiosa información hidrometeorológica; esta información puede consistir de datos de precipitación, caudales, temperatura, evaporación, etc.

Los datos recopilados, solo representan una información en bruto, pero si éstos se organizan y analizan en forma adecuada, proporcionan al hidrólogo una herramienta de gran utilidad, que le permite tomar decisiones en el diseño de estructuras hidráulicas.

Para realizar los cálculos, los hidrólogos tienen que enfrentarse a una serie de problemas, debido a que:

- El procesamiento de la información que se tienen que realizar son bastante laboriosos.
- Las ecuaciones que se tienen que solucionar, en la mayoría de los casos son muy complejas, y para su solución se requiere del uso de métodos numéricos.
- Las simulaciones que se realizan manualmente consumen mucho tiempo, debido a los cálculos que se requieren.

Por lo laborioso del proceso de la información y de los cálculos se puede incurrir en errores, por lo que se requiere de un software que brinde al hidrólogo de una herramienta que le permita simplificar todos estos procesos, e inclusive permitirle simular sus resultados, permitiendo con esto optimizar su diseño.

HidroEsta, es una herramienta que facilita y simplifica los cálculos laboriosos, y el proceso del análisis de la abundante información que se deben realizar en los estudios hidrológicos. Puede adquirirse con el autor llamando al número 8837-6413. Por la gran aceptación que ha tenido este trabajo a nivel mundial y con base a las sugerencias de los usuarios, en estos momentos se está trabajando con Hidroesta 2, la misma que estará disponible a finales de julio del 2012.

6.2 Importancia

HidroEsta representa una contribución para simplificar los estudios hidrológicos, es importante porque:

- Proporciona una herramienta novedosa y fácil de utilizar para el ingeniero civil, ingeniero agrícola, ingeniero agrónomo y otros especialistas que trabajen en el campo de los estudios hidrológicos.
- Permite simplificar el proceso de la abundante información y los cálculos laboriosos.
- Permite a partir de la información proporcionada, simular los parámetros de diseño de las estructuras a construir.
- Reduce enormemente el tiempo de cálculo.

- Permite obtener un diseño óptimo y económico.

6.3 Descripción del sistema

El sistema permite resolver los problemas más frecuentes que se presentan en los cálculos hidrológicos, los cuales son:

- El cálculo de los parámetros estadísticos, para datos agrupados y no agrupados, tanto con los momentos tradicionales como con momentos lineales.
- Cálculos de regresión lineal, no lineal, simple y múltiple así como regresión polinomial.
- Evaluar si una serie de datos se ajustan a una serie de distribuciones: normal, log-normal de 2 y 3 parámetros, gamma de 2 y 3 parámetros, log-Pearson tipo III, Gumbel y log-Gumbel, tanto con momentos ordinarios, como con momentos lineales. Si la serie de datos se ajusta a una distribución, permite calcular por ejemplo caudales o precipitaciones de diseño, con un período de retorno dado o con una determinada probabilidad de ocurrencia.
- Calcular a partir de la curva de variación estacional o la curva de duración, eventos de diseño con determinada probabilidad de ocurrencia.
- Realizar el análisis de una tormenta y calcular intensidades máximas, a partir de datos de pluviogramas, así como la intensidad máxima de diseño para una duración y periodo de retorno dado, a partir del registro de intensidades máximas. También permite el cálculo de la precipitación promedio por los métodos promedio aritmético, polígono de Thiessen e isoyetas.
- Los cálculos de aforos realizados con molinetes o correntómetros.
- El cálculo de caudales máximos, con métodos empíricos (racional y Mac Math) y estadísticos (Gumbel y Nash).
- Cálculos de la evapotranspiración con los métodos de Thorthwaite, Blaney-Criddle, Penman, Hargreaves y cálculo del balance hídrico.

La solución a estos problemas requiere de cálculos mediante el uso de métodos numéricos, y desarrollo de series.

La aplicación, proporciona una ayuda para que el usuario pueda usar sin ninguna dificultad el software, y también donde se da explicación de los conceptos y ecuaciones utilizadas.

Con HidroEsta, es posible almacenar la información de entrada en archivos, a fin de repetir los cálculos las veces que se desee. Los datos procesados y resultados obtenidos, se almacenan en archivos de textos en formato .RTF, de donde se puede agregar a un documento .DOC cuando se quiera elaborar un informe.

6.4 Menú principal

El sistema HidroEsta, tiene un Menú Principal, como el que se muestra en la Figura 1, el cual permite al usuario elegir la opción deseada según el cálculo que tenga que realizar.

Figura 6.1: Menú Principal de HidroEsta

Las opciones del menú principal son:

Opciones	Descripción
Parámetros Estadísticos	Permite el cálculo de los parámetros estadísticos, para datos agrupados y no agrupados, tanto con los momentos tradicionales como con momentos lineales (L-moments).
Regresión	Permite el cálculo de las ecuaciones de regresión lineal, no lineal, simple y múltiple así como la regresión polinomial.
Distribuciones	Permite evaluar si una serie de datos se ajustan a una serie de distribuciones: normal, log-normal con 2 y 3 parámetros, gamma con 2 y 3 parámetros, log-Pearson tipo III, Gumbel y log-Gumbel, tanto con momentos ordinarios, como con momentos lineales. Si la serie de datos se ajusta a una distribución, permite calcular por ejemplo caudales o precipitaciones de diseño, con un período de retorno dado o con una determinada probabilidad de ocurrencia.
Curvas características	Permite calcular a partir de la curva de variación estacional o la curva de duración, eventos de diseño con determinada probabilidad de ocurrencia.
Precipitación	Permite realizar el análisis de una tormenta y calcular intensidades máximas, a partir de datos de pluviogramas, así como la intensidad máxima de diseño para una duración y periodo de retorno dado, a partir del registro de intensidades máximas. También permite el cálculo de la precipitación promedio por los métodos promedio aritmético, polígono de Thiessen e isoyetas.
Aforo	Permite los cálculos de aforos realizados con molinetes o correntómetros.
Caudales máximos	Permite el cálculo de caudales máximos, con métodos empíricos (racional y Mac Math) y estadísticos (Gumbel y Nash).
Evapotranspiración	Permite cálculos de la evapotranspiración con los métodos de Thorthwaite, Blaney-Criddle, Penman, Hargreaves y cálculo del balance hídrico.
Ayuda	Permite que el usuario pueda utilizar la aplicación y pueda consultar las ecuaciones que se utilizan en los cálculos.

6.5 Pantallas de trabajo

Se presenta como ejemplo las pantallas para el:

- Ajuste de una serie de datos a una distribución normal
- Análisis de una tormenta

6.5.1 Ajuste de una serie de datos a una distribución normal

La pantalla para el cálculo del ajuste de una serie de datos a una distribución normal, se muestra en la figura 2.

El usuario debe ingresar la serie de datos

En la opción del ajuste a la distribución normal, el programa:

- Calcula los parámetros estadísticos tanto con momentos ordinarios como con los momentos lineales.
- Realiza la prueba de bondad de ajuste con el método de Smirnov-Kolmogorov para ver si los datos de la serie se ajustan a la distribución teórica normal.

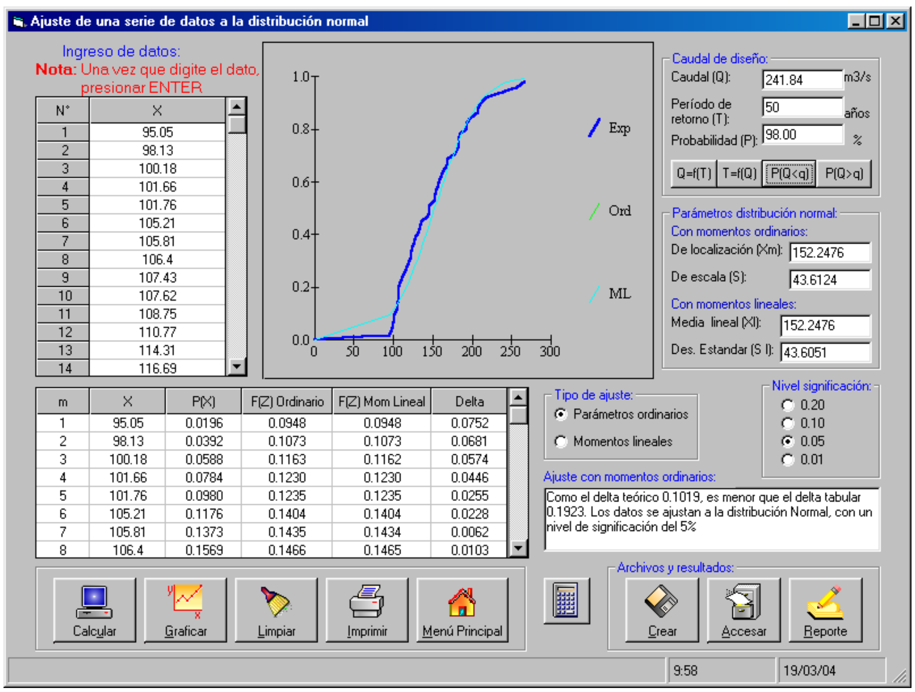


Figura 6.2: Pantalla para el cálculo de la distribución

- Si el ajuste es bueno, permite el cálculo del caudal de diseño para un período de retorno dado.
- Permite también el cálculo de la probabilidad de que un evento sea menor que éste, o que sea igualado o superado.
- Permite guardar la serie de datos ingresados.
- Permite generar un reporte en formato RTF, con los datos ingresados y los resultados obtenidos

6.5.2 Análisis de una tormenta

La pantalla para el cálculo del análisis de una tormenta obtenida de un pluviograma, se muestra en la figura 3.

El usuario debe ingresar los datos de los tiempos parciales y lluvias parciales, obtenidas de un pluviograma.

En la opción análisis de una tormenta, el programa:

- Calcula las intensidades para cada período
- Calcula el valor de la intensidad máxima e indica su duración
- Grafica el histograma o la curva masa

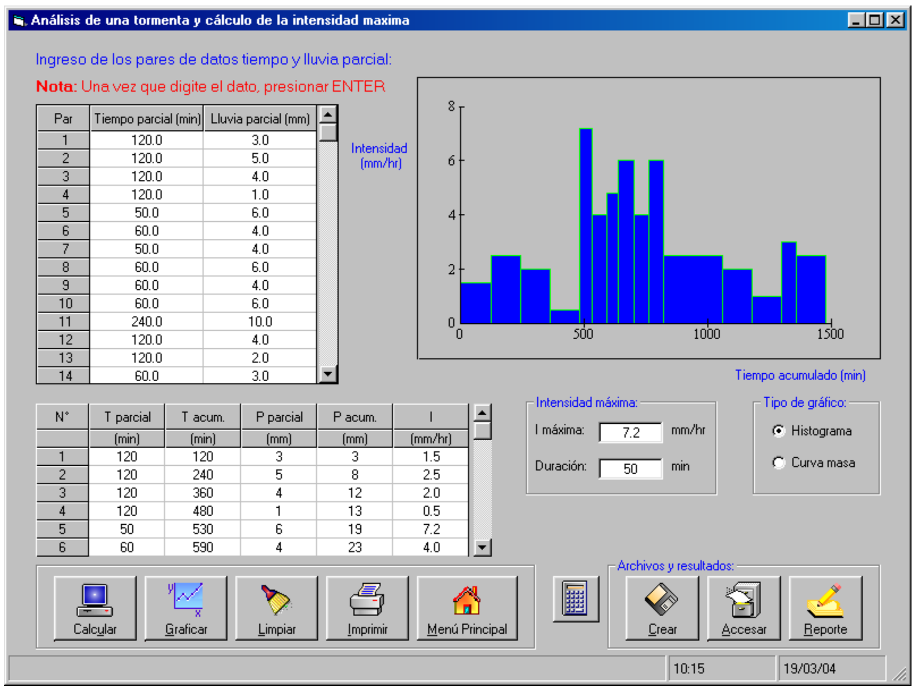


Figura 6.3: Análisis de un pluviograma

6.6 Impacto

HidroEsta es una tecnología computacional que no existe en el mercado, por lo que llena un vacío que existía en los cálculos, a los que se dedican a los estudios hidrológicos, su uso se ha popularizado tanto en Costa Rica, como en Nicaragua, Guatemala, México, Perú, Chile, Cuba, Colombia, Ecuador, Bolivia, Argentina, Paraguay y Uruguay, a través de la divulgación que se ha realizado.

Hidroesta, se han presentado en los siguientes congresos:

- *XI Encuentro Científico Internacional (ENCI2005)*, organizado por la Universidad de Ingeniería, del 2 al 5 de enero del 2005. Lima- Perú.
- *VIII Congreso Internacional y del Caribe de Ingeniería Agrícola*, organizado por la Universidad de Ingeniería Agrícola y la Asociación Latinoamericana y del Caribe de Ingeniería Agrícola, del 07 al 09 de mayo del 2008. Managua-Nicaragua.

- *VI Congreso Nacional de Estudiantes de Ingeniería Agrícola*, organizado por la Escuela Profesional de Ingeniería Agrícola de la Universidad Santiago Antunez de Mayolo, del 12 al 16 de octubre del 2009. Huaraz – Perú.

- *VI Congreso Internacional Ingeniería Agrícola (CIIACH)*, organizado por la Universidad de Concepción, del 11 al 13 de enero del 2010. Chillán – Chile.

- *21st Century Watershed Technology Conference 2010*, organizado por la ASABE y la EARTH, del 21 al 24 de febrero del 2010. Guácimo - Costa Rica

- *I Congreso Latinoamericano y del Caribe de Estudiantes de Ingeniería Agrícol*a, organizado por la Facultad de Ingeniería Agrícola de la Universidad Nacional Agraria la Molina, del 9 al 13 de agosto del 2010. Lima-Perú.

- *XVIII Congreso Nacional de Estudiantes de Ingeniería Civil*, organizado por la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Privada Antenor Orrego, del 23 al 28 de agosto del 2010. Trujillo-Perú.

- *5ºCongreso Centroamericano de Fondos Viales* organizado por el Fondo de Mantenimiento Vial (FOMAV) de Nicaragua, del 4 al 6 de mayo del 2011. Managua-Nicaragua.

- *II Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos II EDEPA* organizado por la Escuela de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Costa Rica, del 28 al 29 de noviembre del 2011. CartagoCosta Rica

También se han dado cursos de capacitación, dirigida a profesionales en el diseño de canales y estudios hidrológicos:

- Colegio de Ingenieros Civiles 17, 24 setiembre, 01, 08 octubre del 2005, organizado por el Colegio de Ingenieros Electricistas, mecánicos e Industriales, San José, Costa Rica.

- Universidad Nacional del Altiplano y El Colegio de Ingenieros del Perú CD Puno, 11 al 13 de Setiembre del 2006, organizado por la Facultad de Ingeniería Agrícola. Puno-Perú.

- Plan Meriss Inka, del 05 al 08 de setiembre del 2007, organizado y patrocinado por Nicoll Perú S.A. Cusco-Perú.

- Universidad Santo Tomás, del 01 al 02 de diciembre del 2011, Bogotá - Colombia.

Sirve como material didáctico, a través de la ***Ayuda*** que tiene el software y de su Manual del Usuario, y como herramienta de cálculo para los estudiantes de la Escuela de Ingeniería Agrícola, en los cursos de Estadística Aplica e Hidrología.

Es una tecnología computacional de cálculo que se pone a disposición de los Ingenieros Agrícolas, Civiles, Agrónomos, hidrólogos y demás profesionales relacionados con los estudios hidrológicos, de los diferentes países.

Bibliografía

[1] Haan, Ch. ***Statistical methods in hydrology***. State University Press. 1977.

[2] Hosking, Jonathan . ***L-moments: Analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics***. *Journal of the Royal Statistical Society* **B52**: 105-124. 1990.

[3] Hosking, Jonathan. ***Some theoretical results concerning L-moments***. Research Report, IBM Research Division. 1996.

[4] Hosking, Jonathan . ***Fortran routines for use with the meted of L-moments***. Research Report, IBM Research Division. 2000.

[5] Kite, G.W. ***Frequency and risk analyses in hydrology***. Water Resources Publications, Michigan. 1977.

[6] Maidment, David. ***Handbook of hydrology***. Editorial McGraw-Hill. 1993.

[7] Salas, José. ***Computer workshop in statistical hydrology***. Hydrology and Water Resources Program, Colorado State University, Fort Collins. 1978.

[8] Villón, Máximo. ***Diseño de capacidad de embalses por el método experimental – teoría del rango***. Tesis para optar por el grado de Magíster Scientiae en Ingeniería de Recursos de Agua y Tierra. Universidad Nacional Agraria "La Molina". 1983.

[9] Villón, Máximo. ***Hidrología***. Editorial Tecnológica de Costa Rica. Instituto Tecnológico de Costa Rica. 2004.

[10] Villón, Máximo. ***Hidrología estadística***. Editorial Tecnológica de Costa Rica. Instituto Tecnológico de Costa Rica. 2006.

7 SIMULACIÓN EN EXCEL: BUSCANDO LA PROBABILIDAD DE UN EVENTO

Giovanni Sanabria Brenes
gsanabriab@yahoo.com
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Universidad de Costa Rica Costa Rica

Félix Núñez Vanegas.
fnunez@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Universidad de Costa Rica Costa Rica

Resumen. El presente trabajo tiene como objetivo que el lector obtenga una mejor comprensión del concepto de probabilidad y una interpretación correcta a la Ley de los Grandes Números. Las actividades planteadas adoptan el enfoque frecuencial de la definición de probabilidad, en donde a través de la simulación de algunos experimentos aleatorios utilizando Excel y desde una perspectiva Brousseauneana, se aproximan las probabilidades teóricas de algunos eventos.

Palabras Clave: Didáctica, probabilidad frecuencial, ley de los grandes números, experimentación, simulación.

Abstract. This work aims the reader get a better understanding of concept of probability and a correct interpretation of the Law of Large Numbers. The proposed activities adopt the approach of frecuencial definition of probability where, through random simulation experiments using Excel and a Brousseauneana perspective, theoretical probabilities of some events are approached.

KeyWords: Teaching, Law of Large Numbers, experimentation, simulation

7.1 Introducción

En aquellos problemas en los que la definición clásica de probabilidad no es utilizable, como en aquellos en donde los eventos no son equiprobables o bien el número favorable de casos es desconocido o infinito, la experiencia práctica juega un papel muy importante. Así por ejemplo si queremos calcular la probabilidad de que al lanzar una moneda cargada salga escudo o corona, es útil realizar el experimento en forma práctica. No obstante, hará falta lanzar la moneda muchas veces y podría resultar tedioso y poco práctico dicho procedimiento.

Por otro lado, cuando a los estudiantes de un curso de probabilidades se les enuncia dicha definición, los ejemplos que se realizan en clases hacen pensar que el concepto quedó claro. Empero, cuando se les pregunta de si al lanzar un moneda no cargada, 10 veces, en cuántas ocasiones piensan que caerá escudo, la respuesta nos asombra. La mayoría dice que 5 veces escudo y consecuentemente 5 veces corona. Al respecto, consultar Núñez (2010).
Lo anterior hace pensar que hay una mala interpretación del concepto de probabilidad y de la Ley de los Grandes Números.

Ante estas situaciones, se ha desarrollado una propuesta acerca del concepto de probabilidad utilizando el enfoque frecuencial o estadístico, en donde se usen los resultados obtenidos de la experiencia misma, con el fin de, por un lado, satisfacer las necesidades teóricas y prácticas de una definición de probabilidad, y por el otro, que aclare al estudiante el concepto de probabilidad teórica a través de la experiencia misma.

No obstante, como se mencionó más arriba, llevar a cabo experimentos concretos en el aula podría resultar muy tedioso y demandar mucho tiempo. Por ejemplo, lanzar una moneda 100 veces o bien 500, podría demandar mucho de la clase y tornarse muy aburrida. Es por ello que dicha propuesta brinda algunas estrategias que simulen experimentos utilizando Excel, dado que en la mayoría de las computadoras está instalado este software, lo cual permitirá concentrarse en los aspectos medulares de los conceptos.

El taller va dirigido a estudiantes universitarios pero podría adaptarse fácilmente a una población de enseñanza media, y fue planteado en principio como una propuesta didáctica en el III Encuentro de Enseñanza de la Matemática UNED, realizado en el INBio Parque, Heredia, Costa Rica, en setiembre 2010, bajo el nombre "Una propuesta para introducir el estudio de las probabilidades: Probabilidad Frecuencial" (Sanabria & Núñez, 2010), y le hemos dado forma para llevarlo al aula como un taller con la esperanza de que los participantes adquieran los conceptos propuestos y les sean de gran utilidad, no sólo en el cálculo de algunas probabilidades y en el desarrollo de sus clases sobre estos temas, sino también, por medio de la simulación de eventos aleatorios en Excel, adquieran un concepto más sólido e intuitivo de la probabilidad así como también de la Ley de los Grandes Números.

7.2 Objetivos

Objetivo general. Establecer un concepto intuitivo de la probabilidad y de la Ley de los Grandes Números por medio de la simulación de eventos aleatorios en Excel.

Objetivos Específicos.

- Describir los conceptos de espacio muestral, evento, eventualidad, tipos de eventos y eventos compuestos
- Aplicar correctamente la Ley de los Grandes Números
- Simular eventos aleatorios en Excel
- Resolver problemas que involucran el cálculo de probabilidades por medio de la simulación utilizando Excel
- Resolver el problema de Monty Hall por medio de la simulación utilizando Excel

Para el desarrollo del trabajo se requiere una computadora con Excel 2007 en español

7.3 Fundamentos teóricos

Fundamento matemático. Dado un experimento probabilístico, sea Ω el espacio muestral y A un evento. Si el experimento se repite n veces, se define $X(n)$ como el número de veces que ocurre A de las n. La Ley de los grandes números, establece que para n grande, se cumple que:

$$P(A) \approx \frac{X(n)}{n}$$

Formalmente este resultado se describe en el siguiente teorema.

Teorema 7.1 (Ley de los Grandes Números). Dado un experimento, sea A un evento y $X(n)$ el número de veces que ocurre A en n de estos experimentos, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$P\left(\left|\frac{X(n)}{n} - P(A)\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

para n suficientemente grande.

Es decir, existe un n a partir del cual la probabilidad de que la diferencia entre $X(n)/n$ y $P(A)$ sea mayor a ε es cero. La idea es, en primera instancia, identificar el valor de $X(n)/n$ como la probabilidad frecuencial del evento A. Así, la Ley de los Grandes Números establece condiciones para que la probabilidad frecuencial se acerque a la probabilidad teórica. La probabilidad frecuencial permite introducir la simulación de experimentos aleatorios y es rica en intuición.

Fundamento pedagógico. Basado en una perspectiva constructivista, Brousseau (1986) abordó el problema de la didáctica de la matemática a través de la teoría de situaciones. Para él, el profesor debe diseñar situaciones didácticas (problemas) en la que la solución encontrada sea el conocimiento que se desea establecer. Se debe plantear el problema al estudiante y lograr que se dé la devolución, es decir, que el estudiante se interese en el problema y donde se le devuelve la responsabilidad de su propio aprendizaje. Esto se hace en situación adidáctica, puesto que al estudiante se le pone a distancia con la intención de enseñarle algún conocimiento. En esta etapa se dan situaciones de formulación y validación, en la que el estudiante ensaya, falla, corrige y se supera. Una vez que ha resuelto el problema, el profesor en la etapa de institucionalización, enuncia el resultado obtenido por el estudiante.

Inspirada en esa concepción brousseauneana, hemos desarrollado este taller. En ese sentido se diseñaron una serie de situaciones problema que tienen la finalidad de que al resolverlas, el participante obtenga un conocimiento particular tanto del concepto de la probabilidad como el de la Ley de los Grandes Números. Luego este conocimiento será institucionalizado por los profesores encargados del taller, y finalmente se proponen situaciones problema con el fin de profundizar los saberes adquiridos.

Por otro lado, el uso de la tecnología en la etapa de formulación podría ser muy importante en la solución del problema probabilístico planteado, específicamente, el uso de la computadora. Al adoptar la definición clásica de probabilidad, se presenta el problema de saber cuál es el número de casos favorables, y nos enfrentamos entonces a los problemas de conteo, que por demás está decirlo son difíciles. De acuerdo con Antibí citado por Núñez (2005) la solución tradicional a este tipo de problemas se hace de manera escueta y carece del rigor con que se resuelven problemas de otros dominios de la matemática, lo cual dificulta controlar la solución dada. Por lo general no se está seguro de si el cálculo realizado está correcto. Por otro lado, Sanabria (2010) brinda una propuesta de cómo abordar los problemas de conteo, justamente por considerarlos difíciles. No obstante, estas estrategias están dirigidas a una población universitaria con ciertas competencias. Cuando se utiliza el enfoque frecuencial, al menos se está seguro de los casos totales, puesto que provienen de la experiencia misma, y de esta forma se tendría una buena aproximación de la probabilidad teórica de un determinado evento y a su vez se podrían confrontar los resultados de un conteo con la probabilidad frecuencial hallada en ese mismo problema.

La simulación viene a ayudar a acercarse al valor de dicha probabilidad. Cuando la probabilidad frecuencial de un evento se calcula con una muestra de tamaño n, se tendrá un valor distinto al que se obtendría con otras muestras del mismo tamaño, habrá algunas fluctuaciones, aunque se concentrarán alrededor de un valor específico. Es sabido que dichas diferencias o cambios en dichas probabilidades se pueden reducir si el tamaño de la muestra es considerablemente grande. Es importante que el estudiante descubra este hecho por sí mismo, a través de un descubrimiento en la solución de un problema propuesto. Es por ello que la simulación de un experimento aleatorio, utilizando un software, viene a significar una gran ayuda en la comprensión del concepto de probabilidad.

7.4 Propuesta

Funciones en Excel. Se pretende utilizar un número muy reducido de herramientas en Excel, que corresponden a las siguientes:

- `ALEATORIO.ENTRE(min;max)`, la cual devuelve un número entero aleatorio entre los enteros`min` y `max`
- `CONTAR.SI(Rango;"Texto")`. Esta función calcula las veces que aparece `Texto` en el rango
- `SI(cond;res1;res2)`. Devuelve el `res1` si se cumple la condición `cond`, de lo contrario devuelve el resultado `res2`.
- `ABS(x)`. Devuelve el valor absoluto de `x`.

Para familiarizarse con dichas funciones, realice los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. Desarrolle una lista de 100 números aleatorios del 1 al 10. ¿Cuántos son mayores a 7?

Ejercicio 2. Se tienen tres puertas, enumeradas del 1 al 3. Considere el experimento en el cual: Juan abre una puerta al azar. Luego Ana abre una puerta al azar que no sea la que abrió Juan. Simule el experimento 100 veces. ¿Cuántas veces Ana abre la puerta 1?

Ejercicio 3. Se tienen tres películas, enumeradas del 1 al 3. Considere el experimento en el cual: Karla elige una película al azar, Anthony elige otra película al azar (puede ser la misma que la de Karla) y Jorge elige una película distinta a las elegidas por Anthony, Karla y Juan. Simule el experimento 500 veces. ¿Cuántas veces elige Jorge la película 1?

Conceptos Básicos. Se describen brevemente y ejemplifican los principales conceptos básicos de probabilidad.

Los conceptos utilizados son:

- Espacio muestral: Es el conjunto de todos los posibles resultados, este se denota: Ω
- Eventualidad: Es un resultado particular, es decir un elemento de Ω.
- Evento: Es un conjunto de resultados, es decir un subconjunto de Ω.
- Ocurrencia de un evento: Se dice que un evento ocurre si sucede una y solo una de sus eventualidades.

- Evento casi seguro: Ω
- Evento casi imposible: φ

Ejemplo 7.1 Considere el experimento "Tirar un dado". El espacio muestral es:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Observe que 6 es una eventualidad. Algunos eventos son:

A: el resultado del dado es impar

B: el resultado del dado es mayor a 4

Note que $A = –1,3,5˝ \subseteq \Omega$, $B = –5,6˝ \subseteq \Omega$. Si el resultado del dado es 3 entonces se dice que el evento A ocurre, el Evento B no ocurre.

Teorema 7.2 (Eventos Compuestos). Si A y B son eventos entonces: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ y $A \triangle B$ son eventos.

Ejercicio 4. Se tiene una canasta con 15 bolas enumeradas del uno al quince. Las bolas con número del 1 al 7 son rojas y las demás son verdes. Considere el experimento que consiste en elegir una bola al azar de la canasta. Dados los eventos:

A: la bola elegida es verde

B: la bola elegida es roja

C: la bola elegida tiene un número par

Describa la ocurrencia de los eventos $B \cup C$, $A \cap C$, $C - A$ y $C \triangle B$.

Acercamiento al concepto de probabilidad. Dado un experimento, la probabilidad o medida de posibilidad de que ocurra un evento determinado A será un número entre 0 y 1, que se interpreta como un porcentaje. Así si la probabilidad de A es 0.8, esto indica que el evento tiene un 80% de posibilidad de ocurrir.

¿Cómo determinar intuitivamente la probabilidad de que ocurra un evento? Para que la probabilidad sea útil debe existir una correspondencia entre la probabilidad y la realidad, es decir si el experimento se repite varias veces, la frecuencia relativa observada con que ocurre un evento debe ser cercana a la medida de la posibilidad de que ocurra ese evento. A esta frecuencia relativa observada se le llamará probabilidad frecuencial, la cual se espera que, bajo ciertas condiciones, se aproxime a la probabilidad de que ocurra el evento (llamada probabilidad teórica)

Ejemplo 7.2 Dado el fenómeno de lanzar un dado, ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 6?.

Se lanza un dado 100 veces y se observa que en 15 veces se obtiene un 6, por lo tanto la probabilidad frecuencial observada de obtener un 6 es $15/100 = 15\%$. La probabilidad teórica de dicho evento es $(1/6) = 16.6\%$ Ambos resultados son muy parecidos.

Ejercicio 5. Aproxime la probabilidad de que:

- Al lanzar dos monedas se obtengan dos caras
- Un número de 4 dígitos elegidos al azar la suma de sus dígitos sea divisible por 6

¿Funciona o no la probabilidad frecuencial?. Se discuten en parejas los siguientes problemas:

Ejemplo 7.3 (¿Juegas o no?). En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lanzar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor o igual a 6 se gana el juego si no se pierde. Karla, Jorge y Anthony desean determinar si vale la pena jugar el juego. Para ello deciden que cada uno juegue veinte veces DADOS A SEIS obteniendo los siguientes resultados:

	# de veces que se ganó	Probabilidad frecuencial de ganar	¿Vale la pena Jugar?
Karla	7	$7/20 = 5\%$	NO
Jorge	10	$10/20 = 50\%$	Es indiferente
Anthony	12	$12/20 = 60\%$	SI

Se puede apreciar que los resultados obtenidos utilizando la probabilidad frecuencial son muy distintos. Tal parece que algunas probabilidades frecuenciales no se acercan al valor real de la probabilidad. ¿Cuál es realmente la probabilidad de ganar DADOS A SEIS?

Ejemplo 7.4 (¡El falso determinismo!). Un software asegura que detecta el 90% de los fraudes bancarios que ocurren en las tarjetas. Ante esto el Banco de Los Sueños decide adquirir el software para detectar los fraudes que les ocurren a sus clientes en las tarjetas. Sin embargo, en el primer momento de uso, el software no detectó un fraude. El banco decide demandar a la empresa, pero al revisar el software, resulta que los cálculos están bien hechos. ¿Qué está sucediendo entonces?

Los dos últimos ejemplos revelan que no necesariamente la probabilidad frecuencial se va a acercar a la probabilidad real. Entonces ¿qué condiciones deben cumplirse para que la frecuencia relativa observada se acerque a la probabilidad teórica?

La Ley de los Grandes Números. Considere un experimento, sea A un evento. Esta ley indica que si el experimento se repite un número suficientemente grande de veces, entonces la probabilidad frecuencial de A será muy cercana al valor real de la probabilidad. Donde el número de veces que se repite el experimento depende de la variabilidad de sus resultados.

Ejemplo 7.5 (Verificando la Ley de los grandes números). Al lanzar una moneda legal se sabe que hay un 50% de probabilidad de que salga escudo. Se desea simular esta situación utilizando Excel.

Para ello utilicemos la función `ALEATORIO.ENTRE(min; max)` la cual, como habíamos visto más arriba, devuelve un número entero aleatorio entre los enteros `min` y `max`. Así en la celda `A1` de Excel se copia `ALEATORIO.ENTRE(min; max)`, como se muestra en la figura a la derecha.

Se va a considerar el 1 como CORONA y el 2 como ESCUDO. Luego, utilizando el mouse se puede arrastrar esta fórmula hasta la celda `A10` obteniendo por ejemplo, los valores que se muestran en la figura a la derecha.

	A	B
1	1	
2	1	
3	2	
4	1	
5	1	
6	1	
7	1	
8	1	
9	1	
10	2	

Aquí se están simulando 10 lanzamientos de una moneda. En este caso la probabi-lidad frecuencial de obtener un ESCUDO es $2/10 = 20\%$ que es muy alejada de la probabilidad esperada de 50%. Para lanzar nuevamente la moneda, basta actualizar las celdas, esto se logra escribiendo algo (por ejemplo un igual o dar suprimir) en una celda desocupada. Sin embargo, al cambiar nuevamente los valores, se obtiene que en la mayoría de los casos, la probabilidad frecuencial se aleja de la probabilidad real de 50%. Esto se debe a que el número de lanzamientos es insuficiente.

¿Qué sucede si se realizan varios lanzamientos? Suponga que se tiene diez personas y cada una simula diez lanzamientos como se vio anteriormente y obtienen los siguientes resultados:

	Persona									
#	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
1	1	2	2	2	2	2	1	2	2	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2
4	1	2	1	2	2	2	2	1	2	1
5	2	1	1	2	1	2	2	1	2	2
6	2	1	1	1	2	1	2	2	1	1
7	2	1	2	2	2	2	2	1	1	1
8	1	2	1	1	1	2	2	2	2	2
9	1	2	1	2	1	2	2	1	1	1
10	1	2	1	1	2	1	2	1	2	2
probabilidad frecuencial	0,3	0,7	0,2	0,7	0,6	0,8	0,7	0,4	0,5	0,6

Observe que la mayoría de probabilidades frecuenciales obtenidas por cada persona distan de la esperada. Sin embargo, si se consideran todos los lanzamientos, entonces la probabilidad frecuencial de obtener ESCUDO es ((55)/(100))=55% que es bastante cercana al 50%.

Ejemplo 7.6 (**¿Juegas o no?**). Las distintas respuestas a la pregunta ¿Vale la pena Jugar DADOS A SEIS? del ejemplo (3) se debe a las pocas veces que se jugó el juego. Simulemos este juego 100 veces. Para ello se escribe en la hoja de Excel:

Celda:	A1	B1	C1
Escribir:	Dado1	Dado2	¿Ganó?
Celda:	A2	B2	C2
Escribir:	`=ALEATORIO.ENTRE(1;6)`	`=ALEATORIO.ENTRE(1;6)`	`= SI(A2+B2<=6;"SI";"NO")`

Recordemos que la función `SI(cond;res1;res2)` devuelve el `res1` si se cumple la condición cond, de lo contrario devuelve el resultado `res2`. Note que si la suma de los resultados de los dados es menor a 6 `(A2+B2<=6)` entonces se da con respuesta `SI`, esto por cuanto sí se ganó el juego. Hasta el momento se ha simulado sólo un juego, donde un posible resultado del mismo es:

	A	B	C
1	Dado 1	Dado2	¿Ganó?
2	4	1	SI
3			

Para simular 100 juegos basta seleccionar las celdas escritas de la fila 2 y con el mouse arrastrar estas fórmulas hasta la fila 101, obteniendo

	A	B	C
1	Dado 1	Dado2	¿Ganó?
2	3	4	NO
3	6	6	NO
4	⋮	⋮	⋮
99	5	6	NO
100	1	1	SI
101	2	1	SI
102			

Para determinar cuántas veces se ganó el juego de las 100 partidas se puede escribir en una celda vacía

```
= CONTAR.SI(C2:C101;"=SI")
```

La función `CONTAR.SI` calcula las veces que aparece `SI` en las celdas respectivas de la columna `C`. En nuestro caso, el valor que da esta calda es 44. Por lo tanto, la probabilidad frecuencial de ganar el juego es de 44%. La probabilidad teórica de ganar el juego es de $5/12 \approx 41.67\%$. Así no vale la pena jugar DADOS A SEIS.

En el ejemplo anterior la probabilidad frecuencial no está lo suficientemente cerca de la probabilidad teórica. Esto se debe a que, a diferencia del ejercicio tras anterior, hay mayor variabilidad en los resultados del experimento. Es decir, lanzar un dado tiene más resultados que lanzar una moneda, por lo que se requiere un número mayor de repeticiones del experimento para que la probabilidad frecuencial este suficientemente cercana a la probabilidad real.

Ejemplo 7.7 (¡El falso determinismo!). La Ley de los Grandes nos ayuda a justificar el falso determinismo indicado en el ejemplo (4). El hecho de que exista una probabilidad alta (90%) de que el software detecte fraudes no significa que se puede asegurar que va a detectar el primer fraude o los primeros fraudes, sino que en un número suficientemente grande de fraudes, detectará alrededor del 90%. Simulemos, en Excel esto en un número pequeño de fraudes (diez). Para ello escriba en las respectivas celdas:

Celda:	`A1`	`B1`
Escribir:	`=ALEATORIO()`	`SI(A1<=0.9;"Se detectó";"No se detectó")`

La Función `ALEATORIO()` indica un número real aleatorio entre 0 y 1. Esto nos permite simular los resultados del software, si el valor dado por ALEATORIO() es menor igual a 0.9 el software detectó el fraude, de lo contrario no lo detecta. Luego, como hemos visto, con el mouse se arrastran estas fórmulas hasta la fila 10. Si bien se puede obtener una simulación donde prácticamente los diez fraudes fueron detectados, fácilmente (actualizando las celdas) se obtienen casos como este:

1	0,68750046	Se detectó
2	0,97619271	No se detectó
3	0,26931474	Se detectó
4	0,16517495	Se detectó
5	0,73325355	Se detectó
6	0,94599857	No se detectó
7	0,20288272	Se detectó
8	0,66723848	Se detectó
9	0,98883887	No se detectó
10	0,99951653	No se detectó

Aquí la probabilidad frecuencial de detectar fraudes es de 60% muy alejada del 90%, pero el software, bajo nuestra simulación está trabajando bien.

Ejercicio 6. Suponga que hay una alta probabilidad de ganar un juego de apuestas, ¿significa esto que en las primeras partidas se gana? Si un jugador tiene una o algunas derrotas iniciales, ¿debe retirarse? Pero, ¿qué sucede si sigue jugando un número suficiente de veces?

Ejercicio 7 Suponga que hay una baja probabilidad de ganar un juego de apuestas con un premio de un millón de dólares ¿Se puede asegurar que si apuesta entonces perderá? Si un jugador gana el juego, ¿debe retirarse? , ¿qué sucede si sigue jugando un número suficiente de veces?

Ejercicio 8. (La ley de los grandes números: Valores absolutos o relativos). Explore con Excel la siguiente afirmación: De acuerdo con la Ley de los Grandes Números, entre más veces se tira una moneda, más cerca se estará el número obtenido de escudos de la mitad del total de los lanzamientos.

La afirmación del ejercicio anterior es falsa. La Ley de los grandes Números se refiere a valores relativos no absolutos. Dicha afirmación es una malinterpretación frecuente de la Ley de los grandes números y se desmiente en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.8 En la siguiente tabla se describen los resultados en dos secuencias de lanzamientos de una moneda legal:

# de lanzamientos	# de escudos	Diferencia entre el # de escudos y la mitad de los lanzamientos	Probabilidad frecuencial de obtener un escudo
20	8	2	$8/20 = 40\%$
200	95	5	$95/200 = 47.5\%$

Como se aprecia en este caso, al aumentar el número de lanzamiento, pese a que en términos absolutos el número de escudos se aleja de la mitad de lanzamientos, en términos relativos se acerca al 50% de los lanzamientos. Esto se debe a que una diferencia de una unidad entre el número de escudos y la mitad de lanzamientos no pesa igual en 20 lanzamientos que en 200 lanzamientos.

7.5 Resolución de algunos problemas

Ejemplo 7.9 (La bola de fútbol). En un refresco que compró Juan en la pulpería la MINITA, cercana a su colegio, se ganó una bola de fútbol. Sin embargo, al reclamar su premio en la MINITA, la encargada le indicó que el premio solamente se lo puede dar el camión repartidor y únicamente pasa el Martes entre 10am y 11am aleatoriamente, y en la pulpería se queda exactamente 10 minutos. Dado que Juan está en clases ese día, decide elegir al azar un tiempo entre 10am y 11pm para fugarse de clases y esperar en la pulpería exactamente diez minutos para ver si logra encontrarse con el camión repartidor. ¿Cuál es la probabilidad de que el martes obtenga su premio?

Utilizamos Excel para modelar el problema. Para ello escriba en las respectivas celdas:

Celda:	`A1`	`B1`	`C1`
Escribir:	Hora de llegada del camión	Hora de llegada de Juan	¿Obtiene el premio?
Celda:	`A2`	`B2`	`C2`
Escribir:	`=ALEATORIO()`	`=ALEATORIO()`	`=SI(ABS(A2-B2)<=1/6;"SI";"NO")`

Se interpretará el valor de `ALEATORIO()` como los minutos en horas después de las 10am. Así., si en la celda `A2` el valor de `ALEATORIO()` es 0,15 se tiene que $0,15h = 9$ min, por lo tanto la hora de llegada del camión sería a las 10:09 am. Por otro lado, la función `ABS(num)` devuelve el valor absoluto de num. Así, dado que ambos (Juan y el camión) esperan 10 minutos que equivale a (1/6) de hora, si la diferencia entre las horas de llegada es menor a (1/6) , entonces Juan obtiene el premio ese martes, de lo contrario debe esperar al siguiente. Para simular esta situación 500 veces, como se ha visto, se seleccionan las celdas escritas de la fila 2 y con el mouse se arrastran estas fórmulas hasta la fila 501, obteniendo:

	A	B	C
1	Hora de llegada del camión	Hora de llegada de Juan	¿Obtiene el premio?
2	0,696406965	0,872092338	NO
3	0,598863964	0,667165174	SI
4	0,044151278	0,270634535	NO
5	⋮	⋮	⋮
499	0,885655151	0,836425422	SI
500	0,919716788	0,835197463	SI
501	0,205350839	0,578373853	NO

Por ejemplo, en la tercer simulación se tiene que

$$0.598863964\text{h} \approx 35.93\text{min y } 0.667164174\text{h} \approx 40.03\text{min}$$

Por lo tanto el camión llega aproximadamente a las 10:36 am y Juan a las 10:40 am, por lo tanto Juan obtiene su premio. De las 500 simulaciones, el número de veces que Juan logra obtener su premio se obtiene escribiendo en una celda vacía:

```
=CONTAR.SI(C2:C501;"=SI")
```

En nuestro caso, este valor es de 157. Por lo tanto, la probabilidad frecuencial de que Juan obtenga el próximo martes la bola es de $157/500 = 31.4\%$. La probabilidad real es de $11/36 \approx 30.56\%$.

Ejemplo 7.10 (El Problema de Monty Hall). En un concurso se tienen tres puertas, detrás de una de ellas hay un auto y detrás de las otras hay una cabra. El participante debe elegir una de las tres puertas, sin abrirla. Después Monty, el presentador, abre una de las dos puertas restantes en la que hay una cabra. Así quedan dos puertas sin abrir una con auto y otra con cabra. Monty ofrece la posibilidad al concursante de cambiar su puerta o permanecer con su elección. ¿Qué es mejor, cambiar de puerta o no? (Este problema es uno de los más controversiales en probabilidad y se basa en un programa de televisión de los 70's).

En primera instancia se puede creer, como muchos Matemáticos en el pasado, que pasarse de puerta no influye en la probabilidad de ganar el auto. Sin embargo, al simular el problema podemos obtener sorpresas. Primero, la pregunta a responder es equivalente a la siguiente: Si el participante decide cambiarse de puerta, ¿cuál es la probabilidad de ganar el auto? Utilizando Excel para modelar el problema, suponga que las puertas están numeradas del 1 al 3. Primero debemos elegir la puerta donde está el premio y la puerta elegida inicialmente por el participante, para ello escribamos en las respectivas celdas:

Celda:	`A1`	`B1`
Escribir:	Puerta donde está el auto	Puerta elegida inicialmente
Celda:	`A2`	`B2`
Escribir:	`=ALEATORIO.ENTRE(1;3)`	`=ALEATORIO.ENTRE(1;3)`

Luego en la celda `C1` se escribe: Puerta abierta por el presentador. ¿Qué puerta abre Monthy? Si la puerta donde se encuentra el auto y la elegida inicialmente son distintas, entonces Monty abre la única distinta a éstas: tal puerta es la número `6-A2-B2`, esto por cuanto las puertas están enumeradas con 1, 2 y 3. Al sumar dichas numeraciones, obtenemos 6. Así que si el concursante eligió la puerta 2 y el auto se encuentra en la puerta 3, Monty abrirá la número $6 - 2 - 3 = 1$, Pero, si las puerta `A2` y `B2` son la misma, entonces Monty elige la puerta que va a abrir al azar. Así se escribe en la celda `C2`:

```
=SI(NO(B2=A2);6-A2-B2;SI(NO(B2=1);
SI(ALEATORIO()< 0,5;1;6-A2-1);SI(ALEATORIO()< 0,5;2;3)))
```

Posteriormente se escribe las celdas respectivas:

Celda:	`D1`	`E1`	`F1`
Escribir:	¿Se pasa de puerta?	Puerta elegida al final	¿Ganó el auto?
Celda:	`D2`	`E2`	`F2`
Escribir:	`=SI(ALEATORIO()<0,5 ;"SI";"NO")`	`=SI(D2="SI"; 6-C2-B2;B2)`	`= SI(Y(D2="SI";E2=A2); "pasó y ganó"; SI(Y(D2="NO";E2=A2); "no pasó y ganó";"perdió"))`

¿Se pasa de puerta? Dado que Monty abrió una puerta, entonces dado que las 2 puertas tienen la misma probabilidad de ser escogida, hay un 50% de probabilidad de pasarse de puerta. La puerta elegida al final depende de la decisión tomada en `D2`. Luego, se enuncian los diferentes resultados en `F2`, se diferencia si se ganó el auto por cambiarse o no de puerta. Para simular esta concurso 2000 veces, como se ha visto, se seleccionan las celdas escritas de la fila 2 y con el mouse se arrastran estas fórmulas hasta la fila 2001, obteniendo por ejemplo:

	A	B	C	D	E	F
1	Puerta donde está el auto	Puerta elegida inicialmente	Puerta abierta por el presentador	¿Se pasa de puerta?	Puerta elegida al final	¿Ganó el auto?
2	2	1	3	SI	2	paso y ganó
3	1	2	3	NO	2	perdió
4	1	2	3	SI	1	paso y ganó
5	2	3	1	SI	2	paso y ganó
6	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1999	3	1	2	NO	1	perdió
2000	2	2	3	NO	2	no paso y ganó
2001	1	1	2	NO	1	no paso y ganó

Si el participante decide cambiarse de puerta, la probabilidad frecuencial de ganar el auto está dado por

(# de veces que se pasó y ganó)/(# de veces que se pasa de puerta)

Para obtener este valor, se escribe en una celda vacía

```
=CONTAR.SI(F2:F2001;"paso y ganó")/CONTAR.SI(D2:D2001;"SI")
```

En nuestro caso, la probabilidad frecuencial es aproximadamente de 67,92% que es cercana a la probabilidad real de cambiarse de puerta, la cual es de 2/3.

Ejercicio 9. (Los fantasmas). En una noche de este mes 4 fantasmas de Tibás salen a asustar por la noche a San José. En su trabajo se encuentran con dos amigos fantasmas provenientes de Guanacaste. Por lo emocionante de su labor los sorprende el amanecer y se meten a las 4 cuevas de los fantasmas de Tibás ocupándolas de manera aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que al distribuirse en las cuevas ninguna cueva quede desocupada?

Ejercicio 10. (La aguja de Buffon). Se tiene una tabla marcada por infinitas líneas paralelas donde la distancia entre dos líneas consecutivas es $A = 6$ cm. Una aguja de largo $L = 4cm$ es lanzada al azar a la tabla.

1. ¿Cuál es la probabilidad P de que la aguja toque una de las líneas paralelas? Sugerencia: Sea C el punto medio de la aguja, considere las variables X : la distancia de C a la recta paralela más cercana, α : el ángulo no obtuso formado por la aguja y la proyección perpendicular de C a la recta paralela más cercana. Los valores de X y α son valores aleatorios entre determinados rangos. ¿Qué condición deben cumplir los valores de X y α para que la aguja toque las líneas?
2. Considere el valor $Y = (2L)/(PA)$. ¿Cómo se pueden determinar aproximaciones cada vez mejores del valor de Y? Determine algunas de estas aproximaciones y deduzca el valor de Y.

7.6 Conclusión

A través del enfoque frecuencial, el abordaje del concepto de probabilidad resulta más natural y adecuado. A través de las simulaciones hechas en Excel, se logran realizar una cantidad considerable de repeticiones de un experimento con muestras cada vez más grandes, logrando con ello, acercarse a la probabilidad teórica del evento en cuestión, ahorrando tiempo. Por otro lado, esta forma de abordar el problema del concepto de probabilidad, permite dilucidar de si los casos favorables o totales están bien calculados, puesto que si es así, la simulación dará una buena aproximación, lo que haría revisar la solución hallada o bien confirmar que está correcta.

También, en la etapa de formulación, la simulación computacional ayudará al estudiante a atinarle a la solución del problema propuesta, logrando llegar al concepto que se desea establecer. La intuición puede fallar, y con la ayuda de la simulación del problema de Monty, pudimos darnos cuenta de que la probabilidad teórica del evento no era un 1/2.

El enfoque frecuencial, debe constituirse en una etapa previa para un abordaje más formal en busca de la probabi-lidad teórica.

Bibliografía

[1] Antibí, A. *Didáctica de las matemáticas, métodos de resolución de problemas*. San José, Costa Rica: Serie CABÉCAR. 2000.

[2] Brousseau, G. Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas. Traducción al castellano del artículo "Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques" publicado en la revista *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7(2):33-115, y realizada por Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo. 1986.

[3] Devore, J. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. México: International Thompson Editores, 4a ed. 1998.

[4] Gómez, M.. *Elementos de estadística descriptiva*. San José, Costa Rica: EUNED. 2000.

[5] Murillo, M. . *Introducción a la matemática Discreta*. Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica. 2004.

[6] Núñez, F. La enseñanza de la estadística en secundaria: Situación actual en Costa Rica, aproximación metodológica. En Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. *Memorias Primer Encuentro Nacional en la Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística (1°ENEPE), del 16 al 18 de junio del 2010*. Puebla, México. 2010.

[7] Núñez, F. . Problemas de conteo: ¿Por qué son tan difíciles? Basado en las ideas de André Antibí. En Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica. *Memorias IV Congreso Internacional de la Matemática Asistida por Computadora (4to CIEMAC), 1,2 y 3 de diciembre de 2005*. Cartago, Costa Rica. 2005.

[8] Sanabria, G. *Tópicos precedentes al estudio de la Teoría de Probabilidades*. Cartago, Costa Rica: Publicaciones, ITCR. 2009.

[9] Sanabria, G. Una propuesta para la enseñanza de los Elementos de Análisis Combinatorio. En Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. *Memorias Primer Encuentro Nacional en la Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística (1°ENEPE), del 16 al 18 de junio del 2010*. Puebla, México. 2010.

[10] Sanabria, G. & Núñez, F. Una propuesta para introducir el estudio de las probabilidades: Probabilidad Frecuencial. En Facultad de Ciencias Naturales, Universidad Estatal a Distancia. *Memorias III Encuentro de Enseñanza de la Matemática UNED, realizado en el INBio Parque, Heredia, Costa Rica, 3 y 4 de setiembre 2010*. InBio Parque, Heredia, Costa Rica. 2010.

[11] Walpole, R, Myers, R, Myers, S. *Probabilidad y estadística para ingenieros*. USA: Prentice-Hall Hispanoamericana. S.A, Sexta Ed. 1999.

PARTE II

I ESCUELA DE VERANO EDEPA, 2011

Comité Organizador

Giovanni Sanabria Brenes
(co-coordinador general)
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Félix Núñez Vanegas
(co-coordinador general)
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Greivin Ramírez Arce
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Presentación

La Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR) invitó a los estudiantes y docentes del área de enseñanza de la matemática a la I Escuela de verano EDEPA, que se realizó los días 11, 12, 13 y 14 de diciembre de 2012 en la sede del ITCR ubicada en Cartago.
El EDEPA actualmente se ha convertido en un evento de gran relevancia, dado el consenso que hay tanto a nivel nacional como internacional sobre la importancia que tiene la estadística en los ciudadanos para la comprensión del mundo que lo circunda, hecho que provocó que las autoridades ministeriales incorporaran en los nuevos programas de estudio de primaria y secundaria, un gran número de tópicos de estadística y de probabilidad.
La organización del III EDEPA ha dado inicio, y como una actividad pre-congreso, propuso la Escuela de verano EDEPA cuya finalidad fue capacitar a los estudiantes y docentes del área de enseñanza de la matemática, en temas sobre probabilidad, estadística y su didáctica.
Esta escuela, dirigida a docentes de secundaria e investigadores, tuvo un excelente desenlace, a través de 4 ponencias, 6 talleres o minicuros y actividades de integración, durante cuatro días, que permitieron actualizar en temas de Estadística, Bio-estadística y Probabilidad, orientados en los nuevos programas aprobados por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.
La escuela contó con una participación de 40 personas, entre ellas profesores de secundaria, estudiantes universitarios, profesores e investigadores universitarios de distintas carreras.
La escuela se llevó a cabo procurando cumplir con los siguientes objetivos generales:

1. Capacitar a los participantes en temas de estadística y probabilidad, desde diferentes puntos de vista: matemático, aplicado y didáctico.

2. Desarrollar algunos temas de estadística y probabilidad con base en propuestas didácticas expuestas en el I EDEPA y II EDEPA.

3. Fortalecer el conocimiento de los docentes, en formación y en ejercicio, en los temas de estadística y probabili-dad incluidos en los nuevos programas del MEP.

4. Conformar un grupo de trabajo interesado en fomentar el mejoramiento de la enseñanza de la estadística y probabilidad en secundaria.

5. Incentivar al participante a realizar investigaciones cuantitativas utilizando la estadística, la probabilidad y el análisis de datos.

Los temas desarrollados en la escuela fueron:

- "Estadística Descriptiva", impartido por M.Sc. Greivin Ramírez Arce.
- "Combinatoria", impartido por M.Sc. Cindy Calderón Arce.
- "Probabililidad frecuencial", impartido por M.Sc. Geovanni Sanabria Brenes y M.Sc. Félix Núñez Vanegas.
- "Pruebas de hipótesis", impartido por M.Sc. Félix Núñez Vanegas.
- "Probablidad", impartido por M.Sc. Geovanni Sanabria
- "Bioestadística", impartido por M.Sc. Geisel Alpízar Brenes.
- "Análisis Exploratorio de Datos", impartido por M.Sc. Pedro Ramos.

La I Escuela de Verano ofreció las siguientes actividades:

Ponencias: Se brindaron cuatro ponencias sobre la temática del evento.

Talleres y minicursos: La escuela brindó seis cursos cortos sobre Estadística descriptiva e inferencial y probabilidad.

Actividades de integración: El evento ofreció juegos, concursos y otras actividades que estimularon la integración de los participantes al evento.

La Escuela de Verano tiene el agrado de presentar a continuación dos extensos de los trabajos presentados en esta Escuela.

Atentamente,

COMITÉ ORGANIZADOR

Cartago, Costa Rica. Marzo 2013.

1 SIMULACION FISICA Y COMPUTACIONAL: ESTRATEGIA METODOLOGICA PARA RESOLVER PROBLEMAS ESTOCASTICOS

Greivin Ramírez A.
gramirez@itcr.ac.cr
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Resumen. Se propone en este artículo utilizar, como estrategia metodológica, la simulación física y computacional para desarrollar el pensamiento intuitivo en la solución de problemas estocásticos. Los participantes trabajan, de manera social, en el desarrollo de actividades guiadas sobre estadística y probabilidad donde intervienen los distintos estándares de procesos matemáticos (representar, conectar, comunicar, plantear y resolver problemas y razonar y argumentar) que son propuestos en los nuevos programas de estudio en matemática para primaria y secundaria en Costa Rica. Se espera que, los participantes expongan sus estrategias de solución y reconozcan la necesidad de incorporar la simulación, física y computacional, en procesos aleatorios e incorporen la tecnología en el análisis de datos.

Palabras Clave: simulación, estocástica, programas de estudio, primaria y secundaria.

Abstract. The aim in this article is to use, as a methodological strategy, practical simulation and computational simulation to develop intuitive thinking in stochastic problem solving. People will work in groups on guided activities of statistics and probability involving representation, inter-connection, communication, problem posing and solving, and explanation. The problems will be those proposed in the new mathematics curricula for Costa Rica primary and secondary schools. It is hoped that participants will present their solution strategies and recognize the need to incorporate practical simulation and computational simulation in random processes and to incorporate technology in the data analysis.

KeyWords: simulation, stochastic, curricula, school and high school.

1.1 Introducción y Justificación

Especial atención brinda el Ministerio de Educación Pública (MEP) de Costa Rica a utilizar la simulación de experi-mentos estadísticos dinámicos en los distintos niveles educativos de primaria y secundaria.

Inzunsa (2006) resume el éxito de los estudiantes al utilizar la simulación computacional (sugerida por Shaughnessy, 1992; Burrill, 2002; Sánchez, 2002; Lipson, 2002):

Los estudiantes encuentran sentido a la resolución de problemas mediante la simulación una vez que se apropiaron de los recursos del software y después de haber abordado algunas actividades. Son capaces de construir por ellos mismos las distribuciones, generando las poblaciones, tomando muestras, definiendo estadísticos y calculado sus probabilidades. (p. 215).

La simulación, primero física, permite que el estudiante se enfrente a la situación real del problema, con el fin de que empiece a observar el comportamiento de algunos experimentos, más tarde, la simulación computacional, permitirá inferir patrones, debido a la gran cantidad de experimentos que se pueden crear, manipulando parámetros y variando las condiciones del problema inicial.

Además, el MEP (2012) aporta "Usar la computadora para visualizar y experimentar las Matemáticas . . . Son instrumentos para facilitar cómputos, para apoyar la visualización de entidades y relaciones matemáticas, para favorecer la experimentación matemática, orquestar comunicaciones, formar redes y matematizar lo real externo".

Se propone, como estrategia metodológica, incorporar la simulación física y computacional, en la solución de problemas estocásticos de primaria y secundaria, que aparecen en los nuevos programas propuestos por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

En particular, se utiliza el paquete Excel para efectuar las simulaciones computacionales, por su fácil acceso, por las virtudes que aporta en términos funcionales y gráficos y por su dinamismo.

Sin embargo, existen muchos paquetes estadísticos que favorecen el proceso de simulación de problemas estocásticos, entre ellos Fathom, Geogebra, R, Probability Explorer, entre otros.

1.2 Plan y metodología de la propuesta

La propuesta de incorporar la simulación, tanto física como computacional, se debe dividir en tres etapas:

Primera etapa: Etapa introductoria donde se les expone a los estudiantes, la importancia de incluir en el aula, simulación física y computacional, como estrategia de enseñanza de la estocástica.

Segunda etapa: Los participantes se dividen en grupos y trabajan en actividades guiadas con el fin de proponer estrategias de solución, tanto físicas como computacionales, en los problemas estocásticos que intervienen en cada actividad.

Tercera etapa: Los participantes de cada estación, exponen los problemas a los que se enfrentaron y sus estrategias de solución. Así como las competencias o habilidades matemáticas que debieron utilizar y los estándares de procesos que activaron.

1.3 Actividades y una propuesta de solución a problemas estocásticos

A continuación se presentan algunos problemas seleccionados que forman parte de la segunda etapa. Para cada uno de ellos, se brinda una propuesta de pasos para conseguir una simulación física, un flujo a seguir para lograr una simulación física y por último se presenta una propuesta de solución teórica, con el fin de justificar los resultados conseguidos y comparados con las simulaciones físicas y computacionales.

1.3.1 Problema 1

Considere un juego en el que se lanzan dos dados distintos, la persona que quiere jugar debe seleccionar un número de uno a seis y apostar $1000. La persona gana $1000 si el número seleccionado sale en uno de los dados y gana $2000 si el número seleccionado sale en los dos dados, en caso contrario el jugador pierde el dinero apostado. Si un jugador juega muchas veces, ¿se considera justo el juego? ¿Qué se esperaría?

Simulación física

1. Seleccione un número entre 1 y 6 que será el valor al cual le apuesta al lanzar dos dados.
2. Lance los dos dados, en caso de:
   - coincidir en los dos dados: gana $1000
   - coincidir en un dado: no gana ni pierde
   - no coincidir en ningún dado: pierde $1000
3. Repita los pasos 1 y 2 las n veces que desee y registre la cantidad que gana o pierde en cada experimento.
4. Obtenga el promedio de las ganancias (y perdidas) registradas.
5. ¿Qué significa ese promedio?

Simulación computacional

1. Cree una variable llamada *Núm_Elegido*, a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero$[1,6]$. Esto es utilizamos el comando:

   =ALEATORIO.ENTRE(1;6)
2. Cree otra variable llamada *Dado1*, a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero$[1,6]$. Esto es utilizamos el comando:

   =ALEATORIO.ENTRE(1;6)
3. Cree otra variable llamada *Dado2*, a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero$[1,6]$. Esto es utilizamos el comando:

   =ALEATORIO.ENTRE(1;6)
4. Cree otra variable llamada *Ganancia*, a la cual se le define el siguiente condicional para los 1000 valores aleatorios de las tres variables anteriores. Así:

   SI(Y(A2=B2;A2=C2);1000;SI(O(A2=B2;A2=C2);0;-1000))
5. Obtenga el promedio de los 1000 valores de la variable *Ganancia*:

=PROMEDIO(D2:D1001)

Solución teórica. Sea

X : el número de coincidencias al lanzar los dos dados

G : la ganancia al lanzar los dos dados

$$R_X = \{0,1,2\}$$

$$R_G = \{-1000_{X=0}, 0_{X=1}, 1000_{X=2}\}$$

X	0	1	2
G	-1000	0	1000
$f(G=g)$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$	$2\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\right)=\frac{10}{36}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

$$E(G) = -1000\cdot\frac{25}{36} + 1000\cdot\frac{1}{36} = \frac{-2000}{3}$$

El juego es injusto. Se espera a la larga perder, en promedio, $\frac{-2000}{3}$ colones por juego.

1.3.2 Problema 2 (en Shaughnessy, 1992)

Se tienen tres monedas cuyas caras son de colores e igualmente probables de extracción. Una moneda es “azul” por un lado y “roja” por el otro, otra tiene “rojo” por ambas caras y la otra “azul” por ambas caras. Si se introducen las monedas en una bolsa y se extrae una al azar sin ver uno de sus lados, ¿qué es más probable con respecto al color que está por el revés de esta misma moneda si el lado visto de la moneda ocurrió que era rojo?

( ) Que sea rojo

( ) Que sea azul

( ) Son igualmente probables

( ) No se puede determinar

Simulación física

1. Tome tres monedas de igual nominación y coloréelas según las condiciones dadas. Póngalas en una bolsa y realice el experimento de extraer, aleatoriamente, una moneda y colóquela sobre la mesa dejando ver sólo un lado de la moneda (lado visible).

2. En caso de que el color visto de la moneda sea:

   - Azul, vuelva a colocar la moneda en la bolsa y extraiga nuevamente una moneda.
   - Roja, regístrelo y observe qué color tiene el lado inverso de la moneda (lado invisible). Vuelva a poner la moneda en la bolsa y extraiga nuevamente una moneda. Cuándo haya ocurrido que el lado visible fue rojo durante 100 ocasiones, ¿qué ocurrió con el lado invisible? ¿Cuántas veces fue rojo?

3. Repita el paso anterior varias ocasiones. ¿Ocurre lo mismo con el lado invisible por cada 100 bolas rojas obtenidas en el lado visible? ¿Por qué?

Simulación Computacional

Inicialmente se tiene las opciones R1 (rojo moneda 1), A1 (azul moneda 1), R2 (rojo moneda 2), R2 (rojo moneda 2), A3 (azul moneda 3) y A3 (azul moneda 3). Aunque R1 y R2 no son distinguibles (son los mismos colores), se tomarán de esta forma sólo para saber que en el primer caso el lado invisible cambia de color, mientras que en el segundo, el lado invisible mantiene el color.

Así, cada cara de la moneda tiene inicialmente $\frac{1}{6}$ de posibilidad de ocurrir. Por lo que podemos asignar lo que ocurre en la moneda, como lado visible, en comparación a lanzar un dado, donde:

1: R1 2: A1 3: R2 4: R2 5: A3 6: A3

1. Cree una columna llamada *Lado Visible*, y asígnele la fórmula de obtener un número aleatorio entre 1 y 6 (lanzar un dado). Así:

   =ALEATORIO.ENTRE(1;6)

2. Cree una nueva columna llamada *Lado invisible* y utilice el condicional de que si sale una moneda con igual color en ambas caras entonces el color se mantiene en el dorso de la moneda, sino el color cambia. Así:

   SI(A2<=2;"Cambia";"No cambia")

3. Repita este experimento 1000 veces. Arrastre las fórmulas de la primera y segunda columna hasta la fila 1001.

4. Luego cuente cuántas veces, de las 1000, el color no cambia. Esto es:

   =CONTAR.SI(B2:B1001;"No cambia")

5. Construya un gráfico de frecuencias absolutas con los resultados obtenidos en el punto anterior. ¿Cómo describiría usted la gráfica obtenida?

6. Determine, de esos 1000 experimentos, la frecuencia relativa del número de veces que cambia de color el dorso de la moneda y cuántas veces se mantiene.

   Presione F9 si desea volver a realizar otros 1000 experimentos.

   #### Solución teórica

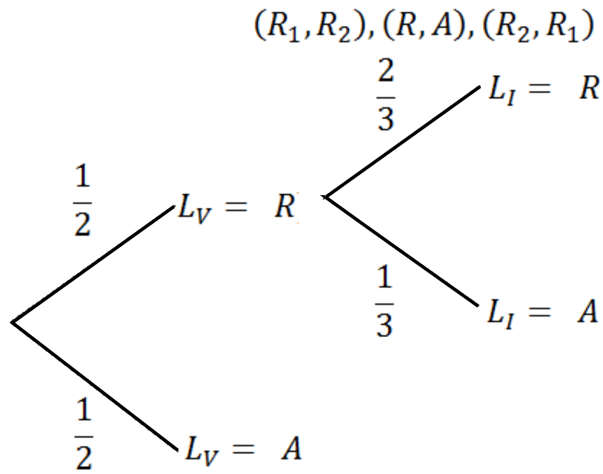
   Tómese

   L_I : lado invisible de la moneda

   L_V : lado visible de la moneda

   Se pide $P(L_I = R \mid L_V = R)$

$$P(L_I = R \mid L_V = R) = \frac{2}{3}$$



Se debe a que la moneda que tiene rojo por ambas caras, se debe contar como doble, pues cuando se da que $L_V = R$, no se sabe a ciencia cierta "cuál rojo" ocurrió, aunque son indistinguibles, pudo ser un lado (R_1) o el otro (R_2).

1.3.3 Problema 3 (en Shaughnessy, 1992)

Una caja tiene en su interior tres bolas rojas y tres bolas azules. Se extraen dos bolas sin reemplazar la primera.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja dado que la primera fue roja?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja, dado que la segunda es roja?

Simulación física

I parte

1. Tome tres canicas de dos colores distintos y de igual tamaño según las condiciones dadas. Póngalas en una bolsa y realice el experimento de extraer, aleatoriamente y en forma sucesiva, dos canicas.
2. En caso de que la primera canica sea de color:
   - Azul, vuelva a colocar la canica en la bolsa y extraiga nuevamente otra canica.
   - Roja, regístrelo y sin regresar esta primera bola, extraiga una segunda bola. ¿Cuántas veces se obtuvo una canica roja, dado que la primera fue roja?
3. Repita el paso anterior varias ocasiones. ¿El número total de segundas canicas rojas por cada 100 canicas rojas obtenidas en la primera canica es el mismo? ¿Por qué?

II parte

1. Extraiga, aleatoriamente y en forma sucesiva, dos canicas, de tal manera que la primera canica no sea vista en primera instancia por ningún compañero.
2. En caso de que la segunda canica sea de color:
   - Azul, vuelva a colocar las canicas en la bolsa y extraiga nuevamente dos canicas con el mismo procedimiento.

- Roja, regístrelo y puede observar el color de la primera bola, ¿Cuántas veces se obtuvo una canica roja en la primera bola, dado que la segunda fue roja?

3. Repita el paso anterior varias ocasiones. ¿El número total de primeras canicas rojas por cada 100 canicas rojas obtenidas en la segunda canica es el mismo? ¿Por qué?

Simulación computacional

I parte

1. Cree una variable llamada *Primera_Bola,* a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero$[1,3]$. Esto es utilizamos el comando:

   =ALEATORIO.ENTRE(1;3)

2. Cree otra variable llamada *Segunda_Bola,* a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero $[1,3] - Primera\_Bola$. Así:

   =SI(A2=1;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);2;3;4;5;6;);SI(A2=2;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;3;4;5;6);ELEGIR(ALEATO

3. Se obtiene, de los 1000 valores, la proporción de extracciones en las que la segunda bola fue roja dado que la primera fue roja. Así:

   Proporción de rojas =CONTAR.SI(B2:B1000;"<=3")/1000

II Parte

1. En un nuevo archivo, cree una variable llamada *Primera_Bola,* a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero$[1,6]$. Esto es utilizamos el comando:

   =ALEATORIO.ENTRE(1;6)

2. Cree otra variable llamada *Segunda_Bola,* a la cual se le define un random de 1000 valores en el intervalo entero $[1,6] - Primera\_Bola$. Así:

   =SI(A2=1;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);2;3;4;5;6;);
   SI(A2=2;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;3;4;5;6);
   SI(A2=3;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;2;4;5;6)
   SI(A2=4;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;2;3;5;6)
   SI(A2=5;ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;2;3;4;6);ELEGIR(ALEATORIO.ENTRE(1;5);1;2;3;4;5))))))

3. Se obtiene, de los 1000 valores de la segunda extracción, la cantidad total de bolas que resultaron ser rojas. Esto es:

   Total Rojas Segunda Extracción = CONTAR.SI(B2:B1000;"<=3")

4. Se define una nueva variable llamada *Ambas_Rojas,* que será la que contabilice las ocasiones en las que en ambas extracciones resultaron bolas rojas. Para cada pareja de extracciones se le asigna

a esta variable un “1” si ambas resultaron ser rojas o un “0” en caso contrario. Así:

=SI(Y(A2<4;B2<4);1;0)

5. Se obtiene, de los 1000 valores anteriores, la cantidad total de parejas en las que ambas extracciones resultaron ser rojas. Esto es:

   Total Primera y Segunda Rojas = CONTAR.SI(C2:C1000;”=1”)

6. Se obtiene, de los 1000 valores, la proporción de extracciones en las que la primera bola fue roja dado que la segunda fue roja. Así:

$$\text{Proporción} = \frac{\text{TotalPrimeraySegundaRojas}}{\text{TotalRojasSegundaExtracción}}$$

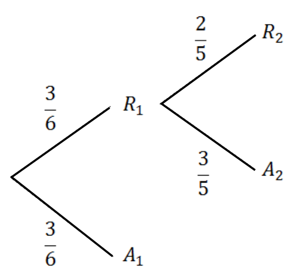
Solución teórica.Tómese

R_1 : bola roja la primera extracción

R_2 : bola roja la segunda extracción

I parte

Se pide $P(R_2 \mid R_1)$



$$P(R_2 \mid R_1) = \frac{2}{5}$$

II parte

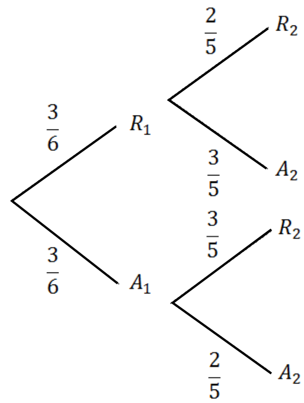
Se pide $P(R_1 \mid R_2)$

$$P(R_2) = P((R_1 \cap R_2) \cup (A_1 \cap R_2)) = \frac{3}{6}\frac{2}{5} + \frac{3}{6}\frac{3}{5} = \frac{1}{2}$$

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(R_1)P(R_2 \cap R_1)}{P(R_2)} = \frac{\frac{3}{6}\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

1.3.4 Problema 4

Simulación física



I Parte:

I) Suponga que tenemos un circuito como el mostrado en la figura adjunta y que por la parte superior se lanzan 100 bolitas.

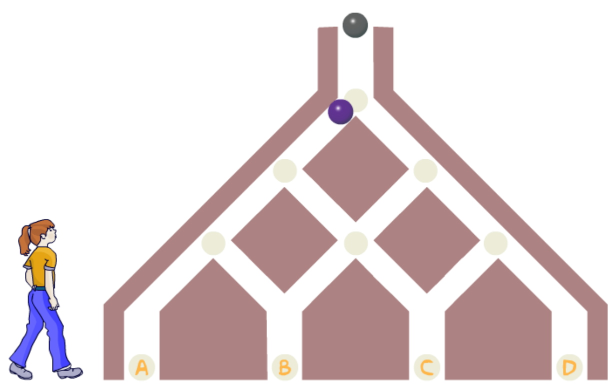


Figura 1.1: Tomado de García (2009)

De acuerdo a la información anterior, conteste las siguientes preguntas:

1. Escriba una posible distribución de la cantidad de bolitas en cada uno de los contenedores (A, B, C, D) una vez que se han lanzado las 100 bolitas.

2. ¿Si el experimento de lanzar 100 bolitas a través del circuito del laberinto se repitiera en igualdad de condiciones en dos ocasiones crees posible que se obtenga el mismo número de bolitas en cada contenedor? Justifica tu respuesta.

II) Suponga que tenemos un circuito como el mostrado en la figura adjunta y que por la parte superior se lanzan 100 bolitas.
De acuerdo a la información anterior, conteste las siguientes preguntas:

1. ¿En cuál o cuáles de los depósitos (A, B, C, D) caerán más bolitas? Justifica la respuesta.

2. ¿Si el experimento de lanzar 100 bolitas a través del circuito del laberinto se repitiera en igualdad de condiciones en dos ocasiones crees posible que se obtenga el mismo número de bolitas en cada contenedor? Justifica tu respuesta.

3. Realiza tu propio modelo de un circuito sencillo, en el cual hayan tres contenedores, de tal manera que el contenedor del centro contenga a la bolita el 50% de las veces que se realice un experimento y que los contenedores que los extremos la contengan aproximadamente un 25% de las veces que

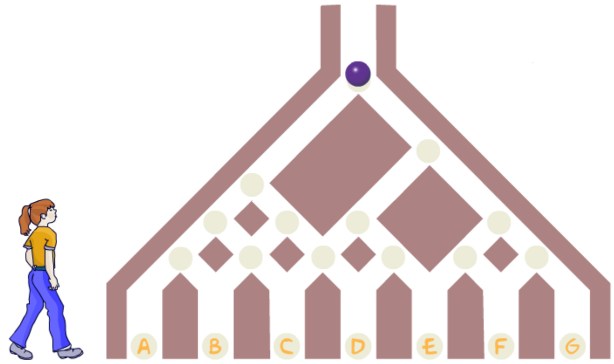


Figura 1.2: Tomado de García (2009)

se realice el experimento. Utilice el espacio que se ofrece a continuación para realizar el dibujo del laberinto.

Simulación computacional

El archivo circuitosbolas.swf (tomado de García (2009)), has doble clic sobre él para iniciar la aplicación. Utilice los botones para cambiar los circuitos.

Busque el circuito de la sección I y II de la primera parte (se encuentra en el tercero y cuarto escenario y se puede acceder a él haciendo clic dos veces sobre el botón

III. Realice el experimento y lance 100 bolitas a través del circuito, para detener el programa debe hacer clic sobre — PARAR — y responda las siguientes preguntas.

1. Completa la siguiente tabla (una para cada circuito) con los datos obtenidos en tu experimento y termina de llenarla con los resultados de tus compañeros

Tabla 1.1: Frecuencia absoluta obtenida al realizar 100 repeticiones del experimento

	Experimento									
Contenedor	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
A										
B										
C										
D										

Compare los resultados obtenidos en la simulación física y computacional.

Bibliografía

[1] Burrill, G. (2002). Simulation as a tool to develop statistical understanding. En B. Phillips (Ed). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.*Cape Town South Africa.

[2] Inzunsa, S. (2006). Significados que estudiantes universitarios atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica. Tesis doctoral no publicada. CINVESTAV-IPN. México.

Un ejemplo de experimento es:

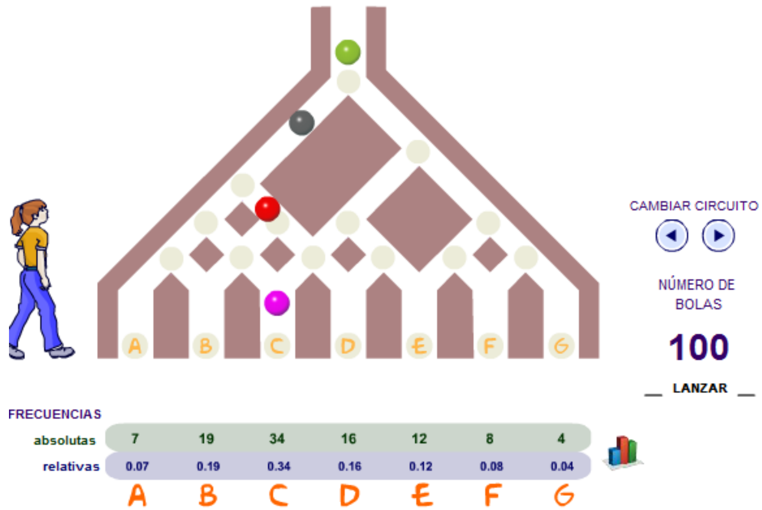


Figura 1.3: Tomado de García (2009)

[3] García, J. (2009). Laboratorio básico de azar, probabilidad y combinatoria. Instituto de Tecnologías Educativas, Ministerio de Educación, España. Tomado de www.ite.educacion.es.

[4] Lipson, K. (2002). The role of computer based technology in developing understanding of the concept of sampling distribution. En B. Phillips (Ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.*Cape Town South Africa.

[5] MEP. (2012). *Programas de estudio en matemáticas*. República de Costa Rica. Obtenido de-http://www.mep.go.cr/despachos/Anuncio.aspx

[6] Sánchez, E. (2002). Teacher's beliefs about usefulness of simulation with the educational software Fathom for developing probability concepts statistics classroom. En B. Phillips (Ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.*Cape Town South Africa.

[7] Shaughnessy, M. (1992). Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions. En Grouws, D. A.(Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York. Macmillan Publishing Company, 465-494.

2 ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS. ACCIDENTES DE TRÁNSITO DEL MUNICIPIO DE SAN SALVADOR, EL SALVADOR. 2006-2010

Pedro A. Ramos A.
pedro_ramalberto@yahoo.com
Universidad de El Salvador, El Salvador C.A.

Resumen. Uno de los problemas sociales que nos enfrentamos en el día a día en nuestros países son los accidentes de tránsito. El presente documento trata sobre los accidentes de tránsito en cinco municipios de San Salvador, Departamento de El Salvador. La investigación consiste en hacer un estudio exploratorio del fenómeno. Para llevar a cabo este análisis exploratorio, se dispone de la información recolectada de los accidente de tránsito; lugar, fecha, día, si hay lesionados, fallecidos, causas, tipo, y otros. Esta fue proporcionada por la Policía Nacional Civil de El Salvador, en las que se aplican técnicas estadísticas para hacer la búsqueda y descubrir las conclusiones que puedan extraerse de este fenómeno y colaborar con ellos para que elaboren las estrategias pertinentes y para la toma de decisiones que permitan analizar el problema para crear medidas o emitan leyes que permitan regular los accidentes.

Para conseguir nuestro objetivo se revisó en qué consiste el análisis exploratorio de datos, con la finalidad de conseguir la comprensión básica de estos y de las relaciones existentes entre las variables a analizar. Para el Análisis Exploratorio de Datos (AED) se utilizara la teoría clásica de Estadística, Teoría de Series Temporales, el análisis de correspondencia, para obtener los resultados del estudio. Además, se cuenta con las herramientas estadísticas: software Excel y SPSS para el análisis de resultados.

Palabras Clave: accidentes de tránsito, Análisis exploratorio de datos, series temporales, análisis de correspondencia.

Abstract. One of the social problems we face every day in our countries are traffic accidents. This paper deals with traffic accidents in five municipalities of San Salvador, El Salvador Department. The research is to make an exploratory study of the phenomenon. To perform this analysis was enough available information collected from the traffic accident, place, date, day, if there are injuries, fatalities, causes, types, and others. This was provided by the National Civil Police of El Salvador, which apply statistical techniques to search and find the conclusions that can be drawn from this phenomenon and work with them to develop relevant strategies and decisions that to analyze the problem or issue measures to create laws to regulate accidents.

To achieve our goal which is revised in exploratory data analysis, in order to get a basic understanding of them and of the relationships between the variables analyzed. For Exploratory Data Analysis (EDA) used the classical theory of Statistics, Time Series Theory, correspondence analysis, to obtain the results of the study. Furthermore, it has statistical tools: Excel and SPSS software to analyze results.

KeyWords: Traffic accidents, exploratory data analysis,time series, correspondence analysis.

2.1 Introducción

En los éstos últimos años en El Salvador se ha observado un incremento en la cantidad de vehículos (livianos, pesados, transporte colectivo, etc.), particularmente, en el municipio de San Salvador y esto está acompañado de una red vial, en la cual puede notarse por el incremento de la cantidad de atascos de vehículos que a diario se generan en las arterias principales del municipio en las horas pico, lo que en gran medida el riesgo de provocarse un accidente es de grandes posibilidades.

Las autoridades gubernamentales han considerado esta situación, ya que durante estos últimos años se han preocupado y se están construyendo una serie de carreteras, con la idea de minimizar los embotellamientos, buscando alternativas para hacer fluido el tráfico vehicular y se supone que han proyectado a futuro algunos planes para fortalecer la red vial, aunque debemos de entender que este proceso requiere de grandes presupuestos y de tiempo para su realización.

A diario nos enteramos por los medios de comunicación reportes acerca de cómo es el comportamiento vehicular y de ahí su comportamiento aleatorio, que durante el desarrollo del día nos enteramos de muchos accidentes de tránsito, ya sea leves o graves, y que en su mayoría de veces ocurren daños personales y materiales.

2.2 Planteamiento del Problema

En el Área Metropolitana de San Salvador circulan alrededor de 200.000 vehículos diarios registrados. Hacia el propio municipio de San Salvador, en horas pico de la mañana, se realizan unos 300.000 viajes. Alrededor de la ciudad hay vías primarias que la comunican con el interior del país, siendo estas la Troncal del Norte, con rumbo al norte del país, la carretera a Santa Tecla con rumbo al Occidente del país, la carretera al Aeropuerto Internacional de Comalapa al sur del país, y el Bulevar del Ejército Nacional, que dirige al Oriente. Para el traslado de oriente a occidente tiene obligadamente que cruzar por el municipio de San Salvador. Por ser la ciudad paso obligado, el gobierno ha construido, desde inicios del siglo, diversas vías para el descongestionamiento del tráfico vehicular. Entre estas carreteras están el trayecto de la Troncal del Norte a Soyapango, prolongación Bulevar Constitución, y el Bulevar "Monseñor Arnulfo Romero", y actualmente la carretera Longitudinal del Norte.

En vista de tal situación, anualmente se dan informes de los accidentes, en su totalidad sin considerar los detalles del fenómeno. Esto me motivo a buscar la información pertinente, enfrentándome a la situación que no se existen documentos de este tipo y mucho menos con un estudio estadístico formal que lo aborde en estos últimos cuatro años.

Para poder realizar esta investigación se solicitó colaboración y apoyo de la Policía Nacional Civil (PNC), ya que ellos poseen un departamento (Sub dirección de tránsito terrestre) que registra todos los accidentes de tránsito de El Salvador pero para realizar el estudio estadístico piloto solo se tomó en cuenta una muestra de cinco municipios de un total de 17 municipios de San Salvador.

Con esta información que se recolecto, se pretende realizar un estudio estadístico exploratorio considerando variables como; el tipo, lugar, lesionados, causas y otros. Utilizaremos las herramientas estadísticas para poder explorar y explicar el fenómenos y de cómo se ha desarrollado durante los años 2006 – 2010. También, para el tratamiento de la información se contará, con herramientas del área de estadística como es el software Excel y SPSS.

Se presentaran gráficas, tablas, pruebas de hipótesis y definiciones, del comportamiento durante estos últimos años, algunas comparaciones mensuales, anuales, un análisis de correspondencia que nos permita identificar algunas relacione importantes como por ejemplo el número de lesionados por municipio, número de accidentes por municipio, el tipo de accidente en los municipios, etc.

Hay mucho que abordar, pero es claro que no se abarcara en su totalidad, se plantean algunos análisis, e ideas generales que contribuyan para futuras investigaciones que puedan tomar como base este estudio para publicaciones más amplias de este fenómeno de interés social.

Se presenta una muestra de la base de datos a considerar en el estudio:

SEXO	EDAD	RANEDA	RESULTA	CALIDAD	TIPACC	CAUACC	DIA	MES	AÑ	MUNICIPI(	DIRACC
MASCULINO	52	6	LESIONADO	ACOMPAÑAI	COLISION	NO RESPETAR SEÑAL DE PRIOF	DOMINGO	FEBRERO	2006	SAN SALVAI	Alemeda Juan Pablo 2º Y 11 Avenidad Norte
MASCULINO	44	5	LESIONADO	CONDUCTOF	ATROPELLO	DISTRACCION DEL CONDUCTOR	JUEVES	MARZO	2006	SAN SALVAI	Boulevard Venezuela Y 4ª Avenida Sur
MASCULINO	36	4	LESIONADO	PEATON	ATROPELLO	NO RESPETAR SEÑAL DE PRIOF	MARTES	MARZO	2006	SAN SALVAI	1ª Calle Oriente Y 10ª Avenida Norte
FEMENINO	8	1	LESIONADO	ACOMPAÑAI	COLISION	NO RESPETAR SEÑAL DE PRIOF	DOMINGO	FEBRERO	2006	SAN SALVAI	Alemeda Juan Pablo 2º Y 11 Avenidad Norte
MASCULINO	23	3	LESIONADO	CONDUCTOF	COLISION	ADELANTAMIENTO ANTIRREGLA	DOMINGO	MARZO	2006	SAN SALVAI	Alameda Juan Pablo Segundo Y 5a Norte, Frente A Te:
MASCULINO	34	4	LESIONADO	PEATON	ATROPELLO	IMPRUDENCIA DEL PEATON	DOMINGO	JULIO	2006	SAN SALVAI	Alameda Juan Pablo 2º Y 5ª Avenida Norte
MASCULINO	19	2	LESIONADO	PEATON	ATROPELLO	OTROS	DOMINGO	JULIO	2006	SAN SALVAI	Alameda Juan Pablo Ii Y Avenida España
MASCULINO	23	3	LESIONADO	CONDUCTOF	COLISION	NO RESPETAR SEÑAL DE PRIOF	LUNES	ENERO	2006	SAN SALVAI	Avenida España y 5ª Calle Poniente
MASCULINO	25	3	LESIONADO	CONDUCTOF	COLISION	NO RESPETAR SEÑAL DE PRIOF	MARTES	ENERO	2006	SAN SALVAI	3ª Calle Oriente y 10ª Avenida Norte
FEMENINO	75	8	LESIONADO	PASAJERO	CARACTERIS	OTROS	MARTES	ENERO	2006	SAN SALVAI	2ª Calle Oriente frente al parque Libertad
MASCULINO	76	8	LESIONADO	CONDUCTOF	COLISION	NO RESPETAR SEÑAL DE PRIOF	MARTES	ENERO	2006	SAN SALVAI	6ª calle oriente y 8ª Avenida Sur
MASCULINO	41	5	LESIONADO	CONDUCTOF	COLISION	DISTRACCION DEL CONDUCTOR	MARTES	ENERO	2006	SAN SALVAI	4ª Calle oriente y 12 Avenida Norte
MASCULINO	11	2	LESIONADO	ACOMPAÑAI	COLISION	DISTRACCION DEL CONDUCTOR	MARTES	ENERO	2006	SAN SALVAI	4ª Calle oriente y 12 Avenida Norte

Tabla 2.1: Base de datos de los accidentes de tránsito.

Objetivo General Realizar un análisis exploratorio de los accidentes de tránsito ocurridos en el municipio de San Salvador, El Salvador, 2006-2010.

Objetivos específicos

- Realizar un estudio exploratorio usando herramientas estadísticas de los accidentes de transito en cinco de los municipios de San Salvador.
- Sintetizar, ordenar y/o clasificar el conjunto de datos que provienen de las observaciones de los accidentes de tránsito.
- Identificar relaciones entre las variables observadas usando test estadísticos de prueba.
- Aplicación del análisis de correspondencia
- Planeamiento de los accidentes por medio de Series Temporales
- Presentación de los resultados de los accidentes de una forma simple y clara.

2.3 Justificación

Es el abordaje de un problema social que nos permitirá conocer las relaciones entre las diferentes variables que se involucran los accidentes de tránsito, lo cual nos brindara los distritos, el tipo de accidente, lesionados, causas, etc. de los lugares en que más ocurren y esto informarlo a las autoridades respectivas.

Es una aplicación práctica, en la que se pretende colaborar e informar al Ministerio de Obras Públicas, Ministerio de Economía e instituciones de tránsito para que a través de los resultados obtenidos del estudio, se estructuren estrategias y medidas de prevención de los accidentes, en general la minimización de accidentes, esto vendrá a beneficiar a la comunidad para que tome las medidas de precaución necesarias.

La información será de beneficio para la comunidad y para las instituciones como el Ministerio de Economía ya que podríamos explicar que los accidentes de tránsito tienen un alto costo, a saber, gastos en cuidados médicos, intervenciones de los servicios de policía y reparaciones de vehículos, daños materiales y pérdidas de producción económica por las personas fallecidas o heridas. Evitar un accidente equivaldría a ahorrar dinero para la sociedad, por ello es necesario adoptar medidas para minimizarlos.

Importante será un balance anual en esta materia, para que se implemente en nuestro país un plan de mejora en la seguridad de los automovilistas que beneficie a la comunidad. Pretendemos entonces que con este tipo de estudio nos lleve a descubrir y elaborar las recomendaciones, sugerencias más precisas y efectivas que se traduzcan en una disminución de los accidentes de manera satisfactoria.

2.4 Marco Teórico

Conceptos Básicos.

¿Qué es "Accidentes de tránsito"? :

- Suceso eventual involuntario
- Falla en el sistema vial ocasionada por conductores, pasajeros, peatones o ambientales como vías y vehículos
- Suceso negativo producido por un vehículo en circulación o un peatón

Es de mencionar también de las personas que sufren accidentes de tránsito y que no conducen un automóvil: los peatones y los ciclistas, que también son un sector involucrado en esta situación.

Como se mencionó, nuestra red vial esta cada día más congestionada, el costo de realizar un viaje en ella aumenta progresivamente y más aún, si no es en un vehículo propio. Esto sin contar con los viajes de recreación, que se realizan todos los días por salud y diversión, que son otra cantidad considerable y en los cuales suceden gran cantidad de accidentes.

Factores de los Accidentes. Algunos factores que aumentan la ocurrencia de accidentes:

- Distracciones para los conductores: hablar por teléfono, maquillarse, acompañamiento de otras personas o mascotas en el área del volante.
- Conductores ebrios, cansados, jóvenes e inexpertos
- Carreteras de alto flujo que atraviesan los automotores.
- Las características geométricas del sistema vial.
- Altos porcentajes de tránsito pesado (Como el transporte colectivo, que es usado por la mayoría de la población urbana).
- Pobre visibilidad vertical y horizontal.
- Imposibilidad de rebasar vehículos lentos (y/o peatones y ciclistas).
- El irrespeto a las señales de tránsito.

Naturaleza del accidente Podemos comprender por la naturaleza del accidente la forma de accidente resultante, que comprende; que está clasificada como choque, colisión atropello y características especiales.

Choque. Es el encuentro violento, accidental o imprevisto de un vehículo en movimiento con un objeto fijo, es decir sin movimiento. Estos objetos pueden ser piedras, postes, barreras, vehículos estacionados, etc. del cual resultan averías, daños, pérdida parcial o total de vehículos o propiedades, así como lesiones leves y/o fatales a personas.

Colisión. Encuentro violento de dos o más vehículos en movimiento. Puede ser lateral, frontal o por alcance.

Atropello. Evento vial donde un vehículo de motor arrolla o golpea a una persona que transita o que se encuentra en alguna vía pública, provocando lesiones leves o fatales.

Características espaciales. Son tipos de accidentes de tránsito que no pertenecen a ninguna de las categorías anteriores, tales como caída de árboles sobre vehículos, atropellos de animales, incendio del automóvil, etc.

Variables

TEMA	CATEGORIA	VARIABLE	CLASIFICACION
Transporte	Accidentes de tránsito terrestre en el municipio de San Salvador	Edad	
		Tipo_dan	– Hechor – Ofendido
		Resultado del accidente	– Fallecido – Lesionado
		Sexo	– Masculino – Femenino
		Tipo de persona que sufrió el accidente	– Acompañante – Conductor – Peatón – Pasajero – Responsable – Otro
		Mes de ocurrencia del accidente	– Enero – Febrero – Etc.
		Día de ocurrencia del accidente	– Lunes – Martes – Miércoles – Etc.
		Causa del accidente	– Adelantamiento antirreglamentario – Circular en reversa – Distracción del conductor – Estado de ebriedad o droga – Falla mecánica – Giro incorrecto – Imprudencia del peatón – Inexperiencia – Invadir carril – No guardar distancia de seguridad – No respetar señal de prioridad – Velocidad excesiva – Velocidad inadecuada – Otras
		Naturaleza del accidente	– Choque – Colisión – Atropello – Características espaciales

Tabla 2.2: Cuadro de variables de los accidentes de tránsito

La tabla nos muestra las variables involucradas en los accidentes de tránsito, aunque debe tomarse en cuenta que son una cantidad significativa, esto nos invita a crear estudios que permitan analizarlos con más detalle. En este resumen, solamente plantearemos algunas representaciones ideas con el fin de motivar a los investigadores a seguir un estudio y planteando el tipo de tratamiento a utilizar para abonar soluciones a este problema complejo.

Causas del accidente Esto se refiere al motivo que causó el accidente, siendo éste por condiciones inseguras o actos irresponsables, atribuidos a conductores de vehículos, así como a peatones o pasajeros, falla de vehículos, condiciones del camino, etc.

Adelantamiento antirreglamentario. Es el acto de sobrepasar a otro automotor donde no es permitido legalmente o bajo riesgo de accidente.

Circular en reversa. Conducir el vehículo en modo reversa durante mucho tiempo o en lugares donde no es permitido o bajo riesgo de accidente.

Distracción del conductor. Es el suceso en el que el conductor no presta completa atención a la conducción del automotor ya sea por intención propia de éste o por circunstancias ajenas a su voluntad, factores externos.

Estado de ebriedad o droga. Estado en el que el conductor utiliza su vehículo bajo los efectos del alcohol o bajo el consumo de algún tipo de drogas.

Falla mecánica. Desperfecto de tipo mecánico que presenta el automóvil.

Giro incorrecto. Cambiar de sentido de conducción en lugares donde no está permitido legalmente.

Imprudencia del peatón. Acto del peatón en el que comete una imprudencia y es generador de un accidente, por ejemplo cuando un peatón cruza la calle con los vehículos en marcha.

Inexperiencia. Falta de capacidad que presenta un conductor y por ésta provoca un accidente.

Invadir carril. Acto de tomar el carril continuo o el carril contrario y no percatarse de la posible generación de un accidente.

No guardar distancia de seguridad. Es cuando no se respeta la distancia entre un auto y otro en la carretera y que por este motivo se genera un accidente.

No respetar señal de prioridad. Es cuando un conductor no respeta la señal que principalmente debe ser respetada, como los altos, la prohibición de giros a la izquierda, semáforos en rojo, etc.

Velocidad excesiva. Sucede cuando un conductor viaja a una velocidad por encima de la permitida legalmente, y que esto conlleva a causar un accidente.

Velocidad inadecuada. Así mismo la velocidad demasiado baja genera accidentes de tránsito como es el caso en el que un conductor no distinga que la velocidad de otro automotor es lenta y lo impacte accidentalmente.

Otras. Se ubicará aquí cualquier otra causa resultante no relacionada con las anteriores.

¿Cómo abordaremos el problema?

- Por medio de El Análisis Exploratorio de Datos (A.E.D.)

- El A.E.D., aplicaremos técnicas estadísticas cuya finalidad es conseguir la comprensión básica de los datos y de las relaciones existentes entre las variables analizar. Para conseguir este objetivo se utilizara software estadístico para organizar y preparar los datos.
- Para el A.E.D se utilizara la teoría clásica de Estadística y se contara para aplicar dichas técnicas el software EXCEL SPSS.

Etapas del EAD Mencionamos las etapas para realizar el AED, pero queda a discreción del investigador la metodología a tomar en cuenta por que dependerá de su problema en estudio.

- 1) Preparación de los datos para la aplicación de técnicas estadísticas.
- 2) Elaborar y hacer una revisión gráfica de las variables individuales para examinar las características relevantes de los datos, las posibles relaciones de interés y la intensidad de interrelación existente entre ellas.
- 3) Identificar los posibles casos atípicos (outliers) y evaluar el impacto potencial que puedan ejercer en análisis estadísticos posteriores.
- 4) Identificar algunas relaciones entre las variables observadas usando test estadísticos de prueba
- 5) Revisar, Evaluar analizar, los datos ausentes sobre la representatividad de los datos analizados, si es necesario.
- 6) Presentación de cómo se comporta el fenómenos en el tiempo y de algunas relaciones entre las variables.

Para llevar a cabo el AED se propone el esquema siguiente:

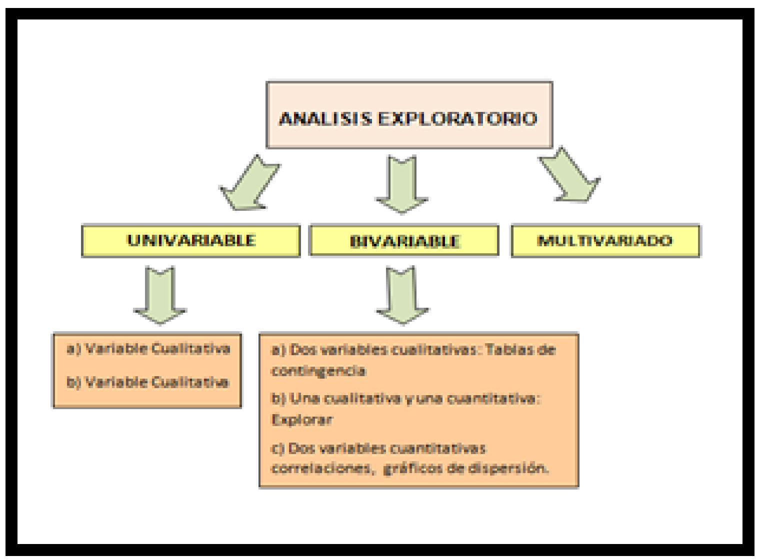


Tabla 2.3: Esquema del análisis exploratorio de datos

Además, consideraremos en esta exploración otras propuestas para abordarlo, por ejemplo, utilizando la teoría de las Series temporales, proporcionando los elementos para darle seguimiento y descubrir el posible modelo al cual se ajusta la información, tablas y gráficos en las que se relacionan más variables (estudio de casos) tratando de representar variables que nos permiten dar lectura para estudiar el comportamiento del fenómeno relacionándolo y dándole más sentido de interpretación de las variables consideradas.

Finalmente, aplicaremos la técnica análisis de correspondencias, técnica estadística de gran utilidad, en la que la asociación e interpretación de los resultados puede hacerse de manera sencilla a través de gráficos, nos ayuda a evidenciar de manera más ilustrativa el grado entre las categorías de cada variable. Si la intensidad o grado de asociación es alto, aparecerán en el grafico. La idea de presentar este análisis, es con el fin de definir, describir e interpretar las relaciones que presentan las variables categóricas a través de un gráfico bidimensional.

2.5 Análisis exploratorio de datos

Para efectuar el AED plantearemos en un primer momento el Análisis exploratorio Univariado, luego el Bivariado, algunos test pruebas estadísticas, para mostrar la bondad de ajuste, homogeneidad y dependencia e independencia, seguido del estudio de casos (considerando tres variables). Finalmente, se considera otra forma de abordarlo como una serie temporal y finalmente se efectúa un análisis de correspondencia.

2.5.1 Análisis exploratorio de datos-univariado

Para iniciar este análisis realizaremos un análisis estadístico gráfico y numérico de las variables sexo de las personas lesionadas; fallecidas y lesionadas, el protagonista del accidente, tipo de accidente causas del accidente, distrito en donde ocurrió y el día en que ocurrió, con el fin de tener una idea inicial de la información contenida en el conjunto de datos así como detectar la existencia de posibles errores en la codificación de los mismos (Análisis estadístico unidimensional).

SEXO		N° ACCIDENT
SEXO	FEMENINO	4219
	MASCULINO	8460

Tabla 2.4: Tabla de frecuencias de los lesionados por sexo

		N° Personas
PROTAG-ACC-UTO	ACOMPAÑANTE	3246
	CONDUCTOR	5176
	OTROS	55
	PASAJERO	1134
	PEATON	3068

Tabla 2.5: Tabla Protagonistas del accidente de tránsito Tabla 7. Tabla Tipos de accidentes

DIAOCURRIO

	Frecuencia	Porcentaje
LUNES	1767	13.9
MARTES	1717	13.5
MIERCOLES	1830	14.4
JUEVES	1715	13.5
VIERNES	1988	15.7
SABADO	2069	16.3
DOMINGO	1593	12.6
Total	12679	100.0

Tabla 2.6: TF Día de ocurrido el accidente

		N° PERSONAS
PERSONDAÑAD	FALLECIDO	429
	LESIONADO	12250

Tabla 2.7: Distribución de número de personas dañadas

		N° ACCIDENTES
TIPO-ACCIDENT	ATROPELLO	2920
	CARACTERISTICAS ESPECIALES	430
	CHOQUE	674
	COLISION	8600
	VUELCO	55

Tabla 2.8: Tabla tipos de accidentes

DISTRITO DONDE OCURRIO EL ACCIDENTE

	Frecuencia
CENTRO HISTORICO	3167
DISTRITO 1	2115
DISTRITO 2	2432
DISTRITO 3	1862
DISTRITO 4	844
DISTRITO 5	1267
DISTRITO 6	991
Total	12679

Tabla 2.9: T.F. Distrito donde ocurrió el accidente

CAUSAS DEL ACCIDENTE

	Frecuencia	Porcentaje
ADELANTAMIENTO ANTIRREGLAMENTARIO	94	.7
CARGA MAL ACONDICIONADA	11	.1
CIRCULAR EN REVERSA	122	1.0
CONDUCIR EN ESTADO DE EBRIEDAD	547	4.3
DESLUMBRAMIENTO	6	.0
DISTRACCION DEL CONDUCTOR	2883	22.7
ENFERMEDAD	1	.0
FALLA MECANICA	72	.6
GIRO INCORRECTO	70	.6
IMPRUDENCIA DEL PEATON	781	6.2
INEXPERIENCIA	14	.1
INVADIR CARRIL	2166	17.1
NO GUARDAR DISTANCIA DE SEGURIDAD	1035	8.2
NO RESPETAR SEÑAL DE PRIORIDAD	4314	34.0
OTROS	88	.7
VELOCIDAD EXCESIVA	45	.4
VELOCIDAD INADECUADA	430	3.4
Total	12679	100.0

Tabla 2.10: TF de las diferentes causas

Se presentan algunos gráficos

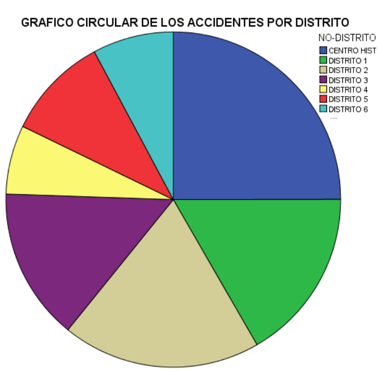


Figura 2.1: Grafico Circular de accidente por distrito

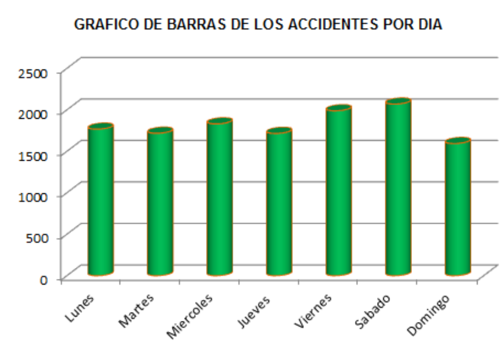


Figura 2.2: Accidentes por día de semana

TABLA DEL NUMERO DE AFECTADOS SEGUN EDAD

		N° AFECTADOS	Porcentaje
Válidos	<= 9	558	4.4
	10 - 18	895	7.1
	19 - 27	3172	25.0
	28 - 36	3340	26.3
	37 - 45	1937	15.3
	46 - 54	1159	9.1
	55 - 63	762	6.0
	64 - 72	456	3.6
	73 - 81	272	2.1
	82+	128	1.0
	Total	12679	100.0

Tabla 2.11: TF de Rango de edad accidentados

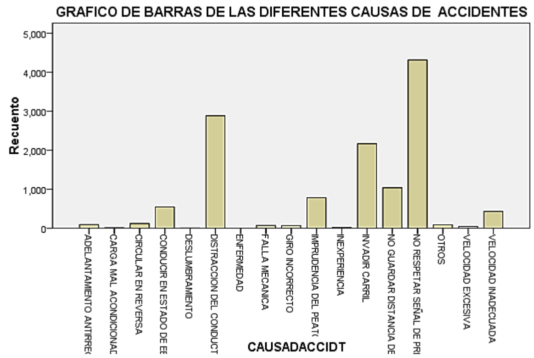


Figura 2.3: Diferentes causas de accidentes

Descriptivos personas afectadas segun edad

			Estadístico
EDAD	Media		34.72
	Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	34.43
		Límite superior	35.01
	Media recortada al 5%		34.03
	Mediana		32.00
	Varianza		271.622
	Desv. típ.		16.481
	Mínimo		0
	Máximo		96
	Rango		96
	Amplitud intercuartil		19
	Asimetría		.750
	Curtosis		.593

Tabla 2.12: Estadísticos. Descriptivos personas afectadas según edad.

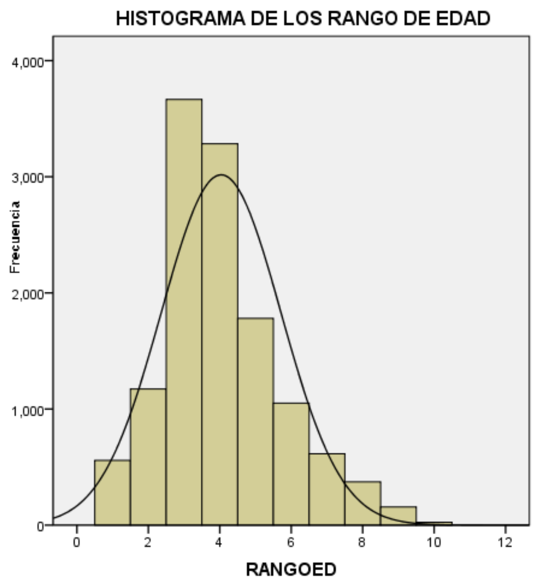


Figura 2.4: Histograma según rango de edad.

Lecturas de las tablas y gráficos

- La mayoría de lesionados en los diferentes accidentes de tránsito tenemos que son los del sexo masculinos (Tabla 1.4).
- Los protagonistas del accidente son en su mayoría conductores y acompañantes (Tabla 1.6).
- Los tipos de accidentes más frecuentes: atropellos y colisiones (Tabla 1.7).
- Distrito donde ocurren más accidentes: Centro Histórico, Distrito 1, 2 y 3 (Tabla 1.8).
- Las Causas de los accidentes más frecuentes tenemos: no respetar las señales de tránsito, distracción del conductor, invadir carril y no guardar la distancia adecuada (Tabla 1.9).
- Los días en que ocurren más accidentes: miércoles, viernes, sábados y domingos (Tabla 1.10).
- La edad de los afectados en los diferentes accidentes de tránsito : 19 a 27 años y 28 a 36 años, seguido por los rangos de 37 a 45 años y 46 a 54 años (Tabla 1.11).
- Los parámetros para los afectados por los accidentes de tránsito, obteniendo una media de 35 años, Mediana 32 años, podría decirse bimodal (Tabla 1.12).

- Gráficos donde se compara el histograma con la curva normal para definir su comportamiento: Asimetría a la derecha (Gráfico 1.4).

Es necesario, en este tipo de análisis la revisión de los datos atípicos, es decir, debe revisarse y evaluarse el tipo de datos no muy "normales" ya sea por medio de gráficos y tablas.

El problema principal que podemos encontrar que estos datos pueden distorsionar, deformar el fenómeno a estudiar y pueden hasta ser no representativos. Al aplicar los test de pruebas a estos datos tiene como efecto que puede ser no significativo. También esto puede denotar un indicativo de posibles errores a la hora de escoger la representatividad de la muestra o bien pudo haberse mal digitado la información si haberla previamente revisado y estudiado.

Para la revisión de este tipo de datos, efectuamos el diagrama de caja con bigotes con la finalidad de estudiarlos, obteniendo la figura siguiente:

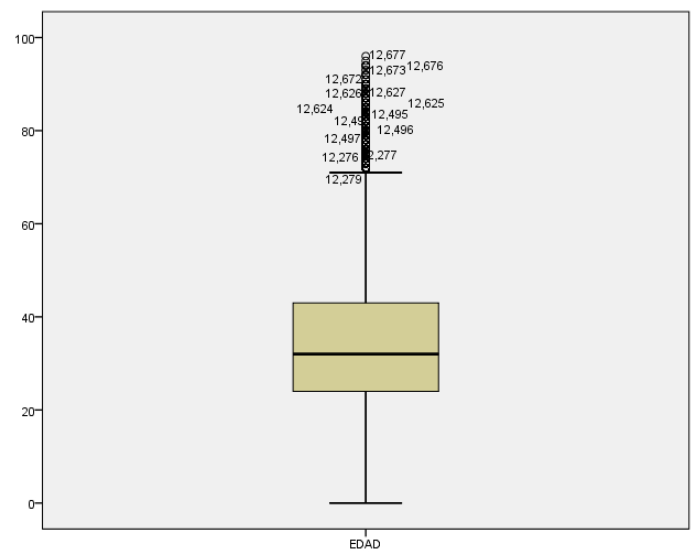


Figura 2.5: Datos atípicos de los accidentes de transito

Obsérvese, que los bigotes se extienden hasta los valores observados, los valores extraños están acumulados en el extremo superior. La distancia entre la mediana y los cuartiles está más próxima al primer cuartil, lo que nos hace pensar que la distribución de los datos es asimétrica. Se revisó la base de datos para detectar a que se debió esta información y nos reflejan a personas lesionadas que son personas mayores de edad, peatones imprudentes, y la edad de las personas que forman parte de este conjunto de datos son personas de 96 años de edad.

2.5.2 Análisis exploratorio de datos-bivariado

En este caso, el AED Bivariado, incluye todas las técnicas que hacen referencia al estudio y la descripción de dos variables, pudiendo ser estas variables cualitativas o cuantitativas.

Para nuestro caso, las variables a estudiar, en su mayoría la base de datos nos refleja variables cualitativas. Cuando los datos bivariados resultan de dos variables cualitativas (de atributo o categóricas), los datos se disponen en una tabla de clasificación o de contingencia.

La tabla de contingencia se define por el número de atributos o variables que se analizan conjuntamente y el número de modalidades o niveles de los mismos.

A partir de la tabla de contingencia, se puede además observar y analizar, si existe alguna relación de dependencia o independencia entre los niveles de las variables cualitativas. El hecho de que dos variables sean independientes significa que los valores de una de ellas no están influidos por la modalidad o nivel que adopte la otra o bien caso contrario.

A continuación se presentan las tablas de contingencia retomando las variables de los accidentes de tránsito que se encuentran en la base de datos (Tabla 1.1).

Tabla de contingencia Sexo * Causas de los accidentes

		Causas de los accidentes													
		Adelantamiento	Circular reversa	Conducir estado Ebriedad	Distracción del conductor	Falla mecánica	Giro incorrecto	Imprudencia del peatón	Invadir carril	No guardar distancia	respetar señal de prioridad	Otros	Velocidad excesiva	Velocidad inadecuada	Total
Sexo	Masculino	75	66	385	1868	44	54	559	1628	596	2822	68	31	264	8460
	Femenino	19	56	162	1015	28	16	222	538	439	1492	52	14	166	4219
Total		94	122	547	2883	72	70	781	2166	1035	4314	120	45	430	12679

Tabla 2.13: Tabla de Contingencia de las variables sexo y causas de accidentes

Tabla de contingencia SEXO * TIPO-ACCIDENT

		TIPO-ACCIDENT					
		ATROPELLO	CARACTERISTICAS ESPECIALES	CHOQUE	COLISION	VUELCO	Total
SEXO	FEMENINO	992	231	215	2764	17	4219
	MASCULINO	1928	199	459	5836	38	8460
Total		2920	430	674	8600	55	12679

Tabla 2.14: Tabla de Contingencia de las variables sexo y tipo de accidente

Tabla de contingencia SEXO * DIAOCURRIO

		DIAOCURRIO							
		DOMINGO	JUEVES	LUNES	MARTES	MIERCOLES	SABADO	VIERNES	Total
SEXO	FEMENINO	596	514	583	568	589	713	656	4219
	MASCULINO	997	1201	1184	1149	1241	1356	1332	8460
Total		1593	1715	1767	1717	1830	2069	1988	12679

Tabla 2.15: . Tabla de Contingencia de las variables sexo y día en que ocurrió el accidente

TIPO DE ACCIDENTE Y EL MES EN QUE OCURRIO

	ATROPELLO	C. ESPECIALES	CHOQUE	COLISION	VUELCO	TOTAL
ENERO	230	35	51	719	2	1037
FEBRERO	226	32	59	705	18	1040
MARZO	238	40	28	739	7	1052
ABRIL	196	42	65	695	4	1002
MAYO	225	33	55	639	3	955
JUNIO	213	34	68	644	11	970
JULIO	273	26	78	680	3	1060
AGOSTO	251	43	75	728	3	1100
SEPTIEMBRE	234	39	55	709	0	1037
OCTUBRE	281	34	40	764	1	1120
NOVIEMBRE	270	42	51	722	2	1087
DICIEMBRE	283	30	49	856	1	1219
TOTAL	2920	430	674	8600	55	12679

Tabla 2.16: TC de las variables tipo de accidente y el mes

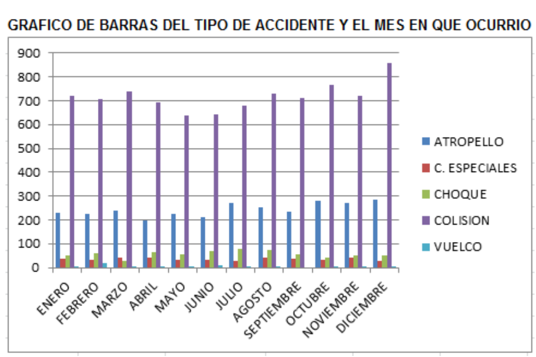


Figura 2.6: Gráfico de barras tipo de accidente y el mes

TABLA DE DISTRIBUCION DE LAS CAUSAS DEL ACCIDENTE POR SEXO

	MASCULINO	FEMENINO	TOTAL
ADELANTAMIENTO ANTIRREGLAMENTARIO	75	19	94
CARGA MAL ACONDICIONADA	6	5	11
CIRCULAR EN REVERSA	66	56	122
CONDUCIR EN ESTADO DE EBRIEDAD	385	162	547
DESLUMBRAMIENTO	4	2	6
DISTRACCION DEL CONDUCTOR	1868	1015	2883
ENFERMEDAD	0	1	1
FALLA MECANICA	44	28	72
GIRO INCORRECTO	54	16	70
IMPRUDENCIA DEL PEATON	559	222	781
INEXPERIENCIA	5	9	14
INVADIR CARRIL	1628	538	2166
NO GUARDAR DISTANCIA DE SEGURIDAD	596	438	1034
NO RESPETAR SEÑAL DE PRIORIDAD	2822	1493	4315
OTROS	53	35	88
VELOCIDAD EXCESIVA	30	13	43
VELOCIDAD INADECUADA	264	168	432
TOTAL	8459	4220	12679

Tabla 2.17: Tabla de distribución de los accidentados por distrito

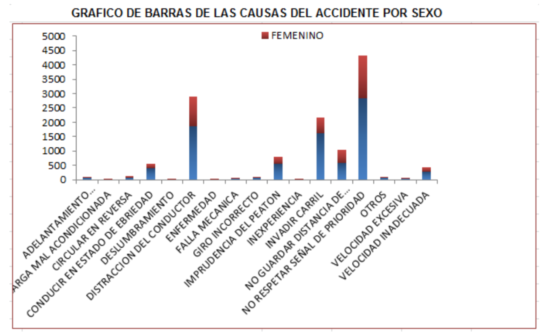


Figura 2.7: Gráfico de causa de accidente y sexo

TABLA DE DISTRIBUCION DE LOS ACIDENTADOS POR DISTRITOS 2006-2010

DISTRITO	TOTAL DE ACCIDENTES	FALLECIDOS	* %	** %	LESIONADOS	* %	** %
CENTRO HISTORICO	3167	127	4.01	1.00	3040	95.99	23.98
DISTRITO 1	2115	41	1.94	0.32	2074	98.06	16.36
DISTRITO 2	2432	66	2.71	0.52	2366	97.29	18.66
DISTRITO 3	1862	38	2.04	0.30	1824	97.96	14.39
DISTRITO 4	844	36	4.27	0.28	808	95.73	6.37
DISTRITO 5	1268	59	4.65	0.47	1209	95.35	9.54
DISTRITO 6	991	62	6.26	0.49	929	93.74	7.33
TOTAL	12679	429	3.38	3.38	12250	96.62	96.62
* %	EN BASE A ACCIDENTES DEL DISTRITO						
** %	EN BASE A TOTAL DE ACCIDENTES						

Tabla 2.18: Tabla de distribución de los accidentados por distrito

Breve lectura de los cuadros:

- Utilizando el grafico del sexo y las causas del accidente diremos La variable explicativa (Y) es la causa de los accidentes y La variable respuesta (X) es el sexo. En la última fila se puede observar el conteo de cada uno de los accidentes (distribución marginal de la variable Y) y la última columna el conteo de los accidentes provocados de ambos sexos (Distribución Marginal de la variable X).(Gráfico 1.13)

- Se presentan algunas frecuencias relativas marginales de Tabla de distribución conjunta de la Tabla 14. La probabilidad de que ocurra el accidente colisión viene dado por

$$P\left(\text{Colisión}\right) = \frac{8600}{12679} = 0.68$$

La Probabilidad de que el accidente sea atropello viene dado por

$$P\left(\text{Atropello}\right) = \frac{2920}{12679} = 0.23$$

Entonces hay más probabilidad de que ocurran las colisiones.

La probabilidad de que el accidente sea provocado por el sexo femenino;

$$P\left(\text{Femenino}\right) = \frac{4219}{12679} = 0.332$$

La probabilidad de que el accidente sea provocado por el sexo masculino; $P\left(\text{Masculino}\right) = \frac{8460}{12679} = 0.67$

El riesgo de provocar los accidentes es mayor el del sexo masculino.

- Obtenemos algunas Frecuencias relativas conjuntas de Tabla 1.14:

  Calculamos la probabilidad de que el accidente sea atropello y sea provocado por ambos sexos, es decir,

$$P(\text{atropello y sexo femenino}) = \frac{992}{12679} = 0.08 \quad ;$$

$$P(\text{Atropello y sexo masculino}) = \frac{1928}{12679} = 0.15$$

  Puede observarse que el riesgo de provocar un atropello es mayor en el sexo masculino.

- A partir de la tabla de contingencia también se puede además analizar si existe alguna relación de dependencia o independencia entre los niveles de las variables cualitativas objeto de estudio y para ello necesitamos realizar algunos contrastes (sección 1.6)

- Observar el tipo de accidente más frecuente y el mes en ocurrieron, pueden hacerse comparaciones y definir algunas conclusiones que se ponen de manifiesto en Tabla 1.17.

- La Tabla 1.17 nos proporciona una comparación de los accidentes de tránsito provocados en ambos sexos.

- Finalmente, La tabla 18 nos proporciona los accidentes totales provocados en cada uno de los distritos con su correspondiente número de fallecidos y porcentajes.

En resumen, Los cuadros de contingencia, por su parte, muestran los perfiles fila de dicha Tabla que comparan la frecuencia de forma horizontal (filas) y de forma vertical (columnas), por lo que queda a discreción del investigador de las conclusiones que pueda hacer del fenómeno.

Claro es que puede hacerse más análisis y como se trata de un bosquejo, importante será que el problema queda abierto para las futuras investigaciones.

2.6 Pruebas estadísticas

En este apartado realizaremos pruebas estadísticas, que consiste en un procedimiento para que a partir de una muestra aleatoria y significativa, obtener y descubrir conclusiones que permitan aceptar o rechazar una hipótesis previamente emitida sobre el valor de un parámetro desconocido de una población.

Recuérdese que uno de los elementos importantes en las investigaciones y el objetivo de la Estadística es hacer inferencias con respecto a parámetros poblacionales desconocidos, basadas en la información obtenida mediante datos de las muestras.

En general, en los problemas prácticos, es necesario formular procedimientos de decisión basado en los datos que conduzcan a argumentar con razonamientos matemáticos una conclusión acerca de algún planteamiento científico.

A continuación representamos en forma gráfica las pruebas o contrastes que podemos realizar, que para nuestro caso, trata en su mayoría del estudio de variables cualitativas.

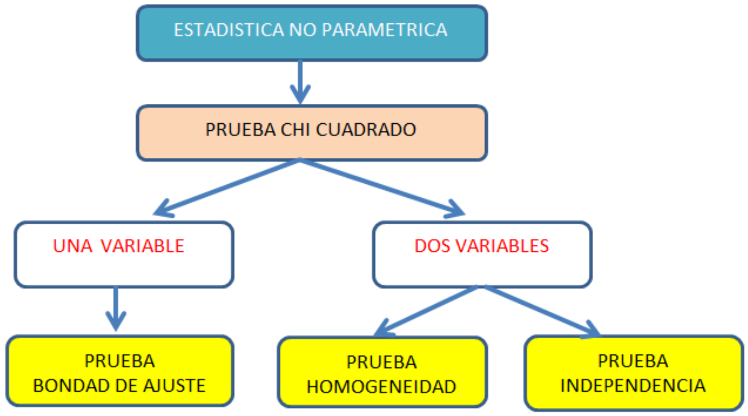


Figura 2.8: Esquema: Tipos de contrastes sugeridos - datos cualitativos

Retomando los datos de los accidentes de tránsito ilustraremos la aplicación de dichas pruebas, representadas en el esquema de la siguiente manera; la prueba de bondad de ajuste utilizaremos la variable sexo de los accidentados y la distribución de los accidentes provocados en cada distrito. Luego, para dos variables utilizaremos una tabla de contingencia que contiene en cada casilla la correspondiente frecuencia conjunta que representa el número de datos que pertenecen a la modalidad i-ésima de la primera variable y a la modalidad j-ésima de la segunda de la variable. A partir de dicha tabla investigaremos si las dos variables son o no independientes las muestras. Finalmente se presenta las pruebas para la homogeneidad de las muestras utilizando las variables causa del accidente y el sexo de los lesionados.

Algunas veces estamos interesados en comparar los resultados obtenidos al realizar un experimento multinomial (la generalización de un experimento binomial) con los resultados esperados teóricos. Este nos permitirá investigar y argumentar si nuestro modelo teórico se ajusta bien o no a las observaciones.

En primer lugar formularemos las hipótesis para la prueba de Bondad de Ajuste

- Ho: Tanto mujeres como hombres sufren igual número de accidentes
- H1: Mujeres como hombres no sufren igual número de accidentes.
- Escogemos un nivel de significación para contrastar nuestra hipótesis:$\alpha = 0.05$
  Efectuamos la prueba, realizando las comparaciones de los valores esperado con respecto a los valores teóricos y tenemos

Sexo accidentados

	N observado	N esperado	Residual
masculino	4219	6339.5	-2120.5
femenino	8460	6339.5	2120.5
Total	12679		

Tabla 2.19: Tabla y Prueba de Bondad de ajuste para la variable el sexo de los accidentados

- Observamos que el valor de P (Sig. Asintót) es menor que el nivel de significación establecida por lo que Rechazamos Ho y aceptamos H1.
- Es decir, No sufren igual número de accidentes.

Efectuamos una segunda prueba utilizando la variable de los accidentes ocurridos por distrito. Formulamos sus respectivas hipótesis

- Ho: El número de los accidentes de tránsito esperados en todos los distritos es el mismo
- H1: El número de los accidentes de tránsito esperados en todos los distritos no es el mismo

- Escogemos un nivel de significación para contrastar nuestra hipótesis: $\alpha = 0.05$

Efectuamos la prueba, realizando las comparaciones de los valores esperado con respecto a los valores teóricos y tenemos

Distritos de SanSalvador

	N observado	N esperado	Residual
Centro Historico	3117	1804.0	1313.0
Distrito 1	2115	1804.0	311.0
Distrito 2	2432	1804.0	628.0
Distrito 3	1862	1804.0	58.0
Distrito 4	844	1804.0	-960.0
Distrito 5	1267	1804.0	-537.0
Distrito 6	991	1804.0	-813.0
Total	12628		

Estadísticos de contraste

	Distritos de SanSalvador
Chi-cuadrado	2266.838[a]
gl	6
Sig. asintót.	.000

Tabla 2.20: Tabla y Prueba de Bondad de ajuste para la variable de los accidentes ocurridos por distrito

- Observar que el valor de P (Sig. Asintót) es menor que el nivel de significación establecida por lo que Rechazamos Ho y aceptamos H1.

- Conclusión, El número de accidentes no es el mismo en los distritos

O bien, estamos interesados en investigar y determinar si los datos correspondientes a dos o más muestras aleatorias provienen de la misma población. Como se ilustra en las tablas de contingencia, el conjunto de posibles valores de las observaciones se divide en k conjuntos disjuntos: A_1, A_2,..., A_k; clasificando en ellos las observaciones de cada muestra. Si n_{ij} representa el número de observaciones de la muestra i que pertenecen al conjunto Aj, los datos pueden tabularse en lo que se denomina una tabla de Contingencia.
La hipótesis suponen de que las m poblaciones son homogéneas, se traduce en que cada conjunto debe tener una probabilidad teórica,p_j, desconocida, y que esta no varía de una población a otra. Esto debe comprobarse y verificarse para cada una de las categorías, es decir, las categorías deben ser homogéneas en las diversas muestras.
Utilizaremos la información obtenida de la variable el sexo de los accidentados y las causas de los accidentes para la ilustración de esta prueba.
Formulamos las hipótesis

- Ho: No existen diferencias entre las causas de los accidentes y el sexo.

- H1: Existen diferencias entre las causas de los accidentes y el sexo.

- Utilizamos un nivel de significación para contrastar nuestra hipótesis: $\alpha = 0.05$

Efectuamos la prueba, (Ver Figura 29).
Se rechaza Ho, aceptamos H**1**es decir, existen diferencias significativas entre el sexo y las causas de los accidentes, ya que al observar detenidamente cada caso de las causas de los accidentes de los dos grupos (femenino y masculino) se observa que los accidentes de tránsito son mayores en el sexo masculino y difieren significativamente del sexo femenino

Tabla de contingencia CAUSADACCIDT * SEXO

			SEXO		
			FEMENINO	MASCULINO	Total
CAUSADACCIDT	ADELANTAMIENTO ANTIRREGLAMENTARIO	Recuento	19	75	94
		% dentro de SEXO	.5%	.9%	.7%
	CARGA MAL ACONDICIONADA	Recuento	5	6	11
		% dentro de SEXO	.1%	.1%	.1%
	CIRCULAR EN REVERSA	Recuento	56	66	122
		% dentro de SEXO	1.3%	.8%	1.0%
	CONDUCIR EN ESTADO DE EBRIEDAD	Recuento	162	385	547
		% dentro de SEXO	3.8%	4.6%	4.3%
	DESLUMBRAMIENTO	Recuento	2	4	6
		% dentro de SEXO	.0%	.0%	.0%
	DISTRACCION DEL CONDUCTOR	Recuento	1015	1868	2883
		% dentro de SEXO	24.1%	22.1%	22.7%
	ENFERMEDAD	Recuento	1	0	1
		% dentro de SEXO	.0%	.0%	.0%
	FALLA MECANICA	Recuento	28	44	72
		% dentro de SEXO	.7%	.5%	.6%
	GIRO INCORRECTO	Recuento	16	54	70
		% dentro de SEXO	.4%	.6%	.6%
	IMPRUDENCIA DEL PEATON	Recuento	222	559	781
		% dentro de SEXO	5.3%	6.6%	6.2%
	INEXPERIENCIA	Recuento	9	5	14
		% dentro de SEXO	.2%	.1%	.1%
	INVADIR CARRIL	Recuento	538	1628	2166
		% dentro de SEXO	12.8%	19.2%	17.1%
	NO GUARDAR DISTANCIA DE SEGURIDAD	Recuento	439	596	1035
		% dentro de SEXO	10.4%	7.0%	8.2%
	NO RESPETAR SEÑAL DE PRIORIDAD	Recuento	1492	2822	4314
		% dentro de SEXO	35.4%	33.4%	34.0%
	OTROS	Recuento	35	53	88
		% dentro de SEXO	.8%	.6%	.7%
	VELOCIDAD EXCESIVA	Recuento	14	31	45
		% dentro de SEXO	.3%	.4%	.4%
	VELOCIDAD INADECUADA	Recuento	166	264	430
		% dentro de SEXO	3.9%	3.1%	3.4%
Total		Recuento	4219	8460	12679
		% dentro de SEXO	100.0%	100.0%	100.0%

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	164.634[a]	16	.000
Razón de verosimilitudes	166.941	16	.000
N de casos válidos	12679		

Tabla 2.21: Tabla de Contingencia Causas accidentes y el sexo de los lesionados- Prueba Chi-Cuadrado, Homogeneidad entre los grupos.

Finalmente, queremos determinar si dos cualidades o variables referidas a individuos de una población están relacionadas. Para establecer la interpretación mencionamos que es diferente de los otros contrastes, y esta se encuentra en que estamos interesados en ver la relación de dependencia o no, entre dos variables de una misma población, no queremos contrastar la distribución teórica de una variable (prueba de bondad de ajuste) ni en comparar la distribución de una única variable en dos poblaciones (prueba de homogeneidad).Entonces, se pretende en esta prueba, comprobar si dos características cualitativas están relacionadas entre sí. Se aplica cuando deseamos comparar una variable en dos situaciones o poblaciones diferentes.
Planteamos las hipótesis,

- Ho: Los días de la semana en que ocurrió el accidente es independiente del tipo de accidente
- H1: Los días de la semana en que ocurrió el accidente no es independiente del tipo de accidente.
- Establecemos un nivel de significación para contrastar nuestra hipótesis: $\alpha = 0.05$

Efectuamos la prueba,

			DIAOCURRIO							
			DOMINGO	LUNES	MARTES	MIERCOLES	JUEVES	VIERNES	SABADO	Total
TIPO-ACCIDENT	ATROPELLO	Recuento	313	430	378	428	402	463	506	2920
		% dentro de DIAOCURRIO	19.6%	24.3%	22.0%	23.4%	23.4%	23.3%	24.5%	23.0%
	CARACTERISTICAS ESPECIALES	Recuento	44	55	74	52	79	71	55	430
		% dentro de DIAOCURRIO	2.8%	3.1%	4.3%	2.8%	4.6%	3.6%	2.7%	3.4%
	CHOQUE	Recuento	172	75	79	66	61	68	153	674
		% dentro de DIAOCURRIO	10.8%	4.2%	4.6%	3.6%	3.6%	3.4%	7.4%	5.3%
	COLISION	Recuento	1046	1184	1185	1281	1171	1383	1350	8600
		% dentro de DIAOCURRIO	65.7%	67.0%	69.0%	70.0%	68.3%	69.6%	65.2%	67.8%
	VUELCO	Recuento	18	23	1	3	2	3	5	55
		% dentro de DIAOCURRIO	1.1%	1.3%	.1%	.2%	.1%	.2%	.2%	.4%
Total		Recuento	1593	1767	1717	1830	1715	1988	2069	12679
		% dentro de DIAOCURRIO	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

Tabla 2.22: Tabla Contingencia Tipo de accidente y el día en que ocurrió.

- Observe que la mayor proporción de los casos se encuentra en las casillas de las filas de colisión y atropellos, y en los días viernes ,sábado, domingo y lunes, parece que hay una asimetría por ello nos atrevemos a decir que ambas variables están asociadas, entonces
- Observamos la tabla de la prueba

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	249.409[a]	24	.000
Razón de verosimilitudes	222.561	24	.000
N de casos válidos	12679		

Tabla 2.23: Tabla Prueba de Chi cuadrado.

- Observamos que el valor de Chi Cuadrado de Pearson nos da un valor de cero (P-valor) y es menor que el nivel de significación establecido, por lo que concluimos que debemos rechazar la hipótesis de independencia (Ho) y por lo tanto asumir que existe relación entre el día en que ocurrió y el tipo de accidente (se acepta H1).

2.7 Análisis Exploratorio Multivariado.

Se ha abordado hasta ahora una o bien dos variables por separado, sin tener en cuenta las consecuencias de la interacción con las demás variables. Para su revisión, es necesario tener cuenta técnicas con otros procedimientos que nos permitan estudiar y analizar los efectos de la interacción en el comportamiento de las variables, a través de procesos que nos proporcionen la relación o mediante comparaciones de grupos.

Las tablas de contingencia nos permitieron examinar o comparar los datos de dos, ahora intentaremos extenderla a estudiar tres variables para comprender con mayor panorámica el comportamiento del fenómeno y/o revisando cruces de las categorías de las variables involucradas.

Ahora revisaremos el estudio de las variables de respuesta múltiple que nos permitirán examinar las diferentes respuestas que nos ofrecen las variables, determinando características que no nos proporciono la información anterior. Para comprender mejor la metodología se emplearán tablas de contingencia que nos muestre con más detalle el problema y que nos facilita el procedimiento de obtener mayor comprensión y conclusiones, vamos aumentar la complejidad de forma gradual.

Ahora, generaremos tablas de contingencia más complejas creadas para tres variables. Cada una de estas divisiones nos mostraran las características pertenecientes a cada una de las categorías.

Debemos tener claro que la asociación entre variables no debe entenderse como una cuestión de que nos proporciona todo el comportamiento del fenómeno o nada de este, sino como un proceso continuo que proporciona desde la ausencia de relación (independencia) al nivel máximo de relación entre ellas. Entonces, esta técnica de estudio nos permiten analizar la relación simultánea entre tres o más variables, este estudio es conocido en el ambiente estadístico como análisis multivariante.

A continuación se presenta algunas tablas que se pueden generar con tres variables y que es necesario revisar la forma de analizarlos para que proporcionen la información más acertada y observar cuánto es el nivel de relación que se pueda establecer entre las variables consideradas.

Tabla de contingencia SEXO * TIPO-ACCIDENT * MESACCIDENT

MESACCIDENT			TIPO-ACCIDENT					Total
			ATROPELLO	CARACTERISTICAS ESPECIALES	CHOQUE	COLISION	VUELCO	
ABRIL	SEXO	FEMENINO	72	26	16	226	2	342
		MASCULINO	124	16	49	469	2	660
	Total		196	42	65	695	4	1002
AGOSTO	SEXO	FEMENINO	85	21	28	257	0	391
		MASCULINO	166	22	47	471	3	709
	Total		251	43	75	728	3	1100
DICIEMBRE	SEXO	FEMENINO	94	18	15	262	0	389
		MASCULINO	189	12	34	594	1	830
	Total		283	30	49	856	1	1219
ENERO	SEXO	FEMENINO	86	20	12	259	0	377
		MASCULINO	144	15	39	460	2	660
	Total		230	35	51	719	2	1037
FEBRERO	SEXO	FEMENINO	64	19	19	241	9	352
		MASCULINO	162	13	40	464	9	688
	Total		226	32	59	705	18	1040
JULIO	SEXO	FEMENINO	95	12	27	197	0	331
		MASCULINO	178	14	51	483	3	729
	Total		273	26	78	680	3	1060
JUNIO	SEXO	FEMENINO	77	21	21	214	0	333
		MASCULINO	136	13	47	430	11	637
	Total		213	34	68	644	11	970
MARZO	SEXO	FEMENINO	67	18	6	220	3	314
		MASCULINO	171	22	22	519	4	738

Tabla 2.24: Agrupamiento de casos de las variables sexo, tipo de accidente y mes en que ocurrió el accidente.

De la tabla anterior se puede leer que para el mes de abril el accidente de tránsito más frecuente fue el de las colisiones en el que salieron lesionados un aproximado de 469 del sexo masculino y del sexo femenino salieron afectados con 226 casos de un total de 695 accidentes. Seguidamente en el mes de febrero sucedieron 226 atropellos de los cuales 162 fueron lesionados del sexo masculino y 64 del sexo femenino.

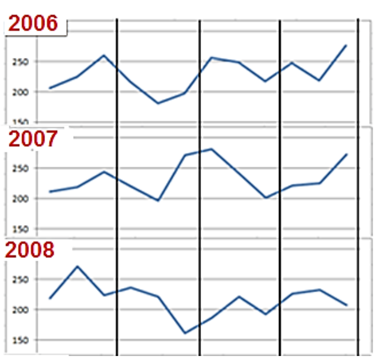
Y así sucesivamente podemos ir dando lectura, a cada uno de los casos, pero lo importante será que, el investigador tendrá que valorar cual es el que más le interesa y que le refleje mejor el problema que quiere estudiar.

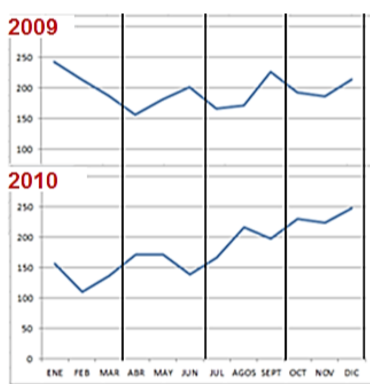
A continuación se presenta otro estudio de agrupamiento de casos considerando las variables Tipo de accidente, año en que ocurrió y el número de distrito. Se muestra una parte ya que la tabla de salida que proporciona el software es extensa y como ejemplo se retomó una parte para conocer y detallar con porcentajes cómo se comporta el fenómeno durante los años del 2006 al año 2010.

TIPACC				AÑO					
				2006	2007	2008	2009	2010	Total
ATROPELLO	Distritos	Centro Histórico	Recuento	256	207	198	182	210	1053
			% dentro de Distritos	24.3%	19.7%	18.8%	17.3%	19.9%	100.0%
			% dentro de AÑO	39.6%	36.4%	36.9%	31.8%	35.3%	36.1%
		Distrito 1	Recuento	75	55	56	48	63	297
			% dentro de Distritos	25.3%	18.5%	18.9%	16.2%	21.2%	100.0%
			% dentro de AÑO	11.6%	9.7%	10.4%	8.4%	10.6%	10.2%
		Distrito 2	Recuento	110	114	100	105	115	544
			% dentro de Distritos	20.2%	21.0%	18.4%	19.3%	21.1%	100.0%
			% dentro de AÑO	17.0%	20.0%	18.7%	18.4%	19.3%	18.6%
		Distrito 3	Recuento	56	58	37	50	42	243
			% dentro de Distritos	23.0%	23.9%	15.2%	20.6%	17.3%	100.0%
			% dentro de AÑO	8.7%	10.2%	6.9%	8.7%	7.1%	8.3%
		Distrito 4	Recuento	36	32	27	39	41	175
			% dentro de Distritos	20.6%	18.3%	15.4%	22.3%	23.4%	100.0%
			% dentro de AÑO	5.6%	5.6%	5.0%	6.8%	6.9%	6.0%
		Distrito 5	Recuento	56	37	57	66	55	271
			% dentro de Distritos	20.7%	13.7%	21.0%	24.4%	20.3%	100.0%
			% dentro de AÑO	8.7%	6.5%	10.6%	11.5%	9.2%	9.3%
		Distrito 6	Recuento	58	66	61	82	69	336
			% dentro de Distritos	17.3%	19.6%	18.2%	24.4%	20.5%	100.0%
			% dentro de AÑO	9.0%	11.6%	11.4%	14.3%	11.6%	11.5%
	Total		Recuento	647	569	536	572	595	2919
			% dentro de Distritos	22.2%	19.5%	18.4%	19.6%	20.4%	100.0%
			% dentro de AÑO	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

Tabla 2.25: Agrupamiento de casos de las variables tipo de accidente, el distrito y el año en que ocurrió el accidente.

Obsérvese que puede revisarse y compararse con detenimiento, la lectura que proporciona en forma general, es que puede detectarse en qué distrito y el año en que más se frecuentó el accidente atropello. Es decir, que en el año en que ocurrió este fenómeno con mayor frecuencia fue en el distrito del Centro Histórico con 256 (39.6%) casos en el año del 2006, seguido del distrito no. 2 con 114 casos (21%). Y así sucesivamente, puede examinarse la tabla e ir determinado el comportamiento en el transcurso de los años.





2.8 Otros tipos de análisis

2.8.1 Otros tipos de estudios

que puede realizar para el fenómeno son por comparaciones. A continuación se ilustra el fenómeno por medio de tablas y gráficos por año y puede describirse cómo se comporta en el transcurso de tiempo.

	2006	2007	2008	2009	2010
ENE	207	212	219	243	156
FEB	225	219	272	214	110
MAR	260	244	224	188	136
ABR	217	220	237	157	171
MAY	182	197	222	182	172
JUN	198	271	161	201	139
JUL	257	282	187	167	167
AGOS	249	241	222	172	216
SEPT	218	202	193	226	198
OCT	248	222	227	193	230
NOV	219	225	233	186	224
DIC	276	273	208	214	248
Media	230	234	217	195	181
des-tipica	27.0	28.4	27.9	25.4	42.7
Moda	276	282	272	226	248

Tabla 2.26: Tabla y gráficos de los accidentes de tránsito 2006-2010.

en la tabla anterior se muestra el número de accidentes ocurridos por mes y año, observar que han sido calculadas las medias aritméticas y nos indica que los accidentes han disminuido en el periodo estudiado y que el promedio de accidentes, por ejemplo, para el año en que ocurrieron más los accidentes en promedio fue el 2007 con 234 casos, habrá que investigarse que evento ocurrió en ese periodo que elevo el número de los accidentes. el año en que ocurrieron menos accidentes en promedio fue en el año 2010 con un promedio de 181. si comparamos en el mes de diciembre del año 2006 con el resto de años tenemos que fue el año en que más ocurrieron. y en el mes de abril el año 2009 ocurrieron 157 accidentes que es el mes en que menos ocurrieron en el periodo.

observe la tendencia y la variabilidad de los accidentes en el periodo, una posible lectura seria que la mayor variabilidad en los accidentes se presenta en el año 2010 (42.7) y la menor en el año 2009 (25.4) implica la disminución de los accidentes.

2.8.2 la información tratada como una serie temporal

otro de los tratamientos que pueden sugerirse es que al observar los datos se tiene una secuencia de datos, observaciones o valores, que están medidos en determinados momentos del tiempo, están ordenados cronológicamente y, espaciados entre sí de manera uniforme.

la estadística nos proporciona técnicas que nos ayudan a comprender métodos que ayudan a interpretar este tipo de datos, descubriendo información representativa, tanto referente a los orígenes o relaciones subyacentes como a la posibilidad de suponer que el curso de los acontecimientos continuará con el mismo comportamiento y con ello poder predecir su comportamiento futuro, convirtiéndose luego, en modelos o líneas básicas que utilizamos para nuevas aplicaciones y llegar a nuevas conclusiones, esto en estadística se conoce como serie temporal.

entonces, para realizar este estudio es necesario seguir una serie de pasos, pero en un primer momento es hacer un grafico que nos muestre la evolución de los datos a través del tiempo y observar

1. detección de puntos que se escapan de lo normal
2. detectar tendencias: cuando en el comportamiento de la serie hay un incremento o decrecimiento a largo plazo en los datos.
3. variación estacional: es cuando el comportamiento de la variable está influida por periodos como estaciones, días, trimestres, años, etc.

La metodología tradicional para el estudio de series temporales es bastante sencilla de comprender, y fundamentalmente se basa en descomponer las series en varias partes: tendencia (el cambio a largo plazo de la media de la serie) , variación estacional o periódica (es la que corresponde a fluctuaciones periódicas de la variable, en periodos relativamente cortos de tiempo), y otras fluctuaciones irregulares (luego de extraer de la serie la tendencia y variaciones , nos quedará una serie de valores residuales, que pueden ser o no totalmente aleatorios).

Entonces, en general, el objetivo a conseguir de la serie en estudio es:

1. utilizar herramientas numéricas y graficas para el análisis de las series.

2. estimar el modelo AR, MA, ARMA O ARIMA para cada una de ellas (tener en cuenta posibles transformaciones)

3. estimar los parámetros de los modelos, así como intervalos de confianza para los mismos.

4. realizar estimaciones e inferencias sobre valores futuros, es decir, predicciones de las observaciones de la serie.

La teoría clásica de series temporales nos proporciona la metodología de box-jenkins (figura 1.9). Una vez conseguida la estacionariedad en media y en varianza se procede a obtener las funciones de autocorrelación muestral simple y la función de autocorrelación muestral parcial, para determinar los posibles modelos y luego aplicar la metodología para seleccionar el modelo que mejor se ajuste a los datos.

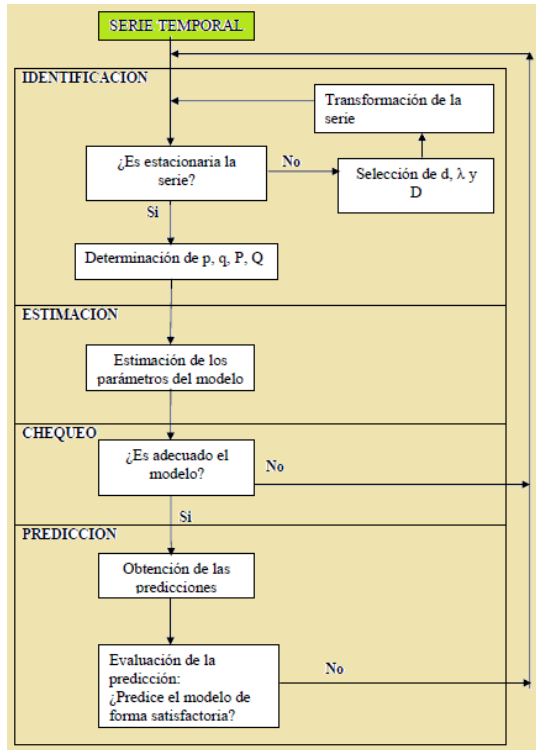


Figura 2.9: Esquema: Metodología de Box Jenkins

Si consideramos los accidentes como una serie temporal se obtiene una gráfico como el siguiente

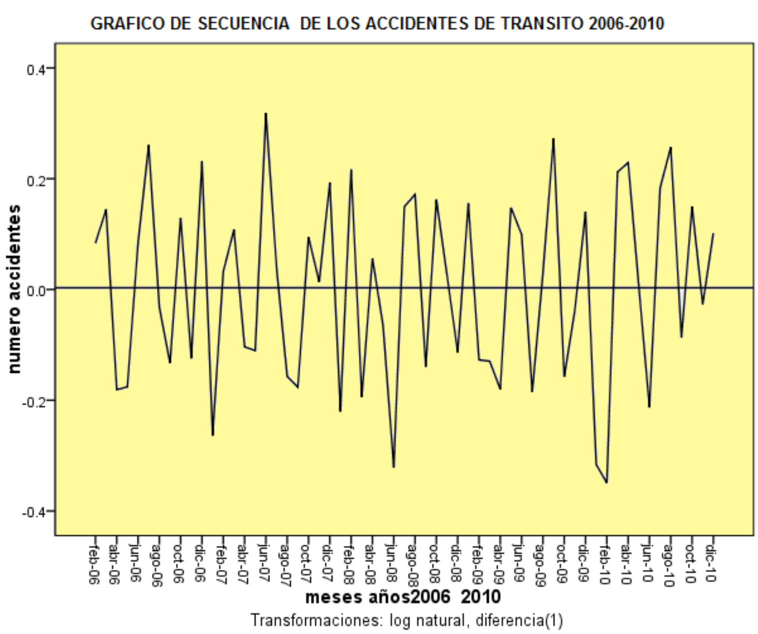


Figura 2.10: Grafico secuencial Accidentes de Tránsito 2006-2010

Puede observarse el comportamiento de la serie, obtener la media de la serie y estudiarla para observar si se mantiene constante en el tiempo. Estudiar la varianza si es estacionaria, si no es así, la metodología sugiere la aplicación de técnicas para conseguirla.

Una vez conseguido estos requisitos se obtienen las autocorrelaciones simples y parciales, lo que nos ayudara a determinar los posibles modelos a seleccionar y que mejor se ajustan a los datos.

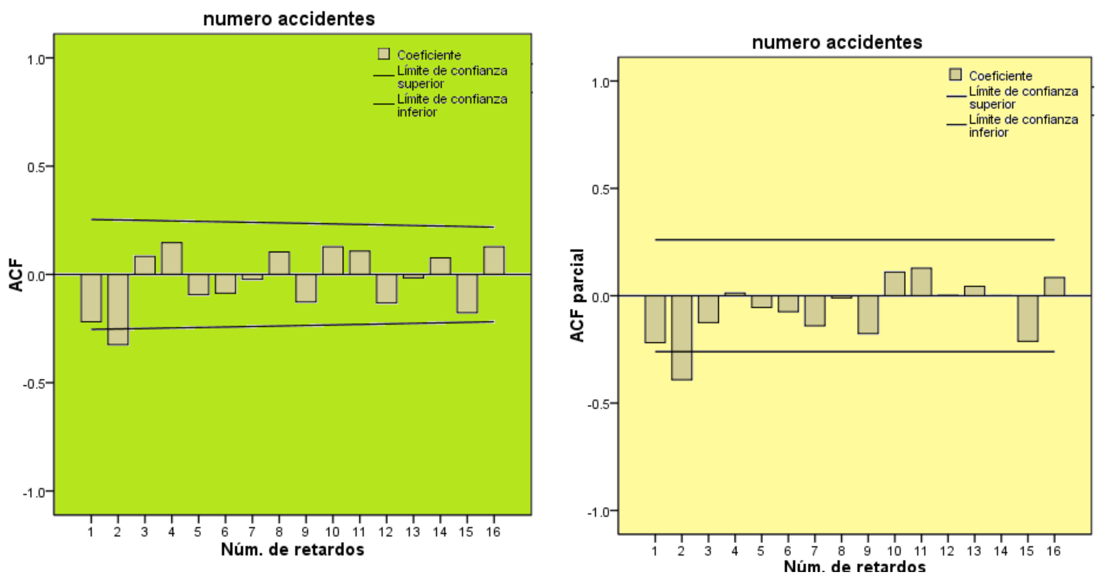


Figura 2.11: Gráfico de las autocorrelaciones muéstrales y parciales

Una vez seleccionados los modelos aplicamos la metodología de Box-Jenkins para cada uno de ellos y se van eliminando aquellos que no cumplen con los requisitos, lo que nos permite se vayan reduciendo cada uno de estos y finalmente se seleccionará aquel que supere todas las etapas de la metodología propuesta.

2.9 Análisis de Correspondencia

Esta técnica estadística es de gran utilidad puesto que la interpretación del resultado puede hacerse a través de gráficas. Evidenciando de manera más apreciable el grado de relación entre las categorías de cada variable, se verifica en el proceso cuan alto es la intensidad de asociación entre las variables a estudiar.

Tal y como se ha mostrado en apartados anteriores este análisis requiere del uso de las tablas de contingencia, para nuestro caso, de dos variables, la cual representa la totalización (frecuencia) de las observaciones de una muestra dada. Otro de los recursos antes de la aplicación de esta técnica es cumplir el nivel de asociación de las categorías. La finalidad es, entonces, evidenciar por medio de pruebas de hipótesis y de manera gráfica las relaciones de dependencia existentes entre las diversas modalidades de dos o más variables categóricas. En el análisis de correspondencia, el software utilizado proporciona tablas de las variables consideradas (dimensiones), y nos ilustra cuales son las relevantes y en el grafico se muestra un punto por cada fila y un punto para cada columna de la tabla de contingencia. Estos puntos son, en efecto, las proyecciones de las filas y columnas de la tabla de contingencia en un espacio euclidiano de dos dimensiones.

La lectura puede hacerse observando las tablas de cada una de las dimensiones, observando las de mayor relevancia y en el grafico observado los puntos que están muy cerca el cual nos representan las variables con perfiles similares. Para probar la importancia de la asociación de las dos variables categóricas en una tabla de contingencia, podríamos usar test de prueba, en este caso la prueba de chi-cuadrado, o bien aplicar otras pruebas que nos lleve a evaluar la asociación.

Luego, efectuamos el AC en la que se obtiene una gráfica (mapa perceptual) que señala la interacción, el grado de asociación de las variables categóricas a través de la relación de las filas y de las columnas entre sí, es decir, se construye un diagrama cartesiano o mapa perceptual basado en la relación de dependencia e independencia de los atributos o categorías. Entonces, basados en esta argumentación breve, utilizaremos la base de datos de los accidentes de tránsito para la aplicación de esta técnica e ilustraremos la relación entre las variables; Distrito y causas de los accidentes. Elaboramos la tabla de contingencia,

Tabla de contingencia Causas de los accidentes * Distritos

Recuento

		Distritos							
		Centro Histórico	Distrito 1	Distrito 2	Distrito 3	Distrito 4	Distrito 5	Distrito 6	Total
Causas de los accidentes	Adelantamiento	16	9	18	12	7	14	18	94
	Circular en reversa	27	21	23	15	8	15	12	121
	Conducir en estado Ebriedad	132	91	138	81	19	47	39	547
	Distracción del conductor	810	361	540	341	203	332	296	2883
	Falla mecánica	20	6	8	9	7	16	6	72
	Giro incorrecto	13	14	22	8	7	4	2	70
	Imprudencia del peatón	260	61	160	59	79	65	97	781
	Invadir carril	296	341	588	335	182	231	193	2166
	No guardar distancia de seguridad	183	138	204	208	104	94	104	1035
	No respetar señal de prioridad	1313	1009	639	719	146	336	152	4314
	Otros	40	10	24	16	10	14	6	120
	Velocidad excesiva	13	5	3	4	5	8	7	45
	Velocidad inadecuada	44	49	65	55	67	91	59	430
Total		3167	2115	2432	1862	844	1267	991	12678

Tabla 2.27: Tabla de contingencia causas de los accidentes y el distrito donde ocurrió.

Aplicamos el chi-cuadrado en la que se determino relación de dependencia entre los distritos y las causas de los accidentes, es decir, existe la relación de dependencia entre el distrito donde ocurrió el accidente y la causa del accidente, y para obtener mejor resultado puede estudiarse con mayor detenimiento el día, la afluencia, la hora y del lugar donde ocurrió exactamente.

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	1172.220[a]	72	.000
Razón de verosimilitudes	1199.748	72	.000
Asociación lineal por lineal	22.420	1	.000
N de casos válidos	12678		

a. 5 casillas (5.5%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 3.00.

Tabla 2.28: Prueba de Chi-cuadrado.

Aplicamos el análisis de correspondencia, para asegurarnos y determinar la asociación que hay entre cada una de las dimensiones o niveles de cada variable.

Para su realización se efectuó una codificación para agrupar las causas de los accidentes, usamos del recurso informático obteniendo como resultado la tabla que nos refleja de los accidentes y los distritos más relevantes (Masa) donde ocurrieron los accidentes (Figura 39).

Obsérvese que las tablas nos muestran las categorías - por medio de su masa- relevantes en cada una de ellas. Obsérvese que en las causas de los accidentes, las categorías más relevantes son la distracción del conductor, seguido por no respetar la señal de prioridad y la de invadir el carril contrario. Y en el de los distritos se muestra que el

Centro Histórico seguido del Distrito 1, 2 y el distrito 3 podríamos decir que son los lugares donde ocurren los accidentes.

Causas de los accidentes	Masa
Adelantamiento	.007
Circular en reversa	.010
Conducir en estado Ebriedad	.043
Distracción del conductor	.227
Falla mecánica	.006
Giro incorrecto	.006
Imprudencia del peatón	.062
Invadir carril	.171
No guardar distancia de seguridad	.082
No respetar señal de prioridad	.340
Otros	.009
Velocidad excesiva	.004
Velocidad inadecuada	.034
Total activo	1.000

Distritos	Masa
Centro Histórico	.250
Distrito 1	.167
Distrito 2	.192
Distrito 3	.147
Distrito 4	.067
Distrito 5	.100
Distrito 6	.078
Total activo	1.000

Tabla 2.29: Tablas de las dimensiones de las causas y distritos donde ocurrió el accidente.

Una vez obtenido las tablas anteriores, representamos dicha información en el mapa conceptual, obteniendo el grafico siguiente

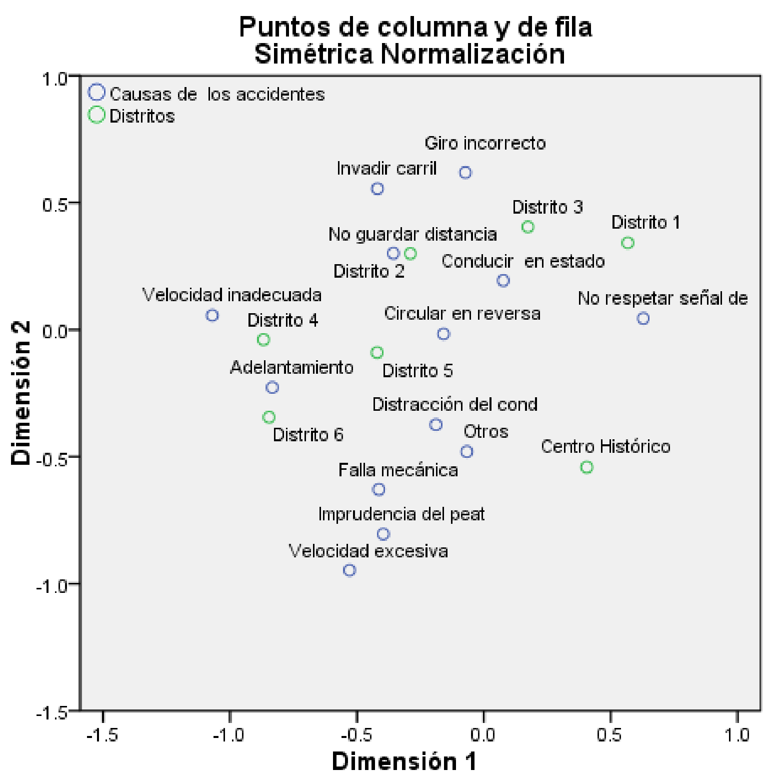


Figura 2.12: Análisis de correspondencia entre las variables causas de los accidentes y distritos

Observamos que:

En el distrito 1 y en el centro histórico, el accidente que más se asocia es no respetar las señales de tránsito.

Lo mismo sucede con el distrito 2 y 3, las variables que más se asocia es la distracción del conductor e invadir carril.

Así, sucesivamente se pueden obtener análisis con los otros distritos, considerando las otras variables, pero es sugerible estudiar las categorías más relevantes propuestas en la Figura 39.

Finalmente, diremos que la exploración de los datos se requiere de cultura estadística para abordarlos. En nuestro caso, se han estudiado algunas variables intentado obtener más que resultados la forma de abordar un problema utilizando diferentes herramientas estadísticas.

Independientemente de la complejidad de los datos del que dispongamos y del procedimiento estadístico que tengamos, una exploración previa de los datos es necesario para cualquier análisis y que todo investigador no puede pasar por alto.

2.10 Conclusiones.

La mayoría de lesionados en los diferentes accidentes de tránsito tenemos que son los del sexo masculino y los protagonistas del accidente son en su mayoría conductores y acompañantes. Los tipos de accidentes más frecuentes: atropellos y colisiones, y algunos detalles simples que se obtuvieron del tratamiento de una sola variable.

De acuerdo al estudio bivariable se obtuvo que la causa más frecuente es el estado de ebriedad y son provocados por ambos sexos.

Los tipos de accidentes más frecuentes son producidos por el sexo Masculino (colisiones, Atropellados) y el sexo femenino con accidentes con características especiales, aunque no se quedan atrás con los atropellos.

Los que producen más accidentes en los días de la semana son los del sexo masculino durante los días miércoles, viernes y sábado, sin quedarse atrás las del sexo femenino que ocurren más el día sábado.

Los distritos donde ocurren más accidentes: Centro Histórico, Distrito 1 y 2.

Las Causas de los accidentes más frecuentes tenemos: no respetar las señales de tránsito, distracción del conductor, invadir carril.

La edad de los afectados en los diferentes accidentes de tránsito: 19 a 27 años y 28 a 36 años, seguido por los rangos de 37 a 45 años y 46 a 54 años.

Se modelaron las tablas para tres variables y los resultados obtenidos de esta son que el mes de abril el accidente de tránsito más frecuente fue el de las colisiones en el que salieron lesionados un aproximado de 469 del sexo masculino y del sexo femenino salieron afectados con 226 casos de un total de 695 accidentes. Seguidamente en el mes de febrero sucedieron 226 atropellos de los cuales 162 fueron lesionados del sexo masculino y 64 del sexo femenino.

Se detectó en qué distrito y el año en que más se frecuentó el accidente atropello. Es decir, que en el año en que ocurrió este fenómeno con mayor frecuencia fue en el distrito del Centro Histórico con 256 (39.6%) casos en el año del 2006, seguido del distrito no. 2 con 114 casos (21%). Y así sucesivamente, puede examinarse la tabla e ir determinado el comportamiento del fenómeno en el transcurso de los años.

Se compararon los accidentes de tránsito en el periodo del 2006 -2010 obteniendo como resultado el número de accidentes ocurridos por mes y años. El año 2007 ocurrieron más los accidentes con un promedio de 234 casos, habrá que investigarse que evento ocurrió en ese periodo que elevo el número de los accidentes. El año en que ocurrieron menos accidentes en promedio fue en el año 2010 con un promedio de 181. Si comparamos en el mes de diciembre del año 2006 con el resto de años tenemos que fue el año en que más ocurrieron. Y en el mes de abril el año 2009 ocurrieron 157 accidentes que es el mes en que menos ocurrieron en el periodo se presentan los gráficos para comparar el comportamiento por año y se calcularon las medias aritméticas por año, la varianza, esto nos permite observar cuánto el promedio de accidentes por año y la variabilidad de los accidentes donde ocurren con mayor o menor frecuencia.

Se estudió en forma secuencial, los datos de los accidentes de tránsito se presentan por día, meses y años de tal manera que los valores están medidos, están ordenados cronológicamente, espaciados entre sí, de manera uniforme de tal manera que cumple con las características de una serie temporal.
Permitiendo con el grafico observar las características del comportamiento la tendencia, estacionalidad. Una vez conseguido la estacionariedad se sugiere estudiar los correlogramas para seleccionar el posible modelo que se ajuste a los datos por medio de la Metodología de Box Jenkins.

Este proceso va determinando los modelos y aquellos que no satisfacen una de las fases se van descartando, lo que reduce el número de modelos para definir el más adecuado una vez haya cumplido con los criterios de la metodología.

Posteriormente se estudia la relación entre las variables las causas de los accidentes y el distrito. Con este procedimiento se evidencio de manera más apreciable el grado de relación entre las categorías de cada variable en estudio y se verifica qué tan alta es la intensidad de asociación entre las variables. Esta técnica nos ayudo a definir, describir e interpretar las relaciones entre variables categóricas.

Obteniendo como resultado que el distrito 1 y en el centro histórico, el accidente que más se asocia es no respetar las señales de tránsito. Lo mismo sucede con el distrito 2 y 3 las variables que más se asocia es la distracción del conductor e invadir carril. Y así sucesivamente, se pretende sugerir esta técnica para abordar el problema y da lugar para investigar más detenidamente la relación entre variables que el investigador crea importantes y conveniente en el estudio.

Finalmente, diremos que la exploración nos permitió proporcionar un recurso para el análisis de los datos, aunque queda la inquietud del investigador explorar con detenimiento otras variables de interés e identificar técnicas para obtener conclusiones que reflejen el problema de manera integral. El estudio que se realiza es limitado, ya que solo se presenta el estudio de ciertas variables y con fines de motivar para incentivar y con la ayuda de un software obtener los resultados deseados. Cada vez que nos adentramos en la aplicación de las técnicas va adquiriendo el estudio más complejidad y es el reto que nos proporcionan las investigaciones.

Bibliografía

[1] Arrondo, Vicente Manzano (1997) Inferencia Estadística. Aplicaciones con SPSS / PC+. GRUPO EDITOR ALFA OMEGA, S.A. de C.V. México.

[2] Aznar, Antonio y Trivez, Francisco Javier (1993). Métodos de Predicción en Economía I. Editorial Ariel, S.A. Barcelona. 1ª. Edición.

[3] González, Cástor Guisande, Vaamonde Liste, Antonio.(2006) Tratamiento de Datos. Grupo Editor Díaz de Santos. España.

[4] Cuadras Avellana, Carlos M.^{a} (1981). Métodos de Análisis Multivariante. Editorial EUNIBAR, Barcelona, España.

[5] Greenacre, Michael.(2003). La práctica del análisis de correspondencias. Editorial Rubes Editorial, España.

[6] http://econometria.files.wordpress.com/2009/04/curso-basico-de-analisis-estadistico-en-spss

[7] http://personal.us.es/analopez/aed

[8] Peña, Daniel. (2002). Análisis Multivariante. Editorial McGraw Hill. España.

PARTE III

ANEXO

Invitación.

III Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos.

Noviembre 2013.

Comité Organizador

Giovanni Sanabria Brenes
(co-coordinador general)
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Félix Núñez Vanegas
(co-coordinador general)
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Greivin Ramírez Arce
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Dr. Jesús Humberto Cuevas Acosta
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México.

Comité Científico

Comité Científico Internacional

Dra. Carmen Batanero Bernabeu
Universidad de Granada
Coordinadora del Grupo de Investigación sobre Educación Estadística, España
Dr. José Miguel Contreras García
Universidad de Granada, España
Dr. Jesús Humberto Cuevas Acosta
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México
Dr. Mario Olguin Scherffig
Universidad de las Américas
presidente de la International Organitation for a Statistical Culture, Chile
Dr. Sergio Hernández González
Universidad Veracruzana
vicepresidente de la Asociación Mexicana de Estadística
M.Sc. Pedro Ramos,
Universidad de El Salvador

Comité Científico Local

Dr. Javier Trejos Zelaya
Universidad de Costa Rica
Dr. Santiago Cambronero Villalobos
Universidad de Costa Rica
Dr. Pedro Méndez Hernández
Universidad de Costa Rica
M.Sc. Marcela Alfaro Córdoba
Universidad de Costa Rica
M.Sc. Marcela Alfaro Córdoba
Universidad de Costa Rica
M.Sc. Giovanni Sanabria Brenes
Instituto Tecnológico de Costa Rica
M.Sc. Félix Núñez Vanegas
Instituto Tecnológico de Costa Rica
MSc. Greivin Ramírez Arce
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Introducción

La Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR) tiene el agrado de invitar a los docentes de primaria, secundaria y de universidad al III **Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos** (III EDEPA) a realizarse los días 27, 28 y 29 de noviembre de 2013 en Costa Rica, sede del ITCR ubicada en Cartago.

El propósito central del evento es rescatar, a través de conferencias, talleres, ponencias, reportes de investigación ycharlas, entre otras actividades, la importancia que tienen la enseñanza de estos tópicos en un mundo cada vez más competitivo e informatizado. Esperamos contar con aportes pedagógicos sobre probabilidad y estadística, particularmente relacionados con los temas propuestos en los nuevos programas del Ministerio de Educación de Costa Rica, y propuestas que tengan que ver con el incipiente campo de la didáctica del análisis de datos.

I.11 Objetivos Generales

1. Evidenciar los esfuerzos realizados para el mejoramiento de la enseñanza de la estadística, probabilidad y análisis de datos, en primaria, secundaria y nivel universitario.
2. Incentivar al participante a realizar investigaciones cuantitativas utilizando la estadística, la probabilidad y el análisis de datos.
3. Constituir un espacio de crítica, debate y comunicación sobre el estado actual y desarrollo reciente de la investigación en Didáctica de la Estadística, de la Probabilidad y del Análisis de Datos a nivel nacional e internacional.
4. Establecer un grupo de trabajo interesado en fomentar el mejoramiento de la enseñanza de la estadística y probabilidad en primaria y secundaría.

I.12 Temática del evento

La temática del III EDEPA incluye los temas propuestos en los nuevos programas del **Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.**

Idioma oficial: Español

Los temas son:

- La resolución de problemas en la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística.

- Generación de una cultura estadística en la comunidad educativa nacional.
- El papel del contexto y de la evaluación en la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística.
- Las creencias y mitos sociales sobre probabilidad y estadística.
- Didáctica de la Estadística.
- Didáctica de la Probabilidad.
- Didáctica del Análisis de Datos.
- Experiencias docentes y propuestas de trabajo en la enseñanza de la Probabilidad, la Estadística y el Análisis de Datos.
- Aplicaciones prácticas de la Probabilidad, la Estadística y el Análisis de Datos.
- Uso de la tecnología en la enseñanza de la Probabilidad, la Estadística y el Análisis de Datos.

I.13 Actividades del III EDEPA

EL III EDEPA ofrecerá las siguientes actividades:

- **Conferencias**. El encuentro contará con al menos dos conferencias plenarias y varias conferencias paralelas dictadas por expositores de reconocido prestigio internacional.. Tendrán una duración de 50 minutos.
- **Ponencias**. Se aceptarán reportes de investigaciones culminados o en proceso, propuestas de enseñanza y comunicaciones de experiencias obtenidas sobre la temática del evento. Las ponencias tienen un tiempo máximo asignado de 25 minutos, de los cuales cinco minutos son para evacuar dudas de los participantes.
- **Talleres**. El evento ofrecerá talleres sobre manejo de programas de cómputo especializado en estadística y análisis de datos. También habrá actividades de orientación didáctica. Los talleres tendrán una duración variable de hora y media, tres horas o cuatro horas y media, según lo solicite el proponente.
- **Actividades de integración**. En virtud de que el evento también busca promover la integración e interacción positiva entre los participantes, se tienen planeadas diversas actividades para ese fin como juegos y concursos.

I.14 Lineamientos para la presentación de trabajos

Los interesados en presentar trabajos en el III EDEPA, para ser sometidos al arbitraje por parte del comité científico del evento, deberán enviar su artículo completo editado en Microsoft Office Word o en formado PDF a la dirección **edepa_articulos@itcr.ac.cr**. La extensión máxima de los artículos es de 15 páginas y debe seguir el siguiente formato:

- La Primera página debe incluir los siguientes elementos en el orden en que aparecen
  - Título: El título debe ser representativo del trabajo. Título en negrita, en mayúscula solo la primera letra de cada palabra.
  - Autor(es): Debe aparecer el nombre completo del autor o los autores sin nombramiento o grado académico. Se debe agregar notas al pie de página que indiquen la institución donde laboran, el país de procedencia y el correo electrónico de los autores.
  - Resumen: Un breve resumen del trabajo, este resumen debe contener entre 100 y 120 palabras.
  - Abstract: Traducción del resumen al inglés.
  - Palabras clave: Se deben poner al menos tres palabras clave que identifiquen su trabajo, estas palabras ayudan a los buscadores a encontrar su artículo cuando se hace una búsqueda en Internet. Estas

se pueden tomar de la lista que se provee en la página web http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/webindice/palabras/palabras_claves.htm o pueden agregarse palabras nuevas. El primer renglón debe contener solo la palabra "Resumen".

  - Keywords: Traducción de las palabras clave al inglés.
  - Modalidad: Conferencia, ponencia o taller.

- Cuerpo del texto:
  - Introducción: Una introducción del artículo.
  - Secciones: Es estas secciones se desarrollará el trabajo y dependen de cada artículo, en artículos de estudios científicos por lo general tiene como secciones: Justificación (aunque a veces esta se funde en la introducción), Marco Teórico, Metodología, Análisis de los datos.
  - Fuente preferiblemente Times New Roman de 12 puntos. El texto de ser justificado a la izquierda, interlineado sencillo, párrafos separados por 10 puntos.
  - Todas las páginas deben tener como encabezado: “III Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos”
- Conclusiones: Donde se muestran las principales conclusiones del trabajo.
- Márgenes: superior e inferior de 2,5 cm, izquierdo y derecho de 3 cm.
- Bibliografía: Aquí se deben poner la información bibliográfica de todos los trabajos que hayan sido citados en el artículo y sólo estos (es decir, no se deben poner en la bibliografía trabajos que no hayan sido citados dentro del artículo).

  La bibliografía debe estar ordenada por orden alfabético y se debe escribir conforme al documento Bezos, Javier."Bibliografías y su ortotipografía”, http://www.tex-tipografia.com/archive/bibliografia-iso.pdf. Por ejemplo,

  [1] Atallah,M; Blanton, M. Algorithms and theory of computation handbook. General concepts and techniques. Chapman & Hall.2010. CRC applied algorithms and data structures series. 2nd ed.

  [2] Cohen, H A Course in Computational Algebraic Number Theory. Springer-Verlag. 1993.

  [3] Bach, E; Shallit, J. Algorithmic Number Theory, Vol. 1: Efficient Algorithms. Cambridge, MA: MIT Press. 1996.

  [4] Jebelean, J. “Comparing several GCD algorithms”. En ARITH-11: IEEE Symposium on Computer Arithmetic. IEEE, New York (1993), 180-185.

  [5] Knuth, D. The Art of Computer Programming. Volume 1: Fundamental Algorithms. Addison-Wesley. 2nd ed. 1981.

  [6] Knuth, D. The Art of Computer Programming. Volume 2: Seminumerical Algorithms. Addison-Wesley. 2nd ed. 1981.

  [7] Norton, G. “A shift-remainder GCD algorithm”. Proceedings of the 5th international conference, AAECC-5 on Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes (1987). p.350-356.

  [8] Stepanov, A. “Notes on Programming”. En http://www.stepanovpapers.com (consultada el 9 de abril, 2010).

  [9] Weilert, A. “(1 +i)-ary GCD Computation in Z[i] as an Analogue to the Binary GCD Algorithm”.J. Symbolic Computation (2000) 30, 605-617.

- Citas textuales: Si una cita textual sobrepasa las 40 palabras debe ponerse en un párrafo aparte con un margen derecho e izquierdo de 1 cm.

I.15 Cronograma propuesto del III EDEPA

<table>
<tr><th>Hora</th><th>Miércoles 27 de noviembre</th><th>Jueves 28 de noviembre</th><th>Viernes 29 de noviembre</th></tr>
<tr><td>8am a 8:50am</td><td rowspan="2">Inscripción y desayuno</td><td>Conferencia</td><td>Conferencia</td></tr>
<tr><td>9am a 9:30am</td><td>Ponencias</td><td>Ponencias</td></tr>
<tr><td>9:40 am a 10: 10 am</td><td>Inauguración</td><td>Ponencias</td><td>Ponencias</td></tr>
<tr><td>10:10 am a 10:40am</td><td rowspan="2">Conferencia inaugural</td><td colspan="2">Refrigerio</td></tr>
<tr><td>10:40am a 11:10am</td><td>Ponencias</td><td rowspan="2">Conferencias paralelas / ponencias</td></tr>
<tr><td>11:20am a 11:50am</td><td>Ponencias</td><td>Ponencias</td></tr>
<tr><td>12:00md a 1:30 pm</td><td colspan="3">Almuerzo</td></tr>
<tr><td>1:30pm a 3pm</td><td>Talleres</td><td>Talleres (continuación)</td><td>Mesa redonda</td></tr>
<tr><td>3pm a 3:30pm</td><td colspan="3">Refrigerio</td></tr>
<tr><td>3:30pm a 5pm</td><td>Talleres (continuación)</td><td>Actividades de integración</td><td>Conferencia de Clausura (Entrega de Certificados)</td></tr>
</table>

I.16 Proceso de inscripción y costos

Tipo de participación	Inscripción temprana (antes del 1°de julio)	Inscripción general
Ponente nacional	¢20 000	¢20 000
Ponente extranjero	$ 100	$ 100
Estudiante nacional	¢15 000	¢20 000
Estudiante extranjero	$ 70	$ 90
Participante nacional	¢25 000	¢30 000
Participante extranjero	$ 110	$ 130

Observaciones:

- La fecha límite para inscribirse es el 1°de noviembre. Luego de esta fecha solo se aceptarán inscripciones si hay cupo disponible. Así, después de dicha fecha puede consultar por cupo al correo edepa@itcr.ac.cr.

- Los precios de ponente son para aquellos expositores que desean participar en todo el evento y recibir título de participación. Aquellos ponentes que únicamente asistan a exponer su trabajo se les invita a que participen gratuitamente de las actividades programadas el día de su visita, en agradecimiento a la colaboración brindada.

- La cuota de inscripción incluye: 6 refrigerios (mañana y tarde), titulo de participación, gafete, programa de actividades y derecho de asistencia a las actividades incluidas en el programa.

I.16.1 Proceso de inscripción:

- **PRIMERO**: Deposite el monto indicado en alguna de la siguientes cuentas.

- Nacionales: realice el depósito en la siguiente cuenta a nombre de la FUNDACION TECNOLOGICA DE COSTA RICA.

BANCO NACIONAL DE COSTA RICA

Tipo	**Moneda**	**Cuenta Cliente**	**Cuenta Corriente**
Corriente	**Colones**	**15107510010039596**	**100-01-075-003959-4**

- Extranjeros: realice el depósito en la siguiente cuenta a nombre de la FUNDACION TECNOLOGICA DE COSTA RICA.

BANCO NACIONAL DE COSTA RICA

Tipo	**Moneda**	**Cuenta Cliente**	**Cuenta Corriente**
Corriente	**Dólares**	**15107510026000291**	**100-02-075-600029-3**
Banco:	**Banco Nacional de Costa Rica**		
Dirección:	**Costado sureste de la Catedral, Cartago, Costa Rica**		
Swift:	**BNCRCRSJ**		
Teléfono:	**2550-1400**		
PO Box	**10015-1000 San José**		

- **SEGUNDO**. Envíe un e-mail a edepa@itcr.ac.cr con la imagen del comprobante escaneada. Si no recibe la confirmación en una semana, favor reenviarlo hasta recibir confirmación. Conserve el comprobante del depósito para presentarlo al formalizar la inscripción en día de inicio del III EDEPA.

I.17 Alojamiento

Se recomiendan los siguientes hoteles cercanos al lugar del evento:

Hotel	Distancia al lugar del evento	Pagina web
Casa Aura Bed & Breakfast	1.5 km	`www.casaaura.com/`
Hotel El Guarco	5 km	`www.hotelelguarco.com/`
Hotel Rio Perlas Spa And Resort	19 km	`www.rioperlasspaandresort.com/`
Grandpa's Hotel Cartago	10 km	`www.grandpashotel.com/`

I.18 Actividades Pre-encuentro

Con el objetivo de difundir y motivar a la comunidad nacional a que participe en el III EDEPA, como ponente o participante, se realizarán una serie de charlas y talleres sobre la temática del evento. Estas actividades serán avisadas oportunamente. Para obtener información de las actividades pre-encuentro favor solicitar que se le incluya en la base de datos del III EDEPA al e-mail **edepa@itcr.ac.cr**.

I.19 Información

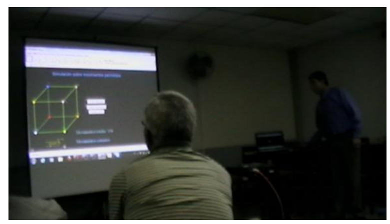
Si desea recibir información sobre las novedades en la organización del III EDEPA favor solicitar que se le incluya en la base de datos del III EDEPA al e-mail `edepa@itcr.ac.cr`

Para cualquier duda del evento, favor escribir a `edepa@itcr.ac.cr`

Anexo: Fotografías del II EDEPA






Anexo: Fotografías de la I Escuela de Verano