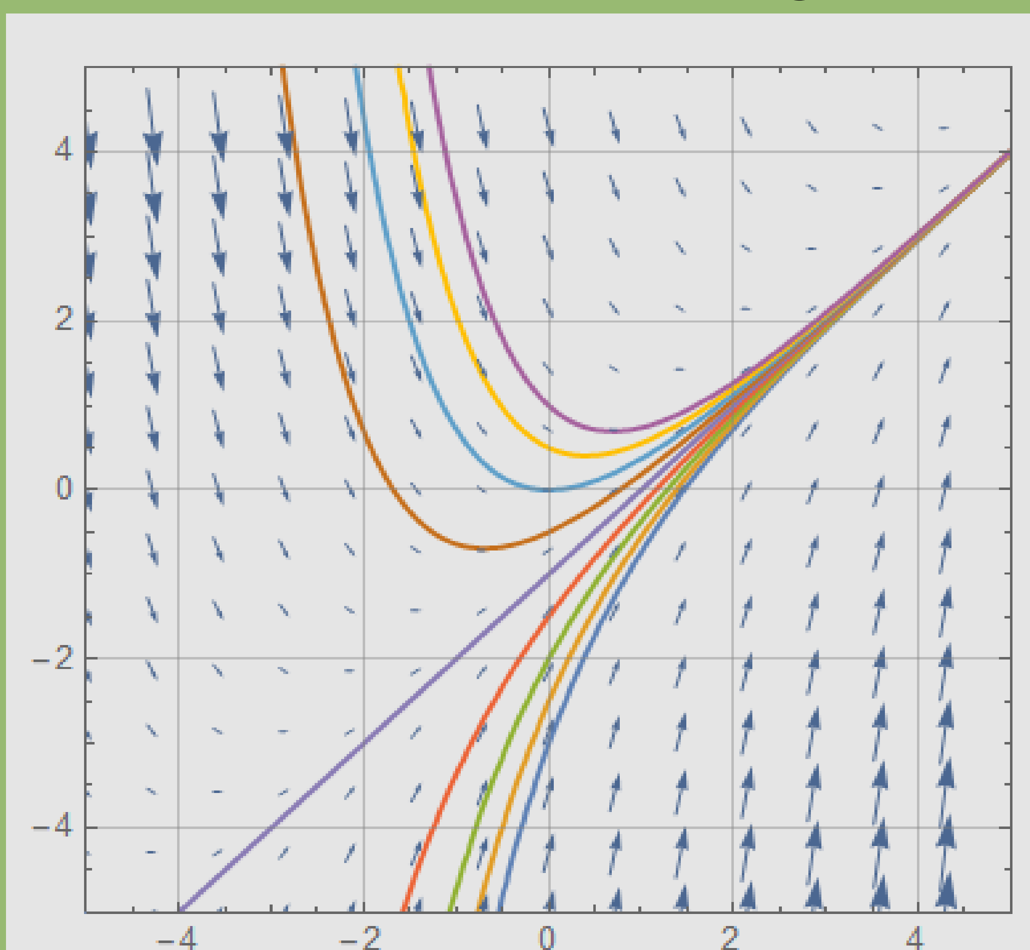
Ecuaciones Diferenciales ordinarias de primer orden

con apoyo interactivo y videos ilustrativos

M.Sc. Norberto Oviedo Ugalde

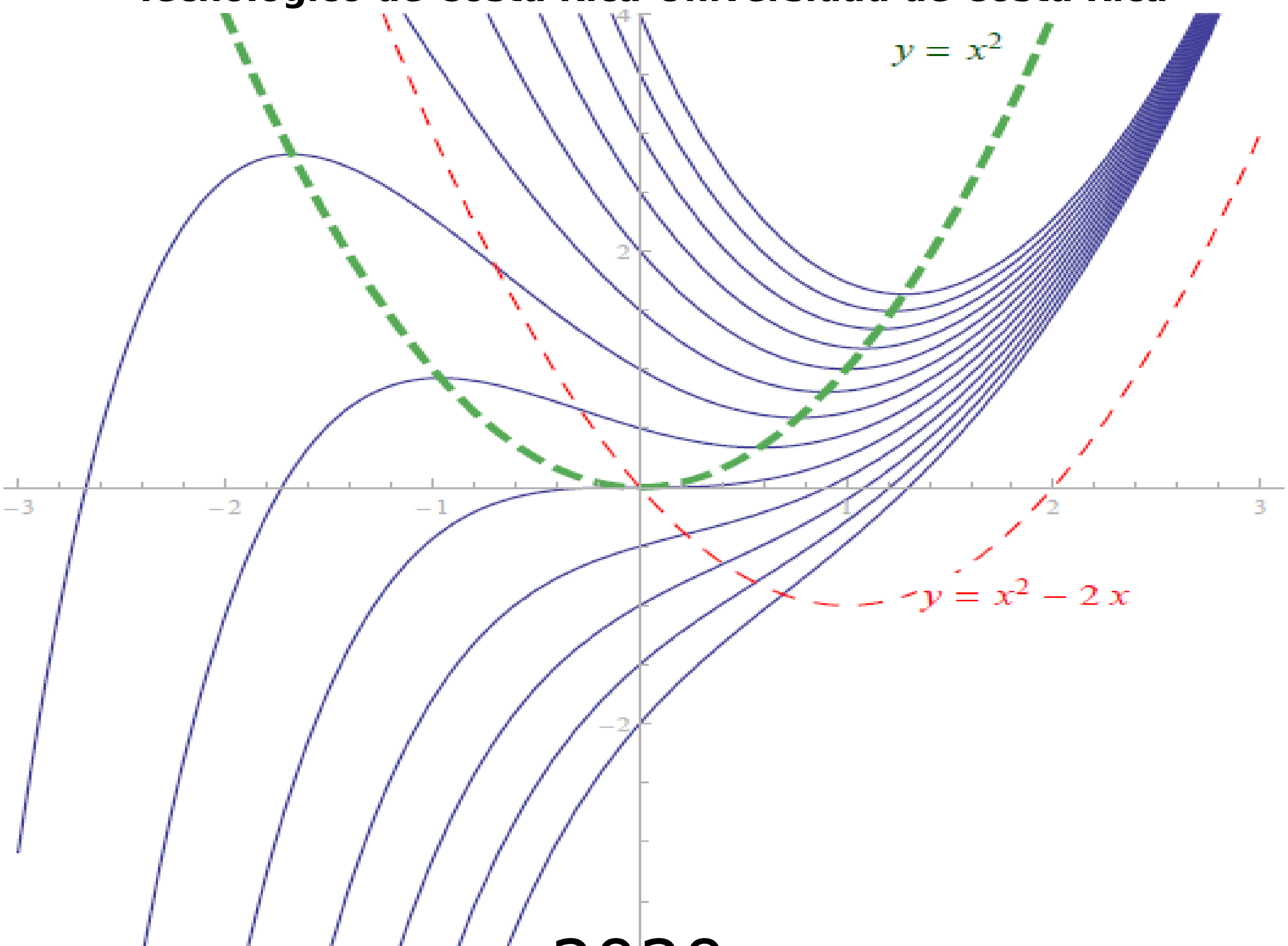


2020

Ecuaciones Diferenciales ordinarias de primer orden

con apoyo interactivo y videos ilustrativos

M.Sc. Norberto Oviedo Ugalde
Tecnológico de Costa Rica-Universidad de Costa Rica



2020

Revista digital Matemática Educación e Internet (https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Correo Electrónico: noviedo@itcr.ac.cr
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Apdo. 159-7050, Cartago
Teléfono (506)25502015
Fax (506)25502493

Oviedo Ugalde, Norberto Gerardo.
Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con apoyo interactivo y videos ilustrativos. 1ra ed.
– Escuela de Matemática,Instituto Tecnológico de Costa Rica. 2020.
159 pp.
ISBN Obra Independiente: 978-9930-541-66-1
1. Elementos básicos y teorema de existencia y unicidad. 2. Ecuaciones diferenciales en variables separables y homogéneas. 3. Ecuaciones diferenciales exactas y con factor integrante. 4.Ecuaciones diferenciales lineales y de Bernouilli. 5. Ecuaciones diferenciales ordinarias con variable ausente de segundo orden. 6. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden especiales.

Revista digital
Matemática, Educación e Internet.
https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/.

Oviedo Ugalde, Norberto
Contenido,
diseño editorial y edición LaTeX,
aplicaciones Wolfram CDF
y gráficos (Wolfram Mathematica 9.0, Inkscape).

Citar como:

Oviedo Ugalde, N. *Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con apoyo interactivo y videos ilustrativos.* (2020) 1ra ed. [ebook] Cartago, Costa Rica. Revista digital, Matemática, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/. [Recuperado el febrero, 2022].

Índice general

Prólogo

El presente libro comprende el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden mediante aspectos teóricos, ejemplos ilustrativos, ejercicios propuestos y asimismo incluye links hacia aplicaciones de carácter interactivo elaboradas en software Mathematica y guardadas bajo la versión gratuita Wolfram CDF player. Las "aplicaciones interactivas" son un archivo `.cdf` que se ejecuta con WOLFRAM CDF PLAYER y requieren haber instalado en la computadora esta aplicación WOLFRAM CDFPLAYER. Además de las aplicaciones en CDF player se incluye links y códigos QR que llevan a videos ilustrativos de ejercicios y ejemplos resueltos. El objetivo principal del libro es servir como material teórico-práctico en el estudio de los distintos tópicos de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (EDO1), donde las aplicaciones en software y videos sean utilizadas como herramienta de apoyo para complementar dicho estudio y entendimiento de una forma más dinámica e interactiva.

Se divide en seis capítulos que comprenden el estudio de elementos básicos y teorema de exitencia y unicidad, ecuaciones diferenciales en variables separables y homogéneas, ecuaciones diferenciales exactas y con factor integrante, ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y de Bernoulli, ecuaciones diferenciales con variable ausente y cambios de variable, finalmente el capítulo de ecuaciones diferenciales especiales (Ricatti, Lagrange y Clairaut).

Se puede acceder desde la página principal de la revista digital de Matemática del Tecnológico de Costa Rica, `https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/`. mediante dos opciones a saber: en la "opción 1", el libro viene con un folder CDF con las aplicaciones interactivas .cdf. y mientras en la "opción 2" el libro solo es un pdf con ligas a Internet (la liga descarga la aplicación interactiva desde Internet, y el CDF player la ejecuta de forma directa sin necesidad de descarga de la carpeta con dichos archivos).

PROF. NORBERTO OVIEDO UGALDE.
noviedo@itcr.ac.cr, noviedo2008@gmail.com
Escuela de Matemática
Revista digital Matemática, Educación e Internet
`https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/`
Instituto Tecnológico de Costa Rica. Cartago, Diciembre 2019.

Prof: M.Sc. Norberto Oviedo Ugalde.

Capítulo 1:

Elementos básicos y teorema de existencia unicidad en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

1 — Elementos básicos y teorema de existencia y unicidad en EDO1

1.0.1 Objetivos Específicos

- Comprender los elementos básicos asociados al tópico de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Estudiar mediante ejemplos concretos e ilustrativos el teorema de existencia y unicidad.

1.0.2 Contenidos

- Definición de ecuación diferencial.
- Orden y grado de una ecuación diferencial.
- Clasificación de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Solución y tipos de solución en una ecuación diferencial ordinaria.
- Problema de valor inicial (PVI) y problema de valor frontera (PVF).
- Teorema de existencia y unicidad en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

1.1 Conceptos Básicos en Ecuaciones Diferenciales

A continuación se muestran los aspectos teóricos relacionados con los elementos básicos en las ecuaciones diferenciales.

1.1.1 Definición de Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)

Definición 1.1

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que relaciona una función desconocida (la variable dependiente), las variables de las que depende (variables independientes) y sus derivadas respecto de estas variables independientes.

En particular si dicha ecuación contiene derivadas respecto a una sola variable independiente se le denomina **Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)** y si contienen derivadas respecto a dos o más variables independientes se le llama **Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP)**.

Ejemplo 1.1

Algunos ejemplos de **ecuaciones diferenciales ordinarias**.

a) $\dfrac{dy}{dx}+5y=e^x$: EDO de variable dependiente y, variable independiente x.
b) $y''+y-2x=0$: EDO de variable dependiente y, variable independiente x.
c) $\dfrac{dx}{dt}=2x-t^3$: EDO de variable dependiente x, variable independiente t.

Ejemplo 1.2

Algunos ejemplos de **ecuaciones diferenciales en derivadas parciales** .

a) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial u}{\partial x}$: EDP de variable dependiente u, variable independiente y,x
b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$: EDP de variable dependiente u, variable independiente x,y
c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial t}$: EDP de variable dependiente u, variable independiente x,t

1.1.2 Orden y grado de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Definición 1.2

El **orden de una EDO** se define por el orden de la más alta derivada en la ecuación dada. En general, el $n-$ésimo orden de una EDO puede simbolizarse por

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0, \tag{1.1}$$

donde F es una función conocida.

Ejemplo 1.3

Considere las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias y determinar que orden tienen cada una de ellas.

a) $y'' - 5y' + 3y^3 = 0.$
b) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x.$
c) $M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

Respuestas:

(a) la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 3y^3 = 0$ es de orden 2.
(b) la ecuación diferencial $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x$ es de orden 3.
(c) toda ecuación de la forma $M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$ es de orden 1.

Definición 1.3

El **grado de una ecuación diferencial ordinaria** se define por la potencia sobre $y^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$, que tiene la más alta derivada, es decir, la potencia de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación dada.

Ejemplo 1.4

Considere las siguientes ecuaciones diferenciales y determine su grado.

a) $y' + 2 = y$ es una EDO de **primer grado** pues solo aparece y' y su grado es uno.
b) $xy'' + 6x = (y')^2$ es una EDO de **primer grado** pues la expresión de mayor orden es y'' y su grado es uno.
c) $(y')^3 = x(y'')^5 + (y^{(iv)})^3$ es una EDO de **tercer grado** ya que la expresión de mayor orden es $y^{(iv)}$ y su potencia asociada es 3.

1.1.3 Clasificación de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Definición 1.4

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es **lineal** si y solo si puede escribirse de la siguiente forma :

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = g(x) \tag{1.2}$$

donde $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), g(x)$ son funciones reales continuas que dependen sólo de la variable independiente x y definidas en un intervalo abierto común I, con $a_n \neq 0$ para toda $x \in I$. Una ecuación diferencial que no puede escribirse de la forma 1.2 es **No lineal**.

Dentro de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales se distinguen:

- ecuación diferencial lineal **homogénea** cuando el término independiente $g(x) = 0$.

- ecuaciones diferenciales lineales con **coeficientes constantes**, cuando todos las funciones $a_i(x) \quad \forall i = 1, \ldots, n$ son funciones constantes.

- ecuaciones diferenciales lineales con **coeficientes variables** si alguna función $a_i(x)$ no es una función constante, sino una dependiente solo de x.

Ejemplo 1.5

Considere las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias y clasificarlas en EDO lineal (con coeficientes contantes o variables) y no lineal.

(a) $y'' - 2y' + y = 0$
(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} = e^x.$
(c) $x^3y''' - x^2y'' + 3xy' + 5y = x.$
(d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + (x+1)\dfrac{dy}{dx} + 2 = 0.$
(e) $e^xy'' + 2xy = 0.$
(f) $yy'' - 2y' = x.$
(g) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} y = 0.$
(h) $y''' + y^2 = \cos x.$

Respuestas:

De acuerdo a las definiciones dadas anteriormente, se tiene que las ecuaciones diferenciales (a) y (b) son lineales con coeficientes constantes. Las ecuaciones diferenciales $(c), (d)$ y (e) son lineales con coeficientes variables. Las ecuaciones diferenciales $(f), (g)$ y (h) son no lineales.

Definición 1.5

Si una ecuación diferencial de orden n dada en la forma $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ puede expresarse de manera que la derivada de orden n aparezca despejada, es decir:

$$y^{(n)} = G\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{1.3}$$

entonces se dice dicha ecuación diferencial esta representada en su **forma normal**.

Ejemplo 1.6

Para cada una de las ecuaciones diferenciales ordinarias dadas, escribir en forma normal las ecuaciones diferenciales:

a) $yy'' - 2y' = x$.

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} x = 0$.

c) $y''' + y^2 = \cos x$.

Soluciones

Se despeja la derivada más alta en cada una de las ecuaciones diferenciales del ejemplo y obtenemos su forma normal:

(a) $yy'' - 2y' = x$, por tanto $y'' = 2\dfrac{y'}{y} + \dfrac{x}{y}$ con $y \neq 0$.

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} x = 0$, por tanto $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\operatorname{sen} x$.

(c) $y''' + y^2 = \cos x$, por tanto $y''' = -y^2 + \cos x$.

1.1.4 Solución de una ecuación diferencial ordinaria

Resolver una ecuación diferencial ordinaria, $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ de orden n, es hallar una expresión para la función $y(x)$ que satisfaga la relación de igualdad que determina dicha ecuación, $\forall x \in I$ un intervalo común.

Definición 1.6

Se llama **solución de una ecuación diferencial ordinaria** $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ en un intervalo J a una función $\varphi(x)$ definida en J que, sustituida en la ecuación junto con sus derivadas, la verifica en dicho intervalo, es decir:

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi(x)', \ldots, \varphi(x)^{(n)}\right) = 0, \quad \forall x \in J \tag{1.4}$$

Nota: Es importante rescatar que una solución puede ser definida en alguno de los siguientes intervalos J: $]\alpha, \beta[$, $]\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta[$, $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \infty[$, $]\alpha, \infty[$, $]-\infty, \beta]$, $]-\infty, \beta[$ y $]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$; donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha < \beta$.

Ejemplo 1.7

Se puede comprobar que la función $\varphi(x) = e^{5x}$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y' = 5y$ en el intervalo $]-\infty, \infty[$.

En efecto, derivando $\varphi(x) = e^{5x}$ respecto de x, se obtiene $\varphi'(x) = 5e^{5x}$, luego sustituyendo en la ecuación diferencial se verifica la ecuación diferencial: $\varphi'(x) = 5e^{5x} = 5\varphi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.8

Considere la función $\varphi(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$ y verificar qué es solución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden $y'' - \dfrac{2}{x^2}y = 0, \quad \forall x \neq 0$.

Derivando dos veces la función $\varphi(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$ respecto de x, se tiene:

$$\varphi'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}, \quad \varphi''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, se verifica:

$$2 - \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) = 2 - \frac{2}{x^3} - 2 + \frac{2}{x^3} = 0, \ \forall x \neq 0.$$

Por tanto, $\varphi(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$ es solución en cualquier intervalo que no contenga al cero.

Ejemplo 1.9

Se puede comprobar que toda función de la forma $\varphi(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - y' - 2y = 0$ para cualquier valor de las constantes C_1 y C_2.

En efecto, derivando dos veces $\varphi(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$, se tiene que:

$$\varphi'(x) = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{2x},$$
$$\varphi''(x) = C_1e^{-x} + 4C_2e^{2x},$$

y sustituyendo se verifica en la ecuación diferencial:

$$C_1e^{-x} + 4C_2e^{2x} + C_1e^{-x} - 2C_2e^{2x} - 2C_1e^{-x} - 2C_2e^{2x} = 0. \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.10

Verifique que la función $\phi(x) = \dfrac{c}{x} + 1$, con $x > 0$ y c una constante real es una solución de la ecuación diferencial $x\dfrac{dy}{dx} + y = 1$.

En efecto, si sustituimos ϕ en el lugar de y en la ecuación $x\dfrac{dy}{dx}+y=1$:

$$x\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{x}+1\right)+\left(\frac{c}{x}+1\right)=1$$

, luego simplificando obtenemos:

$$x\left(-\frac{c}{x^2}\right)+\left(\frac{c}{x}+1\right)=1$$

Por lo que $\phi(x)=\dfrac{c}{x}+1$ es solución de la ecuación diferencial

$$x\frac{dy}{dx}+y=1$$

.

Observe que el intervalo en el cual la función ϕ está definida $I=]0,+\infty[$ excluye el punto de discontinuidad $x=0$. De la misma forma podemos ver que la función definida $\phi(x)=\dfrac{c}{x}+1$ para $x<0$ también es solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo 1.11

La ecuación diferencial $(y')^2+1=0$ no tiene solución real, pues no existe una función real y derivable que la satisfaga, es decir, no es posible se cumpla que exista $y(x)$ tal que $(y')^2$ sea -1.

Ejemplo 1.12

Compruebe que si se deriva implícitamente la relación $x^2+y^2=4$ con respecto a la variable x y si se sustituye en la ecuación diferencial $y'=-\dfrac{x}{y}$, dicha relación satisface tal ecuación diferencial para $-2<x<2$.

Derivando implícitamente con respecto a x la relación $x^2+y^2=4$, con respecto a la variable x se tiene:

$$2x+2yy'=0,$$

,es decir,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0.$$

Por tanto $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ $(y\neq 0)$, de esta forma se comprueba que tal realción verifica la ecuación diferencial para $-2<x<2$ pues $y=\pm\sqrt{4-x^2}$.

Ejemplo 1.13

Sabiendo que en la relación o familia de curvas

$$\operatorname{sen} x + y \ln y = C \cdot y$$

la función implícita y dependiente de x (con $y > 0$), y con C una constante arbitraria. Compruebe que ésta es solución implícita de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{y \cos x}{\operatorname{sen} x - y}$$

Si en la familia de curvas dada $\operatorname{sen} x + y \ln y = C \cdot y$ despejamos la constante C, se tiene

$$C = \frac{\operatorname{sen} x + y \ln y}{y} \qquad [\mathbf{1}]$$

Ahora derivando **[1]** implícitamente con respecto a la variable x, tenemos

$$0 = \frac{(\cos x + y' \ln y + y')y - (\operatorname{sen} x + y \ln y)y'}{y^2} \Leftrightarrow 0 = y \cos x + (y - \operatorname{sen} x)y'$$

de donde simplificando y reordenando términos se obtiene la ecuación diferencial asociada

$$y' = \frac{y \cos x}{\operatorname{sen} x - y}$$

Como se observa en los ejemplos anteriores, las soluciones de una ecuación diferencial pueden venir dadas como una función o una relación que verifica la ecuación. De las cuales llamaremos **soluciones explícitas** aquellas en donde la solución es una relación de la forma $y = y(x)$ y **soluciones implícitas** aquellas en donde la solución es una relación de la forma $g(x, y) = 0$. A continuación se detallan dichas definiciones.

Definición 1.7 Solución Explícita de una EDO de Primer Orden

Sea $F(x, y, y') = 0$ una EDO de primer orden. La función $y = \phi(x)$ es llamada una solución explícita si se satisface que $F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0$ en intervalo común J. Algunos ejemplos de este tipo de soluciones son los mostrados en los ejemplos: **1.7**, **1.8**, **1.9** y **1.10**.

Definición 1.8 Solución Implícita de una EDO de Primer Orden

Una relación de la forma $\psi(x, y) = 0$ se dice que es una solución implícita de $F(x, y, y') = 0$ en cierto intervalo I si para $y = \phi(x)$ se satisface $F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0$.

En el ejemplo 1.12, la relación $x^2 + y^2 - 4 = 0$ define dos funciones en el intervalo $-2 < x < 2$: $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ (soluciones explícitas). También obsérvese que cualquier relación $x^2 + y^2 - C = 0$ con $C \in \mathbb{R}$ satisface la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{y}$ para cualquier constante C (solución implícita).

Ejemplo 1.14

La relación $y - \ln y = x^2 + 1$ es una solución implícita de la EDO $y' = \dfrac{2xy}{y-1}$ para $y > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, pues, derivando la relación dada con respecto a x, se tiene $y' - \dfrac{y'}{y} = 2x$, es decir, $y'y - y' = 2xy$. Luego como $y' = \dfrac{2xy}{y-1}$ y sustituyendo en $y'y - y' = 2xy$ se verifica dicha igualdad para $y > 0$ y $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.15

Se puede verificar que $y^2 - x^3 + 8 = 0$ es solución implícita de la ecuación diferencial $y' = \dfrac{3x^2}{2y}$ en $]2, +\infty[$.

Observe que al derivar la expresión $y^2 - x^3 + 8 = 0$ respecto de la variable x se tiene $2yy' - 3x^2 = 0$ de donde al despejar y'

$$y' = \frac{3x^2}{2y}$$

de donde se observa que satisface la ecuación diferencial dada, pues

$$\frac{3x^2}{2y} = \frac{3x^2}{2y}$$

y además se verifica $\forall x \in\,]2, +\infty[$, ya que si despejamos y en la expresión de la solución implícita, se obtiene $y = \pm\sqrt{x^3 - 8}$, la cual esta definida para $x \geq 2$.

Ejemplo 1.16

Considere la función definida por $y = x \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt$ y comprobar es solución de la ecuación diferencial $xy' = y + x \operatorname{sen}(x)$.

Para calcular y' se usa **teorema fundamental de cálculo**[a] de donde

$$y' = \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt + \operatorname{sen}(x).$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene

$$xy' = x\left(\int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt + \operatorname{sen}(x)\right) = y + x \operatorname{sen}(x).$$

[a] Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ entonces $(\int_0^x f(t)dt)' = f(x)$

Ejemplo 1.17

Muestre que la función

$$y(x) = 1 + e^{-x}\int_0^x e^{\sqrt{t}}dt \quad [1]$$

es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + y &= 1 + e^{-x+\sqrt{x}} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Claramente en la función dada $y(0) = 1 + e^{-0}\int_0^0 e^{\sqrt{t}}dt = 1,$ donde se comprueba que satisface la condición inicial. Posteriormente usando el teorema fundamental del cálculo al calcular y' en [1], se tiene:

$$y' = -e^{-x}\int_0^x e^{\sqrt{t}}dt + e^{-x}e^{\sqrt{x}}$$

, de donde luego sustituyendo en la ecuación diferencial del P.V.I se cumple que

$$-e^{-x}\int_0^x e^{\sqrt{t}}dt + e^{-x}e^{\sqrt{x}} + 1 + e^{-x}\int_0^x e^{\sqrt{t}}dt \ = 1 + e^{-x+\sqrt{x}}$$

Puede ingresar al link `https://youtu.be/lyGaqN1Xtng` o en su defecto escaneando el código QR adjunto para visualizar explicación de tal ejemplo.

En ejemplos anteriores se ha resuelto ejercicios sobre comprobación o verificación de si cierta función, una o familia de estas es o no solución ya sea explícita o implícita de una ecuación diferencial dada, en próximos capítulos nos encargaremos del problema de hallar la solución general de una ecuación diferencial.

Ahora se aborda el problema inverso; a saber, el de **hallar la ecuación diferencial a partir de su solución general**. Para ello se ilustra tal proceso a través de los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.18

Determine una ecuación diferencial cuya solución general viene dada en forma implícita por $xy^2 = x + \frac{C}{x}$, con C constante arbitraria. Note que:

$$xy^2 = x + \frac{C}{x} \Rightarrow x^2y^2 = x^2 + C$$

Aplicando derivación implícita con respecto a x a ambos lados le lo obtenido en paso anterior, se tiene que la ecuación diferencial correspondiente es:

$$2xy^2 + 2x^2yy' = 2x$$

Ejemplo 1.19

Determine una ecuación diferencial para la siguiente familia de curvas dada por $y = A(x-B)^3$, con A, B constantes reales.

Si despejamos la constante A, es decir, $\dfrac{y}{(x-B)^3} = A$ y derivamos implícitamente con respecto a x

$$\frac{y'(x-B)^3 - 3y(x-B)^2}{(x-B)^6} = 0 \Rightarrow \frac{y'}{(x-B)^3} - \frac{3y}{(x-B)^4} = 0 \ [*]$$

Dado que ecuación diferencial buscada debe estar libre constantes A, B, al multiplicar $[*]$ por $(x-B)^4$ se obtiene $y'(x-B) = 3y \Rightarrow x - B - \dfrac{3y}{y'} = 0$. y luego derivando de nuevo implícitamente con respecto a x, se tiene $1 = \dfrac{3(y')^2 - 3yy''}{(y')^2}$, es decir, la ecuación diferencial buscada es $(y')^2 = 3(y')^2 - 3yy''$.

Puede ingresar al link `https://youtu.be/PS1f1xPbk-Y` o en su defecto escanear el código QR adjunto para visualizar explicación de tal ejemplo.

Ejemplo 1.20

Halle la ecuación diferencial cuya solución viene dada de forma implícita por la curva $\mathrm{H}: \ e^{cx} + y = x$ con c una constante real.

De forma similar al ejemplo anterior se debe obtener una ED libre de constantes, en este caso de la constante c. Para ello se procede primero derivando implícitamente la curva H con respecto a x, de donde **[1]**: $e^{cx}c + y' = 1$, luego en H despejando e^{cx} se tiene **[2]**: $e^{cx} = x - y$ además **[3]**: $c = \frac{ln(x-y)}{x}$. Ahora se sustituyen **[2]** y **[3]** en **[1]** se obtiene la ecuación diferencial de orden uno

$$(x-y)\frac{ln(x-y)}{x} + y' = 1$$

Observación 1.1 Note que en estos dos últimos ejemplos, la idea consiste básicamente en derivar las veces según cantidad de constantes que posea la solución general, así como efectuar ciertas maniobras algebraicas hasta llegar a tener una ecuación diferencial libre de constantes.

1.1.5 Tipos de soluciones en ecuaciones diferenciales ordinarias

Familia n-paramétrica de soluciones (solución general): Dada una ecuación diferencial de la forma $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ la solución de dicha ecuación diferencial que contiene n constantes arbitrarias, es decir, de la forma $g(x, y, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0$ se le conoce como familia n-paramétrica de soluciones. A este tipo de soluciones se le llama solución general.

Ejemplo 1.21

Por ejemplo $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ es solución 2-paramétrica (solución general) de la ecuación diferencial ordinaria $y'' - y' - 2y = 0$ para C_1 y C_2 constantes arbitrarias.

Ejemplo 1.22

La familia de curvas solución $y=\frac{x^2}{2}+C$ es una solución 1-paramétrica (solución general) de la ecuación diferencial $y'=x$, las cuales se muestran en la figura 1.1 para ciertos valores de C.

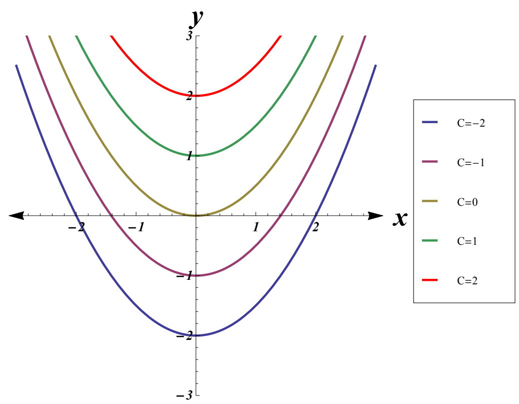


Figura 1.1: gráficas de la familia 1-paramétrica $y=\frac{x^2}{2}+C$, para $y'(x)=x$.
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 9.0.

Solución particular: es una solución de la ecuación diferencial que no contiene constantes arbitrarias y que se obtiene dando valores numéricos a las constantes de la familia n-paramétrica de soluciones. Por ejemplo para $y=\frac{x^2}{2}+C$ solución 1-paramétrica de la ecuación diferencial $y'=x$; si $C=0$, $C=-1$ se obtienen las soluciones particulares $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{x^2}{2}-1$ respectivamente y mostradas en la figura 1.2.

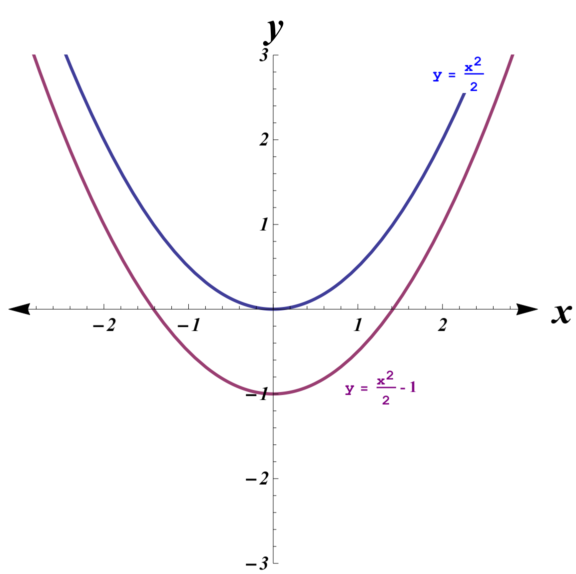


Figura 1.2: gráficas de soluciones particulares $y=\frac{x}{2}$, y $y=\frac{x}{2}-1$.
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 9.0.

Solución singular: es una solución de la ecuación diferencial que no contiene constantes arbitrarias y no esta contenida en solución general. No siempre existen; si existe, se trata de la curva llamada *envolvente* de la familia de curvas integrales definida por la familia n-paramétrica de soluciones.

Ejemplo 1.23

La función $y(x) = \dfrac{x^2}{4}$ es una solución singular de la ecuación $(y')^2 - xy' + y = 0$ en $J = \mathbb{R}$, ya que satisface dicha EDO y no puede obtenerse de sustituir C por algún valor numérico de la solución general $y(x) = Cx - C^2$.

En efecto, note que

$$\begin{aligned}
\left(\left(\frac{x^2}{4}\right)'\right)^2 - x\left(\frac{x^2}{4}\right)' + \left(\frac{x^2}{4}\right) &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 - x\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{4} \\
&= \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \\
&= -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado, al igualar $y(x) = Cx - C^2$ con $y(x) = \dfrac{x^2}{4}$ para encontrar un C en común, se determina que

$$Cx - C^2 = \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow 0 = x^2 - 4Cx + C^2.$$

Sin embargo, al cambiar C por cualquier valor numérico se determina que x debe ser fija, lo cual contradice el hecho de que x es variable. Note como en la figura 1.3 $y(x) = \dfrac{x^2}{4}$ es envolvente de las curvas solución de la familia 1-paramétrica $y(x) = Cx - C^2$.

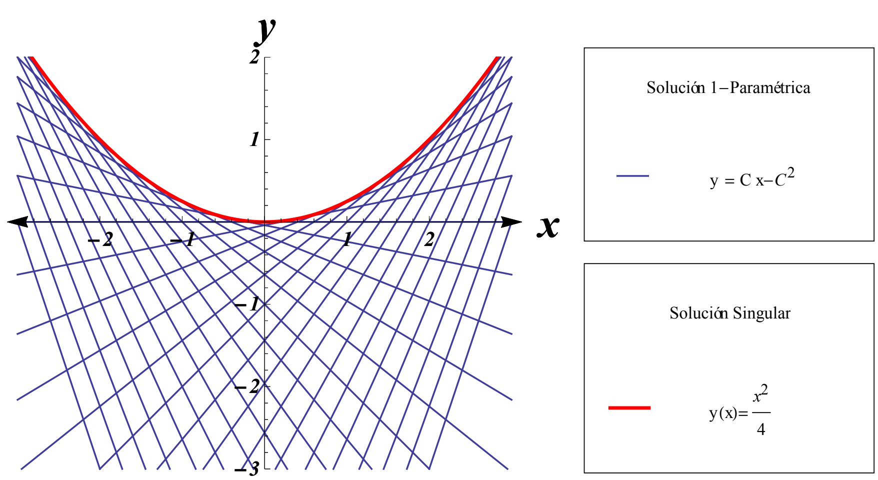


Figura 1.3: gráfica de la solución singular $y(x) = \dfrac{x^2}{4}$ y familia 1-paramétrica $y(x) = Cx - C^2$.
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 9.0.

Ejemplo 1.24

La relación $x^2+y^2=1$ es una solución singular de la ecuación $y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$, ya que satisface dicha EDO y no puede obtenerse de sustituir C por algún valor numérico de la solución general $y(x) = xC + \sqrt{1+C^2}$.

.
En efecto, note que al derivar implícitamente y con respecto a x se obtiene $2x+2yy' = 0 \Leftrightarrow y' = \dfrac{-x}{y}$.

Luego al sustituir este resultado en la ecuación diferencial se verifica que

$$
\begin{aligned}
y = x\left(\frac{-x}{y}\right) + \sqrt{1+\left(\frac{-x}{y}\right)^2} \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{-x^2}{y} + \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{-x^2}{y} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}} \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{-x^2}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2}} \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{-x^2}{y} + \frac{1}{\sqrt{y^2}}; \qquad y > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{-x^2}{y} + \frac{1}{y} \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{-x^2+1}{y} \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{y^2}{y} \\
&\Leftrightarrow \quad y = y.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, al sustituir $y(x) = xC + \sqrt{1+C^2}$ en $x^2+y^2=1$ para encontrar un C en común, se determina que

$$
\begin{aligned}
x^2 + (xC + \sqrt{1+C^2})^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (xC+\sqrt{1+C^2})^2 = 1 - x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2C^2 + 2xC\sqrt{1+C^2} + 1 + C^2 = 1 - x^2.
\end{aligned}
$$

Sin embargo, al cambiar C por cualquier valor numérico se determina que x debe ser fija, lo cual contradice el hecho de que x es variable. En la figura 1.4 se muestra como $y = \sqrt{1-x^2}$ es envolvente de la familia 1-paramétrica $y(x) = C.x + \sqrt{1+C^2}$.

Observación 1.2 En este caso, la solución singular está restringida al dominio $[-1,1]$. De esta manera, $J \subseteq [-1,1]$ donde J es cualquier subconjunto de restricción del dominio.

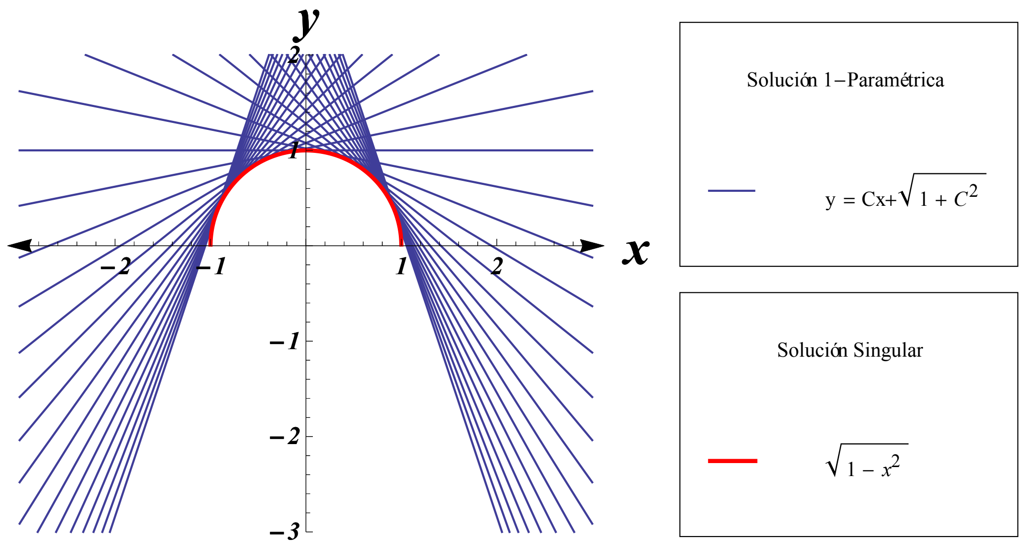


Figura 1.4: gráfica de la solución singular $x^2+y^2=1$ y la solución general $y(x)=C.x+\sqrt{1+C^2}$.
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 9.0.

Solución Total de una ecuación diferencial ordinaria de orden n : es la que contiene todas las soluciones de la ecuación. Esta formada por la solución general y las soluciones singulares en caso de que hallan o se puedan determinar.

Observación 1.3 Por lo general para efectos prácticos cuando resolvemos una ecuación diferencial, suponemos están las funciones y derivadas de ella bien definidas para evitar analizar casos de donde se puede desprender algunas soluciones singulares, con ello, se pide solo solución general y no total.

Definición 1.9
La gráfica de una solución de una ecuación diferencial se denomina *curva integral* de la ecuación diferencial.

Ejemplo 1.25

Estudiar los distintos tipos de soluciones que admite la ecuación diferencial

$$y' = \sqrt{y}.$$

Esta ecuación es sencilla de resolver por el método de variables separables que se verá más adelante en apartado de métodos de resolución para EDO1. Por ahora se admite como la solución general $\sqrt{y}=\frac{1}{2}(x+C)$, la cual representa una familia de funciones definidas en $[-C,+\infty[$. De donde dando valores a C se obtiene soluciones particulares. Por ejemplo, para $C=0$ se obtiene la solución particular $\sqrt{y}=\dfrac{x}{2}$ definida en $[0,+\infty[$.

Observe que la función $y=0$ también es solución de esta ecuación diferencial ya que la verifica o satisface; sin embargo, no está incluida en la solución general que hemos obtenido. Se trata de una solución singular.

De acuerdo a lo anterior, se tiene que la **Solución Total** de la ecuación diferencial $y'(x) = \sqrt{y(x)}$ esta dada por

$$\sqrt{y(x)} = \frac{x+C}{2}, C \in \mathbb{R}: \ \textbf{Solución general}; \quad y = 0: \ \textbf{Solución singular}.$$

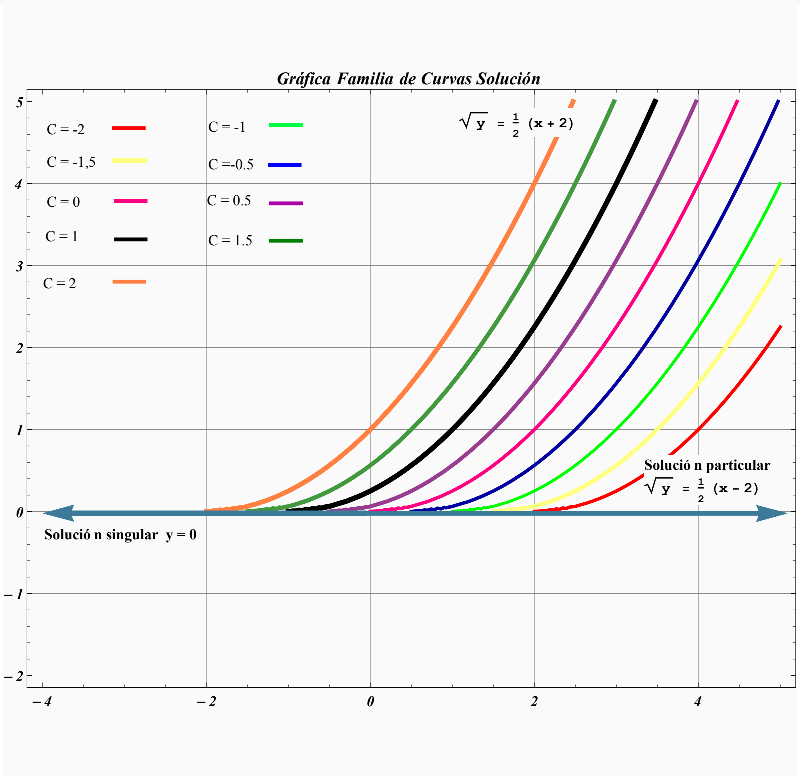


Figura 1.5: Gráficas de la familia de curvas solución para $y'(x) = \sqrt{y(x)}$.
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 9.0.

Las correspondientes curvas integrales a la solución general y singular se muestran en la figura 1.5.

1.1.6 Ejercicios resueltos de apoyo mediante videos

- **Video1**: `https://youtu.be/kF_O6DpwBvA`
- **Video2**: `https://youtu.be/sB6mXqvfibc`
- **Video3**: `https://youtu.be/UYIP3z5H1Ho`

Ejercicios 1.1 [**Ejercicios de Retroalimentación**] .

1.1.1 Considerando a y como la variable dependiente de x, clasificar las siguientes ecuaciones diferenciales según el orden y la linealidad:

1. $\left(x^2+e^{xy}+xy\right)dx+\left(y^2+x\right)dy=0.$
2. $3x^2y''+5yx'-8y=e^x\cos x.$
3. $\left(x^2+y^2\right)dx+(3e^x-2y)\,dy=0.$
4. $\left(\dfrac{d^4y}{dx^4}\right)+\tan x\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)-e^x\dfrac{dy}{dx}-xy=e^{3x}.$
5. $4y^{vi}-5y'''+8y''+3yy'=\dfrac{x\ln x}{x+1}.$

1.1.2 Escribir en forma normal las ecuaciones diferenciales del ejercicio anterior.

1.1.3 Comprobar si las siguientes funciones o relaciones son solución de la ecuación diferencial dada:

1. La función $\varphi(x)=e^x$ es solución de $y''(x)-y(x)=0$ en $]-\infty,+\infty[$.
2. La función $y(x)=\dfrac{x^4}{16}$ solución de $y'(x)-y(x)x^{\frac{1}{2}}=0$ en $]-\infty,+\infty[$.
3. Las funciones $\varphi_1(x)=\operatorname{sen}(2x)$ y $\varphi_2(x)=\cos(2x)$ son soluciones de la ecuación diferencial $y''(x)+4y(x)=0$.
4. La relación $x+y+e^{xy}=0$ es solución implícita de $\left(1+xe^{xy}\right)y'+ye^{xy}=0$.
5. La función $\varphi(x)=\dfrac{x}{8}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{\ln^2 x}{x}$, para la ecuación $x^3y'''+6x^2y''+7xy'+y=x$.
6. La relación $x^2-2y^2=3$, para la ecuación $x-2yy'=0$.
7. La relación $2x-2y-e^{xy}=0$ para la ecuación $\left(1-ye^{xy}\right)+\left(2-xe^{xy}\right)y'=0$.

1.1.4 Sustituir $y=e^{rx}$ en la ecuación diferencial $5y''-3y=0$ y determina todos los valores de r para los que $\varphi(x)=e^{rx}$ es solución de dicha ecuación.

1.1.5 Considerar la relación $y-3\ln(y+4)=x^2+C$, determine si es solución implícita de la ecuación diferencial,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x(y+4)}{y+1}$$

y luego comprobar que $y=-4$ es solución de dicha ecuación diferencial e indicar qué tipo de solución es. Finalmente determinar el valor de C para que $y(1)=-3$.

1.1.6 Dada la ecuación diferencial $3\left(y'''\right)^4+y^2=0$ ¿existe alguna familia 2 paramétrica de soluciones de dicha ecuación? ¿Tiene alguna solución?

1.1.7 La expresión $y(x) = \dfrac{1}{C-3x}$ define una familia 1-paramétrica de soluciones de la ecuación diferencial $y' = 3y^2$ ¿Hay algún valor de C para el que $y(0) = 0$?

1.1.8 Sabiendo que las relaciones (o ecuaciones) dadas definen a y como función implícita de x, compruebe que cada una de éstas es solución implícita de la correspondiente ecuación diferencial.

1. $\ln(xy) - ye^y = C \cdot y$, ED: $y' = \dfrac{y}{xye^y(1+y)-x}$.
2. $C \cdot y^2 = xy + C$, ED: $(xy^2+x)\cdot y' = y^3 - y$
3. $(y-C)^2 = C \cdot x$ ED: $4x(y')^2 + 2xy' = y$

1.1.9 Dada la ecuación diferencial $3\,(y''')^4 + y^2 = 0$ ¿existe alguna familia 2 paramétrica de soluciones de dicha ecuación? ¿Tiene alguna solución?

1.1.10 Compruebe que $(x^2-2x+2)(y^2+1)e^{2\arctan(y)} = C$, donde C es una constante arbitraria, es solución general en forma implícita de la ecuación $(xy^2-y^2+x-1)dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)dy = 0$.

1.1.11 Si curva con ecuación $y^2 - xy = A$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $y' = \dfrac{y}{2y-x}$, halle una solución particular que satisfaga la condición $y(1) = 2$.

1.1.12 Sabiendo que las siguientes funciones (relaciones o ecuaciones) corresponden a la solución general de una determinada ecuación diferencial,(A, B, C constantes arbitrarias) encuentre la ecuación diferencial respectiva.

1. $y = Ax + Bx^2$
2. $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$
3. $y = Ax^2 + Be^x + x - 1$
4. $y = x + A\operatorname{sen} x$
5. $y = Ax^2 + A^2$
6. $(x-A)^2 + y^2 = 4$

1.1.7 El problema de valor inicial

En algunos casos es importante no solo determinar la solución general de una ecuación diferencial sino también se busca una solución $y(x)$ de una ecuación diferencial de modo que $y(x)$ satisfaga condiciones adicionales prescritas, es decir, condiciones impuestas en la $y(x)$ desconocida o sus derivadas. Para ello, se expone la siguiente definición.

Definición 1.10 Problema de Valores Iniciales (PVI)

Si I es un intervalo que contiene a x_0, el problema de resolver

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \text{ con } ,y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{1.5}$$

donde $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$ son constantes reales especificadas de manera arbitraria, se llama **problema de valores iniciales (PVI)**. Los valores de $y(x)$ y sus primeras $n-1$ derivadas en un solo punto x_0: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ se llaman **condiciones iniciales.**

El problema que se expone en 1.5 se llama también **problema de valores iniciales de n-ésimo orden**. Por ejemplo, resolver

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \text{ sujeta a } y(x_0) = y_0 \tag{1.6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y,y') \text{ sujeta a } y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1 \tag{1.7}$$

son problemas de valores iniciales de **primer** y **segundo orden**, respectivamente. En el caso de la ecuación 1.6, se busca una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ en el intervalo I que contiene a x_0 de modo que su gráfica pase por el punto (x_0, y_0), como se muestra en la figura 1.6.

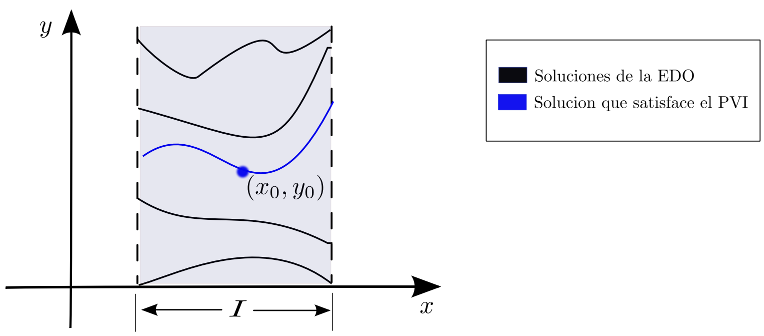


Figura 1.6: solución del PVI de primer orden.
Fuente: elaboración propia con INKSCAPE 0.47.

En el caso de 1.7 se desea encontrar una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial $y'' = f(x,y,y')$ en un intervalo I que contiene a x_0, de manera que su gráfica pase no solo por (x_0, y_0), sino que la pendiente de la curva en este punto sea el número y_1, como se muestra en la figura 1.7.

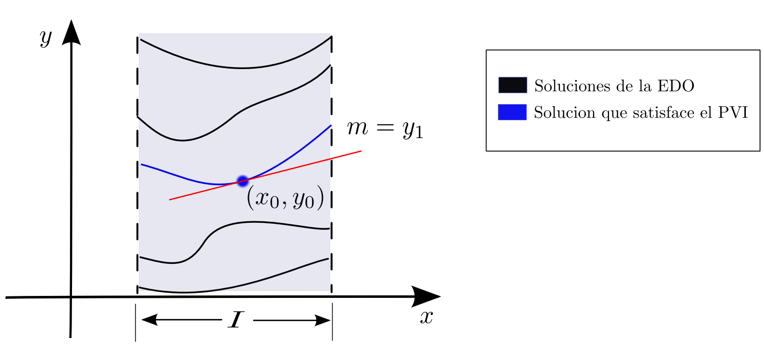


Figura 1.7: solución del PVI de segundo orden.
Fuente: elaboración propia con INKSCAPE 0.47.

Las palabras **condiciones iniciales** derivan de sistemas físicos donde la variable independiente es el tiempo t y donde $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = y_1$ representan la posición y la velocidad, respectivamente, de un objeto en algún tiempo inicial t_0.

La estrategia para resolver un PVI para una EDO se resume, (como se muestra en la ecuación 1.5) por lo general, en hallar primero una familia de soluciones n paramétricas (solución general) de la ecuación diferencial dada y luego usar las n condiciones iniciales en x_0, para determinar valores numéricos de las n constantes en la familia. La solución particular resultante se define en algún intervalo I que contiene al punto inicial x_0.

Para efectos de esta sección, se hará énfasis en los **PVI para EDO de primer orden**. Por ende, la estrategia del párrafo anterior se resume en resolver la ecuación diferencial en términos de un parámetro, despejando luego este con la condición inicial dada.

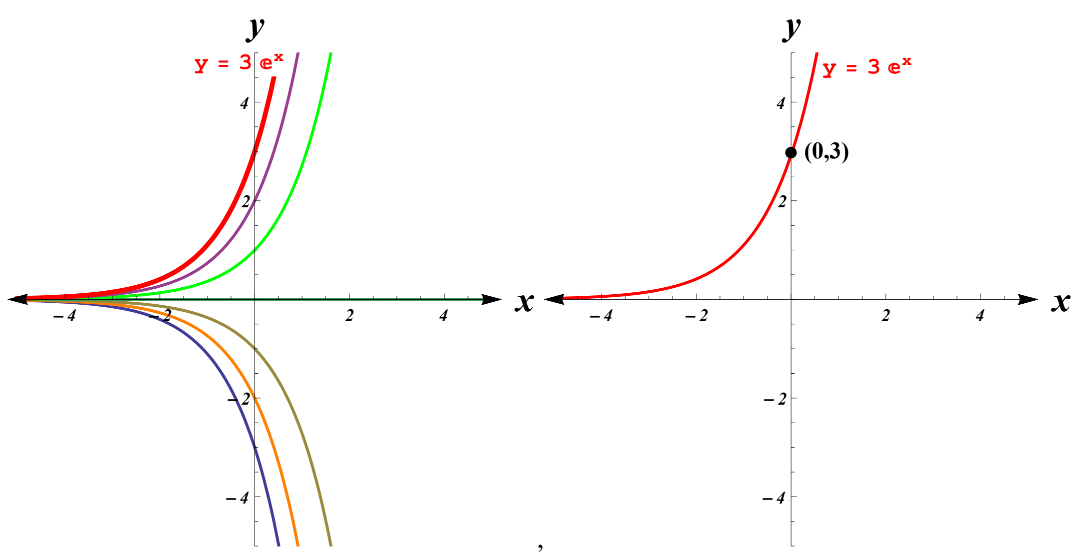
Ejemplo 1.26

Al resolver el problema de valor inicial: $y'(x) = y(x), \quad y(0) = 3$, es fácil comprobar que $y(x) = Ce^x$, con C una constante arbitraria, representa la solución general de la ecuación diferencial $y'(x) = y(x)$ en el intervalo $]-\infty, +\infty[$.

La figura 1.8, muestra la gráfica de la familia de curvas solución generadas a partir de dicha solución general. Luego para hallar la solución particular cuya curva integral pasa por el punto $(0,3)$, se sustituye la condición inicial $y(0) = 3$ en la solución general, de donde:

$$3 = Ce^0 \Leftrightarrow C = 3,$$

y así de esta forma la solución particular buscada es $y = 3e^x$, la cual se muestra en la figura 1.8.



,

Figura 1.8: gráfica de familia de curvas solución de $y'(x) = y(x)$ ysolución del P.V.I $y' = y, \quad y(0) = 3$
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 9.0.

Ejemplo 1.27

Se puede comprobar que la función $\varphi(x) = senx - cosx$ es solución del problema de valor inicial: $y'' + y = 0$ con $y(0) = -1,\ y'(0) = 1$.

En efecto, note que para $\varphi(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$, se tiene que $\varphi'(x) = cosx + senx$ y que $\varphi''(x) = -\operatorname{sen} x + \cos x$. Luego, sustituyendo en la ecuación diferencial se comprueba que $-\operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{sen} x - \cos x = 0$; por tanto, $\varphi(x)$ es solución de la ecuación diferencial. Pero además: $\varphi(0) = \operatorname{sen} 0 - \cos 0 = -1$ y $\varphi'(0) = \cos 0 + \operatorname{sen} 0 = 1$, así por tanto, se verifican las condiciones iniciales dadas al P.V.I, su representación gráfica se muestran en figuras 1.9.

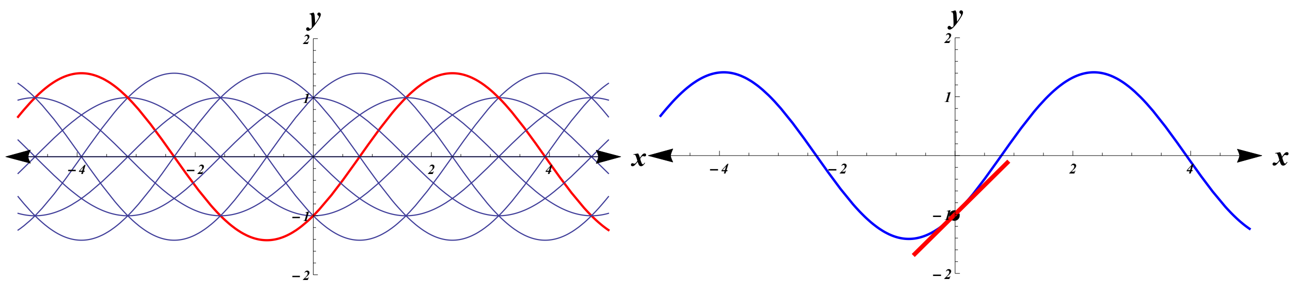


Figura 1.9: gráfica de familia curvas solución $y = A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x)$ y gráfica de solución del P.V.I :$y'' + y = 0$ con $y(0) = -1,\ y'(0) = 1$.

Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 9.0.

Ejemplo 1.28

Un PVI puede tener varias soluciones. Por ejemplo, las funciones $y = 0$; $y = \dfrac{x^4}{16}$ satisfacen la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$, y la condición inicial $y(0) = 0$, por lo cual, el problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$, $y(0) = 0$, tiene al menos dos soluciones, como se ilustra en la figura 1.10, donde las gráficas de ambas funciones pasan por el mismo punto $(0,0)$.

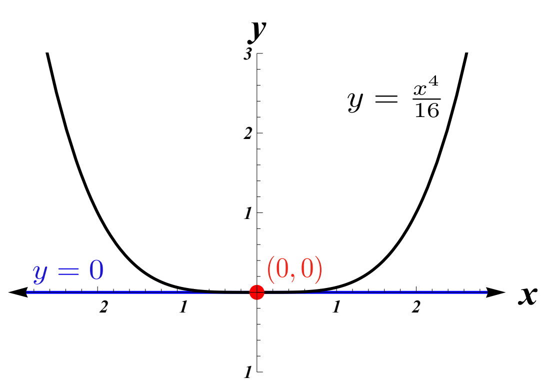


Figura 1.10: dos soluciones del mismo PVI.

Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 9.0.

Este ejemplo nos manifiesta que al tratar de resolver un problema de valores iniciales es posible que existan más de una solución que satisfaga la condición inicial dada. En consecuencia, es deseable saber por adelantado si existe una solución y , cuando es así, si la solución es única. Para ello, es necesario establecer un teorema que dé las condiciones suficientes de existencia y unicidad de una solución de un problema de valor inicial de primer orden, como se muestra en apartado más adelante.

1.2 Problema de valores frontera

Otro tipo de problema es resolver una ecuación diferencial lineal en donde la variable dependiente y (función desconocida) se le imponen ciertos valores a la variable independiente.

Definición 1.11 Problema de Valores Frontera (PVF)

Un Problema de valores en la frontera **(PVF)** consiste de una ED de orden n en I

$$F(x,y,y',y''\cdots y^{(n)})=0 \text{ con } n \text{ condiciones } \; y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1,\cdots,y(x_{n-1})=y_{n-1}$$

Así por ejemplo para una ecuación diferencial de orden dos

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,y,y') \text{ sujeta a } y(a)=y_0,\; y(b)=y_1 \tag{1.8}$$

se llama un **problema de valores en la frontera (PVF)**. Los valores necesarios, $y(a)=y_0;\; y(b)=y_1$, se denominan condiciones en la frontera.

Ejemplo 1.29

LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON: Si $T(t)$ es la temperatura de un objeto en un instante de tiempo t, T a es la temperatura del ambiente constante y β la constante de proporcionalidad entonces la ecuación diferencial asociada a los problemas de enfriamiento (calentamiento) es:

$$\frac{dT(t)}{dt}=\beta(T(t)-T_a)$$

Al resolver dicha ecuación se necesita conocer la temperatura del objeto en dos instantes diferentes, ya que hay dos constantes por determinar: la constante de proporcionalidad β y la constante de integración. De esta manera un PVF que lo permite resolver es

$$\frac{dT}{dt}=\beta(T(t)-T_a) \text{ sujeta a } T(0)=T_0,\; T(t_1)=T_1 \tag{1.9}$$

La solución del problema de valor de frontera permite obtener la Ley de Variación de la temperatura en función del tiempo (esto es, una ecuación para $T(t)$).

Ejercicios 1.2 **[Ejercicios sobre problemas de valores iniciales y frontera]**

1.2.1 Verificar que $y=3e^{2x}+e^{-2x}-3x$ es solución del problema de valor inicial:

$$y''-4y=12x, \text{ con } y(0)=4,\;\; y'(0)=1$$

1.2.2 Comprobar que la función $\varphi(x) = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x$ es solución del problema de valor inicial:

$$y'' + 16y = 0 \ \text{ con } \ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 1$$

1.2.3 Sabiendo que $y = A\cos(2x) + B\operatorname{sen}(2x)$ es la solución general de la ecuación $y'' + 4y = 0$, halle, para cada caso, la solución al problema de valor frontera:

1. $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$.
2. $y(0) = 1$; $y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}$

1.3 Teorema de existencia y unicidad en ecuaciones diferenciales ordinarias de rimer orden

Ante un problema de valor inicial surgen dos cuestiones fundamentales, ¿ existe solución al problema?, ¿es única? Antes de resolver un problema es interesante saber si tiene solución y si es única. Geométricamente, equivale a preguntarse si de toda la familia de curvas integrales existe alguna que pase por el punto definido por la condición inicial y si por dicho punto pasa una única curva.

Poder asegurar la existencia de una solución no implica que se sea capaz de hallarla, aunque sí es importante conocer su existencia y unicidad; para ello se utilizará el siguiente teorema que nos garantiza la existencia y unicidad de soluciones en un P.V.I para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Teorema 1.1 Existencia de una solución única: TEU

Sea R un región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ que contiene el punto (x_0, y_0) en su interior. Si $f(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en la región R, entonces existe algún intervalo $I_0 =]x_0 - h, x_0 + h[$ con $h > 0$ contenido en $[a,b]$, y una función única $y(x)$, definida en I_0 que es una solución del problema de valores iniciales. Dichos resultados se pueden reflejar en la figura 1.11

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \ y(x_0) = y_0. \tag{1.10}$$

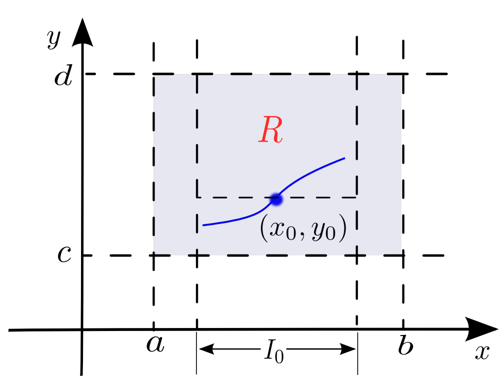


Figura 1.11: región Rectangular R.
Fuente: elaboración propia con INKSCAPE 0.47.

Ejemplo 1.30

Considerando la ecuación diferencial $xy' = 2y$ se observa que $f(x,y) = \dfrac{2y}{x}$ de donde por TEU sólo garantiza la existencia de soluciones en la parte del plano donde $x \neq 0$ y además por otra parte que como $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2y}{x^2}$ la unicidad también se garantiza en la misma parte.

Ejemplo 1.31

En la ecuación diferencial $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ se tiene que $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$ es continua en $\{(x,y) : x^2 > y^2\}$. $\{(x,y) : x^2 = y^2\}$ está formado por las dos rectas que pasan por el origen: $y = x$, $y = -x$ la región del plano buscada es $R = \{(x,y) : |y| < x\}$

Ejemplo 1.32

Considere el problema de valor inicial $y'(x) = y(x)$ con $y(0) = 3$. Se quiere determinar mediante el teorema de existencia y unicidad para EDO1 si ¿existe solución única?.

Para ello, observe que tanto $f(x,y) = y$ como $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$ son funciones continuas en $\mathbb{R}^2$, por tanto son continuas en un entorno de $(0,3)$, luego por el Teorema de existencia y unicidad (TEU) se puede asegurar que existe un entorno de $x_0 = 0$ donde existe solución y además cumple ser única. De hecho, en ejemplo 3.19 se determinó que dicha solución es $y = 3e^x$ y también mostrada en la figura 1.8.

Ejemplo 1.33

Al considerar el problema de valor inicial, $y'(x) = \sqrt{y(x)}$ con $y(0) = 0$, se puede verificar que no satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad para EDO1.

En efecto, en el ejemplo 3.20, se determinó que la solución total de la ecuación diferencial $y'(x) = \sqrt{y(x)}$ esta formada por la solución general $\sqrt{y(x)} = \frac{1}{2}(x + C)$ y la solución singular $y(x) = 0$. Asimismo mediante la figura 1.5 se observa que por el punto $(0,0)$ pasan dos curvas solución, y por tanto no hay unicidad.

Ahora se puede comprobar existencia y unicidad del problema $y'(x) = \sqrt{y(x)}$ con $y(0) = 0$ mediante teorema de existencia y unicidad para $(x_0, y_0) = (0,0)$. De donde:

$$y' = \sqrt{y}, \text{ es decir, } f(x,y) = \sqrt{y(x)} = y(x)^{\frac{1}{2}}, \text{ y derivando se tiene } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y(x)}}.$$

Las funciones $f(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en el semiplano $y > 0$, pero no son continuas en un rectángulo que contenga a $(0,0)$. En cambio, sí podríamos asegurar que $\forall\ (x_0, y_0)$ con $y_0 > 0$ existe un intervalo centrado en x_0 en el que el problema dado tiene solución única. Lo obtenido anteriormente se puede apreciar mediante la figura 1.12.

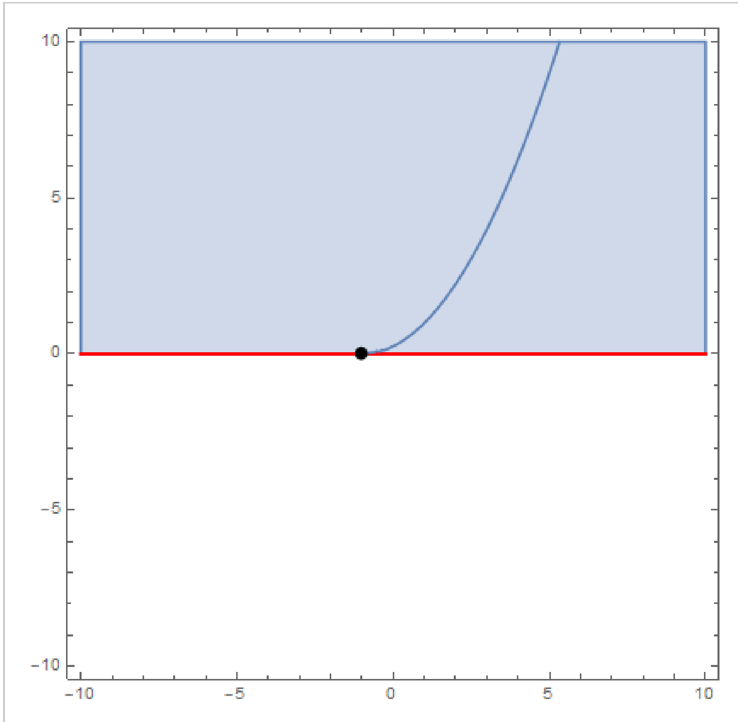


Figura 1.12: región Rectangular R, para $y' = \sqrt{y}$ con $y(0) = 0$.
Fuente: elaboración propia con Mathematica 9.0.

Ejemplo 1.34

Considere el problema de valor inicial $y' = -3 + \sqrt{3x+y}$ con $y(a) = b$; $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinar la región R del plano real xy para la cual la ecuación diferencial dada admite solución única que pase por el punto de la región R.

b) Sabiendo que la solución general de la ecuación diferencial propuesta es $y = \left(\dfrac{x+C}{2}\right)^2 - 3x$ ¿ se puede hallar una solución para $y(-1) = 3$? En caso afirmativo, ¿ es esta solución única? Justifique.

Solución

a) Buscando la región R del plano real:

- La función $f(x,y) = \sqrt{y+3x} - 3$ es continua sii $y \geq -3x$.
- La función $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2\sqrt{y+3x}}$ es continua sii $y > -3x$.

Se concluye que la región del plano xy en la cual se garantiza solución única para el problema de valor inicial propuesto, está dada por $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > -3x\}$.

b) Como la solución general de la ecuación diferencial es $y = \left(\frac{x+C}{2}\right)^2 - 3x$ entonces para $y(-1) = 3$ se tiene que

$$3 = \left(\frac{-1+C}{2}\right)^2 - 3(-1), \text{ sii } \quad C = 1.$$

Por lo tanto, sí hay solución para el punto $(-1,3)$, la cual está dada por

$$y = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - 3x.$$

Dicha solución NO es única, pues en $y' = -3 + \sqrt{3x+y}$ se puede verificar que tiene otra solución que pasa por el punto $(-1,3)$; a saber, la función $y(x) = -3x$, la cual es una solución singular. De donde finalmente, se determina que la ecuación diferencial $y' = -3 + \sqrt{3x+y}$ tiene al menos dos soluciones que satisfacen la condición inicial $y(-1) = 3$, a saber

$$y = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - 3x \ \vee \ y = -3x.$$

Por otra parte, la gráfica dada en la figura 1.13 muestra los resultados obtenidos en dicho ejemplo.

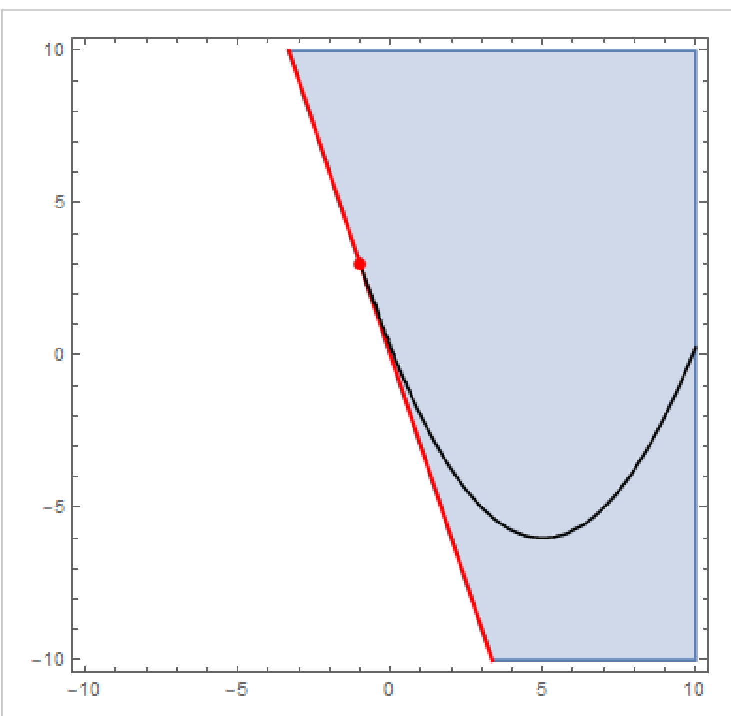


Figura 1.13: región Rectangular R, para $y' = -3 + \sqrt{3x+y}$ con $y(-1) = 3$.
Fuente: elaboración propia con Mathematica 9.0.

Ejercicios 1.3 [**Ejercicios de Retroalimentación**]

1.3.1 Realizar un estudio de existencia y unicidad para el **problema de valor inicial**

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} &= \dfrac{-y^2(x)}{x^2} \\ \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

1.3.2 Dado el problema de valor inicial $y' = x^2 - xy^3$, $y(1) = 6$. Estudiar la existencia y unicidad de su solución.

1.3.3 Determinar si se verifica el teorema de existencia y unicidad en los siguientes casos:

1. $y' = \sqrt{xy}$, $y(-1) = -1$.
2. $y' = x\sqrt{y}$, $y(1) = 1$.
3. $y' = (x-y)^{\frac{1}{2}}$, $y(2) = 2$
4. $y' = \dfrac{2x}{y-1}$, $y(1) = 0$.
5. $y' = x^2 + y^2 - xy$, $y(0) = 2$.

1.3.4 Demostrar que en el intervalo $0 \leq x \leq 2$, las funciones $y_1(x) = 2$, $y_2(x) = 2\cos x$ satisfacen el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + \left(4 - y^2\right)^{\frac{1}{2}} &= 0 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$$

(Sugerencia: Comprobar que no se verifican las hipótesis del teorema de existencia y unicidad).

1.3.5 Considere la ecuación diferencial $y' = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)} + \ln(x^2 + y^2)$.

1. Determine y gráfique la mayor región del plano xy en donde el teorema de existencia y unicidad (T.E.U) garantiza solución única.
2. Justifique si T.E.U garantiza que existe una solución que pase por el punto $(1, \sqrt{3})$.

1.3.6 Considere la ecuación diferencial $y' = 2\sqrt{y - x^2} + 2x$.

1. Determine y gráfique la mayor región del plano xy en donde el teorema de existencia y unicidad (T.E.U) garantiza solución única.
2. Compruebe que $y = x^2$ es solución singular.

1.3.7 Considere el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) &= 2 + \sqrt{2x - y} \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

1. Determine y gráfique la mayor región del plano xy para la cual la ecuación diferencial admite solución única por el punto (x_0, y_0) de la región R.

2. Sabiendo que la solución general en su forma explícita esta dada por $y = 2x - \left(\frac{x+C}{2}\right)^2$.

   ¿ Se puede hallar una solución para $y(-1) = -2$?. En caso afirmativo ¿ Es esta solución única?. Justifique.

1.3.8 Determine la región del plano xy en la cual la ecuación diferencial

$$y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$$

tiene solución única para cada punto (x_0, y_0) de la región. La ecuación anterior posee una solución singular. Determínela. ? Afecta la existencia de tal solución a la unicidad establecida en el punto anterior?

1.3.9 Considere el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} & = & \sqrt{9 - x^2 - y^2} \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases}$$

entonces

1. Determine la región $\mathbb{R}$ del plano xy sobre la cual podemos garantizar con certeza la existencia y unicidad de soluciones. Haga una representación gráfica de la región $\mathbb{R}$.

2. ¿Garantiza el teorema de existencia y unicidad, solución única en los siguientes casos: $y(1) = 2$, $y(2) = 3$ $y(\sqrt{5}) = 2$?. Justifique su respuesta.

Prof: M.Sc. Norberto Oviedo Ugalde.

Capítulo 2:

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en variables separables y homogéneas.

2 — Ecuaciones diferenciales variables separables y homogéneas

2.0.1 Objetivos Específicos

- Definir e identificar una ecuación diferencial en variables separable y homogénea.
- Comprender el proceso de resolución de ecuaciones diferenciales en variables separables y homogéneas.
- Resolver ecuaciones diferenciales con transformaciones especiales y cambios de variable.

2.0.2 Contenidos

- Definición de ecuación diferencial en variable separables.
- Resolución de una ecuación diferencial en variable separables.
- Ecuaciones diferenciales con transformaciones especiales y cambios de variable.
- Definición de ecuación diferencial homogénea.
- Resolución de una ecuación diferencial homogenéa.

2.1 Formas en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

En esta sección se consideran formas equivalentes de ecuaciones de primer orden

$$y' = f(x,y). \tag{2.1}$$

Una de estas es la ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.2}$$

Las formas 2.1 y la dada por 2.2 son equivalentes tomando $N(x,y) = 1$ y $M(x,y) = -f(x,y)$, pues $M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$ puede escribirse como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y),$$

con $N(x,y) \neq 0$.

Por otra parte se tiene que $M(x,y)+N(x,y)\dfrac{dy}{dx}=0$ puede escribirse de forma equivalente como

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \tag{2.3}$$

pues multiplicando $M(x,y)+N(x,y)\dfrac{dy}{dx}=0$ por dx, se obtiene

$$\left(M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}\right)dx=0 \Leftrightarrow M(x,y)dx+N(x,y)dy=0.$$

Esta última forma 2.3, se utiliza ampliamente y tiene ventaja de ser simétrica en x e y en el sentido de que cualquiera de ellas puede ser tratada como variable independiente, según las circunstancias.

2.2 Ecuaciones Diferenciales en variables separables

Definición 2.1

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden $y'=f(x,y)$, es de variables separables si puede ser escrita de la forma $y'=g(x)h(y)$, donde $g(x)$ y $h(y)$ son funciones continuas de x e y respectivamente en cierto intervalo común I.

Al dividir entre la función $h(y)$, una ecuación separable se puede escribir en la forma

$$p(y)\frac{dy}{dx}=g(x) \tag{2.4}$$

con donde, por comodidad, $p(y)$ representa a $\dfrac{1}{h(y)}$ $(h(y)\neq 0)$.

Si $y=\phi(x)$ representa una solución de 2.4, se debe cumplir

$$\int p(\phi(x))\phi'(x)dx=\int g(x)dx \tag{2.5}$$

Pero $dy=\phi'(x)dx$, de modo que 2.5 es lo mismo que

$$\int p(y)dy=\int g(x)dx \tag{2.6}$$

De donde se tiene que solución general para este tipo de ecuaciones diferenciales viene dada por

$$F(y)=\int g(x)dx+C.$$

Ejemplo 2.1

Considere la ecuación diferencial $y^2\dfrac{dy}{dx}=x$, determine si es de variable separable y encuentre la solución general.

Note que dicha ecuación diferencial es de variable separable pues esta dada de acuerdo a la forma 2.4. Así luego, dado que una antiderivada de $q(y) = y^2$ es $\dfrac{y^3}{3}$ se cumple que

$$\frac{d[\frac{y^3}{3}]}{dx} = x,$$

de donde al integrar a ambos miembros con respecto a variable independiente x se obtiene que la solución general viene dada de forma implícita por

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Definición 2.2

Una ecuación diferencial de la forma diferencial: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es una **ecuación separable o de variables separables** si se puede escribir de la forma:

$$f(x)g(y)dx + h(x)k(y)dy = 0. \tag{2.7}$$

Ahora si la ecuación diferencial 2.7, se multiplica por $\dfrac{1}{g(y)h(x)}$, con $(g(y)h(x) \neq 0)$:

$$\frac{f(x)}{h(x)}dx + \frac{k(y)}{g(y)}dy = 0, \tag{2.8}$$

luego, al tomar $\dfrac{f(x)}{h(x)} = n(x)$ y $\dfrac{k(y)}{g(y)} = m(y)$ la ecuación obtenida anteriormente puede ser escrita:

$$n(x)dx + m(y)dy = 0. \tag{2.9}$$

donde separando las variables: $m(y)dy = -n(x)dx,$, luego integrando a ambos lados de la igualdad:

$$\int m(y)dy = \int -n(x)dx,$$

de esta forma se obtiene la solución de 2.7 en su forma implícita viene dada por :

$$F(y) = G(x) + C.$$

donde F y G son antiderivadas de m y n respectivamente.

Observación 2.1 En el proceso de resolución se pueden perder soluciones con las manipulaciones algebraicas. Por ejemplo, el proceso al pasar de 2.7 a 2.8, es válido si $h(x)g(y) \neq 0$. Sin embargo, para los casos cuando $h(x) = 0$ y $g(y) = 0$ se deben comprobar en la ecuación original si alguna de ellas es o no solución, y en caso de serlo, añadirla a la solución general.

Ejemplo 2.2

Comprobar mediante las definiciones dadas anteriormente que las siguientes ecuaciones diferenciales son de variables separables:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + x^2y^3.$ **(b)** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+xy}{y^2+1.}$ **(c)** $y' = 2 - xy.$

(d) $cos(x)e^y dx + (x+1)\,dy = 0.$ **(e)** $(xy^2 - y^2 + x - 1)dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)dy = 0.$

En efecto, fácilmente utilizando las definiciones aportadas para ecuaciones diferenciales en variables separable se comprueba que:

(a) Esta ecuación se puede reescribir como: $\dfrac{dy}{dx} = x^2\left(1+y^3\right)$, luego sí es una ecuación separable.

(b) Esta ecuación se puede reescribir como $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(3-y)}{y^2+1}$, por tanto, el término de la derecha se puede escribir como el producto de una función de x por una función de y: $\dfrac{dy}{dx} = x \cdot \dfrac{3-y}{y^2+1}$ luego sí es una ecuación separable.

(c) En la ecuación $y' = 2 - xy$ no se puede separar la expresión $2 - xy$ como producto de una función de x por una de y; por tanto, no es una ecuación separable.

(d) Esta ecuación es de la forma: $\underbrace{\cos(x)}_{f(x)}\underbrace{e^y}_{g(y)}dx + \underbrace{(x+1)}_{h(x)}dx = 0$, luego sí es una ecuación separable.

(e) Note que la ecuación dada se puede expresar de la forma: $\underbrace{(x-1)}_{f(x)}\underbrace{(y^2+1)}_{g(y)}dx + \underbrace{(x^2-2x+2)}_{h(x)}\underbrace{(y+1)}_{k(y)}dy = 0$, luego sí es una ecuación diferencial en variable separable.

Ejemplo 2.3

Encontrar la solución general de $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+1}{2-y}$ y determinar la solución particular para la cual $y = 4$ cuando $x = -3$.

Separando las variables, se puede escribir la ecuación dada en la forma $(2-y)dy = (x^2+1)dx$, luego integrando la ecuación anterior se obtiene fácilmente la solución general de la siguiente forma

$$\int (2-y)dy = \int (x^2+1)dx \Leftrightarrow 2y - \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + x + C. \tag{2.10}$$

Posteriormente, sustituyendo $x = -3$ y $y = 4$ en 2.10 se obtiene $C = 12$, por lo que la solución particular requerida es

$$\frac{-x^3}{3} - x + 2y - \frac{y^2}{2} = -12. \tag{2.11}$$

Observación 2.2 Se debe notar que para llegar a la solución general de la EDO del ejemplo anterior, se debe considerar que $y \neq 2$. Gráficamente, las curvas solución en $\frac{-x^3}{3} - x + 2y - \frac{y^2}{2} = C$ se observan en la figura 2.1 y asimismo que tienen una pendiente vertical en el punto donde $y = 2$.

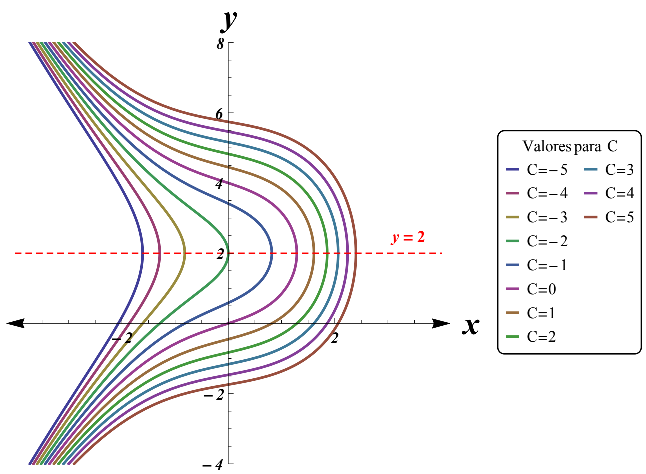


Figura 2.1: algunas soluciones particulares de la EDO $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{2-y}$.
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 9.0.

Por otro lado, la solución particular 2.11 puede obtenerse explícitamente mediante fórmula cuadrática, y dicha solución será $y = \frac{12 \pm \sqrt{-24x^3 - 72x - 720}}{6} = \frac{1}{3}\left(6 \pm \sqrt{6}\sqrt{-x^3 - 3x - 30}\right)$ la cual se muestra gráficamente a través de la figura 2.2.

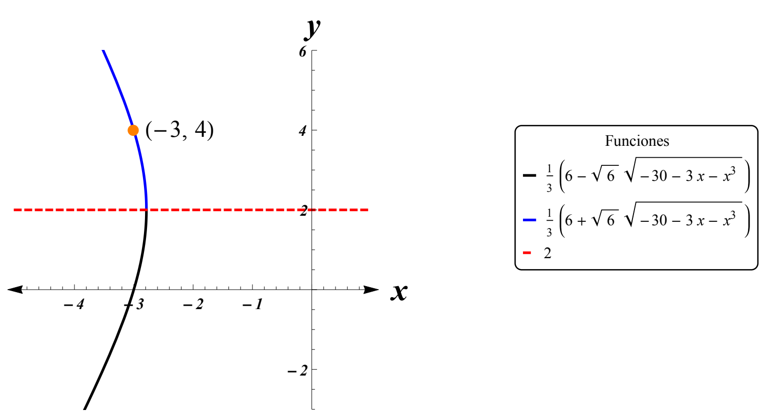


Figura 2.2: solución particular de la EDO que pasa $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{2-y}$ por $(-3,4)$.
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 9.0.

Ejemplo 2.4

Resuelva el PVI $\quad xy\dfrac{dy}{dx} = yx + x + y + 1,\;$ con $\;y(1) = 0,\, x \neq 0.$

Si en la ecuación diferencial dada factorizamos el lado derecho se tiene $xy\dfrac{dy}{dx} = (y+1)(x+1),$ luego separando variables con $\;y \neq -1\;$ e integrando

$$\begin{aligned}
\int \frac{y}{y+1}dy &= \int \frac{x+1}{x}dx \\
y - \ln|y+1| + C_1 &= x + \ln|x| + C_2 \\
y - \ln|y+1| &= x + \ln|x| + C \\
y &= x + \ln|(y+1)x| + C \;\; (*)
\end{aligned}$$

de donde (*) representa la solución general de la ED dada, ahora si en ella se toma $\;y = 0,\;\; x = 1$ obtenemos $C = -1,\;$ de esta forma la solución al PVI es

$$y(x) = x + \ln|(y+1)x| - 1$$

Observe que $y = -1$ es una solución de la ecuación (sustituya directamente), pero $y = -1$ no está contenida en la familia $y(x) = x + \ln|(y+1)x| + C$, por lo que es una solución singular.

Ejemplo 2.5

Encontrar una solución al problema de valores iniciales:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2},\;\; y(0) = 1$$

Separando variables en la ecuación diferencial dada se tiene ahora $(1-y^2)dy = x^2dx$ e integramos:

$$\int (1-y^2)dy = y - \frac{1}{3}y^3 + C_1$$

$$\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + C_2$$

Por lo que la solución está dada por:

$$y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}x^3 = C(*)$$

donde $C = C_1 - C_2$ es una constante arbitraria. Ahora si utilizamos en en (*) la condición $y(0) = 1$ para obtener la solución del problema de valor inicial. obtenemos $C = \dfrac{2}{3}$.

Por lo que la solución del problema de valor inicial viene dada por :

$$y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}x^3 = \frac{2}{3}$$

Observe que aunque el TEU no garantiza una solución al problema de valores iniciales en el punto $(0,1)$ (pues el denominador se anula), esta sí existe.

Ejemplo 2.6

Resuelva la ecuación diferencial $x\dfrac{dy}{dx} = 2y$ hasta obtener su solución general.

Si en la ED dada separamos variables $(y \neq 0, x \neq 0)$, e integramos a ambos lados se tiene

$\ln|y| = 2\ln|x| + K,$

$\Rightarrow \ln\left|\dfrac{y}{x^2}\right| = K$

$\Rightarrow \left|\dfrac{y}{x^2}\right| = e^K,$

$\Rightarrow |y| = x^2 e^K$

$\Rightarrow |y| = x^2 C \quad (*)$ con $C = e^K$ constante arbitraria.

Por lo que (*) representa la solución general de la ED dada. Por otro lado si analizamos el caso cuando $y(x) = 0$ se tiene que esta se desprende de (*) para la constante $C = 0$, esto indica no es solución singular. Además se aprecia que $y(0) = 0$ para todas las soluciones, lo cual se puede apreciar en la figura 2.3.

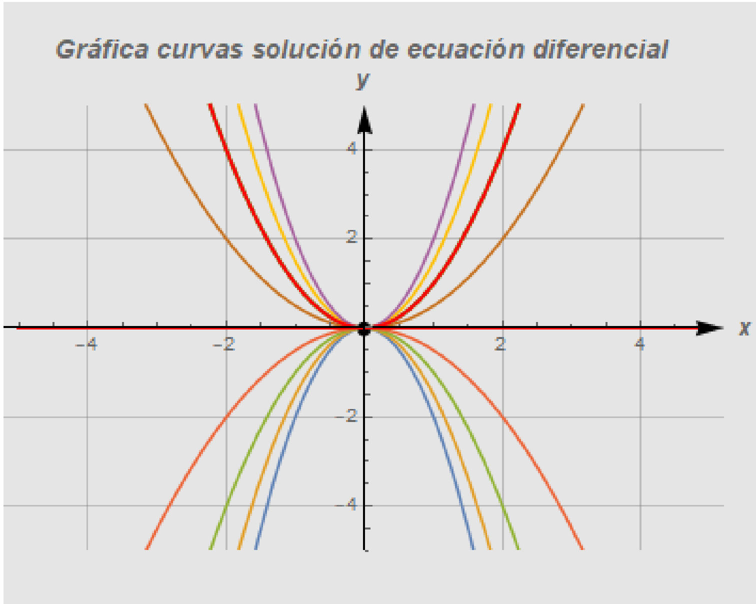


Figura 2.3: soluciones de la EDO $x\dfrac{dy}{dx} = 2y$ por $(0,0)$.
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 11.0.

Ejemplo 2.7

Resolver el problema de valor inicial

$$e^y \cos x + \cos x + (e^y \operatorname{sen} x + e^y)y' = 0, \qquad y(\pi) = 0$$

Separando variables e integrando se sigue que:

$$\begin{aligned}
e^y \cos x + \cos x + (e^y \operatorname{sen} x + e^y)y' &= 0 \\
\cos x(e^y+1) + e^y(\operatorname{sen} x + 1)\frac{dy}{dx} &= 0 \\
e^y(\operatorname{sen} x + 1)\frac{dy}{dx} &= -\cos x(e^y+1) \\
e^y(\operatorname{sen} x + 1)dy &= -\cos x(e^y+1)dx \ \text{ con } \ \operatorname{sen} x \neq 1 \\
\frac{e^y}{e^y+1}dy &= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + 1}dx \\
\ln|e^y+1| &= -\ln|\operatorname{sen} x + 1| + \ln|c_1|, \ \text{tome } C = \ln|c_1| \\
\ln(e^y+1) &= \ln\left(\frac{|c_1|}{\operatorname{sen} x + 1}\right), \ \text{para } \operatorname{sen} x + 1 > 0
\end{aligned}$$

Ahora despejamos y para expresar la solución en forma explícita

$$e^y = \frac{|c_1| - \operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1}$$

es decir,

$$y = \ln\left(\frac{K - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + 1}\right) \qquad (*)$$

con $K = |c_1| - 1$. Se quiere ahora una solución que cumple con $y(\pi) = 0$, entonces

$$0 = \ln\left(\frac{K - \operatorname{sen} 0}{\operatorname{sen} 0 + 1}\right) = \ln K$$

de donde

$$K = 1$$

Sustituyendo en (*) obtenemos la solución del problema de valor inicial viene dada por

$$y(x) = \ln\left(\frac{1 - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + 1}\right)$$

Ejemplo 2.8

Determine la solución de la ecuación diferencial:

$$(xy^2 - y^2 + x - 1)dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)dy = 0 \qquad (1)$$

Note que la ecuación (1) se puede expresar como

$$(y^2+1)(x-1)dx + (x^2 - 2x + 2)(y+1)dy = 0$$

de donde se observa es de variables separables y de esta forma:

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x^2-2x+2}dx+\frac{y+1}{y^2+1}dy &= 0\\
\frac{x-1}{x^2-2x+2}dx &= -\frac{y+1}{y^2+1}dy\\
\Rightarrow \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| &= -\left(\frac{1}{2}\ln|y^2+1|+\arctan y\right)+k\\
\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)+\frac{1}{2}\ln(y^2+1)+\arctan y &= k\\
\Rightarrow \ln[(x^2-2x+2)(y^2+1)]+2\arctan y &= 2k\\
\Rightarrow e^{\ln[(x^2-2x+2)(y^2+1)]+2\arctan y} &= e^{2k}\\
\Rightarrow (x^2-2x+2)(y^2+1)\cdot e^{2\arctan y} &= e^{2k}
\end{aligned}$$

Así la solución general de la ED dada corresponde a: $(x^2-2x+2)(y^2+1)\cdot e^{2\arctan y}=C$.

Puede ingresar al link `https://youtu.be/ZllxBiUBIEY` o código QR para visualizar explición de tal ejemplo.

Ejemplo 2.9

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+1}{\sqrt{x}+\sqrt{xy}}$$

factorizando primero y posteriormente separando variables se tiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx}=\frac{y+1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}\sqrt{y}}=\frac{y+1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{y})}\\
\Rightarrow\ &\frac{1+\sqrt{y}}{y+1}dy=\frac{dx}{\sqrt{x}}\\
\Rightarrow\ &\int\frac{\sqrt{y}+1}{y+1}dy=\int x^{\frac{1}{2}}dx
\end{aligned}$$

Resolviendo la primera integral mediante el cambio de variable $\sqrt{y}=t$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int\frac{t+1}{t^2+1}\cdot 2t\,dt &= \int\frac{2t^2+2t}{t^2+1}dt\\
&= \int\left(\frac{2t^2}{t^2+1}+\frac{2t}{t^2+1}\right)dt\\
&= \int\left(2-\frac{2}{t^2+1}+\frac{2t}{t^2+1}\right)dt\\
&= 2t-2\arctan t+\ln(t^2+1)+C_1
\end{aligned}$$

De esta forma y dado que $t = \sqrt{y}$, se tiene que la solución en términos de variables iniciales x, y viene dada por:

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{y} + \ln(y+1) - 2\arctan\sqrt{y} + C_1 = 2\sqrt{x} + C_2 \\ \Rightarrow \quad & 2(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + \ln(y+1) - 2\arctan\sqrt{y} = C \end{aligned}$$

Esta última expresión representa la solución general de la ecuación diferencial en forma implícita.

Ejemplo 2.10

Determinar solución general de la ecuación diferencial $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2y$.

Al multiplicar por dx la ecuación $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2y$ se tiene

$$\begin{aligned} xdy - ydx = 2x^2ydx \quad & \Leftrightarrow \quad (2x^2y + y)dx - xdy = 0, \\ & \Leftrightarrow \quad y(2x^2+1)dx - xdy = 0, \end{aligned}$$

dividiendo por $xy \neq 0$, se obtiene que

$$\frac{1}{xy}\left(y(2x^2+1)dx - xdy\right) = \frac{1}{xy}(0) \Leftrightarrow \left(\frac{2x^2+1}{x}\right)dx - \left(\frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

En tal caso, $x \neq 0$ y $y \neq 0$. Luego, se tiene que la solución está dada por

$$\begin{aligned} \int\left(\frac{2x^2+1}{x}\right)dx - \int\left(\frac{1}{y}\right)dy = C \quad & \Leftrightarrow \quad \int\left(2x + \frac{1}{x}\right)dx - \int\frac{1}{y}dy = C, \\ & \Leftrightarrow \quad x^2 + \ln|x| - \ln|y| = C. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Esto también puede escribirse en una forma libre de logaritmos escribiendo 2.12 como

$$\begin{aligned} x^2 + \ln|x| - \ln|y| = C \quad & \Leftrightarrow \quad x^2 + \ln\left|\frac{x}{y}\right| = C \\ & \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{x}{y}\right| = C - x^2 \\ & \Leftrightarrow \quad \left|\frac{x}{y}\right| = e^{C-x^2} \\ & \Leftrightarrow \quad \left|\frac{x}{y}\right| = e^{C}e^{-x^2} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} = \pm e^{C}e^{-x^2} \\ & \Leftrightarrow \quad x = \pm ye^{C}e^{-x^2} \\ & \Leftrightarrow \quad xe^{x^2} = \pm ye^{C} \\ & \Leftrightarrow \quad \pm e^{-C}xe^{x^2} = y \\ & \Leftrightarrow \quad y = Axe^{x^2}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Note que el caso $y = 0$ esta contenido en la solución general para el caso $A = 0$.

Ejemplo 2.11

Determinar solución general de la ecuación diferencial $\operatorname{sen}(x+y)dx+\operatorname{sen}y(\csc x dy-\cos x dx)=0$.

Al considerar la ecuación diferencial $\operatorname{sen}(x+y)dx+\operatorname{sen}y(\csc x dy-\cos x dx)=0$ y efectuar simplificaciones previamente se tiene

$\operatorname{sen}(x+y)dx+\operatorname{sen}y(\csc x dy-\cos x dx)=0$

$\Leftrightarrow (\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y)dx+(\operatorname{sen}y\csc x dy-\operatorname{sen}y\cos x dx)=0$

$\Leftrightarrow (\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y-\operatorname{sen}y\cos x)dx+(\operatorname{sen}y\csc x)dy=0$

$\Leftrightarrow (\operatorname{sen}x\cos y)dx+(\operatorname{sen}y\csc x)dy=0$

$\Leftrightarrow (\operatorname{sen}x\cos y)dx+\left(\dfrac{\operatorname{sen}y}{\operatorname{sen}x}\right)dy=0.$

Multiplicando el último resultado por $\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos y}$, con $\cos y\neq 0$ se obtiene que

$$\frac{\operatorname{sen}x}{\cos y}\left((\operatorname{sen}x\cos y)dx+\left(\frac{\operatorname{sen}y}{\operatorname{sen}x}\right)dy\right)=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos y}(0)\Leftrightarrow\left(\operatorname{sen}^2x\right)dx+\left(\frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}\right)dy=0.$$

En tal caso, $\cos y\neq 0$, o bien, $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Luego, la solución está dada por

$$\begin{aligned}\int\operatorname{sen}^2x\,dx+\int\frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}\,dy=C\ &\Leftrightarrow\ \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx+\int\frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}dy=C\\ &\Leftrightarrow\ \frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+\ln|\cos y|=C\\ &\Leftrightarrow\ x-\frac{\operatorname{sen}2x}{2}+2\ln|\cos y|=2C\\ &\Leftrightarrow\ x-\frac{\operatorname{sen}2x}{2}+\ln(\cos^2y)=K.\end{aligned}$$

Aquí $K=2C$. Por otra parte, se debe notar que se usaron diversas estrategias para hallar dicha solución, entre las que se recuerda la integración por sustitución en

$$\int\frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}\,dy\quad\text{y}\quad\int\cos 2x\,dx,$$

y el uso de la identidad

$$\operatorname{sen}^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

2.2.1 Casos especiales que requieren alguna sustitución

En algunos casos se pueden hacer cambios de variable apropiados que permiten transformar una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, en otra de variables separables, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.12

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 3\sqrt[3]{y-3x}. \tag{2.14}$$

La raíz cúbica en la ecuación diferencial sugiere cambiar la variable dependiente, por ejemplo y a z, de modo tal que la raíz pueda evitarse.

En este caso, si $y - 3x = z^3$ de donde

$$\frac{dy}{dx} = 3 + 3z^2\frac{dz}{dx},$$

posteriormente sustituyendo en la ecuación diferencial 2.14 se tiene

$$3 + 3z^2\frac{dz}{dx} = 3z,$$

es decir,

$$z^2\frac{dz}{dx} = z - 1,$$

al separar variables

$$\frac{z^2}{z-1}dz = dx,$$

posteriormente integrando a ambos lados

$$\frac{z^2}{2} + z + \ln|z-1| = x + K.$$

Finalmente como $z = \sqrt[3]{y-3x},$ se concluye que

$$\sqrt[3]{(y-3x)^2} + 2\sqrt[3]{y-3x} + 2\ln|\sqrt[3]{y-3x} - 1| = 2x + C. \qquad (C = 2K)$$

Ejemplo 2.13

Verifique que la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2}{x + x^2y}$ se puede transformar en una ecuación diferencial de variables separables al aplicar la transformación $zx^{-1} = y$ (no resuelva esta última ecuación).

Observe que: $zx^{-1} = y \Rightarrow \dfrac{dz}{dx}x^{-1} - x^{-2}z = \dfrac{dy}{dx}$, luego de esta forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2}{x + x^2y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}x^{-1} - x^{-2}z = \frac{zx^{-1} - x\cdot(zx^{-1})^2}{x + x^2 \cdot zx^{-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}x^{-1} = \frac{zx^{-1} - xz^2x^{-2}}{x + x^2 \cdot zx^{-1}} + x^{-2z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}x^{-1} = \frac{zx^{-1} - z^2x^{-1} + x^{-1}z + x^{-1}z^2}{x + xz}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}x^{-1} = \frac{zx^{-1} + x^{-1}z}{x + xz}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}x^{-1} = \frac{2zx^{-1}}{x(1+z)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+z}{z}dz = \frac{2dx}{x} \qquad \longrightarrow \textbf{Ecuación diferencial en variables separables } z(x)$$

Ejemplo 2.14

Resolver la siguiente ecuación diferencial $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx - xdy = 0$, mediante un cambio de variable apropiado.

La raíz nos sugiere hacer el cambio de variable $u^2 = xy$, así, u y y son funciones que dependen de x.

luego derivando con respecto a x se tiene que $2u\dfrac{du}{dx} = y + x\dfrac{dy}{dx}$,

despejando $\dfrac{dy}{dx}$ se obtiene $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2u\frac{du}{dx} - y}{x}$, $(x \neq 0)$.

Al expresar $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx - xdy = 0$ en su forma normal, es decir, $y' = \dfrac{2\sqrt{xy} - y}{x}$, luego tomando los cambios obtenidos anteriormente se tiene

$$\frac{2u\frac{du}{dx} - y}{x} = \frac{2\sqrt{u^2} - y}{x},$$

es decir, $2u\dfrac{du}{dx} = 2u$, de donde separando variables e integrando a ambos miembros de la ecuación

$$u = x + c,$$

finalmente devolviendo el cambio de variable $u^2 = xy$ se obtiene por solución general en su forma implícita

$$\pm\sqrt{xy} = x + c.$$

Ejercicios 2.1 [**Ejercicios de retroalimentación**]

2.2.1 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales, en caso de no estar la ED dada en su forma normal conviene tenerla en dicha forma $y' = f(x,y)$. Posteriormente ingrese a página interactiva Variables Separables para comprobar dichos resultados.[a]

1. $y\dfrac{dy}{dx} = e^{-4x} + e^{-2x}$
2. $y' = \dfrac{6x^2+1}{2y+3}$
3. $-\csc(y)dx + (x^2+1)dy = 0$
4. $y' = x^2(y^2+1)$

2.2.2 Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales en variables separables.

1. $\dfrac{\tan y}{\cot x}dx + \sec x dy = 0$
2. $\left(x + xy^2\right)dx + e^{x^2} y dy = 0.$
3. $y' = \dfrac{y\cos x}{1-2y}$
4. $e^{-y}x^2 + \left(x^2+2\right)yy' = 0$
5. $(xy^2 - y^2 + x - 1)dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)dy = 0$
6. $(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)dy = (1+y^2)dx$
7. $(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)\dfrac{dy}{dx} = 1$

2.2.3 Resuelva el siguiente problema de valor inicial:

1. $y' = \sqrt{2x-y} + 2;$ con $y(2) = 1$.
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\left(2x^2+1\right)}{x}, \;\; y(1) = 1 \;\; (Sol: y = xe^{\left(x^2-1\right)})$

2.2.4 Muestre que en la ecuación diferencial $ydx + (1 + y^2e^{2x})dy = 0$ el cambio de variables $u = ye^x$ separa variables, luego obtenga la solución general de dicha ecuación

2.2.5 Considere la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = f(ax+by+c); \;\; b \neq 0$

a) Demuestre que esta ecuación se puede transformar a una de variables separables mediante la sustitución $z = ax + by + c$.

b) Utilice el resultado anterior para resolver las siguientes ecuaciones:

1. $y' = \operatorname{sen}^2(x - y + 1)$
2. $y' = 2xy - x^2 - y^2$.

3. $y' = \dfrac{1}{\ln(2x+y+3)} + 1$

[a]También puede ingresar mediante el link `https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/Libros/LibrosCDF/EDO-NOviedo/CDFED01-Internet-Noviedo2018.pdf` y posteriormente dar click a página interactiva Variables separables.

2.3 Ecuaciones homogéneas y transformaciones especiales

Existen algunas ecuaciones diferenciales de variables NO separables las cuales mediante un cambio adecuado de variables, se pueden transformar en ecuaciones de variables separables, como las que se muestran en las sesiones siguientes.

2.3.1 Ecuación diferencial homogénea

Definición 2.3

Una ecuación diferencial en la forma $m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$ es homogénea si y solo si las funciones $m(x,y)$ y $n(x,y)$ son homogéneas[a] y del mismo grado.

[a]Una función $f(x,y)$ es homogénea de grado n, con $n \in \mathbb{R}$ si cumple la propiedad $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$.

Ejemplo 2.15

La ecuación $(x^2+y^2)dx + (x^2-xy)dy = 0$ es homogénea de grado dos, pues tanto la función $m(x,y) = x^2+y^2$ como la función $n(x,y) = (x^2-xy)$ son funciones homogéneas y de grado dos ambas, ya que $m(tx,ty) = t^2(x^2+y^2) = t^2 m(x,y)$ y $n(tx,ty) = t^2 n(x,y)$.

Definición 2.4

Una ecuación diferencial $y' = f(x,y)$, es homogénea si la función $f(x,y)$ es homogénea de grado cero, es decir, si cumple que $f(tx,ty) = f(x,y)$.

Ejemplo 2.16

La ecuación diferencial $y' = \dfrac{2x+3y}{x-y}$ es homogénea de grado cero pues,

$$f(tx,ty) = \frac{2tx+3ty}{tx-ty} = \frac{t(2x+3y)}{t(x-y)} = t^0\left(\frac{2x+3y}{x-y}\right) = \frac{2x+3y}{x-y} = f(x,y).$$

Definición 2.5

Una EDO de primer orden es homogénea si tiene la forma $\dfrac{dy}{dx} = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ o la forma $\dfrac{dx}{dy} = F\left(\dfrac{x}{y}\right)$. En estas se cumple que tanto $F\left(\dfrac{x}{y}\right)$ como $F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ son funciones homogéneas y de grado cero.

Observación 2.3 Cuando la ecuación diferencial esta escrita de la forma normal $m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$, suponiendo que $n(x,y) \neq 0$ conviene escribirla en su forma diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)}.$$

Algunas operaciones algebraicas tienen validez solo bajo ciertas condiciones, por ejemplo, pasar de $(x^2-y^2)dy + (xy+y^2)dy = 0$ a $\frac{dy}{dx} = -\frac{xy+y^2}{x^2-y^2}$ es válido si y solo si $x^2-y^2 \neq 0$. Los casos $x^2-y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm x$ deben estudiarse por aparte, pues pueden generar soluciones singulares.

Teorema 2.1

Si la ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x,y)$ es homogénea, entonces el cambio de variable $u = \frac{y}{x}$ o equivalentemente $y = u \cdot x$ la reduce a una ecuación diferencial en variables separables.

Demostración

Al hacer la sustitución $y = ux \Rightarrow y' = xu' + u$ la ecuación diferencial se transforma en

$$xu' + u = f(x, xu),$$

luego como $f(x,y)$ es homogénea de grado cero tenemos que

$$x\frac{du}{dx} + u = x^0 f(1,u),$$

de donde

$$x\frac{du}{dx} = f(1,u) - u \Rightarrow \frac{du}{f(1,u)-u} = \frac{dx}{x},$$

la cual es una ecuación en variable separable. Al final del proceso de integración, se recuperan las variables x y y con base en la sustitución $y = ux$.

Ejemplo 2.17

La siguiente ecuación diferencial $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$, se transforma en una ecuación de variables separables al utilizar cambio de variable $u = \frac{y}{x}$.

Primero dividiendo por x, suponiendo $x \neq 0$, se tiene

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x},$$

luego, haciendo la sustitución $u = \frac{y}{x}$, se obtiene

$$u'x + u = \sqrt{1-u^2} + u \Leftrightarrow \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando a ambos miembros de la ecuación

$$\arcsin(u) = \ln|x| + \ln|C|,$$

haciendo el cambio $u = \frac{y}{x}$ se tiene por solución implícita

$$\arcsen\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|Cx|.$$

con C una constante arbitraria.

Importante hacer notar que al dividir por $x\sqrt{1-u^2}$ se pueden haber perdido soluciones: $x = 0$, la cual no es solución; pero si $1 - \frac{x^2}{y^2} = 0$ de donde $y = \pm x$ que si son soluciones singulares.

En términos generales, si $y' = f(x,y)$ representa una EDO y (x,y) es un punto en el dominio de $f(x,y)$, entonces se puede mostrar que las siguientes propiedades son equivalentes:

1. La EDO de primer orden $y' = f(x,y)$ es homogénea.
2. $f(tx,ty) = t^0 f(x,y) = f(x,y)$ para todo t tal que (tx,ty) pertenezca al dominio de f. En este caso, se dice que la EDO de primer orden es **homogénea de grado** 0**.**
3. $f(x,y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$ o $f(x,y) = G\left(\frac{x}{y}\right)$ para alguna función F o G de variable real.

Ejemplo 2.18

Resuelva la ecuación diferencial:

$$(y^2 + yx) - x^2\frac{dy}{dx} = 0$$

Observe que la ecuación diferencial es homogénea puesto que las funciones con cirterio $(y^2 + yx)$ y x^2 son homogéneas ambas de orden 2. Además reencribiendo la ED en su forma normal se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + yx}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$$

de esta forma tomamos $u = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx}x + u = \frac{dy}{dx}$, luego sustituyendo en la ED dada:

$$\frac{du}{dx}x + u = u^2 + u$$

$$\frac{du}{dx}x = u^2$$

$$-u^{-1} = \ln|x| + C$$

como $u = \frac{y}{x}$

$$-\frac{x}{y} = \ln|x| + C \quad (*)$$

Por lo tanto la solución general de ED viene dada por $(*)$ y además note que las soluciones no están definidas para $x = 0$ (ni para $y = 0$, pese a ser esta una solución singular).

Ejemplo 2.19

Resuelva la ecuación diferencial $x\cdot y'-y\ln\left(\frac{y}{x}\right)-y=0$ hasta obtener su solución general.

Tomando $\frac{y}{x}=u\Rightarrow y'=u+u'x$. Luego sustituyendo en la ED dada se tiene que

$$\begin{aligned}
u+u'x-u\ln u-u &= 0\\
\Rightarrow \frac{u'}{u\ln u} &= \frac{1}{x}\\
\Rightarrow \int\frac{du}{u\ln u} &= \ln|x|+\ln|C|\\
\Rightarrow \ln\left|\ln\frac{y}{x}\right| &= \ln|C\cdot x|
\end{aligned}$$

De donde se concluye que la solución general viene dada por

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right|=Cx$$

Ejemplo 2.20

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2e^{-\frac{y}{x}}+y^2}{xy}$$

Escribiendo la ecuación diferencial de la forma $y'=F\left(\frac{y}{x}\right)$, es decir,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{-\frac{y}{x}}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$$

de donde se toma el cambio de variable $v=\frac{y}{x}\Leftrightarrow y=xv\Rightarrow\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$

y sustituyendo en ED dada

$$x\frac{dv}{dx}+v=\frac{e^{-v}+v^2}{v}$$

Separando variables

$$ve^vdv=\frac{dx}{x}$$

e integrando

$$ve^v-e^v=\ln|x|+c$$

finalmente retomando las variables originales, se tiene que la solución en forma implícita viene dada por :

$$ye^{\frac{y}{x}}-xe^{\frac{y}{x}}-x\ln|x|=cx$$

Ejemplo 2.21

Mostrar que $(x^2-y^2)dx+(xy+y^2)dy=0$ es una EDO homogénea y hallar su solución.

En primer lugar, como las funciones $m(x,y)=(x^2-y^2)$ y $n(x,y)=(xy+y^2)$ son ambas funciones homogéneas del mismo grado, se cumple que dicha ecuación diferencial es homogénea. Además por otro lado si se expresa la ecuación diferencial en su forma normal, es decir, se encuentra $f(x,y)$.

$$\begin{aligned}(x^2-y^2)dx+(xy+y^2)dy=0 &\Leftrightarrow (xy+y^2)dy=-(x^2-y^2)dx\\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{xy+y^2} \text{ con } xy+y^2\neq 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Luego, se puede mostrar la homogeneidad de tres formas posibles:

1. Reescribir $f(x,y)$ como $F\left(\frac{y}{x}\right)$, siendo F una función real de variable real. En efecto

$$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{xy+y^2}=\frac{\frac{y^2-x^2}{x^2}}{\frac{xy+y^2}{x^2}}=\frac{\frac{y^2}{x^2}-1}{\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (x\neq 0).$$

2. Reescribir $f(x,y)$ como $G\left(\frac{x}{y}\right)$ siendo G una función real de variable real. En efecto

$$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{xy+y^2}=\frac{\frac{y^2-x^2}{y^2}}{\frac{xy+y^2}{y^2}}=\frac{1-\frac{x^2}{y^2}}{\frac{x}{y}+1}=\frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}{\left(\frac{x}{y}\right)+1}=G\left(\frac{x}{y}\right) \quad (y\neq 0).$$

3. Mostrando que $f(tx,ty)=t^0 f(x,y)=f(x,y)$ para todo t tal que (tx,ty) pertenezca al dominio de f.

$$f(tx,ty)=\frac{(ty)^2-(tx)^2}{(tx)(ty)+(ty)^2}=\frac{t^2y^2-t^2x^2}{t^2xy+t^2y^2}=\frac{t^2(y^2-x^2)}{t^2(xy+y^2)}=\frac{y^2-x^2}{xy+y^2}=f(x,y).$$

Con cualquiera de los tres alternativas, se muestra que la EDO dada es homogénea.

Para resolver la ecuación diferencial dada, considérela de la forma $y'=\frac{y^2-x^2}{xy+y^2}$, suponiendo $xy+y^2\neq 0$. Ahora si dividimos por $x^2\neq 0$ se obtiene la ecuación en la forma

$$y'=\frac{(\frac{y}{x})^2-1}{\frac{y}{x}+(\frac{y}{x})^2},$$

luego tomando la sustitución $u=\frac{y}{x}\Rightarrow y'=u'x+u$ y sustituyendo en la ecuación anterior se tiene

$$u'x+u=\frac{u^2-1}{u+u^2}\Leftrightarrow x\frac{du}{dx}=-\frac{(1+u^3)}{u(u+1)},$$

de donde resolviendo y separando variables se tiene

$$\frac{-u}{u^2-u+1}du=\frac{1}{x}dx,$$

integrando a ambos miembros de la ecuación

$$-\frac{1}{2}\ln\left(u^2-u+1\right)-\frac{\tan^{-1}\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}=C+\ln(x),$$

finalmente retomando el cambio de variable $y=ux$, se tendría la solución general en su forma implícita

$$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}+1\right)-\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\frac{2y}{x}-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}=C+\ln(x).$$ [a]

[a] Puede ingresar a página interactiva **Homogéneas2** para verificar paso a paso los resultados del proceso de resolución.

En la figura 2.4 se muestran gráficas de curvas solución de dicha ecuación diferencial.

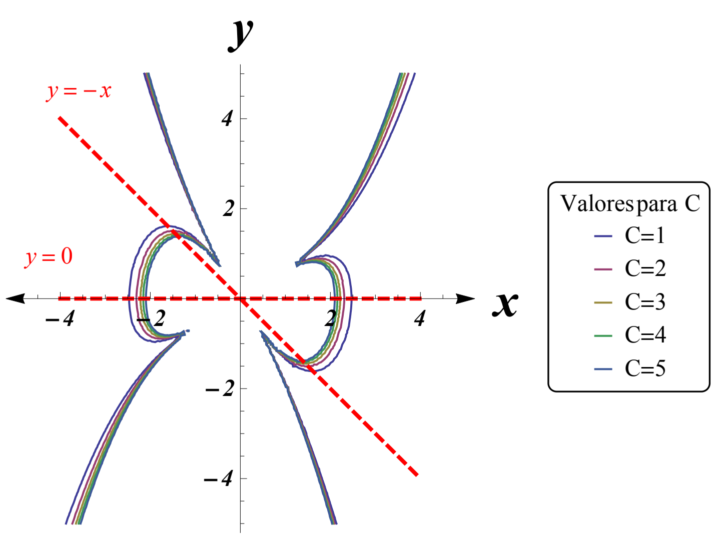


Figura 2.4: algunas soluciones particulares de la EDO $y'=\dfrac{y^2-x^2}{xy+y^2}$.
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 11.0.

Ejemplo 2.22

Determine el valor de a de tal forma que la ecuación $2xz^{3a}dx+a(x^2z^{3a-1}-z^{a-1})dz=0$ se convierta en homogenéa. Luego resuelva dicha ecuación diferencial obtenida.

Observe que:

$M(x,z)=2xz^{3a}\Rightarrow M(tx,tz)=2t^{1+3a}xz^{3a}=t^{1+3a}M(x,y)$ [1]

$N(x,z) = a(x^2z^{3a-1} - z^{a-1}) \Rightarrow N(tx,tz) = a(t^{1+3a}x^2z^{3a-1} - t^{a-1}z^{a-1})$ [2]

De [1] y [2] se tiene que para la ED dada sea homogénea debe darse

$t^{1+3a} = t^{a-1} \Leftrightarrow 1+3a = a-1 \Leftrightarrow a = -1$

Ahora si sustituimos $a=-1$ en la ED se tendría $2xz^{-3}dx - (x^2z^{-4} - z^{-2})dz = 0$ una ecuacion diferencial homogénea que puede ser escrita como

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2xz^{-3}}{x^2z^{-4} - z^{-2}} = \frac{2xz}{x^2 - z^2} = \frac{2 \cdot \frac{z}{x}}{1 - (\frac{z}{x})^2}$$

Tome de esta forma $u = \frac{z}{x} \Rightarrow z = ux \Rightarrow z' = u'x + u$, luego sustituyendo en la ecuación anterior se tiene

$u'x + u = \frac{2u}{1-u^2} \Rightarrow u'x = \frac{2u}{1-u^2} - u \Rightarrow u'x = \frac{u^3+u}{1-u^2}$, luego separando variables se tendría

$\frac{1-u^2}{u^3+u}du = \frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow \ln(u) - \ln\left(u^2+1\right) = \ln x + \ln C$ (suponga $u > 0, x > 0, C > 0$)

$\Rightarrow \ln\left(\frac{u}{u^2+1}\right) = \ln C.x$

$\Rightarrow \frac{u}{u^2+1} = C.x$

De donde devolviéndose a las variables originales z,x con $u = \frac{z}{x}$ se obtiene por solución general

$$\frac{zx}{z^2+x^2} = Cx$$

Puede ingresar al link `https://youtu.be/JZYQVmGM9Eo` o bien al código QR dado para visualizar explición de tal ejemplo.

Ejemplo 2.23

Ejemplo de ecuación diferencial homogénea en $x(y)$. Resolver la ED

$$y \cdot dx + \left(y\cos\left(\frac{x}{y}\right) - x\right)dy = 0$$

Ingresar al link `https://www.youtube.com/watch?v=Bcnsr0tPajk&feature=youtu.be` o bien al código QR dado para visualizar explición de tal ejemplo.

2.3.2 Transformaciones especiales

Existen algunos casos donde la ecuación diferencial puede transformarse a una homogénea con una sustitución apropiada. En tales circunstancias, los ejemplos son específicos u obedecen a una estructura. Para ilustrar este hecho, considere la EDO

$$\frac{dy}{dx} = G\left(\frac{ax+by+k}{Ax+By+K}\right) \tag{2.16}$$

Primer Caso

Si $aB - Ab \neq 0$ y G es una función real continua en una región abierta, el cambio de variables

$$\begin{cases} u &= x-\alpha \\ v &= y-\beta \end{cases} \quad \text{con } \alpha, \beta, \text{ solución del sistema } \begin{cases} a\alpha+b\beta+k &= 0 \\ A\alpha+B\beta+K &= 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

transformará la EDO en homogénea. En efecto, a partir de 2.17 se despejan las variables x y y obteniendo

$$\begin{cases} x &= u+\alpha \\ y &= v+\beta \end{cases} \tag{2.18}$$

de donde el cálculo de los diferenciales son

$$\begin{cases} dx &= du \\ dy &= dv \end{cases} \tag{2.19}$$

Sustituyendo 2.18 y 2.19 en 2.16 se tendrá que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = G\left(\frac{ax+by+k}{Ax+By+K}\right) &\Leftrightarrow \frac{dv}{du} = G\left(\frac{a(u+\alpha)+b(v+\beta)+k}{A(u+\alpha)+B(v+\beta)+K}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{dv}{du} = G\left(\frac{au+bv+\overbrace{a\alpha+b\beta+k}^{0}}{Au+Bv+\underbrace{A\alpha+B\beta+K}_{0}}\right) \qquad (2.20) \\ &\Leftrightarrow \frac{dv}{du} = G\left(\frac{au+bv}{Au+Bv}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{dv}{du} = G\left(\frac{a+b\left(\frac{v}{u}\right)}{A+B\left(\frac{v}{u}\right)}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{dv}{du} = F\left(\frac{v}{u}\right). \qquad (2.21) \end{aligned}$$

Es decir, G se puede describir como una función F que solo depende de u y v, como se ha visto, hace de 2.16 una ecuación homogénea.

Por otro lado, note que en el paso 2.20 se tiene la condición de que ambas expresiones se anulen, lo cual es posible resolviendo el sistema

$$\begin{cases} a\alpha+b\beta+k &= 0 \\ A\alpha+B\beta+K &= 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

o equivalente el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} a\alpha+b\beta &=& -k \\ A\alpha+B\beta &=& -K \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ A & B \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -k \\ -K \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

cuyo determinante de la matriz de coeficientes es $aB-Ab$, el cual se ha supuesto que $aB-Ab\neq 0$.

Luego, mediante la Regla de Cramer, el sistema de ecuaciones tiene una única solución para α y β dada por

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix} -k & b \\ -K & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix}}=\frac{-kB+Kb}{aB-Ab} \quad \text{y} \quad \beta=\frac{\begin{vmatrix} a & -k \\ A & -K \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix}}=\frac{-aK+Ak}{aB-Ab}. \tag{2.24}$$

Segundo Caso

Si $aB-Ab=0$ y G es una función real continua en una región abierta, es posible el despeje de a o b en los casos en que $A\neq 0$ o $B\neq 0$. De esta manera, se puede considerar la sustitución

$$v=Ax+By, \tag{2.25}$$

en donde

$$\frac{dv}{dx}=A+B\frac{dy}{dx}\Leftrightarrow\frac{1}{B}\cdot\frac{dv}{dx}-\frac{A}{B}=\frac{dy}{dx}. \tag{2.26}$$

En efecto, sin pérdida de generalidad sea $B\neq 0$ en $aB-Ab=0$. Entonces, despejando a se obtiene que

$$a=\frac{Ab}{B} \tag{2.27}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}=G\left(\frac{ax+by+k}{Ax+By+K}\right) &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=G\left(\frac{\frac{Ab}{B}x+by+k}{Ax+By+K}\right)\\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=G\left(\frac{Abx+Bby+Bk}{B(Ax+By+K)}\right)\\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=G\left(\frac{b(Ax+By)+Bk}{B(Ax+By)+BK)}\right)\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{B}\cdot\frac{dv}{dx}-\frac{A}{B}=G\left(\frac{bv+Bk}{Bv+BK}\right)\\
&\Leftrightarrow \frac{dv}{dx}=Bf(v)+A\\
&\Leftrightarrow \frac{dv}{Bf(v)+A}=dx\\
&\Leftrightarrow \frac{dv}{Bf(v)+A}-dx=0.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Donde 2.28 representa una EDO en variables separadas y G se puede describir como una función f que solo depende de v, cuya solución está dada por

$$\int \frac{dv}{Bf(v)+A} - \int dx = C. \tag{2.29}$$

En caso de que $A = B = 0$ se considera la sustitución

$$v = ax + by + k \tag{2.30}$$

en donde

$$\frac{dv}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{1}{b} \cdot \frac{dv}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{dy}{dx}. \tag{2.31}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = G\left(\frac{ax+by+k}{Ax+By+K}\right) &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = G\left(\frac{ax+by+k}{K}\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{b} \cdot \frac{dv}{dx} - \frac{a}{b} = G\left(\frac{v}{K}\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = bG\left(\frac{v}{K}\right) + a \\
&\Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = bg(v) + a \\
&\Leftrightarrow \frac{dv}{bg(v)+a} = dx \\
&\Leftrightarrow \frac{dv}{bg(v)+a} - dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

La ecuación 2.32 representa una EDO en variables separadas, cuya solución está dada por

$$\int \frac{dv}{bg(v)+a} - \int dx = C. \tag{2.33}$$

Ejemplo 2.24

Transformar $(2x - y - 4)dx - (x - 2y + 1)dy = 0$ en una EDO homogénea y hallar su solución.

En primer lugar, se encuentra $f(x,y)$. Esto es se transforma dicha ecuación diferencial en su forma normal:

$$\begin{aligned}
(2x - y - 4)dx - (x - 2y + 1)dy = 0 &\Leftrightarrow (x - 2y + 1)dy = (2x - y - 4)dx \\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x - y - 4}{x - 2y + 1}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Ejemplo 2.24 Note que $2\cdot -2 - 1\cdot -1 = -3 \neq 0$ luego, se resuelve el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha - \beta - 4 & = & 0 \\ \alpha - 2\beta + 1 & = & 0 \end{array}\right. \tag{2.35}$$

el cual tiene solución única dada por

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 3 \\ \beta & = & 2 \end{array}\right. \tag{2.36}$$

El siguiente paso consiste en considerar el cambio de variables

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & x-3 \\ v & = & y-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & u+3 \\ y & = & v+2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} dx & = & du \\ dy & = & dv \end{array}\right. \tag{2.37}$$

referenciado en 2.17, 2.18 y 2.19. Luego, se sustituyen los resultados de 2.37 en la EDO 2.34. Esto es

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{2x-y-4}{x-2y+1} &\Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{2(u+3)-(v+2)-4}{(u+3)-2(v+2)+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{dv}{du} = \frac{2u+6-v-2-4}{u+3-2v-4+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{dv}{du} = \frac{2u-v}{u-2v} \\ &\Leftrightarrow \frac{dv}{du} = \frac{u(2-\frac{v}{u})}{u(1-2\frac{v}{u})} \\ &\Leftrightarrow \frac{dv}{du} = \frac{2-\frac{v}{u}}{1-2\frac{v}{u}}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Se sigue que 2.38 representa una EDO homogénea, la cual se transforma a una de variables separables mediante la sustitución

$$V = \frac{v}{u}, \tag{2.39}$$

esto permite cambiar v en términos de V manteniendo a u como variable independiente. En consecuencia

$$\frac{dV}{du} = \frac{\frac{dv}{du}u - v}{u^2} \Rightarrow u\frac{dV}{du} = \frac{dv}{du} - \frac{v}{u} \Leftrightarrow \frac{dv}{du} = u\frac{dV}{du} + V. \tag{2.40}$$

Con lo cual, la EDO 2.38 se transforma en

$$\frac{dv}{du} = \frac{2-\frac{v}{u}}{1-2\frac{v}{u}} \Leftrightarrow u\frac{dV}{du} + V = \frac{2-V}{1-2V}. \tag{2.41}$$

Simplificando y resolviendo 2.41, se tiene que

$$
\begin{aligned}
u\frac{dV}{du}+V=\frac{2-V}{1-2V} \;&\Leftrightarrow\; u\frac{dV}{du}=\frac{2-V}{1-2V}-V\\
&\Leftrightarrow\; u\frac{dV}{du}=\frac{2V^2-2V+2}{1-2V}\\
&\Leftrightarrow\; \frac{u}{2}\frac{dV}{du}=\frac{V^2-V+1}{1-2V}\\
&\Leftrightarrow\; \frac{1-2V}{V^2-V+1}dV=\frac{2}{u}du\\
&\Rightarrow\; \int\frac{1-2V}{V^2-V+1}dV-\int\frac{2}{u}du=\ln A\\
&\Leftrightarrow\; -\ln(V^2-V+1)-2\ln|u|=\ln A\\
&\Leftrightarrow\; -\ln(V^2-V+1)=\ln u^2+\ln A\\
&\Leftrightarrow\; \ln(V^2-V+1)^{-1}=\ln(Au^2)\\
&\Leftrightarrow\; \ln\frac{1}{V^2-V+1}=\ln(Au^2)\\
&\Rightarrow\; \frac{1}{V^2-V+1}=Au^2. \qquad (2.42)
\end{aligned}
$$

Recuperando la sustitución realizada en 2.39, se tiene ahora que

$$\frac{1}{V^2-V+1}=Au^2\Leftrightarrow\frac{1}{\left(\frac{v}{u}\right)^2-\left(\frac{v}{u}\right)+1}=Au^2\Leftrightarrow v^2-uv+u^2=C. \qquad (2.43)$$

con $C=\dfrac{1}{A}$. Se realiza luego el cambio realizado en 2.37, para dar la solución obtenida en 2.43 en términos de las variables iniciales x,y, lo cual solución general es

$$(y-2)^2-(x-3)(y-2)+(x-3)^2=C$$

Puede ingresar a página interactiva **Ecuación diferencial Especial** para verificar paso a paso los resultados del proceso de resolución.

Ejemplo 2.25

Considere la ecuación diferencial $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x+y-2}{y}$ (1). Verifique que haciendo el cambio de variable $u=x-2$ la ecuación diferencial se transforma en una ecuación diferencial homogénea. Luego resuelva dicha ecuación diferecial para obtener la solucón de (1).

Solución:

$$
\begin{aligned}
\text{Se tiene que } u &= x-2 \\
&\Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{dx}{dy} \\
\text{Sustituyendo en } \frac{dx}{dy} &= \frac{x+y-2}{y} \text{ obtenemos} \\
&\quad \frac{du}{dy} = \frac{y+u}{y} \\
&\Rightarrow \frac{du}{dy} = 1+\frac{u}{y} = f\left(\frac{u}{y}\right)^{a}
\end{aligned}
$$

Posteriormente se resuleve la ecuación diferencial:

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dy} &= 1+\frac{u}{y} \\
\text{Sea } u &= vy \to \frac{du}{dy} = v+y\frac{dv}{dy} \\
\text{Sustituyendo en } \frac{du}{dy} &= 1+\frac{u}{y}\text{obtenemos} \\
v+y\frac{dv}{dy} &= 1+v \\
&\quad \frac{ydv}{dy} = 1 \\
&\Rightarrow dv = \frac{dy}{y} \\
v &= \ln|y|+c \\
&\to \frac{u}{y} = \ln|y|+c \\
&\to \frac{x-2}{x} = \ln|x|+c
\end{aligned}
$$

---

[a] Puede visualizar este y otros ejemplos ilustrativos de forma interactiva mediante página interactiva **Ecuación diferencial Especial**

Ejercicios 2.2 **[Ejecicios de retroalimentación]**

2.3.1 Verifique usando definición si las siguientes ecuaciones diferenciales son homogéneas, en caso de no estar la ED dada en su forma normal conviene tenerla en dicha forma $y' = f(x,y)$. Posteriormente ingrese a página interactiva **Homogéneas1** para comprobar dichos resultados en dicha página.

1. $y' = \dfrac{xy^2 + 2x}{xy}$
2. $xy^2 dy - (x^3 + y^3)dx = 0$
3. $y' = \dfrac{y}{x} + \cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$
4. $-(x^3 + y^3) + (3x + y^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$
5. $y\dfrac{dy}{x} = e^{\frac{2y}{x}}(x + y)$

2.3.2 Resuelva de manera algebraica las siguientes ecuaciones diferenciales, en caso de no estar la ED dada en su forma normal conviene tenerla en dicha forma $y' = f(x,y)$. Posteriormente compruebe lo obtenido mediante página interactiva **Homogéneas2** para comprobar dichos resultados en dicha página.

1. $y' = \dfrac{3xy + y^2}{2x^2}$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3 + x^3 + xy^2}{xy^2}$.
3. $xy' = y + 2xe^{\frac{y}{x}}$.
4. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$.
5. $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{xy + y^2}$.
6. $-\left(y + x\tan\left(\dfrac{y}{x}\right)\right) + x\dfrac{dy}{dx} = 0$.

2.3.3 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $(y^2 + xy)dx - x^2 dy = 0$
2. $y(\ln x - \ln y)dx = (x\ln x - x\ln y - y)dy$
3. $(x^2 + 2xy)y' = -2y^2 - 3xy$
4. $(2xy + x^2 + 3y^2)y' + (y^2 + 2xy + 3x^2) = 0$

5. $x' = \dfrac{x}{y} + \sec^2(\dfrac{x}{y})$
6. $y\dfrac{dx}{dy} = x + 4ye^{\frac{-2x}{y}}$
7. $(2\sqrt{xy} - y)dx - xdy = 0$
8. $(x^3 + y^2\sqrt{x^2+y^2}) - xy\sqrt{x^2+y^2} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$
9. $(2x+2y-1) + y'(x+y-2) = 0$ (Sug. tome $u = x+y$)
10. $x^2y' = xy + x^2e^{\frac{y}{x}}; \quad x > 0$

2.3.4 Considere la ED $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$, si al aplicar el cambio de variable $y = z^n$ para cierto n la convierte en ED homogénea. Determine el valor de n y solución general de la misma

2.3.5 Considere la ecuación diferencial $y' = f\left(\dfrac{ax+by+h}{dx+cy+k}\right)$.

a) Si $ac - bd \neq 0$, las rectas $ax+by+h = 0$ y $dx+cy+k = 0$ se intersecan en un único punto (x_0, y_0). Muestre que, en este caso , la sustitución $u = x - x_0$ y $v = y - y_0$ transforma la ecuación en homogénea en las variables u y v.

b) Cuando $ac - bd = 0$, pruebe que la sustitución $z = ax + by$ da como resultado una ecuación en variables separable.

2.3.6 Aplique ejercicio anterior para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y posteriormente verifique resultados obtenidos por medio de la página interactiva **Ecuación diferencial Especial** para comprobar dichos resultados en dicha página.

1. $y' = \dfrac{6x+3y-3}{4x+8y-2}$
2. $(2x-y+2)dx + (4x-2y-1)dy = 0$
3. $y' = \dfrac{x-y-1}{x+3y-5}$
4. $(2x-y-4)dx - (x+y-1)dy = 0$
5. $(x-y+1)dy - (x+y-1)dx = 0$
6. $y' = \dfrac{3x-y+2}{6x-2y}$
7. $y' = \dfrac{12x+5y-9}{-5x-2y+3}$
8. $(x+y-4)dx + (x-y+2)dy = 0.$
9. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x+y+7}{-2(x+y)+1}.$

Prof: M.Sc.Norberto Oviedo Ugalde.

Capítulo 3:

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias exactas y con factor integrante.

3 — EDO Exactas y con factor integrante.

3.0.1 Objetivos Específicos

- Definir e identificar una ecuación diferencial exacta.
- Comprender el proceso de resolución de ecuaciones exactas .
- Definir e identificar una ecuación diferencial con factor integrante .
- Comprender el proceso de resolución de ecuaciones diferenciales con factor integrante.

3.0.2 Contenidos

- Definición de ecuación diferencial exacta.
- Resolución de una ecuación diferencial exacta.
- Definición de ecuación diferencial con factor integrante.
- Resolución de una ecuación diferencial con factor integrante.

3.1 Ecuaciones Diferenciales exactas.

Definición 3.1

Una ecuación diferencial de primer orden

$$M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \text{ o equivalentemente } M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{3.1}$$

es exacta en un rectángulo R, si existe una función $F(x,y)$ tal que el diferencial total de $F(x,y)$ denotado $dF(x,y)$ [a] sea igual a $M(x,y)dx+N(x,y)dy$, es decir, si existe una función $F(x,y)$ tal que

$$dF(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy=M(x,y)dx+N(x,y)dy,$$

de donde se extrae, en tal caso que $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$ y $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}=N(x,y)$, para toda (x,y) perteneciente a la región rectangular R.

[a] En cálculo diferencial, se tiene que si $z=f(x,y)$ es una función con primeras derivadas parciales continuas en una región R del plano xy, su diferencial (que también llamamos diferencial total) es $dz=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$

De acuerdo a lo anterior, como $dF(x,y)=0$, la solución de la ecuación diferencial que se obtiene por integración, viene dada en forma implícita por $F(x,y)=C$, con C una constante arbitraria.

El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para conocer cuándo una ecuación es exacta y su demostración nos proporciona un método para obtener la solución general:

$$F(x,y)=C.$$

Teorema 3.1

Sean $M(x,y)$ y $N(x,y)$ funciones continuas con derivadas parciales de primer orden continuas en un rectángulo R. Entonces, la ecuación $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es exacta si y sólo si se verifica:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}; \qquad \forall (x,y) \text{ perteneciente a la región R.} \tag{3.2}$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que la ecuación $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es exacta. Entonces, existe una función $F(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y);$$

por tanto:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Puesto que las primeras derivadas parciales de M y N son continuas en R, también lo son las derivadas parciales segundas cruzadas de F ; por tanto, éstas son iguales y se tiene que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \ \forall (x,y) \in R.$$

$(\Leftarrow)$ Dada la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, suponga que $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Hay que demostrar que existe una función F tal que $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy$, osea, F debe satisfacer simultáneamente dos condiciones a saber:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Si $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ entonces:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx = G(x,y) + \varphi(y), \tag{3.3}$$

donde $G(x,y)$ es una primitiva de $M(x,y)$ respecto de x. Ahora, derivamos parcialmente respecto de y la expresión obtenida para F y la igualamos a $N(x,y)$:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} + \varphi'(y) = N(x,y),$$

de donde despejamos $\varphi'(y)$

$$\varphi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial G(x,y)}{\partial y}. \tag{3.4}$$

Si esta expresión sólo depende de y, podremos integrar y obtener $\varphi(y)$ que, sustituida en 3.3 nos dará la expresión de $F(x,y)$.

Queda por demostrar que 3.4 sólo depende de y. Para ello, comprobamos que su derivada parcial respecto de x es cero:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \frac{\partial G(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Método de resolución

Si la ecuación 3.1 es exacta, existe una función F de modo que:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = dF(x,y),$$

por tanto, se tiene que $dF(x,y) = 0$ y la solución viene dada en su forma implícita $F(x,y) = C$,
donde $F(x,y)$ se obtiene siguiendo los pasos vistos en la demostración del teorema 4.2, con C es una constante arbitraria.

Ejemplo 3.1

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales exactas:

(a) $(x^2+y^2+2x)dx+(2xy+3y^2)dy=0$.

(b) $(\cos x \operatorname{sen} x - xy^2)dx + y(1-x^2)dy = 0, \;\; y(0)=2$.

Solución

(a) Se comprueba primero que se trata de una ecuación exacta:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+2x) = 2y = \frac{\partial}{\partial x}(2xy+3y^2).$$

Por tanto, la solución general viene dada por $F(x,y)=C$, siendo F una función tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^2+y^2+2x = M(x,y), \tag{3.5}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial y} == 2xy+3y^2 = N(x,y). \tag{3.6}$$

Se calcula $F(x,y)$. Integrando la ecuación 3.5 respecto de x se tiene de esta manera:

$$F(x,y) = \int (x^2+y^2+2x)dx = \frac{x^3}{3} + y^2x + x^2 + \varphi(y).$$

Derivando esta expresión respecto de y, se tiene que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy + \varphi'(y).$$

Igualando esta ecuación a la ecuación 3.6:

$$2xy + \varphi'(y) = 2xy + 3y^2,$$

y despejando $\varphi'(y)$

$$\varphi'(y) = 3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = \int 3y^2 dy = y^3 + k.$$

Se puede tomar $k=0$, ya que en la solución final de la ecuación diferencial esta constante quedará suprimida en la constante C. Por tanto, la función F buscada es:

$$F(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^2x + x^2 + y^3,$$

y la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\frac{x^3}{3} + y^2x + x^2 + y^3 = C.$$

(b) Se comprueba que la ecuación es exacta:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\cos x \operatorname{sen} x - xy^2) = -2xy = \frac{\partial}{\partial x}(y(1-x^2)).$$

Por tanto, la solución general viene dada por $F(x,y) = C$, siendo F una función tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos x \operatorname{sen} x - xy^2, \tag{3.7}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y(1-x^2). \tag{3.8}$$

En este caso, es más sencillo comenzar integrando la ecuación 3.8 respecto de y:

$$F(x,y) = \int y(1-x^2)dy = \frac{(1-x^2)y^2}{2} + \Psi(x).$$

Derivando ahora esta expresión respecto de x, se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -xy^2 + \Psi'(x).$$

Igualando esta ecuación a la ecuación 3.7 se tiene:

$$-xy^2 + \Psi'(x) = \cos x \operatorname{sen} x - xy^2 ,$$

de donde $\Psi'(x) = \cos x \operatorname{sen} x$ y $\Psi(x) = -\dfrac{\cos^2 x}{2}$.

Por tanto,

$$F(x,y) = \frac{(1-x^2)y^2}{2} - \frac{\cos^2 x}{2},$$

y la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\frac{(1-x^2)y^2}{2} - \frac{\cos^2 x}{2} = C, \text{ o bien, } (1-x^2)y^2 - \cos^2 x = C_1.$$

Imponiendo la condición inicial, $y(0) = 2$, se tiene que $4 = C_1$ y sustituyendo este valor de C_1, se obtiene la solución del problema de valor inicial dado:

$$(1-x^2)y^2 - \cos^2 x = 4 \text{ o bien, } y^2 = \frac{4-\cos^2 x}{(1-x^2)} \quad \text{con } 1-x^2 \neq 0.$$

Puede ingresar a página interactiva **Ecuación diferencial Exacta** para verificar paso a paso los resultados del proceso de resolución.

Ejemplo 3.2

Considere la ED **F**: $\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}\right)dx+(1+f(x)\cdot\ln x)dy=0$ en el intervalo $]1,+\infty[$

1. Suponiendo que **F** es exacta establezca una ED en *f(x)* y luego determine *f(x)*

   Observe que:

   $M(x,y)=\frac{x-y}{x^2}\Rightarrow M_y=\frac{-1}{x^2}$

   $N(x,y)=1+f(x)\cdot\ln x\Rightarrow N_x(x,y)=\ln x f'(x)+\frac{1}{x}f(x)$

   Luego para que la ED dada sea exacta debe cumplirse

   $$\ln x f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=\frac{-1}{x^2}$$

   es decir, $f'(x)+\frac{1}{x\ln x}f(x)=-\frac{1}{x^2\ln x}$: ED Lineal en $f(x)$ (se estudiará en próximas secciones).

   Ahora en la ED anterior si la multiplicamos por el factor integrante $e^{\int\frac{1}{x\ln x}}=e^{\ln(\ln x)}=\ln x$

   $\ln x\cdot f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=-\frac{1}{x^2}$

   $\Rightarrow\int(\ln x\cdot f(x))'dx=\int-\frac{1}{x^2}dx$

   $\ln x\cdot f(x)=\frac{1}{x}+C$

   $f(x)=\frac{1}{x\ln x}+\frac{C}{\ln x}$ haciendo $C=0$ puede tomar $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$

2. Sustituya la *f(x)* obtenida en el punto anterior y resuelva la ED exacta **F**

   Cambiando $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ en **F** se tiene que resolver ahora la ED exacta:

   $$\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(1+\frac{1}{x}\right)dy=0\quad(A)$$

   Note existe una función potencial *F(x,y)* tal que la ED se escribe $\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$ (B)

   Comparando (A) y (B) se concluye debe darse

   $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}$ (1)

   $\frac{\partial F}{\partial y}=1+\frac{1}{x}$ (2)

Integrando (1) conrespecto a x a ambos lados, se tiene $F(x,y) = \ln x + \frac{y}{x} + P(y)$ para alguna función P, luego si la derivamos parcialmente con respecto a y se tiene

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x} + P'(y)$ e igualando a (2)

$1 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + P'(y) \Rightarrow 1 = P'(y) \Rightarrow P(y) = y + K$

de donde la solución generala de **F** viene dada por $\ln x + \frac{y}{x} + y + K = C$, es decir,

$$\ln x + \frac{y}{x} + y = B, \text{ con } B = C - K$$

Ejemplo 3.3

Resolver la ecuación diferencial:

$$(ye^{xy} + 2x - 1)\,dx + (xe^{xy} - 2y + 1)\,dy = 0$$

En un primer momento se verifica que la ecuación diferencial es exacta:

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = ye^{xy} + 2x - 1 \Rightarrow M_y = y(e^{xy}x) + e^{xy} = e^{xy}(xy+1) \\ N(x,y) = xe^{xy} - 2y + 1 \Rightarrow N_x = x(e^{xy}y) + e^{xy} = e^{xy}(xy+1) \end{array}\right\} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow \text{la ED es exacta,}$$

luego de esta forma existe una función $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + 2x - 1 \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} - 2y + 1$$

Si consideramos $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} - 2y + 1$ e integramos con respecto a y:

$$f(x,y) = e^{xy} - y^2 + y + h(x) \qquad (*)$$

Derivamos (*) con respecto a x, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{xy} - y^2 + y + h(x)\right] = e^{xy}y + h'(x)$$

Ahora utilizando la condición $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + 2x - 1$ para despejar $h'(x)$:

$$ye^{xy} + h'(x) = ye^{xy} + 2x - 1 \Rightarrow h'(x) = 2x - 1 \Rightarrow h(x) = x^2 - x + C_1$$

Sustituimos $h(x)$ en (*) para obtener:

$$f(x,y) = e^{xy} - y^2 + y + x^2 - x + C_1$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial exacta es:

$$\begin{aligned} f(x,y) = C_2 \quad &\Rightarrow \quad e^{xy} - y^2 + y + x^2 - x + C_1 = C_2 \\ &\Rightarrow \quad e^{xy} - y^2 + y + x^2 - x = C \end{aligned}$$

Puede ingresar a página interactiva **Ecuación diferencial Exacta** para verificar paso a paso los resultados del proceso de resolución.

Ejemplo 3.4

Resolver el problema de valores iniciales:

$$\left(\frac{1}{1+y^2}+\cos x-2xy\right)\frac{dy}{dx}=y(y+\operatorname{sen}x),\ y(0)=1$$

Primero escribimos la ecuación diferencial de la forma diferencial:

$$-y(y+\operatorname{sen}x)dx+\left(\frac{1}{1+y^2}+\cos x-2xy\right)dy=0$$

de donde se tiene que

$$M(x,y)=-y(y+\operatorname{sen}x) \qquad N(x,y)=\frac{1}{1+y^2}+\cos x-2xy$$

$$\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=-(2y+\operatorname{sen}x) \qquad \Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=-\operatorname{sen}x-2y$$

por lo que la ecuación es exacta y de esta forma existe una función $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-y(y+\operatorname{sen}x) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}+\cos x-2xy$$

considerando $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-y(y+\operatorname{sen}x)$, luego integrando con respecto a x, se tiene

$$f(x,y)=-y^2x+y\cos x+h(y)$$

de donde derivando parcialmente $f(x,y)$ con respecto a y, es decir, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-2yx+\cos x+h'(y)$, posteriormente usando que $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{1+y^2}+\cos x-2xy$, se obtiene

$$h'(y)=\frac{1}{1+y^2}\Rightarrow h(y)=\arctan y+C_1$$

y de esta forma la familia de soluciones implícitas de la ecuación viene dada por :

$$-y^2x+y\cos x+\arctan y=C$$

si usamos $y(0)=1\Rightarrow 1+\arctan 1=C\Rightarrow C=1+\dfrac{\pi}{4}$.

Finalmente la solución al problema de valores iniciales viene dada por

$$-y^2x+y\cos x+\arctan y=1+\frac{1}{4}\pi$$

Ejemplo 3.5

En el siguiente ejemplo, se desea determinar una función $g(x)$ de forma tal que la ecuación diferencial $\left(3x^2 - y^3\right)dx + \left(3xy^2\right)g(x)dy = 0$ sea exacta.

En efecto , patra para que la ecuación diferencial dada $\left(3x^2 - y^3\right)dx + \left(3xy^2\right)g(x)dy = 0$ se exacta debe cumplirse que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2 g(x) + 3xy^2 g'(x)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad -3y^2 = 3y^2\left[g(x) + xg'(x)\right] \\
&\Rightarrow \quad xg'(x) + g(x) = -1^{a} \\
&\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}[xg(x)] = -1 \\
&\Rightarrow \quad xg(x) = -x + C \\
&\Rightarrow \quad g(x) = -1 + \frac{C}{x}
\end{aligned}$$

En particular, si $C = 0 \Rightarrow g(x) = -1$ o también, si $C = 1 \Rightarrow g(x) = -1 + \frac{1}{x}$. Note dicha función $g(x)$ no es única pues involucra una constante arbitraria C que puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$.

[a] Este tipo de ecuaciones también se puede ver como una **: ED lineal en g(x)**, la cual se retoma en sesiones posteriores.

Ejemplo 3.6 **Ejemplos complementarios mediante videos**

1. Considere la ecuación diferencial $(y \cdot P(y) + \ln x)dx + \dfrac{xy}{y-1}dy = 0$. Halle una función $P(y)$ de tal forma que ED sea exacta con $y > 1$.

Puede ingresar al link `https://youtu.be/bxNLv5UKpLg` o en su defecto escanear el código QR adjunto para visualizar explicación de tal ejercicio.

2. Determine una función $N(x,y)$ de tal forma que la ED $(y\,\mathrm{sen}\,x + x^2 y - x)dx + N(x,y)dy = 0$ sea exacta y luego resuelvala.

Puede ingresar al link `https://youtu.be/VKhLWiW9Ovw` o en su defecto escanear el código QR adjunto para visualizar explicación de tal ejercicio.

Ejercicios 3.1 [**Ejercicios de retroalimentación**]

3.1.1 Verifique que las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas, luego resolverlas. En caso de no estar la ED dada en la forma $m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$ se recomienda escribirla de dicha forma antes de resolverla hasta obtener solución general. Posteriormente ingrese a página interactiva **Ecuación diferencial Exacta** para comprobar paso a paso dichos resultados.

1. $\left(2xy^3 - 6x^2y^2\right)dx + \left(3x^2y^2 - 4x^3y\right)dy = 0$
2. $\left(e^{2y} - y\cos(xy)\right)dx + \left(2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y\right)dy = 0$
3. $(1 + e^x y + xe^x y)\,dx + (xe^x + 2)\,dy = 0.$
4. $\left(2xy - \sec^2 x\right)dx + \left(x^2 + 2y\right)dy = 0$
5. $\left(y^2 - \operatorname{sen}(x)\right)dx + \left(2xy - \sec^2(y)\right)dy == 0$
6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2 + y^3}{5 - 3xy^2}$ con $y(1) = 1$
7. $\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+1}} + 2xy - \dfrac{y}{x}\right)dx + \left(x^2 + \sqrt{x^2+1} - \ln(x) - \dfrac{2}{y}\right)dy = 0$
8. $\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)dy - \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)dx = 0$
9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y\cos x}{\operatorname{sen} x + y}$
10. $(\operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy))dx + \left(x^2\cos(xy)\right)dy = 0$

3.1.2 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales exactas:

1. $(e^{2y} - y\cos xy)dx + (2xe^{2y} - x\cos xy + 2y)dy = 0$
2. $(1 + e^x y + xye^x)dx + (xe^x + 2)dy = 0$
3. $(2xy - \sec^2 x)dx + (x^2 + 2y)dy = 0$
4. $\dfrac{y}{x}\cos x + \dfrac{2y}{x^2}\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{x}\operatorname{sen} xy' = 0$
5. $2x\ln y\,dx + \left(\frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1}\right)dy = 0,\ y(0) = \sqrt{2}$
6. $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$
7. $(2xy + y^4)dx + (3x^2 + 6xy^3)dy = 0$
8. $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$
9. $(y + y\cos(xy))dx + (x + x\cos(xy))dy = 0$

3.1.3 Determine el valor de k de tal modo que las siguientes ecuaciones diferenciales sean exactas

a) $(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$
b) $(6xy^3 + \cos y)dx + (kx^2y^2 - x\operatorname{sen} y)dy = 0$

3.1.4 Obtenga una función $M(x,y)$ de forma que la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + (xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x})dy = 0,$$

sea exacta.

3.1.5 Determine una función $g(y)$ de tal forma que la siguiente ecuación diferencial

$$(g(y) + e^x)dx + xg(y)(1 + \operatorname{sen}(y))dy = 0,$$

sea exacta.

3.1.6 Considere la ecuación diferencial $(3y^a + 10xy^2)dx + (6x^{a-1}y - 2 + 10x^2y)dy = 0$ con $a \in \mathbb{R}$. Determine el valor de a de tal forma dicha ecuación sea exacta y luego resolverla.

3.1.7 Determine los valores de A y de B que hacen exacta la ecuación diferencial:

$$\left(y^3 - \operatorname{sen} x - 2\right) dx + \left(Axy^2 + By\cos x - 3y^2\right) dy = 0$$

3.1.8 Obtener una función $M(x,y)$ de modo tal que sea exacta la ecuación diferencial:

$$M(x,y)dx + (e^x \cos y + 2\cos y)\, dy = 0$$

3.1.9 Resuelva la ecuación diferencial

$$\left(ye^y + \frac{x}{x^2+y^2}\right) y' = \frac{y}{x^2+y^2} - xe^x$$

3.1.10 Encuentre la función $f(x)$ tal que la ecuación diferencial $e^x \operatorname{sen} x + f(x)y^2 - 3 + (2xy - y^2)y' = 0$ sea exacta, luego resuélvala.

3.1.11 Halle la función $P(y)$ de tal forma que $(yP(y) + \ln x)\, dx + \dfrac{xy}{y-1} dy = 0$ sea una ecuación diferencial exacta.

3.2 Ecuaciones diferenciales con factores integrantes

Para una ecuación diferencial escrita de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ que no es exacta, en algunos casos es posible encontrar una función $\mu(x,y)$ tal que al multiplicarla por la ecuación diferencial, ésta se convierta en exacta. Es decir,

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0,$$

es una ecuación diferencial exacta.

Ejemplo 3.7

Demostrar que la ecuación diferencial $(2e^y + 3x\operatorname{sen} y)\,dx + \left(xe^y + x^2\cos y\right)dy = 0$ no es exacta, pero si se multiplica toda la ecuación por x se obtiene una ecuación diferencial exacta.

En efecto, esta ecuación no es exacta ya que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(2e^y + 3x\operatorname{sen} y) = 2e^y + 3x\cos y \neq \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^y + x^2\cos y\right) = e^y + 2x\cos y.$$

Si ahora se multiplica la ecuación por x, se obtiene la ecuación diferencial:

$$\left(2xe^y + 3x^2\operatorname{sen} y\right)dx + \left(x^2e^y + x^3\cos y\right)dy = 0,$$

que sí es diferencial exacta ya que:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2xe^y + 3x^2\operatorname{sen} y\right) = 2xe^y + 3x^2\cos y = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2e^y + x^3\cos y\right).$$

Al factor $\mu(x,y)$ tal que, al multiplicar una ecuación diferencial por dicho factor, ésta se convierte en exacta, se le llama **factor integrante.**

Puede abrir página interactiva **Ecuación diferencial con factor integrante** para comprobar dichos resultados.

Observación 3.1 . Ambas ecuaciones tienen esencialmente las mismas soluciones, pero al multiplicar por el factor integrante $\mu(x,y)$ es posible ganar o perder soluciones. En el siguiente ejemplo vemos cómo determinar si se ha ganado o perdido alguna solución en el proceso.

Ejemplo 3.8

Comprobar que $\mu(x,y) = xy^2$ es factor integrante de la ecuación:

$$(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0, \tag{3.9}$$

y posteriormente resolverla.

Al multiplicar 3.9 por la función xy^2 se obtiene:

$$\left(2xy^3-6x^2y^2\right)dx+\left(3x^2y^2-4x^3y\right)dy=0, \tag{3.10}$$

que sí es exacta. (puede utilizar página interactiva **Ecuación diferencial Exacta** para verificarlo).

Al resolver la ecuación 3.10, se tendría que su solución será de la forma $F(x,y)=C$, siendo F una función tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2xy^3-6x^2y^2, \tag{3.11}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial y}=3x^2y^2-4x^3y. \tag{3.12}$$

Integrando 3.11 respecto de x se tiene que

$$F(x,y)=\int(2xy^3-6x^2y^2)dx=x^2y^3-2x^3y^2+\varphi(y).$$

Derivando esta expresión respecto de y, :

$$\frac{\partial F}{\partial y}=3x^2y^2-4x^3y+\varphi'(y).$$

Igualando esta ecuación con la ecuación 3.12:

$$3x^2y^2-4x^3y+\varphi'(y)=3x^2y^2-4x^3y,$$

de donde al despejar $\varphi'(y)$ se tiene que $\varphi'(y)\ =0$,

y de esta forma se obtiene que $\varphi(y)=k$, tome $k=0$.

Por tanto, $F(x,y)=x^2y^3-2x^3y^2$ y la solución general de la ecuación diferencial 3.10 esta dada por

$$x^2y^3-2x^3y^2=C.$$

Como se ha comentado, al multiplicar 3.9 por el factor integrante $\mu(x,y)$ es posible ganar o perder soluciones. En este caso, al multiplicar la ecuación 3.9 por xy^2, se ha obtenido $y=0$ como solución de 3.10, pero no lo es de 3.9.

Puede abrir página interactiva **Ecuación diferencial con factor integrante** para comprobar dichos resultados.

3.2.1 Cálculo de factores integrantes

Se ha visto que $\mu(x,y)$ es un factor integrante de $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ si se cumple que la ecuación

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0,$$

es exacta. Por tanto, se verificará que :

$$\frac{\partial(\mu(x,y)M(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial(\mu(x,y)N(x,y))}{\partial x}.$$

Derivando se tiene:

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\frac{\partial N}{\partial x},$$

es decir

$$\left(M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mu. \tag{3.13}$$

Obtener μ de esta ecuación no es sencillo puesto que a veces se llega a una ecuación en derivadas parciales cuya resolución es más complicada que la ecuación inicial. Sin embargo, esta ecuación se simplifica si se busca un factor de la forma $\mu(x)$, es decir μ sólo depende de la variable x, o de la forma $\mu(y)$, es decir que sólo depende de y.

Factor integrante de la forma $\mu(\mathbf{x})$

Suponga que se quiere hallar un factor integrante que sólo dependa de x. Entonces la ecuación 3.13 se transforma en:

$$-N\mu'(x)=\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mu(x),$$

de donde,

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}.$$

Si la expresión de la derecha sólo depende de x y es continua, entonces existe el factor integrante $\mu(x)$ y se obtiene integrando esta ecuación, es decir:

$$\mu(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx}. \tag{3.14}$$

Factor integrante de la forma $\mu(\mathbf{y})$:

Si ahora se tiene un factor integrante que solo dependa de y, entonces la ecuación 3.13 queda:

$$M\mu'(y)=\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mu(y).$$

De donde ahora:

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

Si la expresión de la derecha sólo depende de y y es continua, entonces existe el factor integrante $\mu(y)$ y se obtiene integrando:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy} \tag{3.15}$$

Método de resolución

Dada la ecuación diferencial en la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, al calcular $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial N}{\partial x}$:

- Si $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación no es exacta.
- Si $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ depende sólo de x, entonces un factor integrante es
$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$
- Si $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ depende sólo de y, entonces un factor integrante es:
$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}$$
- Al encontrar el factor integrante, se multiplica toda la ecuación diferencial por dicho factor y, puesto que la ecuación obtenida es ahora exacta, se resuelve hallando la solución $F(x,y) = C$ según los procedimientos ya anteriormente descritos para este tipo de ecuaciones diferenciales.

- Finalmente es importante verificar si al multiplicar por el factor integrante aparecen o se pierden soluciones.

Ejemplo 3.9

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $(2x^2 + y)dx + \left(x^2y - x\right)dy = 0.$

(b) $y(x+y+1)dx + x(x+3y+2)dy = 0.$

En efecto, considerando las ecuaciones dadas y utilizando la teoría antes descrita se verifica lo siguiente para cada una de ellas:

(a) Esta ecuación no es exacta ya que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x^2 + y) = 1 \neq \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y - x\right) = (2xy - 1).$$

Ejemplo 3.9

En este caso se tiene que $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\dfrac{1-(2xy-1)}{(x^2y-x)}=\dfrac{-2xy+2}{-x(1-xy)}=\dfrac{2(1-xy)}{-x(1-xy)}=-\dfrac{2}{x}$,
.

por tanto, sí existe un factor de la forma $\mu(x)$, y esta dado por:

$$\mu(x)=e^{\int \frac{-2}{x}dx}=x^{-2}$$

Puede abrir página interactiva **Ecuación diferencial con factor integrante** para comprobar dichos resultados.

Al multiplicar la ecuación diferencial por este factor integrante, se obtiene la ecuación:

$$\left(2+\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(y-\frac{1}{x}\right)dy=0,$$

que sí es exacta. La solución general viene dada por $F(x,y)=C$, siendo F una función tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2+\frac{y}{x^2} \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=y-\frac{1}{x} \tag{3.17}$$

Si se integra a ambos lados la ecuación 3.17, con respecto a y entonces:

$$F(x,y)=\int\left(y-\frac{1}{x}\right)dy=\frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}+\Psi(x).$$

Luego derivando esta expresión respecto de x :

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y}{x^2}+\Psi'(x).$$

Igualando esta ecuación con la ecuación 3.16 se obtiene:

$$\frac{y}{x^2}+\Psi'(x)=2+\frac{y}{x^2},$$

despejando $\Psi'(x)$ e integrando respecto de x se tiene

$$\Psi(x)=2x,$$

y de esta forma se obtiene la solución general

$$\frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}+2x=C.$$

(b) La ecuación $y(x+y+1)dx+x(x+3y+2)dy=0$ no es exacta ya que:

Ejemplo 3.9

$$\frac{\partial}{\partial y}(y(x+y+1)) = x+2y+1 \neq \frac{\partial}{\partial x}(x(x+3y+2)) = 2x+3y+2.$$

En este caso:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{x+2y+1-(2x+3y+2)}{x(x+3y+2)} = \frac{-x-y-1}{x(x+3y+2)},$$

no depende sólo de x, por tanto, no existe un factor de la forma $\mu(x)$.

Luego se busca si es posible un factor $\mu(y)$, y para ello se procede:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{2x+3y+2-(x+2y+1)}{y(x+y+1)} = \frac{x+y+1}{y(x+y+1)} = \frac{1}{y},$$

de donde al depender la expresión anterior de solo y, se calcule el factor integrante de la siguiente forma:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y.$$

Al multiplicar la ecuación diferencial por este factor integrante, se obtiene la ecuación exacta:

$$y^2(x+y+1)dx + xy(x+3y+2)dy = 0.$$

La cual solución general viene dada por $F(x,y) = C$, siendo F una función tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2(x+y+1), \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xy(x+3y+2). \tag{3.19}$$

Para hallar F, se integra la ecuación 3.18 con respecto a x:

$$F(x,y) = \int \left(y^2x + y^3 + y^2\right) dx = \frac{x^2y^2}{2} + y^3x + \varphi(y). \tag{3.20}$$

Para hallar $\varphi(y)$, se deriva esta expresión respecto de y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2y + 3y^2x + 2yx + \varphi'(y),$$

e igualando a la expresión dada con 3.19 se tendría:

$$x^2y + 3y^2x + 2yx + \varphi'(y) = xy(x+3y+2).$$

Despejando $\varphi'(y)$ de la ecuación anterior e integrando con respecto a y se tiene que

$$\varphi(y) = k \text{ siendo } k \text{ cualquier constante.}$$

Puesto que se puede elegir cualquier valor constante para k, se elige de esta forma $\varphi(y) = 0$ y se sustituye en 3.20 para obtener la expresión de F, de donde finalmente la solución general es:

$$\frac{x^2y^2}{2} + y^3x + y^2x = C.$$

Puede verificarse que la solución $y = 0$ también es solución de la ecuación diferencial original.

Ejemplo 3.10

Determinar la solución general de la ecuación diferencial

$$\left(2xy + y^4\right) dx + \left(3x^2 + 6xy^3\right) dy = 0 \qquad (1)$$

En este caso dado que :

$$\begin{aligned} M(x,y) = 2xy + y^4 &\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 4y^3, \\ N(x,y) = 3x^2 + 6xy^3 &\Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 6x + 6y^3 \end{aligned}$$

como $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial X}$, tenemos que (1) no es una ecuación diferencial exacta. Ahora se buscará un factor integrante $\mu(x)$, $\mu(y)$ para (1), a saber:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} &= \frac{2x + 4y^3 - 6x - 6y^3}{3x^2 + 6xy^3} \qquad (2) \\ &= \frac{-(2y^3 + 4x)}{3x^2 + 6xy^3} \end{aligned}$$

La expresión en (2) no es una función exclusivamente de x, por lo que no admite factor integrante $\mu(x)$, sin embargo, si uno $\mu(y)$, como se muestra a continuación :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} &= \frac{6x + 6y^3 - 2x - 4y^3}{2xy + y^4} \qquad (3) \\ &= \frac{2(y^3 + 2x)}{y(y^3 + 2x)} \\ &= \frac{2}{y} \end{aligned}$$

La expresión en (3) si es una función exclusivamente de y, luego un factor integrante es de la forma

$$e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2\ln y} = e^{\ln y^2} = y^2$$

Así: $\mu(y) = y^2$.

Puede abrir página interactiva **Ecuación diferencial con factor integrante** para comprobar dichos resultados.

Ya que se conoce un factor integrante de (1), multiplicamos dicha ecuación por y^2, se tiene :

$$(2xy^3 + y^6)dx + (3x^2y^2 + 6xy^5)dy = 0 \qquad (4)$$

Note la ecuación diferencial (4) es exacta, ya que :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 + 6y^5 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

de donde resolviendo (4) se tiene que la solución general está definida implícitamente en la ecuación

$$x^2y^3 + xy^6 = C$$

Ejemplo 3.11

Determinar la solución general de la ecuación diferencial

$$\left(\frac{y}{x^2} + 2\right) dx + \frac{1}{x}(1 + \ln(xy))\, dy = 0 \qquad (1)$$

Según la ecuación diferencial (1), se tiene que:

$$M(x,y) = \frac{y}{x^2} + 2, \qquad N(x,y) = \frac{1+\ln(xy)}{x},$$
$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x^2}, \qquad \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-\ln(xy)}{x^2}$$

De modo que (1) no es una ecuación diferencial exacta. Observe que (1) admite un factor integrante en x, ya que :

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(xy)}{x^2}}{\frac{1+\ln(xy)}{x}} = \frac{1}{x} \qquad (2)$$

Observe que (2) es exclusivamente función de x, por lo que un factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

luego multiplicamos (1) por $\mu(x)$ y obtenemos la ecuación:

$$\left(\frac{y}{x} + 2x\right) dx + (1 + \ln(xy))dy = 0$$

la cual es una ecuación diferencial exacta y al resolverla se obtiene que por solución general la curva definida implícitamente en la ecuación

$$y\ln(xy) + x^2 = C$$

Ejemplo 3.12

Considere la ecuación diferencial

$$(2y^2+4x^2y)dx+(4xy+3x^3)dy=0 \qquad (1)$$

Esta ecuación no es exacta pero admite factor integrante de la forma $\mu(x,y)=x\cdot f(y)$. Halle función $f(y)>0$ y luego determine la solución general de dicha ecuación diferencial.

En efecto, primero se multiplica la ecuación diferencial (1) por $\mu(x,y)=x\cdot f(y)$:

$$\underbrace{\left(2xy^2+4x^3y\right)f(y)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{\left(4x^2y+3x^4\right)f(y)}_{N(x,y)}dy=0$$

.

Para que la ecuación obtenida sea exacta, se debe cumplir que $M_y=N_x$, es decir:

$$(4xy+4x^3)f(y)+(2xy^2+4x^3y)f(y)'=(8xy+12x^3)f(y)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{f'(y)}{f(y)}=\frac{2}{y}\\
&\Rightarrow \quad \int\frac{f'(y)}{f(y)}dy=\int\frac{2}{y}dy\\
&\Rightarrow \quad \ln(f(y))=lny^2\\
&\Rightarrow \quad f(y)=y^2
\end{aligned}$$

$\therefore \mu(x,y)=xy^2$

Ahora al multiplicar $\mu(x,y)=xy^2$ por la ecuación diferencial se obtiene:

$$\underbrace{(2xy^4+4x^3y^3)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(4x^2y^3+3x^4y^2)}_{N(x,y)}dy=0$$

Note que esta ecuación es exacta pues:

$$M_y=8xy^3+12x^3y^2=N_x$$

Por lo que existe una función $F(x,y)$ tal que, $\dfrac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$ **[1]** y $\dfrac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$ **[2]**. De esta forma usando **[1]** entonces tenemos :

$$F(x,y)=\int(2xy^4+4x^3y^3)dx+h(y)\Rightarrow F(x,y)=x^2y^4+x^4y^3+h(y)$$

luego de acuerdo a resultado anterior y **[2]** debe darse que

$4x^2y^3+3x^4y^2+h'(y)=4x^2y^3+3x^4y^2\Rightarrow h(y)=K$ con $k\in\mathbb{R}$.

Así

$$\begin{aligned} F(x,y) &= x^2y^4 + x^4y^3 + K \\ &= x^2y^4 + x^4y^3 \ \ (K=0) \end{aligned}$$

Finalmente de esta forma la solución general viene dada de forma implícita por

$$x^2y^4 + x^4y^3 = C$$

A continuación se muestra un resumen útil en factores integrantes de la forma:

$$\mu = \mu(x) \ \ \mu = \mu(y),\ \mu = \mu(xy),\ \mu = \mu\left(\frac{y}{x}\right),\ \mu = \mu\left(\frac{x}{y}\right).$$

Si las funciones $M(x,y)$, $N(x,y)$ en la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ cumplen con la propiedad dada en la columna de la izquierda, entonces se dice que dicha ecuación diferencial admite factor integrante dado en la columna de la derecha.

Propiedad	**Factor integrante**
P1: $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$	$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$
P2: $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = f(y)$	$\mu(y) = e^{\int f(y)dy}$
P3: $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{y\cdot N - x\cdot M} = f(xy)$	$\mu(xy) = e^{\int f(xy)d(xy)}$ tome $u = xy$
P4: $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{y\cdot N + x\cdot M}\cdot x^2 = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$\mu\left(\frac{y}{x}\right) = e^{\int f\left(\frac{y}{x}\right)d\left(\frac{y}{x}\right)}$ tome $u = \frac{y}{x}$
P5: $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{y\cdot N + x\cdot M}\cdot y^2 = f\left(\frac{x}{y}\right)$	$\mu\left(\frac{x}{y}\right) = e^{\int f\left(\frac{x}{y}\right)d\left(\frac{x}{y}\right)}$ tome $u = \frac{x}{y}$

Ejemplo 3.13

Considere la ecuacion $(x^2y^3 + 2y)dx + (2x - 2x^3y^2)dy = 0$, verifique que no es exacta y que no admite factor integrante dependiente de solo de x o solo de y, sino admite factor integrante una función $f(xy)$. Luego resuelvala y determine su solución general.

Como $\dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{9xy^2}{2 - 2x^2y^2}$ no aplica $P1$ y ademas como $\dfrac{M_y - N_x}{-M} = -\dfrac{9x^2y}{x^2y^2 + 2}$ no aplica $P2$.

Por otro lado como $\dfrac{M_y - N_x}{yN - xM} = \dfrac{-3}{xy}$ si aplica $P3$. Así $\mu = e^{\int \frac{-3}{xy} d(xy)} = e^{\int \frac{-3}{u} du} = u^{-3} = x^{-3}y^{-3}$ es un factor integrante de la ED.

Al multiplicar $(x^2y^3 + 2y)dx + (2x - 2x^3y^2)dy = 0$ por $\mu = x^{-3}y^{-3}$ se obtiene la ecuación diferencial exacta

$$(x^{-1} + 2x^{-3}y^{-2})dx + (2x^{-2}y^{-3} - 2y^{-1})dy = 0 \quad [1]$$

Dicha ecuación diferencial [1] al resolverla se obtiene por solución general

$$F(x,y) = \ln|x| - x^{-2}y^{-2} - 2\ln|y| = C$$

.

Ejemplo 3.14

Encuentre los valores de n y m para que $x^n y^m$ sea un factor integrante de $y^2dx + (xy - x^3)dy = 0$ y verifique para los valores obtenidos, que efectivamente es exacta.

Si en la ED dada $y^2dx + (xy - x^3)dy = 0$ multiplicamos por el factor integrante de la forma $x^n y^m$, tenemos la nueva ED:

$(x^n y^{m+2})dx + (x^{n+1}y^{m+1} - x^{n+3}y^m)dy = 0 \quad [1]$

Para que la ecuación diferencial resultante [1] sea exacta debe ahora cumplirse:

$$\begin{aligned}
& (m+2)x^n y^{m+1} = (n+1)x^n y^{m+1} - (n+3)x^{n+2}y^m \\
\Rightarrow \quad & (m+2-n-1)x^m y^{m+1} + (n+3)x^{n+2}y^m = 0 \\
\Rightarrow \quad & n+3 = 0 \quad \wedge \quad m-n+1 = 0 \\
\Rightarrow \quad & n = -3 \quad \wedge \quad m = -4
\end{aligned}$$

Así la ecuación diferencial [1] tiene la forma:

$$(x^{-3}y^{-2})dx + (x^{-2}y^{-3} - y^{-4})dy = 0 \quad [2]$$

De [2] $M(x,y) = x^{-3}y^{-2} \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = -2x^{-3}y^{-3}$; $N(x,y) = x^{-2}y^{-3} - y^{-4} \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = -2x^{-3}y^{-3}$

Por lo tanto, de esta forma se comprueba que la ecuación diferencial dada por [2] es exacta.

Puede visualizar explicación y solución general bajo los valores de n y m encontrados de la ecuación diferencial asociada. Eso mediante el video a través del link: `https://youtu.be/UjYmutO_KfM` o en su defecto escaneando el código QR adjunto que lleva a página respectiva para comprobar paso a paso dichos resultados.

Ejemplo 3.15

Hallar un factor integrante de la forma $\eta = \eta(x^2+y^2)$ para la ecuación diferencial

$$-ydx + xdy = 0$$

Es fácil comprobar que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ y por tanto cumple no ser una ED exacta. Luego en teoría si se multiplica $-ydx+xdy=0$ por un factor integrante de la forma $\eta = \eta(x^2+y^2)$ esta seria exacta, es decir,

Por lo tanto, deberá cumplir $\dfrac{\partial}{\partial y}(-y\cdot\eta(x^2+y^2)) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x\cdot\eta(x^2+y^2))$, es decir,

$$-\eta(x^2+y^2) - y\eta'(x^2+y^2)\cdot 2y = \eta(x^2+y^2) + x\eta'(x^2+y^2)\cdot 2x$$

de donde agrupando en términos de η y η' se tiene

$$-2\eta(x^2+y^2) = (2x^2+2y^2)\eta'(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta'(x^2+y^2)}{\eta(x^2+y^2)} = -\frac{1}{x^2+y^2}$$

Importante notar que todos los términos tienen argumento x^2+y^2, de lo contrario nos se puede esperar un factor integrante de la forma supuesta.

Ahora si se hace $v = x^2+y^2$ se tiene

$$\frac{\eta'(v)}{\eta(v)} = \frac{-1}{v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{d\eta}{dv}}{\eta} = \frac{-1}{v}$$

luego al separar variables

$$\Leftrightarrow \frac{d\eta}{\eta} = \frac{-dv}{v}$$

e integrando $\ln|\eta| = -\ln v + \ln k$. Note que $v = x^2+y^2 > 0$ y $k > 0$ es una constante, de donde

$$|\eta| = \frac{k}{v} \Leftrightarrow \eta(v) = \pm\frac{k}{v}$$

Como es suficiente un factor integrante se puede escoger $\eta(v) = \dfrac{1}{v}$, es decir, $\eta(x^2+y^2) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

finalmente para resolver $-ydx+xdy=0$ se multiplica por el factor integrante hallado $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ y se obtiene la ED exacta

$$-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0$$

y cuya solución general al resolver se obtiene $-\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) = C$.

Ejemplo 3.16 **Ejemplo complementario mediante video**

1. Considere la ecuación diferencial $y \cdot dx + (x^2 - xy)dy = 0$. Halle una función $f(y)$ de tal forma que ED tenga un factor integrante de la forma $\mu = \dfrac{f(y)}{x^2}$.

Puede ingresar al link `https://youtu.be/kGrPaa2esqM` o en su defecto escanear el código QR adjunto para visualizar explicación de tal ejercicio.

Ejercicios 3.2 **[Ejercicios de retroalimentación]**

3.2.1 Verifique para cada ecuación diferencial que la función μ dada en cada una de ellas representa un factor integrante. Posteriormente ingrese a página interactiva **Ecuación diferencial con factor integrante** para comprobar dichos resultados.

a) $(y\ln y + ye^x)dx + (x + y\cos y)dy = 0$ con $\mu(y) = \dfrac{1}{y}$.

b) $(2e^y + 3x\operatorname{sen} y)dx + (xe^y + x^2\cos y)dy = 0$ con $\mu(x) = x$.

c) $(x - y)dx + xdy = 0$ con $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

d) $-xdx + \left(x^2y + y^3\right)dy = 0$ con $\mu(y) = e^{-y^2}$.

e) $(2x^2 + 2y^2 - x)dx + (x^2 + y^2 - y)dy = 0$ no admite factor integrante solo de x ni solo de y, sino $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.

3.2.2 Encuentre el factor integrante μ apropiado en cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, posteriormente resuelvalas hasta obtener su solucin general.

a) $ydx + (3 + 3x - y)dy = 0$
b) $(y\operatorname{sen}(2x) + xy^2)dx + (y^3 - \operatorname{sen}^2 x)dy = 0$
c) $(3x^5\tan y - 2y^3)dx + (x^6\sec^2 y + 4x^3y^3 + 3xy^2)dy = 0$
d) $(2xy + y^4)dx + (3x^2 + 6xy^3)dy = 0$
e) $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$
f) $dx - (ee^y - 2x)dy = 0$

3.2.3 Compruebe que la ED $\left(\dfrac{1}{x^2} + y^2\right)dx + \left(\dfrac{1}{xy}\right)dy = 0$ no es exacta. Multiplique por $x^a y^b$ la ED anterior y determine para que valores de las constantes a, b, esta sea exacta y luego resuelvala

3.2.4 Halle un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = x^a y^b$ para la ecuación diferencial

$$\left(x^4y^2 - y\right)dx + \left(x^2y^4 - x\right)dy = 0 \text{ y resuelvala}$$

3.2.5 La ecuación diferencial $(xy + \ln x)\,dx + (xy + x\ln x)\,dy = 0$ admite un factor integrante de la forma $x^m y^n$, determine los valores de m y n y encuentre la solución general

3.2.6 Halle el valor de α para que la ecuación diferencial $(6xy^3 + \cos y)dx + (\alpha x^2y^2 - x\operatorname{sen} y)dy = 0$ sea exacta y resuélvala en dicho caso.

3.2.7 Halle una función $N(y)$ tal que $h(x,y) = 3xy^2$ sea un factor integrante de la ecuación diferencial

$$\left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{xy}\right)dx + N(y)dy = 0.$$

. Luego resuelva la ecuación la obtenida hasta obtener solución general

3.2.8 Si $\dfrac{\partial M}{\partial x} = \dfrac{\partial N}{\partial y}$, y $\dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{\partial N}{\partial x}$, verifique que $\dfrac{1}{[M(x,y)]^2 + [N(x,y)]^2}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

3.2.9 Encuentre la solución general de la ecuación diferencial, usando un factor integrante $\mu(x,y)$, de la forma indicada.

(a) $(y^2 + 2xy)dx - x^2dy = 0$	$\mu(x,y) = y^n$
(b) $(2x^3y^2 + 4x^2y + 2xy^2 + xy^4 + 2y)dx + 2(y^3 + x^3y + x)dy = 0$	$\mu(x,y) = f(x)$
(c) $\left(3xy + y^2\right)dx + (3xy + x^2)dy = 0$	$\mu(x,y) = f(ax + by)$
(d) $\left(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4\right)dx + ydy = 0$	$\mu(x,y) = f\left(ax^2 + by^2\right)$
(e) $\left(3x + 2y + y^2\right)dx + \left(x + 4xy + 5y^2\right)dy = 0$	$\mu(x,y) = f(x + y^2)$
(f) $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$	$\mu(x,y) = f(x^2 - y^2)$

3.2.10 Verifique que la función $\mu(x) = x^{-1}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial

$$(x + 3x^3\operatorname{sen} y)dx + x^4\cos y dy = 0$$

3.2.11 Encuentre todas las funciones $f(x,y)$ que cumplan $f(2018,y) = \dfrac{e^y}{2018}$ y tales que $(x+y)dx + y\left(\frac{x}{2} + f(x,y)\right)dy = 0$ tiene por factor integrante a $\mu(x,y) = x$. Luego resuelva la ecuación según $f(x,y)$

3.2.12 Demuestre que si $\dfrac{M_y - N_x}{N - M}$ es una función $g(z)$ donde $z = x + y$ entonces se cumple que $\mu = e^{\int g(z)dz}$ es un factor integrante para la ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

3.2.13 Pruebe que si $y = \phi(x)$ es una solución de la ecuación diferencial $\left[y^2 + q(x)\right] dx + dy = 0$, entonces $\dfrac{e^{-2\int \phi dx}}{(y-\phi)^2}$ es un factor integrante. Halle una solución polinomial de la ecuació n diferencial $y' + y^2 = 1 + x^2$ y úsela, junto con el procedimiento indicado antes, para resolverla.

3.2.14 Muestre que si $xy[f(xy) - g(xy)]$ no se anula en una región del plano xy, entonces un factor integrante de la ecuación diferencial $yf(xy) + xg(xy)y' = 0$ es $\mu(x,y) = \dfrac{1}{xy[f(xy) - g(xy)]}$. Si, en cambio, $xy[f(xy) - g(xy)] = 0$ en una región del plano xy, entonces pruebe que dicha ecuación es equivalente a $y + xy' = 0$. Use esto para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $y(x^2y^2 + 2) + x(2 - x^2y^2)y' = 0$
2. $y(2xy + 1)dx + x(1 + 2xy - x^3y^3)dy = 0$

3.2.15 Sea $g(x,y)$ una función definida para todo (x,y) con $y \neq 0$ y que además satisface que

$$sen(xy)dx + g(x,y)dy = 0$$

es exacta. Si $g(0,y) = 0$ para todo $y \neq 0$, encuentre $g(x, 2011)$

3.2.16 Considere la siguiente ecuación diferencial $f(t)dy + (t^2 + y)dt = 0$. Se sabe que tal ecuación posee un factor integrante de la forma $\mu(t,y) = t$. Encuentre todas las posibles funciones $f(t)$. Luego resuelva la ecuación para las f que encontró

3.2.17 Supongamos que $\mu(x,y) = e^y \sin x$ es un factor integrante de la ecuacion diferencial

$$yF(x)dx + x^2G(y)dy, = 0.$$

1. Determine explícitamente a las funciones F y G.
2. Resuelva la ecuacion original al encontrar el resultado anterior

3.2.18 La ecuación diferencial $e^t \sec y - \tan y + \dfrac{dy}{dx} = 0$ posee un factor integrate de la forma $\mu(t,y) = e^{-at} \cos y$ para alguna constante a. Encuentre a y luego de acuerdo a ello resuelva dicha ED hasta obtener la solución general

Prof: M.Sc. Norberto Oviedo Ugalde.

Capítulo 4:

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden lineales y de Bernouilli

4 — Ecuación diferencial Lineal y de Bernoulli

4.0.1 Objetivos Específicos

- Definir e identificar una ecuación diferencial lineal de primer orden.
- Comprender el proceso de resolución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.
- Definir e identificar una ecuación diferencial de Bernoulli .
- Comprender el proceso de resolución de ecuaciones diferenciales de Bernoulli.

4.0.2 Contenidos

- Definición de ecuación diferencial lineal de primer orden.
- Resolución de una ecuación diferencial lineal de primer orden.
- Definición de ecuación diferencial de Bernoulli.
- Resolución de una ecuación diferencial Bernoulli.

4.1 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una clase de ecuaciones diferenciales que aparecen con frecuencia en las aplicaciones es la constituida por las ecuaciones lineales. Aunque en el tema siguiente se habla de las ecuaciones diferenciales lineales en general, se verá ahora cómo resolver las de primer orden mediante factores integrantes.

Definición 4.1
Una ecuación lineal de primer orden es aquélla que tiene la forma:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{4.1}$$

donde $a_1(x), a_0(x)$ y $b(x)$ dependen sólo de x.

Suponga que $a_1(x), a_0(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas en un intervalo común I y con $a_1(x) \neq 0$. Dividiendo por $a_1(x)$ se puede reescribir esta ecuación en forma canónica:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{4.2}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas en dicho intervalo I. Si expresamos la ecuación 4.2 en forma diferencial, se tiene:

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0. \tag{4.3}$$

Método de resolución

- Si $P(x) = 0$ la ecuación es exacta y también es separable.
- En caso contrario, la ecuación 4.3 admite un factor integrante de la forma :

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}. \tag{4.4}$$

Una vez obtenido el factor integrante se tiene las siguientes opciones:

1. Multiplicar la ecuación 4.3 por $\mu(x)$ y resolver la ecuación exacta obtenida.

2. Hallar la solución de un modo más rápido multiplicando 4.2 por $\mu(x)$:

$$\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x).$$

Como al multiplicar la ecuación 4.3 por $\mu(x)$ se obtiene una ecuación exacta, se tiene que $\mu(x)P(x) = \mu'(x)$, por tanto la ecuación anterior queda:

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y = \mu(x)Q(x),$$

es decir,

$$\frac{d}{dx}\left(\mu\left(x\right)y\right)=\mu(x)Q(x),$$

luego integrando respecto de x se tiene

$$\mu(x)y=\int\mu(x)Q(x)dx+C.$$

Por tanto la solución general esta dada por:

$$y=\mu(x)^{-1}\left(\int\mu(x)Q(x)dx+C\right). \tag{4.5}$$

Donde $\mu(x)$ viene dado por 4.4.

Teorema 4.1

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas en un intervalo $]a,b[$ que contiene al punto x_0, para cualquier valor inicial y_0 existe una única solución $y(x)$ en $]a,b[$ del problema de valor inicial:

$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x_0)=y_0$$

cuya solución viene dada por 4.5 para un C apropiado.

Ejemplo 4.1

Considere la ecuación diferencial lineal de primer orden $y'+2xy-2xe^{-x^2}=0$ y halle la solución general.

En esta ecuación lineal $P(x)=2x$ y $Q(x)=2xe^{-x^2}$. Luego el factor integrante es:

$$\mu(x)=e^{\int 2xdx}=e^{x^2}.$$

Entonces al multiplicar la ecuación $y'+2xy=2xe^{-x^2}$ por dicho factor integrante $\mu(x)=e^{x^2}$, se tiene

$$e^{x^2}y'+e^{x^2}2xy=2x,$$

es decir, $\dfrac{d}{dx}\left(e^{x^2}y\right)=2x,$ de donde

$$e^{x^2}y=\int 2xdx=x^2+C,$$

y la solución general es:

$$y=e^{-x^2}\left(x^2+C\right)$$

Las curvas solución se aprecian en la figura 4.1. De donde claramente se puede apreciar que para valores muy grandes positivos o negativos, sus soluciones tienden a $y=0$.

Puede verificar resultados obtenidos del ejemplo anterior y otros más. Asimismo complementar teoría mediante página interactiva **Ecuación diferencial Lineal.**

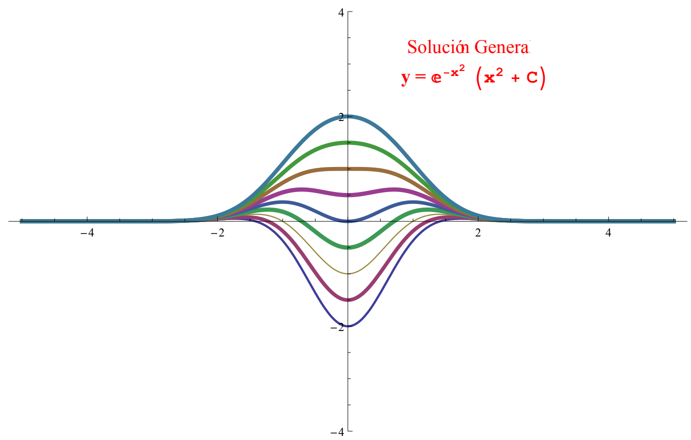


Figura 4.1: curvas solución de la ecuacion $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 9

Ejemplo 4.2

Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal $y' + 2y = 3e^x$.

En este caso $P(x) = 2$ y $Q(x) = 3e^x$. Luego el factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x},$$

multiplicando por $\mu(x)$ se llega a:

$$e^{2x} \cdot y' + e^{2x} 2y = 3e^{3x}$$

es decir,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2x} y\right) = 3e^{3x},$$

luego,

$$e^{2x} y = \int 3e^{3x} dx = e^{3x} + C,$$

y por tanto la solución general viene dada por:

$$y = e^x + C \cdot e^{-2x}$$

Puesto que $P(x) = 2$ y $Q(x) = 3e^x$ son funciones continuas en toda la recta real, la solución es válida en todo $\mathbb{R}$.

En la figura 4.2 se muestra la familia de curvas solución de la ecuación diferencial dada. En ellas se aprecia que para valores de x grandes positivos estas curvas solución tiende a la curva solución $y = e^x$, como claramente se obtuvo por medio de la solución algebraica.

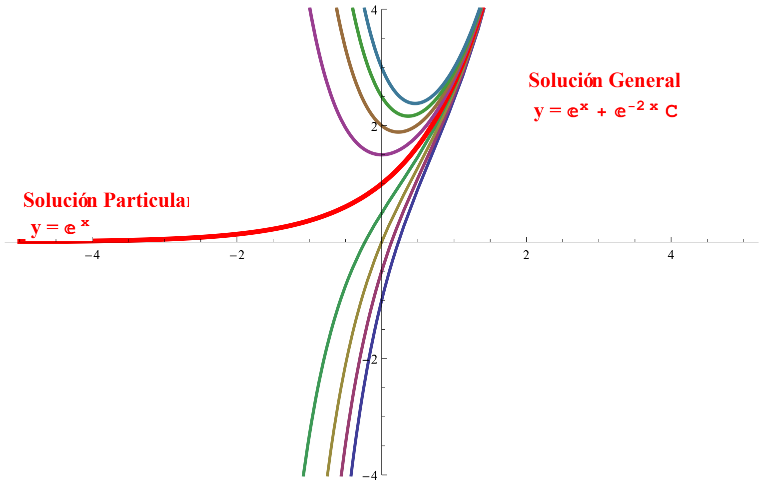


Figura 4.2: Curvas solucion de la ecuacion $y' + 2y = 3e^x$
Fuente: Elaboración propia con MATHEMATICA 9

Ejemplo 4.3

Resolver el problema de valor inicial $\frac{1}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = x\cos x$ con la condición inicial $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

En primer lugar, se expresa la ecuación en forma canónica:

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2\cos x \tag{4.6}$$

entonces de esta forma se tiene que $P(x) = \frac{-2}{x}$ y $Q(x) = x^2\cos x$ y el factor integrante $\mu(x) = e^{\int \frac{-2}{x}dx} = x^{-2}$.

luego multiplicando 4.6 por el factor integrante se tiene que $x^{-2}y' - 2x^{-3}y = \cos x$, es decir,

$$\frac{d}{dx}(x^{-2}y) = \cos x$$

de donde se obtiene que al integrar a ambos lados con respecto a x :

$$x^{-2}y = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C,$$

y por tanto la solución general viene dada por:

$$y = x^2(\operatorname{sen} x + C).$$

Sustituyendo ahora la condición inicial $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$, se tiene $3 = \frac{\pi^2}{4} + C\frac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow C = \frac{12}{\pi^2} - 1$,

y la solución del problema de valor inicial es

$$y = x^2\operatorname{sen} x + x^2\left(\frac{12}{\pi^2} - 1\right).$$

Como $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas en el intervalo $]0, +\infty[$, que contiene al punto dado en la condición inicial, la solución es válida en dicho intervalo.

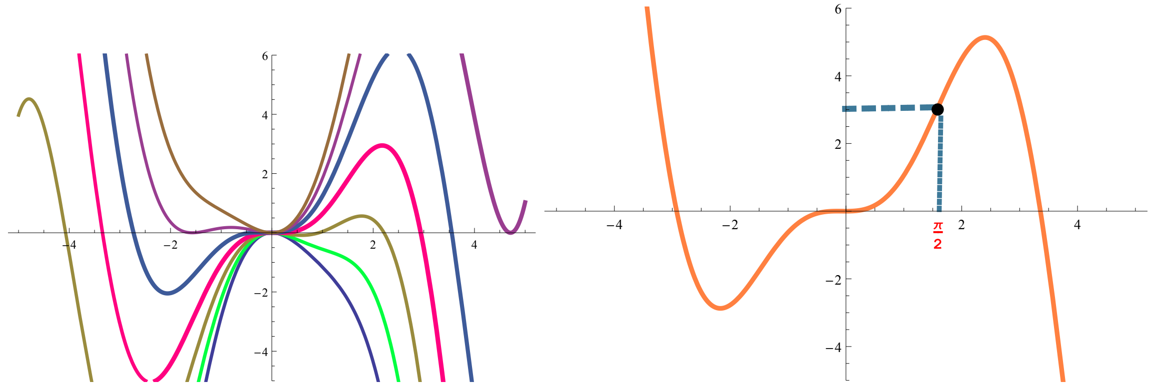


Figura 4.3: curvas solución de $\dfrac{1}{x}y' - \dfrac{2}{x^2}y = x\cos x$ y la solución particular obtenida de la condición inicial $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 9

Note que la figura 4.3 muestra las gráficas de las curvas solución general y la gráfica de la solución particular obtenida a partir de la condición inicial dada, además es importante rescatar que en el punto $(0,0)$ se visualiza claramente **no** existe solución única, sino infinitas y asimismo no se contradice el teorema de existencia y unicidad en dicho punto.

Ejemplo 4.4

Resolver la ecuación diferencial $(x+2)y' + 2y = \dfrac{x+2}{x^2+4}$.

Divida la ecuación dada por $x+2 \neq 0$, esto para escribirla en su forma

$$y' + \frac{2}{x+2}y = \frac{1}{x^2+4}. \tag{4.7}$$

De esta forma, el factor integrante viene dado por $\mu = e^{\int \frac{2}{x+2}dx} = e^{2\ln|x+2|} = (x+2)^2$ (constante de integración se escoge como 0).

Posteriormente, multiplicando la ecuación 4.7 por el factor integrante $\mu = (x+2)^2$, se tiene

$$(x+2)^2y' + 2(x+2)y = \frac{(x+2)^2}{x^2+4},$$

es decir,

$$\frac{d}{dx}((x+2)^2y) = \frac{(x+2)^2}{x^2+4},$$

de donde al integrar con respecto a x en ambos lados y resolviendo se obtiene por solución general de la forma implícita

$$(x+2)^2y = x + 2\ln(x^2+4) + C.$$

Puede verificar paso a paso los resultados obtenidos del ejemplo anterior. Asimismo complementar teoría mediante página interactiva **Ecuación diferencial Lineal.**

En algunos casos puede que en una ecuación diferencial dada se deba invertir las variables dependientes e independientes, es decir, si la ED es en $y(x)$ pueda no resolverse en variable dependiente y, variable independiente x pero al invertirlas y tomarlas como ED en $x(y)$ esto si sea posible, como lo mostramos a continuación por medio del siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.5

Resuelva la siguiente ecuación diferencial $y' = \dfrac{1}{e^y - x}$ **[1]** hasta obtener la solución general.

Claramente la ED dada por **[1]** no representa una ecuación diferencial lineal en variables dependiente y e independiente x, es decir, en $y(x)$, sin embargo, de acuerdo con **[1]** se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - x} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = e^y - x$$

es decir, al invirtir las variables en **[1]** se llega a una ED de la forma

$$x'(y) + x(y) = e^y \qquad [\mathbf{2}]$$

,la cual representa una **ecuación diferencial lineal en** $x(y)$.

Ahora resolviendo **[2]** se tiene en ella $\mu(y) = e^y$ que al multiplicarla por dicho factor integrante se tiene

$e^y \cdot x' + e^y \cdot x = e^{2y} \Rightarrow (e^y \cdot x)' = e^{2y}$, luego integrando a ambos lados

$$e^y \cdot x = \frac{e^{2y}}{2} + C$$

De esta forma se tiene por solución general

$$x(y) = \frac{e^y}{2} + C \cdot e^{-y}$$

con C una constante arbitraria.

VIDEO

Puede ingresar al link `https://youtu.be/UMwdMlO1I64` o en su defecto escanear el código QR adjunto para visualizar explicación de tal ejercicio.

Ejercicios 4.1 [**Ejercicios de Retroalimentación**]

4.1.1 Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, luego verifique sus procedimientos y resultados obtenidos paso a paso mediante página interactiva **Ecuación diferencial Lineal.** para comprobar dichos resultados en dicha página.

a) $xy' - 4y = x^6 e^x$.
b) $\cos x \cdot y' + y \cdot \operatorname{sen} x = 1$
c) $y' + y = \dfrac{1 - e^{-2x}}{e^{-x} + e^x}$
d) $y' + y \cdot cot x = 2\cos x$
e) $y' - y \cdot \tan x = e^{-\operatorname{sen} x}$.
f) $xy' + 3y = \dfrac{1}{x} e^x, y(1) = 1$.
g) $(x^2+1)y' + xy = (1-2x)\sqrt{x^2+1}$.
h) $y^2 x' + xy = 2y^2 + 1$.

4.1.2 Muestre que la ecuación $y' + P(x) = Q(x)e^{-y}$ puede transformarse en una ecuación lineal con la sustitución $u = e^y$. De acuerdo a ello resuelva $xy' + 3 = 4xe^{-y}$, con $y(2) = 0$

4.1.3 Verifique que la ecuación lineal $y' + P(x)y = Q(x)$ expresada en la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, no es exacta y admite factor integrante solo en x

4.1.4 Repita el ejercicio anterior, considerando la ecuación lineal $x' + P(y)x = Q(y)$

4.1.5 Compruebe que la ecuación diferencial $y - xy' = y^2 e^y y'$ no es lineal en $y(x)$, pero si en $x(y)$. Posteriormente resolverla hasta obtener solución general

4.1.6 Demostrar que ED $y' + P(x)y = Q(x)y\ln y$ se convierte en una ED lineal mediante cambio de variable $z = \ln y$, con $y > 0$. Use lo anterior para resolver $xy' = 2x^2 y + y\ln y$, con $x > 0$

4.2 Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

Definición 4.2

Se llama ecuación de Bernoulli a una ecuación diferencial de primer orden que se puede expresar de la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{4.8}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas en un intervalo $]a,b[$ y $n \in \mathbb{R}$.

Método de resolución

- Si $n = 0$ o $n = 1$, la ecuación 4.8 es una ecuación lineal.
- Si n $\neq 0$ y n $\neq$1, entonces se hace el cambio de variable $v = y^{1-n}$,

transformándose de esta forma la ecuación 4.8 en una lineal para las variables (x, v). Para ello, se divide primero la ecuación 4.8 por y^n, luego,

$$y' \cdot y^{-n} + P(x)y^{1-n} = Q(x). \tag{4.9}$$

De este modo, tome $v = y^{1-n}$ y $\dfrac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$, luego sustituyendo en 4.9 se tiene

$$\frac{1}{1-n} \cdot \frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x) \Rightarrow v' + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x),$$

que es una ecuación diferencial lineal de variable independiente x y variable dependiente v.

Observación 4.1 Se debe tener en cuenta que al dividir por y^n se pierde la solución $y = 0$, luego habrá que ver si esta solución está contenida en la solución general y si no lo está especificar que también lo es. Una vez resuelta la ecuación para $v(x)$ se deshace el cambio.

Ejemplo 4.6

Hallar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $xy' + y = y^2 \ln x, \quad (x > 0).$
(b) $y' + y = e^x y^{-2}.$

Al considerar las ecuaciones diferenciales dadas, se tiene en cada una de ellas lo siguiente:

(a) Expresando la ecuación en forma normal, se tiene $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{\ln x}{x}y^2$

que es una ecuación de Bernoulli, ya que es de la forma 4.8, con $n = 2$. Al multiplicar esta ecuación por y^{-2} se tiene

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-2}y = \frac{\ln x}{x} \tag{4.10}$$

luego al hacer el cambio de variable $v = y^{1-2} = y^{-1}$, se tiene que $\dfrac{dv}{dx} = -y^{-2}\dfrac{dy}{dx}$, donde realizando las sustituciones correspondiente en 4.10

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = \frac{\ln x}{x},$$

es decir,

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -\frac{\ln x}{x},$$

Ejemplo **4.6**

que es una ecuación lineal para v con $P(x) = -\dfrac{1}{x}$ y $Q(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, entonces, la solución viene dada por

$$v = \mu^{-1}(x)\left(\int \mu(x)\,Q(x)\,dx + C\right),$$

con $\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = x^{-1}$.

Así por lo tanto,

$$v(x) = x\int -\frac{\ln x}{x^2}dx = x\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C\right) = \ln x + 1 + Cx.$$

Como $v = y^{-1}$, deshaciendo el cambio de variable se obtiene la solución

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx},$$

además de la solución $y = 0$.

Puesto que $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en el intervalo $]0,+\infty[$, la solución obtenida es válida en dicho intervalo.

(b) La ecuación diferencial $y' + y = e^x y^{-2}$ es una ecuación de Bernoulli con $n = -2$. Por tanto, se multiplica la ecuación por y^2.

$$y^2 y' + y^3 = e^x, \tag{4.11}$$

y al hacer el cambio $v = y^3 \Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = 3y^2\dfrac{dy}{dx}$.

Luego al realizar las sustituciones correspondientes en 4.11 se obtiene

$$\frac{1}{3}\frac{dv}{dx} + v = e^x,$$

es decir,

$$\frac{dv}{dx} + 3v = 3e^x,$$

ecuación lineal cuya solución es

$$v(x) = e^{-3x}\int 3e^{4x}dx = 3e^{-3x}\left(\frac{e^{4x}}{4} + C\right) = \frac{3}{4}e^x + Ce^{-3x}.$$

Deshaciendo el cambio inicial $v = y^3$, se obtiene la solución general

$$y^3 = \frac{3}{4}e^x + Ce^{-3x}.$$

En este caso, $y = 0$ no era solución de la ecuación dada. Como $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en todo el intervalo real, la solución obtenida es válida $\forall x \in \mathbb{R}$.

Puede verificar paso a paso los resultados obtenidos de los ejemplos anteriores, adémas visualizar resumen de teoría mediante página interactiva **Ecuación diferencial de Bernoulli.**

Ejemplo 4.7

Resolver la ecuación de Bernoulli en la variable dependiente x dada por $2y^3x' - y^2x = -3x^{-1}$ con $y > 0$.

En este caso, la ecuación es equivalente a

$$2y^3xx' - y^2x^2 = -3. \tag{4.12}$$

Sea $z = x^2$, de esta forma $z' = 2xx'$, luego sustituyendo en 4.12 se tiene $y^3z' - y^2z = -3$, es decir,

$$z' - \frac{z}{y} = -3y^{-3}. \tag{4.13}$$

Multiplicando 4.13 por el factor integrante $\mu(y) = e^{-\int \frac{dy}{y}} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$ se obtiene

$$y^{-1}z' - y^{-2}z = -3y^{-4} \Rightarrow \frac{d}{dy}[zy^{-1}] = -3y^{-4} \Rightarrow zy^{-1} = -\int 3y^{-4}dy + C,$$

,es decir,

$$zy^{-1} = y^{-3} + C \Rightarrow z = y^{-2} + C.$$

Como $z = x^2$ se tiene que la solución general viene dada por la solución implícita $x^2 = y^2 + Cy$.

Ejemplo 4.8

Resuelva la ecuación diferencial $(x\,\text{sen}(y) + x^2\,\text{sen}(2y)) \cdot y' = 1$ y determine su solución general.

Note que dicha ED puede ser escrita de la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\,\text{sen}(y) + x^2\,\text{sen}(2y)} \tag{4.14}$$

la cual 4.14 no es una ED lineal en $y(x)$, sin embargo, al reescribirla como una ED en $x(y)$ si lo es como se muestra a continuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\,\text{sen}(y) + x^2\,\text{sen}(2y)} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = x\,\text{sen}(y) + x^2\,\text{sen}(2y)$$

de donde se tiene que

$$x'(y) - x(y)\,\text{sen}(y) = \text{sen}^2(2y) \cdot x^2 \tag{4.15}$$

esta última ecuación diferencial 4.15 una de Bernouilli en $x(y)$ con $n=2$. Ahora si en 4.15 la dividimos entre x^2 se tiene

$$x^{-2}\cdot x' - \operatorname{sen}(y)\cdot x^{-1} = \operatorname{sen}(2y) \tag{4.16}$$

Si en 4.16 se toma el cambio de variable $v = x^{-1} \Rightarrow v' = -x'\cdot x^{-2}$ y se sustituyen en ella

$$-v' - \operatorname{sen}(y)\cdot v = \operatorname{sen}(2y) \Rightarrow v' + \operatorname{sen}(y)\cdot v = -\operatorname{sen}(2y) \tag{4.17}$$

Esta última ecuación diferencial 4.17 una lineal en $v(y)$, la cual al resolverla se tiene por solución

$$v(y) = -2(\cos y + 1) + C\cdot e^{\cos y}$$

Finalmente retomando las variables originales mediante el cambio de variable inicial $v = x^{-1}$ se tiene por solución general

$$x^{-1} = -2(\cos y + 1) + C\cdot e^{\cos y}$$

Puede ingresar al link `https://youtu.be/7pUVLplpJGA` o en su defecto escanear el código QR adjunto para visualizar explicación de tal ejercicio.

Ejercicios 4.2 **[Ejercicios de retroalimentación]**

4.2.1 Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, luego verifique sus procedimientos y resultados obtenidos paso a paso mediante página interactiva **Ecuación diferencial de Bernoulli.**

a) $y' + 2xy = \dfrac{1+2x^2}{x^2}y^2$
b) $y' - \dfrac{2}{x}y = \dfrac{3}{x^2}y^4$
c) $x^2y' + 2x^3y = y^2(1+2x^2)$
d) $(1+x^2)y' - xy = xy^2$
e) $3xy' - 2y = x^3y^{-1}$
f) $xy' + 2y + x^{10}y^5 = 0$ con $y(-1) = 2$
g) $2y^3x' - y^2x = -3x^{-1}, (y>0)$ (**Ecuación Bernoulli en $x(y)$**).

4.2.2 Determine la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $xy' + \dfrac{y}{\ln(x)} = \dfrac{x(x+\ln(x))}{y\ln^2(x)}$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x+y^3x^2}$
3. $3(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2xy(y^3-1)$
4. $xy' = xy^2 + y + xy$

4.2.3 Encuentre la solución del siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} (y^2+2y+x^2)y'+2x &= 0 \\ y(1) &= 0 \end{cases}$$

4.2.4 Una forma generalizada de la ecuación de Bernoulli es la ecuación

$$f'(y)\frac{dy}{dx} + p(x)f(y) = q(x)$$

a) Haga un cambio de variable que convierta la ecuación anterior en una ecuación lineal.

b) Usando lo anterior, resuelva la ecuación diferencial $y' + 1 = 4e^{-y}\operatorname{sen} x$.

4.2.5 Considérese la ecuación diferencial

$$y' = 2(\tan x)(\sec x) - (\operatorname{sen} x)y^2$$

1. Pruebe que $y_1 = \sec x$ es solución de esta ecuación diferencial
2. Mediante la sustitución $y = v + \sec x$ transforme esta ecuación diferencial en una ecuación de Bernoulli y resuélvala
3. Determine la solución general de la ecuación dada inicialmente

4.2.6 Considere la ecuación diferencial

$$x\frac{du}{dx} + \frac{1-x^2}{1+x^2}u = \frac{4\sqrt{x}\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}u^{\frac{1}{2}}$$

1. Muestre que la sustitución $y = xu$ transforma la ecuación on diferencial en una Bernoulli
2. Resuelva la ecuación de Bernoulli encontrada en la parte anterior
3. Encuentra la solución de la ecuación original

4.2.7 Compruebe que la ecuación diferencial $\left(xy + x^2y^3\right)y' = 1$ es de Bernoulli, cuando se considera $x = x(y)$. También, determine la solución general de esta ecuación

4.2.8 Determine la solución de la siguiente ecuación diferencial al considerar $x = x(y)$

$$\left(x^2\ln y - x\right)y' = y$$

Prof: M.Sc. Norberto Oviedo Ugalde.

Capítulo 5:

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Clairaut, variable ausente y mediante cambios de variable

5 — Ecuación diferencial con variable ausente y con cambios de variable.

5.0.1 Objetivos Específicos

- Definir e identificar una ecuación diferencial de variable ausente.
- Comprender el proceso de resolución de ecuaciones diferenciales de variable ausente.
- Usar cambios de variable para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

5.0.2 Contenidos

- Ecuación diferencial con variable ausente.
- Ecuación diferencial ordinarias de primer orden mediante cambio de variable.

5.1 EDO con variable ausente de segundo orden

Esta sección trata las ecuaciones diferenciales de segundo orden en la incógnita $y(x)$, no homogéneas, con coeficientes variables o constantes, y que escriben como EDs de primer orden en la incógnita $v(x) = y'(x)$. Por supuesto que tengan soluciones que se puedan hallar por alguno de los métodos clásicos expuestos en secciones anteriores.

Definición 5.1
Una ED con función incógnita $y(x)$ es de variable ausente si en ella no aparecen explicítamente x o y.

Ejemplo 5.1

Las siguientes EDs de segundo orden son ejemplos de ecuaciones diferenciales de variable ausente:

1). $xy'' + 2y' = 0$	$x \neq 0$	y ausente
2). $xy'' + y' = 4x$	$x > 0$	y ausente
3). $x^2y'' = 2xy' - 2x(y')^2$	$x > 0; y'(1) = \frac{1}{2}; y(1) = 1$	y ausente
4). $2yy'' = 1 + (y')^2$	$y(2) = 1; y'(2) = -1$	x ausente
5). $y'' = y'(1 + y)$	$y(0) = 0; y'(0) = -4$	x ausente
6). $2y'' - (y')^2 + 1 = 0$		$x; y$ ausente
7). $yy'' = y^2y' + (y')^2$		x ausente

5.1.1 Algoritmo para transformar una ED de 2do orden de variable ausente en una ED de 1er orden

Se aplica el mismo cambio de variables $v(x) = y'(x)$ a todas las EDs de segundo orden de variable ausente. A diferencia de otros cambios de variables, en este no requiere despejar y, de lo contrario deberíamos integrar en $v(x) = y'(x)$ para obtener y. Escogido $v = y'$ deriva con respecto a la variable independiente para obtener $v' = y''$ y sustituye cada ED dada. En algunas EDs con x ausente, después de sustituir $v = y'$ y $v' = y''$ podría ocurrir que se presenten las tres variables x, y, v, debiendo eliminar alguna, en tal caso siempre es posible eliminar la variable x utilizando la siguiente relación (regla de la cadena):

$$\begin{aligned} v' = \frac{dv}{dx} &= \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{dv}{dy} \cdot v \end{aligned}$$

En todo caso x o y ausentes, después del cambio de variables anterior resulta una ED de primer orden con solo dos variables (x, v) o (y, v), de la cual esperamos se puedan obtener soluciones por alguno de los métodos vistos en lecciones anteriores.

Ejemplo 5.2

Resuelva la ecuación diferencial $xy'' + 2y' = 0; \quad x \neq 0.$

Note que la variable y está ausente. Se inicia tomando la sustitución $v = y'$ entonces $v' = y''$. Luego se sustituye en la ED dada $xy'' + 2y' = 0$, de donde se obtiene

$$\begin{aligned}
& xv' + 2v = 0 && \textbf{ED de variables separable v(x)} \\
\Rightarrow & x\frac{dv}{dx} = -2v \\
\Rightarrow & \frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x} \\
\Rightarrow & \ln|v| = -2\ln|x| + \ln|A| \\
\Rightarrow & \ln|v| = \ln|Ax^{-2}| && \text{note que } x^{-2} > 0 \\
\Rightarrow & |v| = |A|x^{-2} \\
\Rightarrow & v = \pm Ax^{-2} \\
\Rightarrow & v = Bx^{-2} && \text{donde } B = \pm A
\end{aligned}$$

Como $v = y'$ esta ED es $y' = \dfrac{B}{x^2}$, de dondeintegrando se obtiene la solución general

$$y = -\frac{B}{x} + C$$

Ejemplo 5.3

Resolver la ED $3yy'y'' = 1 + (y')^3$ sujeta a las condiciones $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$. Asuma $x > 0,\ y > 0$ y las soluciones crecientes.

Observe que la variable x está ausente. Luego tomando la sustitución $v = y'$ se obtiene $3yvv' = 1 + v^3$ se obtiene una ED en tres variables x, y, v, por lo que se recurre a regla de la cadena, es decir, se usa $v' = \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{dv}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dy} \cdot v$, se tiene ahora

$\Rightarrow 3yv\dfrac{dv}{dy}v = 1 + v^3$ **[1]**, luego separando variables $\dfrac{3v^2}{1+v^3}dv = \dfrac{dy}{y}$, de donde

$\ln(1+v^3) = \ln y + \ln C; \quad (C > 0)$

Nota: se omite el valor absoluto para $1 + v^3 = 1 + \underbrace{(y')^3}_{+} > 0$ $(y' > 0)$, también para y pues $y > 0$.

$\Rightarrow 1+v^3 = Cy$

$\Rightarrow (y')^3 = Cy-1 \Rightarrow y' = (Cy-1)^{\frac{1}{3}}$

Aplicando $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$ obtiene $0=(C-1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow C=1$. La ED queda $y'=(y-1)^{\frac{1}{3}}$, es decir, $(y-1)^{\frac{1}{3}}dy = dx$

Integrando luego $\frac{3}{2}(y-1)^{\frac{2}{3}} = x+A$, aplicando $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}(1-1)^{\frac{2}{3}} = 0+A \Rightarrow A=0$

De esta forma la solución particular de forma explícita viene dada por $\frac{3}{2}(y-1)^{\frac{2}{3}} = x$, y si despejamos y en ella se obtiene la solución explícita

$$y = \left(\sqrt{\frac{2}{3}x}\right)^3 + 1$$

Puede ingresar al link `https://youtu.be/GHiKKdp2i_Y` o en su defecto escanear el código QR adjunto para visualizar explicación de tal ejercicio.

Ejemplo 5.4

Determine la solución del siguiente problema de valores iniciales: $\begin{cases} -2yy''+(y')^2 = 1 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$.

Note que la variable x está ausente. Luego haciendo la sustitución $u=y' \Rightarrow u'=y''$, se tiene

$$\begin{aligned} & -2y\frac{du}{dx}+u^2 = 1 \ \textbf{(note hay tres variable y,u,x)} \\ \Rightarrow \quad & -2yu\frac{du}{dy} = 1-u^2 \\ \Rightarrow \quad & \frac{-2u}{1-u^2}du = \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

Integrando obtenemos que

$$\ln(1-u^2) = \ln(y)+c$$

y al usar la condición inicial en $x=0$, $y=1$ y $y'=0$ se tiene que $c=0$, con lo cuál la solución es:

$$y' = \pm\sqrt{1-y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-y}$$

Integrando de nuevo

$$2\sqrt{1-y} = \pm x + c$$

Usando la condición inicial $x=0$ y $y=1$ tenemos que $c=0$ con lo cual la solución del PVI dada es

$$2\sqrt{1-y} = \pm x$$

Ejemplo 5.5

Utilice la técnica de variable ausente (reducción de orden) para expresar la ecuación diferencial $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$ como una ecuación diferencial de Bernoulli (no resuelva la ecuación resultante).

Considere la sustitución $v = y'$, de donde $v' = y''$. Además, note que:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot v$$

Por lo que la ED queda expresada como:

$$\begin{aligned} & y \cdot \frac{dv}{dx} + v^2 + 1 = 0 \\ \Rightarrow \quad & y \cdot \frac{dv}{dy} \cdot v + v^2 + 1 = 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{dv}{dy} + \frac{1}{y} v = \frac{-1}{vy} \\ \Rightarrow \quad & \frac{dv}{dy} + \frac{1}{y} v = \frac{-1}{y} v^{-1} \end{aligned}$$

la cual corresponde a una ED de Bernoulli cuya forma general para las variables involucradas es $v' + P(y)v = Q(y)v^n$.

Ejemplo 5.6

Resolver el problema de valor inicial: $2yy'' = 1 + (y')^2 = 0$, $y(2) = 1$; $y'(2) = -1$; donde además $y(x) > \frac{1}{2}, x < 3$.

Tome $v = y'$ en la ED:

$$\Rightarrow 2yy'' = 1 + (y')^2$$

$$\Rightarrow 2yv' = 1 + v^2$$

$$\Rightarrow 2y\frac{dv}{dx} = 1 + v^2$$

Como en ED aparece y, dv, dx (involucra tres variables x, y, v) para eliminar x utiliza

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot v^a$$

Aplica esto a nuestra ED resulta $2y\frac{dv}{dy} \cdot v = 1 + v^2$

$$\Rightarrow 2y\frac{dv}{dy}\cdot v = 1+v^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{2vdv}{1+v^2} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \ln(1+v^2) = \ln|y| + \ln|A|$$

$$\Rightarrow \ln(1+v^2) = \ln(|A||y|)$$

$$\Rightarrow 1+v^2 = By \qquad \text{donde } B = \pm A$$

$$\Rightarrow 1+(y')^2 = By$$

Aplicando las condiciones $y(2) = 1$; $y'(2) = -1$ en está última obtiene

$$1+(-1)^2 = B\cdot 1 \Rightarrow B = 2$$

Con $B = 2$ la última ED es:

$$1+(y') \Rightarrow y' = \pm\sqrt{2y-1}$$

La condición $y'(2) = -1$ tiene signo negativo y por eso considera la solución

$$y' = \sqrt{2y-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{2y-1}} = -dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{2y-1} = -x+C$$

Nuevamente utiliza $y(2) = 1$ en la solución

$$\sqrt{2\cdot 1-1} = -2+C$$

$$\Rightarrow C = 3$$

La solución particular es: $\sqrt{2y-1} = -x+3$

[a] Si también y esta ausente no requiere de este artificio

Ejemplo 5.7

Resuelva la siguiente ecuación diferencial: $y'' = (y')^2\tan(y) + y'$

Haciendo $v = y'$ y $y'' = vv'$, con $v' = \frac{dv}{dy}$

$\Rightarrow vv' = v^2\tan(y) + v$

$\Rightarrow vv' - v^2\tan(y) - v = 0$

$\Rightarrow (v' - v\tan(y) - 1)\, v = 0$

$\Rightarrow v' - v\tan(y) - 1 = 0 \qquad \wedge \qquad v = 0$

sería lineal con el factor integrante:

$$\begin{aligned} F(y) &= e^{\int \tan y dy} \\ &= e^{\int \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} dy} \\ &= e^{\ln|\cos y|^{a}} \\ &= \cos y \end{aligned}$$

multiplicando por el factor integrante se tiene:

$\Rightarrow v' \cos y - v \operatorname{sen} y = \cos y$

$\Rightarrow \dfrac{d(v\cos y)}{dy} = \cos y$

$\Rightarrow v\cos y = \displaystyle\int \cos y dy$

$\Rightarrow v\cos y = \operatorname{sen} y + c$

$\Rightarrow y' \cos y = \operatorname{sen} y + c$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} \cos y = \operatorname{sen} y + c$

$\Rightarrow \dfrac{\cos y}{\operatorname{sen} y + c} dy = dx$

$\Rightarrow \ln|\operatorname{sen} y + c| = x + b$ (solución general)

Además se tenía $v = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = k$ y evaluada en la ecuación diferencial

$\Rightarrow y'' = (y')^2 \tan(y) + y'$

$\Rightarrow 0 = (0)^2 \tan(k) + 0$

$\Rightarrow 0 = 0$

como satisface la ecuación diferencial, es solución. Además es una solución que no se puede obtener de la solución general, por lo que es una *solución singular*

[a] suponga función logarítmo está bien definida

Ejemplo 5.8

Resolver $x^2y'' = 2xy' - 2x(y')^2, \qquad x > 0;\ \ y'(1) = \frac{1}{2};\ \ y(1) = 1$. Está ausente y.

Tome $v = y'$ entonces $v' = y''$. De donde sustituyendo en la ecuación diferencial dada, se obtiene

$$x^2v' = 2xv - 2xv^2$$

$$\Rightarrow x^2v' - 2xv = -2xv^2 \qquad \text{es una ED de Bernoulli, multiplica por} \frac{v^{-2}}{x^2}$$

$$\Rightarrow v^{-2}v' - \frac{2}{x}v^{-1} = -\frac{-2}{x}$$

Toma $u = v^{-1} \Rightarrow u' = -v^{-2}v' \Rightarrow -u' = v^{-2}v'$ en la última ED resulta:

$$-u' - \frac{2}{x}u = -\frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow u' + \frac{2}{u}x = \frac{2}{x}$$

Multiplica por el factor integrante $\mu = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2$ y se obtiene $x^2u' + 2xu = 2x$

$$\Rightarrow d(x^2u) = 2xdx$$

$$\Rightarrow \int d(x^2u) = \int 2xdx$$

$$\Rightarrow x^2u = x^2 + A$$

$$\Rightarrow u = \frac{x^2 + A}{x^2}$$

Como $u = \frac{1}{v}$, se escribe: $\frac{1}{v} = \frac{x^2 + A}{x^2}$. Cambiando $v = y'$, se obtiene $\frac{1}{y'} = \frac{x^2 + A}{x^2}$. Aplicando la condición: $y' = \frac{1}{2}$ en esta obtiene: $\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1^2 + A}{1^2} \Rightarrow A = 1$ Sustituyendo $A = 1$ en la ED:

$$\frac{1}{y'} = \frac{x^2 + A}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y'} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{x^2 + 1} \qquad \text{división de polinomios}$$

$$\Rightarrow \int dy = \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx$$

$$\Rightarrow y = x - \operatorname{arc\,tg} x + B$$

Posteriormente aplicando la condición $y(1)=1$:

$$1 = 1 - \operatorname{arc\,tg} 1 + B \Rightarrow B = \frac{\pi}{4}$$

donde finalmente la solución particular asociada al problema de valor inicial viene dada por

$$y = x - \operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo 5.9

Resolver el problema de valor inicial $y'' + y = 0$. Considere solo soluciones crecientes.

Puede observar se encuentra ausente la variable x. Tomando $v = y'$ entonces $v' = y''$. Aplicado a la ED:

$$\begin{aligned}
&y'' + y = 0\\
\Rightarrow &v' + y = 0\\
\Rightarrow &\frac{dv}{dx} + y = 0
\end{aligned}$$

Como están dx, y, dv utiliza $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{dv}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dy} \cdot v$ para eliminar dx, con esto la ED se escribe:

$$\begin{aligned}
&\frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0\\
\Rightarrow &\frac{dv}{dy} \cdot v + y = 0 \qquad \text{que resulta ser una ED separable}\\
\Rightarrow &\frac{dv}{dy} \cdot v = -y\\
\Rightarrow &v\,dv = -y\,dy
\end{aligned}$$

integrando y el resultado lo multiplicando por 2 se obtiene: $v^2 = -y^2 + A$. Ahora retomando variables originales se cambia $v = y'$ para obtener: $(y')^2 = -y^2 + A$, esta es una ED separable $y' = \pm\sqrt{A - y^2}$

Considerando que las soluciones son creciente(derivada positiva) se toma : $y' = \sqrt{A - y^2}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow &\frac{dy}{\sqrt{A - y^2}} = dy\\
\Rightarrow &\int \frac{dy}{\sqrt{A - y^2}} = \int dx
\end{aligned}$$

Esta integral se calcula por sustitución trigonométrica ($y = \sqrt{A}\,\mathrm{sen}\, u$) y obtiene una solución general:

$$\arcsin \frac{y}{\sqrt{A}} = x + B$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\sqrt{A}} = \mathrm{sen}\, B \cdot \cos x + \mathrm{sen}\, x \cdot \cos B$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{A} \cdot \mathrm{sen}\, B + \sqrt{A} \cdot \cos B \cdot \mathrm{sen}\, x$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos x + C_2\, \mathrm{sen}\, x$$

donde $C_1 = \sqrt{A}\,\mathrm{sen}\, B$ y $C_2 = \sqrt{A}\cos B$ es la solución general.

Ejercicios 5.1 [**Ejercicios de retroalimentación**]

5.1.1 Resuelva el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + (y')^2 & = & e^y y' \\ y'(1) & = & \frac{1}{2} \\ y(1) & = & 0 \end{cases}$$

5.1.2 Encuentre la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} y'' \cos(y) + (y')^2\, \mathrm{sen}(y) = y' \\ y(-1) = \dfrac{\pi}{6},\ y'(-1) = 2 \end{cases}$$

5.1.3 Resuelva el siguiente problema de valor inicial: $y'' = y'(1+y),\ y(0) = 0;\ \ y'(0) = -4$

5.1.4 Resuelva la siguiente ecuación diferencial $xy'' + y' = 4x,\ x > 0$

5.1.5 Resuelva la siguiente ecuación diferencial $2y'' - (y')^2 + 1 = 0,\ x > 0$

5.1.6 Resuelva el siguiente problema de valor inicial: $yy'' = y^2 y' + (y')^2; y(0) = \dfrac{1}{2}; y'(0) = 1$

5.1.7 Resuelva el siguiente problema de valor inicial: $y'' + 4y = 0$ sujeta a las condiciones $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

5.1.8 Resuelva el siguiente problema de valor inicial: $3yy'y'' = 1 + (y')^3, \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
$x > 0;\ y > 0$, y con soluciones crecientes

5.2 Ecuación diferencial ordinarias de primer orden mediante cambio de variable

En algunos casos se pueden hacer cambios de variable dependiente o independiente apropiados que permiten transformar una EDO1 en otra que puede ser resuelta de acuerdo a los métodos estudiados. Consiguientemente se ilustra mediante los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.10

Considere la ED (**1**): $\dfrac{y'}{y} - \dfrac{2\ln y}{x} = \ln x$ en el intervalo $]0,+\infty[$. Aplique el cambio de variable $z = \dfrac{x}{\ln y}$ para transformar la ED en una de Bernoulli, luego resuelvala para obtener la solución general de (1).

Solución

Dado que $z = \dfrac{x}{\ln y}$ entonces se despeja $y = e^{\frac{x}{z}}$ y se deriva para obtener $y' = e^{\frac{x}{z}} \dfrac{z - xz'}{z^2}$, sustituyendo en la ED (1) se tiene: $\dfrac{e^{\frac{x}{z}} \cdot \dfrac{z-xz'}{z^2}}{e^{\frac{x}{z}}} - \dfrac{2}{z} = \ln x$

$\Rightarrow xz' + z = -z^2 \ln x \quad (2)$ **Ecuación diferencial de Bernoulli en** $z(x)$.

Para resolver dicha ecuación de Bernoulli tome $v = \dfrac{1}{z} \Rightarrow z = \dfrac{1}{v} \Rightarrow z' = \dfrac{-v'}{v^2}$, luego sustituyendo en la ED (2) se obtiene $x(\dfrac{-v'}{v^2}) + \dfrac{1}{v} = -\ln x \dfrac{1}{v^2} \Rightarrow -xv' + v = -\ln x$

$\Rightarrow v' - \dfrac{v}{x} = \dfrac{\ln x}{x} \quad (3)$ **Ecuación diferencial de Lineal en** $v(x)$.

Multiplicando ahora por el factor integrante $e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \dfrac{1}{x}$ para recibir (3) en

$\dfrac{v'}{x} - \dfrac{v}{x^2} = \dfrac{\ln x}{x^2}$

$\Rightarrow \displaystyle\int d(\frac{v}{x}) = \int x^2 \ln x dx$

Aplica integración por partes y obtiene:

$\displaystyle\int d(\frac{v}{x}) = -\frac{\ln x}{x} + \int x_2 dx$

$\Rightarrow \dfrac{v}{x} = -\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} + C, \;\; C \in \mathbb{R}.$

Finalmente considerando los cambios de variable para devolverse a las variables originales x e y, se obtiene por solución general de (1).

$$\frac{\ln y}{x} = Cx - \ln x - 1$$

Ejemplo 5.11

Usando la sustitución $u = \ln(y)$, determine la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$x\frac{dy}{dx} - 4x^2y + 2y\ln(y) = 0 \tag{5.1}$$

Solución:

Haciendo $u = \ln(y) \Rightarrow u' = \dfrac{y'}{y}$ la ecuación diferencial se transforma en la ecuación diferencial lineal:

$$\begin{aligned}
& xe^u\frac{du}{dx} - 4x^2e^u + 2ue^u = 0 \\
\Rightarrow\quad & x\frac{du}{dx} - 4x^2 + 2u = 0 \\
\Rightarrow\quad & \frac{du}{dx} + \frac{2u}{x} = 4x: \quad \textbf{ED} \quad \textbf{Lineal en } u(x).
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación anterior y usando $u(x) = \ln y$ se obtiene por solución general de 5.1

$$\begin{aligned}
& ux^2 = x^4 + c \\
\Rightarrow\quad & \ln(y) = x^2 + \frac{c}{x^2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.12

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 3\sqrt[3]{y-3x}. \tag{5.2}$$

Solución:

La raíz cúbica en la ecuación diferencial sugiere cambiar la variable dependiente y a otra por ejemplo z, de modo tal que la raíz pueda evitarse.

En este caso, si $y - 3x = z^3$ entonces al derivar con respecto x se tiene

$$\frac{dy}{dx} = 3 + 3z^2\frac{dz}{dx},$$

de donde sustituyendo en la ecuación 5.2 se tiene

$$3 + 3z^2\frac{dz}{dx} = 3z,$$

es decir,

$$z^2\frac{dz}{dx} = z - 1,$$

al separar variables

$$\frac{z^2}{z-1}dz = dx,$$

posteriormente integrando a ambos lados

$$\frac{z^2}{2} + z + \ln \mid z-1 \mid = x + K.$$

Finalmente como $z = \sqrt[3]{y-3x}$, se concluye que

$$\sqrt[3]{(y-3x)^2} + 2\sqrt[3]{y-3x} + 2\ln \mid \sqrt[3]{y-3x} - 1 \mid = 2x + C. \qquad (C = 2K)$$

Ejemplo 5.13

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(2\sqrt{xy} - y)\,dx - xdy = 0. \tag{5.3}$$

Solución:

La raíz nos sugiere hacer el cambio de variable $u^2 = xy$, así, u y y son funciones que dependen de x. luego derivando con respecto a x se tiene que $2u\dfrac{du}{dx} = y + x\dfrac{dy}{dx}$,
despejando $\dfrac{dy}{dx}$ se obtiene $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2u\frac{du}{dx} - y}{x}$, $(x \neq 0)$.

Ahora sustituyendo en la ecuación 5.3, pero expresada en su forma normal se tiene

$$\frac{2u\frac{du}{dx} - y}{x} = \frac{2\sqrt{u^2} - y}{x},$$

es decir, $2u\dfrac{du}{dx} = 2u$, de donde separando variable e integrando a ambos miembros de la ecuación

$$u = x + c,$$

finalmente devolviendo el cambio de variable $u^2 = xy$ se obtiene por solución general en su forma implícita

$$\pm\sqrt{xy} = x + c.$$

Ejemplo 5.14

Considere la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$y(2x^2\sqrt{y}+2)dx+x(x^2\sqrt{y}+2)dy=0 \qquad (1)$$

(a) Verificar que la solución general de la ecuación (1), al utilizar cambio de variable $u=x^2\sqrt{y}$, viene dada por $(x^2\sqrt{y}+3)xy=c$, donde c es una constante arbitraria.

Solución

Al expresar ED (1) en su forma normal se tiene $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=y'=\dfrac{-y(2x^2\sqrt{y}+2)}{x(x^2\sqrt{y}+2)}$ (2).

Al tomar la sustitución sugerida: $u=x^2\sqrt{y}\Rightarrow u'=2x\sqrt{y}+\dfrac{x^2\cdot y'}{2\sqrt{y}}\Rightarrow \dfrac{2\sqrt{y}(u'-2x\sqrt{y})}{x^2}=y'$. Luego sustituyendo en (2) se tiene

$\Rightarrow \dfrac{2\sqrt{y}u'-4xy}{x^2}=-\dfrac{2y(u+1)}{x(u+2)}$

$\Rightarrow 2\sqrt{y}u'-4xy=-2xy\dfrac{u+1}{u+2}$

$\Rightarrow 2\sqrt{y}u'=2xy\left(2-\dfrac{u+1}{u+2}\right)$

$\Rightarrow 2\sqrt{y}u'=2xy\left(\dfrac{2u+4-u-1}{u+2}\right)$

$\Rightarrow 2\sqrt{y}u'=2xy\left(\dfrac{u+3}{u+2}\right)$

$\Rightarrow 2\sqrt{y}\left(\dfrac{u+2}{u+3}\right)u'=2xy$ **Note que se tiene ED con 3 variables** y como : $\sqrt{y}=\dfrac{u}{x^2}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{u+2}{u+3}\right)u'=\dfrac{u}{x}$, ED ahora 2 variables $u(x)$.

$\Rightarrow \dfrac{u+2}{u(u+3)}u'=\dfrac{1}{x}$ ED variables separables

$\Rightarrow \displaystyle\int\left(\frac{2}{3u}+\frac{1}{3(u+3)}\right)du=\int\frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow \dfrac{2}{3}ln(u)+\dfrac{1}{3}ln(u+3)=ln(x)+ln(c)$

$\Rightarrow u^{\frac{2}{3}}(u+3)^{\frac{1}{3}}=cx$

$\Rightarrow 3\sqrt{u^3+3u^2}=cx$

$\Rightarrow u^3+3u^2=kx^3 \;\; k=c^3$

$\Rightarrow x^6y^{\frac{3}{2}}+3x^4y=kx^3$

$\Rightarrow x^3 y \cdot y^{\frac{1}{2}} + 3xy = k$

Por lo tanto la solución general de (1) viene dada por

$$xy(x^2\sqrt{y}+3) = k$$

con k constante arbitraria.

(b) Hallar la solución particular de (1) que cumple que $y(1) = 1$.

Solución

Con $y(1) = 1$ se tiene que $1 \cdot 1(1^2\sqrt{1}+3) = k \Rightarrow 4 = k$. Entonces de esta forma se tiene que la solución particular es:

$$xy(x^2\sqrt{y}+3) = 4$$

Ejemplo 5.15

Considere la ecuación diferencial **E**: $y + xy' = \dfrac{x}{x^2+e^{2xy}}$ y determine la solución general utilizando el cambio de variable $z = e^{xy}$.

Solución

Tomando el cambio $z = e^{xy}$

$\Rightarrow y = \dfrac{\ln z}{x}$

$\Rightarrow y' = \dfrac{\frac{z'}{z}x - \ln z}{x^2}$

Sustituyendo en **E** se obtiene: $\dfrac{\ln z}{x} + x\dfrac{\frac{z'}{z}x - \ln z}{x^2} = \dfrac{x}{x^2+z^2}$

$\Rightarrow \dfrac{\ln z}{x} + \dfrac{\frac{z'}{z}x - \ln z}{x} = \dfrac{x}{x^2+z^2}$

$\Rightarrow \dfrac{z'}{z} = \dfrac{x}{x^2+z^2}$ (1) ED homogénea en $z(x)$.

Para resolver la ecuación diferencial (1) se toma $v = \dfrac{z}{x} \Rightarrow z = xv \Rightarrow z' = v + xv'$, sustituyendo ahora en (1) se obtiene

$$v + xv' = \frac{x^2 v}{x^2 + x^2 v^2}$$

$\Rightarrow xv' = \dfrac{v}{1+v^2} - v$

$\Rightarrow xv' = \dfrac{-v^3}{1+v^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1+v^2}{v^3}dv = -\dfrac{dx}{x}$

$\Rightarrow (v^{-3}+\dfrac{1}{v})dv = -\dfrac{dx}{x}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2}v^{-2}+\ln|v| = -\ln|x|+C$

Escribiendo la solución general **E** en términos de x, y se tiene

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{x}\right)^{-2}+\ln\left|\dfrac{z}{x}\right| = -\ln|x|+C$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{xy}}{x}\right)^{-2}+\ln\left|\dfrac{e^{xy}}{x}\right| = -\ln|x|+C$,es decir,

$$-\frac{x^2}{2e^{2xy}}+xy = C$$

Ejercicios 5.2 **[Ejercicios de retroalimentación]**

5.2.1 Considere el cambio de variable $u^2 = xy$ para resolver $(2\sqrt{xy}-y)dx - xdy = 0$

5.2.2 Considere la ecuación diferencial

$$2xy^3dx+(x^2y^2-1)dy = 0$$

a) Muestre que la sustitución $y = z^a$ transforma la ecuación dada en

$$2xz^{3a}dx+a(x^2z^{3a-1}-z^{a-1})dy = 0$$

b) Determine el valor de a tal que la ecuación sea homogénea, luego resuelva la ecuación diferencial.

5.2.3 Considere la ecuación diferencial

$$x\frac{du}{dx}+\frac{1-x^2}{1+x^2}u = \frac{4\sqrt{x}\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}u^{\frac{1}{2}}$$

a) Muestre que la sustitución $y = xu$ transforma la ecuación en diferencial en una Bernoulli.

b) Resuelva la ecuación de Bernoulli encontrada en la parte anterior.

5.2.4 Considere la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$y(2x^2\sqrt{y}+2)dx+x(x^2\sqrt{y}+2)dy = 0 \qquad (1)$$

Verificar que la ecuación general de la ecuación (1), al utilizar cambio de variable $u = x^2\sqrt{y}$, es dada por $(x^2\sqrt{y}+3)xy = c$, donde c es una constante arbitraria

5.2.5 Considere para $x > 0$ la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{x^2} + y^2 y' = \left(\frac{1}{x} + y^3 - 1 \right)^2$$

Verificar que el cambio de variable $u = y^3 - 1$ convierte a la ecuación dada en una ecuación Bernoulli. Luego resuelva dicha ecuación

Prof: M.Sc. Norberto Oviedo Ugalde.

Capítulo 6:

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden especiales.

6 — Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden especiales

6.0.1 Objetivos Específicos

- Definir e identificar una ecuación diferencial de Ricatti.
- Comprender el proceso de resolución de ecuaciones diferenciales de Ricatti.
- Definir e identificar una ecuación diferencial de Lagrange.
- Comprender el proceso de resolución de ecuaciones diferenciales de Lagrange.
- Definir e identificar una ecuación diferencial de Clairaut.
- Comprender el proceso de resolución de ecuaciones diferenciales de Clairaut.

6.0.2 Contenidos

- Ecuación diferencial ordinaria de Ricatti.
- Ecuación diferencial ordinaria de Lagrange.
- Ecuación diferencial ordinaria de Clairaut.

6.1 Ecuación diferencial de Ricatti

Definición 6.1
Las ecuaciones de Riccati son de la forma:

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x) \;\; [\mathbf{1}]$$

donde $a(x), b(x), c(x)$ son funciones continuas en un intervalo común I.

Observación 6.1 .

- Si $b(x) = 0, \;\; \forall x \in I$ se tiene ecuación diferencial lineal $y_1' + a(x)y_1 = c(x)$.
- Si $c(x) = 0, \;\; \forall x \in I$ se tiene ecuación diferencial de Bernoulli $y' + a(x)y + b(x)y^2 = 0$.

Teorema 6.1 Transformación de ED de Riccati a ED lineales o de Bernoulli
Dada una solución $y_1(x)$ de la ecuación diferencial de Riccati $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$. Entonces el cambio de variablle:

1. $y = y_1(x) + z$ transforma la ED de Riccati en una ED de Bernoulli.
2. $y = y_1(x) + \dfrac{1}{z}$ transforma la ED de Riccati en una ED de lineal de primer orden en $z(x)$.

Prueba [1]: $y = y_1(x) + z$ transforma la ED de Riccati en una ED de Bernoulli.

(i) Si se conoce una solución y_1 de la ecuación de Ricatti, esta se puede reducir a una ecuación de Bernoulli mediante el cambio de variable $y = y_1(x) + z$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x) \\
\Rightarrow & y_1' + z' + a(x)(y_1 + z) + b(x)(y_1 + z)^2 = c(x) \\
\Rightarrow & y_1' + z' + a(x)y_1 + a(x)z + b(x)(y_1^2 + 2y_1z + z^2) = c(x) \\
\Rightarrow & y_1' + z' + a(x)y_1 + a(x)z + b(x)y_1^2 + 2b(x)y_1z + b(x)z^2 = c(x) \\
\Rightarrow & (y_1' + a(x)y_1 + b(x)y_1^2) + z' + a(x)z + 2b(x)y_1z + b(x)z^2 = c(x)
\end{aligned}$$

(ii) Por otro lado considerando y_1 es solución de la ED se tiene que $y_1' + a(x)y_1 + b(x)y_1^2 = c(x)$.

(iii) Sustituyendo lo anterior en la última ecuación se obtiene $c(x) + z' + a(x)z + 2b(x)y_1z + b(x)z^2 = c(x)$, es decir,

$$z' + (a(x) + 2b(x)y_1)z + b(x)z^2 = 0$$

la cual claramente una ecuación diferencial de **Bernoulli en** $z(x)$.

Prueba [2]: $y = y_1(x) + \frac{1}{z}$ transforma la ED de Riccati en una ED de lineal en $z(x)$.

(i) Al considerar cambio de variable $y = y_1 + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = y_1' - z^{-2}z'$ y sustituyendo en ecuación diferencial dada se tiene:

$$\begin{aligned}
& y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x) \\
\Rightarrow & y_1' - z^{-2}z' + a(x)(y_1 + z^{-1}) + b(x)(y_1 + z^{-1})^2 = c(x) \\
\Rightarrow & y' - z^{-2}z' + a(x)y_1 + a(x)z^{-1} + b(x)(y_1^2 + 2y_1z^{-1} + z^{-2}) = c(x) \\
\Rightarrow & y_1' - z^{-2}z' + a(x)y_1 + a(x)z^{-1} + b(x)y_1^2 + 2b(x)y_1z^{-1} + b(x)z^{-2} = c(x) \\
\Rightarrow & (y_1' + a(x)y_1 + b(x)y_1^2) - z^{-2}z' + a(x)z^{-1} + 2b(x)y_1z^{-1} + b(x)z^{-2} = c(x)
\end{aligned}$$

(ii) Por otro lado, dado que y_1 es una solución de la solución original se tiene que:

$$y_1' + a(x)y_1 + b(x)y_1^2 = c(x)$$

(iii) Sustituyendo lo anterior en la ecuación

$$(y_1' + a(x)y_1 + b(x)y_1^2) - z^{-2}z' + a(x)z^{-1} + 2b(x)y_1z^{-1} + b(x)z^{-2} = c(x)$$

obtenemos que:

$$\begin{aligned}
& c(x) - z^{-2}z' + a(x)z^{-1} + 2b(x)y_1z^{-1} + b(x)z^{-2} = c(x) \\
\Rightarrow & -z^{-2}z' + a(x)z^{-1} + 2b(x)y_pz^{-1} + b(x)z^{-2} = 0 \\
\Rightarrow & z' - (a(x) + 2b(x)y_1)z - b(x) = 0 \\
\Rightarrow & z' - (a(x) + 2b(x)y_1)z = b(x)
\end{aligned}$$

la cual claramente representa una ecuación diferencial lineal en variable dependiente z e independiente x.

Ejemplo 6.1

Resuelva y determine la solución general de la ecuación:

$$y' + y^2 \operatorname{sen} x = 2\tan x \sec x$$

sabiendo que $y_1 = \sec x$ es una solución de la ecuación.

Se toma el cambio de variable $y = \sec x + z$ cuya derivada $y' = \sec x \tan x + z'$ y se sustituye en la ecuación original.

Ejemplo 6.1

$$
\begin{aligned}
&y' + y^2 \operatorname{sen} x = 2\tan x \sec x \\
&\Rightarrow \sec x \tan x + z' + (\sec x + z)^2 \operatorname{sen} x = 2\tan x \sec x \\
&\Rightarrow z' + (\sec^2 x + 2(\sec x)z + z^2)\operatorname{sen} x = \tan x \sec x \\
&\Rightarrow z' + \sec^2 x \operatorname{sen} x + 2(\sec x \operatorname{sen} x)z + z^2(\operatorname{sen} x) = \tan x \sec x \\
&\Rightarrow z' + \sec x \tan x + 2z\tan x + z^2 \operatorname{sen} x = \tan x \sec x \\
&\Rightarrow z' + 2z\tan x + z^2 \operatorname{sen} x = 0
\end{aligned}
$$

Esta ya es una ecuación de Bernoulli, la cual se reduce a una lineal mediante el cambio de variable $v = z^{1-2} = z^{-1}$, con derivada $v' = -\dfrac{z'}{z^2}$ quedando de esta forma

$$
\begin{aligned}
&z' + 2z\tan x + z^2 \operatorname{sen} x = 0 \\
&\Rightarrow \frac{z'}{z^2} + 2z^{-1}\tan x = -\operatorname{sen} x \qquad \Rightarrow -v' + 2v\tan x = -\operatorname{sen} x \qquad \Rightarrow v' - 2v\tan x = \operatorname{sen} x
\end{aligned}
$$

Resolviendo mediante factor integrante se obtiene el factor:

$$\mu(x) = e^{\int -2\tan x dx} = e^{2\ln(\cos x)} = \cos^2 x$$

Si se multiplica la ecuación por este factor integrante se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&v' - 2v\tan x = \operatorname{sen} x \\
&\Rightarrow v'\cos^2 x - 2v\tan x \cos^2 x = \operatorname{sen} x \cos^2 x \\
&\Rightarrow v'\cos^2 x - 2v\tan x \cos^2 x = \operatorname{sen} x \cos^2 x \\
&\Rightarrow (v\cos^2 x)' = \operatorname{sen} x \cos^2 x \\
&\Rightarrow v\cos^2 = \int \operatorname{sen} x \cos^2 x dx \\
&\Rightarrow v\cos^2 = -\frac{\cos^3 x}{3} + c \\
&\Rightarrow v = -\frac{\cos x}{3} + c\sec^2 x \\
&\Rightarrow z^{-1} = -\frac{\cos x}{3} + c\sec^2 x \\
&\Rightarrow (y + \sec x)^{-1} = -\frac{\cos x}{3} + c\sec^2 x
\end{aligned}
$$

Otra forma de resolver estas ecuaciones es utilizando el cambio de variable $y = y_1 + \frac{1}{z}$, el cual la reduce directamente a una ecuación lineal.

Ejemplo 6.2

Resuelva la ecuación

$$y' + y^2 \operatorname{sen} x = 2 \tan x \sec x$$

sabiendo que $y_1 = \sec x$ es una solución de la ecuación diferencial dada.

Se toma el cambio de variable $y = \sec x + z^{-1}$ cuya derivada $y' = \sec x \tan x - z^{-2} z'$ y se sustituye en la ecuación original.

$$\begin{aligned}
& y' + y^2 \operatorname{sen} x = 2 \tan x \sec x \\
\Rightarrow & \sec x \tan x - z^{-2} z' + (\sec x + z^{-1})^2 \operatorname{sen} x = \tan x \sec x \\
\Rightarrow & - z^{-2} z' + (\sec^2 x + 2(\sec x) z^{-1} + z^{-2}) \operatorname{sen} x = \tan x \sec x \\
\Rightarrow & - z^{-2} z' + \sec x \tan x + 2 z^{-1} \tan x + z^{-2} + z^{-2} \operatorname{sen} x = \tan x \sec x \\
\Rightarrow & - z^{-2} z' + 2 z^{-1} + \tan x + z^{-2} \operatorname{sen} x = 0 \\
\Rightarrow & z' - 2z \tan x - \operatorname{sen} x = 0 \\
\Rightarrow & z' - 2z \tan x = \operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

Que es exactamente la misma ecuación lineal que se encontró midante el otro cambio de variable, y cuyo resultado, como se calculo anteriormente, es

$$z = -\frac{\cos x}{3} + c \sec^2 x$$

y devolviendo el cambio de variable se obtiene

$$(y - \sec x)^{-1} = -\frac{\cos x}{3} + c \sec^2 x$$

Ejemplo 6.3

Resuelva y determine solución general de la siguiente ED

$$xy' + (1 + 4x \ln x) y = 4x + 4x^2 \ln x + (\ln x) y^2 \ [1]$$

la cual posee una solución de la forma $\varphi(x) = ax$, con a constante por determinar.

Dado que la ecuacion diferencial $[\mathbf{1}]$ tiene una solución de la forma $\varphi(x) = ax$, con $a \in \mathbb{R}$, se empieza por determinar la constante a, de donde $\varphi(x) = ax \Rightarrow \varphi'(x) = a$, luego sustituyendo en la

ED de Riccati **[1]** dada se obtiene:

$xa+(1+4x\ln x)(ax)=4x+4x^2\ln x+\ln x(ax)^2$
$\Rightarrow ax+(ax+4ax^2\ln x)=4x+4x^2\ln x+a^2x^2\ln x$
$\Rightarrow (2a-4)x+(4a-4-a^2)x^2\ln x=0$

luego debe darse

$$\begin{cases} 2a-4=0 \\ a^2-4a+4=0 \end{cases}$$

de donde resolviendo sistema $a=2$ y de esa forma

$$\varphi(x)=2x$$

Aplicando a la ED de Riccati el cambio de variables $y=u+2x$ para obtener:

$x(u'+2)+(1+4x\ln x)(u+2x)=4x+4x^2\ln x+\ln x(u+2x)^2$
$\Rightarrow xu'+u+4xu\ln x+4x^2\ln x=u^2\ln x+4xu\ln u+4x^2\ln x$
$\Rightarrow xu'+u=u^2\ln x$

$$u'+\frac{1}{x}u=\frac{\ln x}{2}u^2$$

La cual es una ED de Bernoulli en $u(x)$ y al utilizar el cambio de variable $v=u^{-1}$ se transforma en la ecuación diferencial lineal en $v(x)$ $v'-\frac{1}{x}v=-\frac{\ln x}{x}$, de donde resolviendola se llega a la solución

$$v=\ln x+1-C.x$$

finalmente retomando los cambios de variable $v=\frac{1}{u}$ y $u=y-2x$ resulta por solución general de la ecuación diferencial **[1]**

$$y-2x=\frac{1}{\ln x+1-Cx}$$

con C una constante arbitraria.

6.2 Ecuación diferencial de Lagrange

Una ecuación diferencial de Lagrange es de la forma

$$y = x\varphi(y') + \psi(y')$$

Para resolver este tipo de ecuaciones se debe derivar toda la ecuación para poder realizar el cambio de variable $p = y'$, si además de este cambio se considera $x = x(p)$ se obtiene una ecuación lineal para x de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&y = x\varphi(y') + \psi(y') \\
\Rightarrow &y' = \varphi(y') + x\varphi'(y')y'' + \psi'(y')y'' \\
\Rightarrow &p = \varphi(p) + x\varphi'(p)p' + \psi'(p)p' \\
\Rightarrow &p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} \\
\Rightarrow &p\frac{dx}{dp} = \varphi(p)\frac{dx}{dp} + x\varphi'(p) + \psi'(p) \\
\Rightarrow &p\frac{dx}{dp} - \varphi(p)\frac{dx}{dp} - x\varphi'(p) = \psi'(p) \\
\Rightarrow &(p-\varphi(p))\frac{dx}{dp} - x\varphi'(p) = \psi'(p) \\
\Rightarrow &(p-\varphi(p))x' - x\varphi'(p) = \psi'(p) \\
\Rightarrow &x' - \frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}x = \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}
\end{aligned}$$

La última ecuación es una lineal que se puedad resolver mediante factor integrante, siempre y cuando $p - \varphi(p) \neq 0$ pues de lo contrario se indefiniría.
Al resolver la ecuación lineal se obtiene uuna solución para x en términos de p y de una constante de integración c. Es importante no regresar el cambio de variable, pues al hacerlo se regres a la ecuación original. Para este tipo de ecuaciones la solución es paramética pues queda en términos del parámetro p.

Para determinar el valor de y en términos del parámetro p basta con sustituir en la ecuación original. Así se obtiene la solución.

$$\begin{cases} x &= f(p,c) \\ y &= f(p,c)\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}$$

Si se considera el caso de que exista p talque $p - \varphi(p) = 0$ se obtiene una solución singular que consiste en las rectas de la forma: $y = px + \psi(p)$

Ejemplo 6.4

Resuelva la ecuación:

$$y = 2xy' - 3(y')^2$$

Siguiendo el procedimiento descrito anteriormente, se debe derivar primero toda la ecuación para poder realizar el cambio de variable $p = y'$.

$$\begin{aligned}
& y = 2xy' - 3(y')^2 \\
\Rightarrow & y' = 2y' + 2xy'' - 6y'y'' \\
\Rightarrow & p = 2p + 2xp' - 6pp'
\end{aligned}$$

Ahora de debe tomar $x = x(p)$ para poder obtener la ecuación lineal.

$$\begin{aligned}
& p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} - 6p\frac{dp}{dx} \\
\Rightarrow & 0 = p + 2x\frac{dp}{dx} - 6p\frac{dp}{dx} \\
\Rightarrow & 0 = p\frac{dx}{dp} + 2x - 6p \\
\Rightarrow & 6 = \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x \\
\Rightarrow & x' + \frac{2}{p}x = 6
\end{aligned}$$

Esat ecuación lineal se puede resolver con el factor integrante:

$$\mu = e^{\int \frac{2}{p}dp} = e^{2\ln(o)} = p^2$$

Resolviendo la ecuación lineal para x obtiene:

$$\begin{aligned}
& p^2x' + 2\frac{p^2}{p}x = 6p^2 \\
\Rightarrow & p^2x' + px = 6p^2 \\
\Rightarrow & (p^2x)' = 6p^2 \\
\Rightarrow & p^2x = 2p^3 + c \\
\Rightarrow & x = 2p + cp^{-2}
\end{aligned}$$

y sistituyendo en la ecuación original se obtiene la solución paramétrica

$$\begin{cases} x &= 2p + cp^{-2} \\ y &= (2p + cp^{-2})2p - 3p^2 \end{cases}$$

Ejemplo 6.5

Resuelva y determine la solución paramétrica de la ecuación diferencial:

$$(y')^2x = e^{(y')^{-1}}$$

Esta ecuación no parece ser de Lagrange; pero si se toma $x = x(y)$ la ecuación resultante sí lo es.

$$\begin{aligned}
&(y')^2x = e^{(y')^{-1}}\\
\Rightarrow &(x')^{-2}x = e^{x'}\\
\Rightarrow &x = (x')^2e^{x'}
\end{aligned}$$

Esta es una ecuación de Lagrange para $x = y\varphi(x') + \psi(x')$, con $\varphi(x') = 0$. Haciendo el mismo procedimiento anterior, pero derivando respecto a y y tomando $p = x'$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&x = (x')^2e^{x'}\\
\Rightarrow &x' = 2x'x''e^{x'} + (x')^2e^{x'}x''\\
\Rightarrow &p = 2pp'e^p + p^2e^pp'
\end{aligned}$$

Ahora se debe tomar $y = y(p)$ para poder obtener la ecuación lineal.

$$\begin{aligned}
&p = 2p\frac{dp}{dy}e^p + p^2e^p\frac{dp}{dy}\\
\Rightarrow &p\frac{dy}{dx} = 2pe^p + p^2e^p
\end{aligned}$$

Esta es una ecuación de variables separables:

$$dy = (2e^p + pe^p)dp$$

$$y = e^p + pe^p + c$$

y sustituyendo en la ecuación original de obtiene la solución paramétrica

$$\begin{cases} y &= & e^p + pe^p + c\\ x &= & p^2e^p \end{cases}$$

En la siguiente sesión se estudiará la ecuación diferencial de Clairaut, un caso particular de la ecuación diferencial de Lagrange. Es la que se obtiene al considerar $\varphi(p) = p$, lo que genera una ecuación de la forma

$$y = xy' + \psi(y')$$

6.3 Ecuacion diferencial de Clairaut

En el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias existen diferentes tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden. Prácticamente se dividen en 2 tipos, a saber, las resueltas respecto a la derivada $y' = f(x,y)$ y las no resueltas respecto a la derivada, en las cuales no es posible despejar dicha derivada, entonces se tendrá que despejar alguna de las otras dos ya sea la función dependiente o la variable independiente, es decir, $y = f(x,y') \quad \text{o} \quad x = g(y,y')$.

Suponga que $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función real. Si $(c, f(c)) \in D$ la recta tangente a la gráfica de la función en este punto está dada por

$$y - f(c) = f'(x)(x - c)$$

Observe que esta ecuación es una familia de curvas uniparamétricas con parámetro c. Entonces podemos encontrar una ecuación diferencial cuya solución general sea esta familia de curvas. Si $y' = f'(c)$ y $f'(x)$ tiene una inversa $g(x)$ cerca de c, entonces $c = g(y')$ y podemos reescribir la ecuación de la recta tangente como

$$y = xy' + g(y') \tag{6.1}$$

la cual es la ecuación diferencial 6.1 buscada y se les conoce como **ecuaciones de Clairaut**.

Definición 6.2 Ecuación de Clairaut

Una ecuación diferencial de primer orden que puede escribirse en la forma $y = xy' + g(y')$ se conoce como ecuación de Clairaut. Donde $g(y')$ es una función continuamente diferenciable respecto a y'.

El interés que presenta este tipo de ecuación se debe al hecho de que tiene como solución a una familia de rectas. Además, la envolvente, es decir, la curva cuyas tangentes están dadas por la familia, también es solución, en este caso una solución singular, de la ecuación de Clairaut. En el ejemplo 1.1.5 se ilustra como la relación $y = \dfrac{x^2}{4}$ es una envolvente (solución singular) y con solución general $y = C \cdot x - C^2$ de la ecuación diferencial $(y')^2 - xy' + y = 0$.

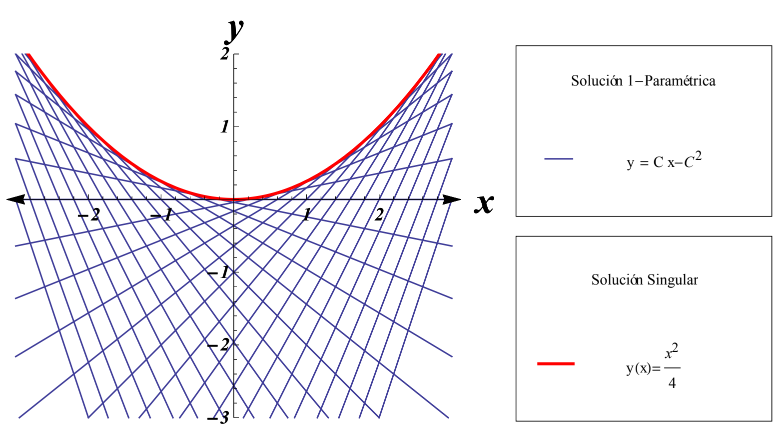


Figura 6.1: gráfica de la solución singular $y(x) = \dfrac{x^2}{4}$ y familia 1-paramétrica $y(x) = Cx - C^2$.
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 9.0.

Teorema 6.2 Solución de la ecuación de Clairaut

La ecuación de Clairaut 6.1 donde $g(x)$ es una función derivable, tiene $y = C \cdot x + g(C)$ como solución general y como solución singular

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -g'(v) \\ y &=& -v.g'(v) + g(v) \end{array} \right. \tag{6.2}$$

con v un parámetro.

Demostración

A continuación se ilustra la demostración del teorema, la cual sirve como base para los procesos de solución de este tipo de ecuaciones diferenciales

- Realice en 6.1 la sustitución $v = y'$ para obtener $y = x.v + g(v)$.
- Derive en ambos lados respecto a x asi, $y' = xv' + v + g'(v) \cdot v'$ de donde obtenemos que

$$v' \cdot (x + g'(v)) = 0 \ [*]$$

De $[*]$ surgen dos casos:

I Caso:

$v' = 0 \Rightarrow v = C \Rightarrow y = x \cdot C + g(C)$, la cual sería la solución general de ED Clairaut $y = xy' + g(y')$.

Observe que la solución general se obtiene simplemente sustituyendo en la ecuación 6.1 la y' por constante arbitraria C.

II Caso:

Si $x + g'(v) = 0$, entonces $x = -g'(v)$ y sustituyendo en $y = x.v + g(v)$, es decir, $y = -v \cdot g'(v) + g(v)$.

De esta forma la ED Clairaut $y = xy' + g(y')$ tiene por solución general $y = x \cdot C + g(C)$ y singulares las ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -g'(v) \\ y &=& -v.g'(v) + g(v) \end{array} \right.$$

de una curva donde v es el parámetro. Observe que esta solución no es un caso particular de la solución general, por lo que se trata de una solución singular.

Ejemplo 6.6

Resuelva la siguiente ecuación diferencial $y = xy' - \sqrt{1 + (y')^2}$ hasta obtener solución general y sigular(es).

En efecto se trata de una ED de Clairaut con $g(y') = -\sqrt{1+(y')^2}$, por lo que se inicia haciendo $v = y'$, posteriromente sustituyendo en la ED dada para obtener

$$y = x \cdot v - \sqrt{1+v^2} \ \ [*]$$

Derivando [*] con respecto a x

$$y' = x \cdot v' + v - \frac{v \cdot v'}{\sqrt{1+v^2}} \ \ [**]$$

Dado que $v = y'$, luego en [**] simplificando y factorizando se tiene

$$0 = v' \cdot \left(x - \frac{v}{\sqrt{1+v^2}} \right)$$

De donde se desprende lo siguiente:

- $v' = 0 \Rightarrow v = C$, así la solución general viene dada por $y = x \cdot C - \sqrt{1+C^2}$
- $\begin{cases} x &= \dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}} \\ y &= \dfrac{v^2}{\sqrt{1+v^2}} - \sqrt{1+v^2} = \dfrac{-1}{\sqrt{1+v^2}} \end{cases}$

De acuerdo a lo anterior se genera como solución singular $x^2 + y^2 = 1$, o equivalentemente las singulares $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. La cual se conoce como la envolvente y podemos apreciar en la figura 6.2.

Puede complementar y visualizar aspectos teóricos, ejemplos ilustrativos y comportamiento geométrico de curvas solución en este tipo de ecuaciones diferenciales mediante la página interactiva **Ecuación diferencial de Clairaut.**

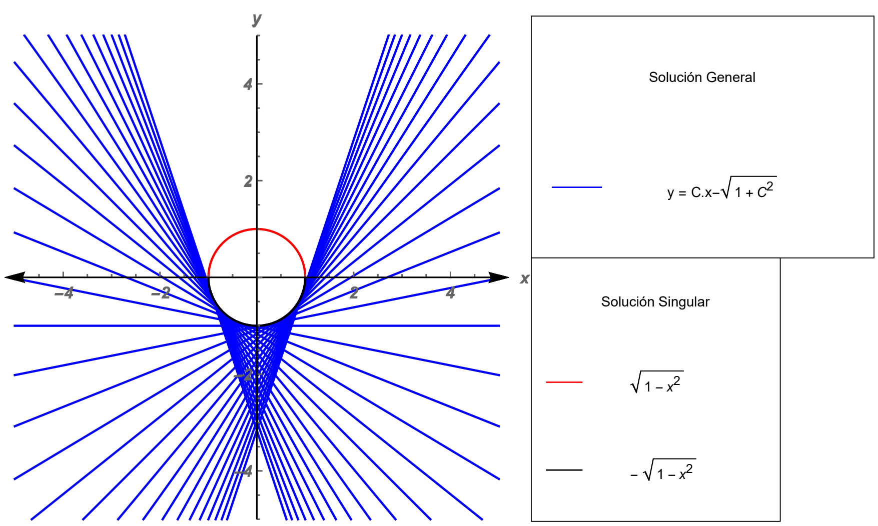


Figura 6.2: gráfica de la solución singular $y(x) = x^2 + y^2 = 1$ y familia 1-paramétrica $y(x) = Cx - \sqrt{1+C^2}$.
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 11.2.

Ejemplo 6.7

Hallar la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$y = xy' + (y')^2$$

Haciendo el cambio $v = y'$, luego por teorema antes descrito cse determina que la solución general viene dada por

$$y = Cx + C^2$$

asimismo para hallar la solución singular basta tomar $g(v) = v^2$, de donde se obtiene las ecuaciones parámetricas

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -2v \\ y & = & -v \cdot 2v + v^2 = -v^2 \end{array} \right. \tag{6.3}$$

de donde si en sistema 6.3 se elevada al cuadrado la primer ecuación paramétrica ,es decir, $x^2 = 4v^2$ y se sustituye en la ecuación paramétrica $y = -v^2$, obtiene que la solución singular es $y = -\dfrac{x^2}{4}$.

Claramente cada recta de la familia $\omega = \left\{ y = Cx + C^2 : C \in \mathbb{R} \right\}$ es tangente a la parábola $y = -\dfrac{x^2}{4}$, y por cada punto de la parábola $y = -\dfrac{x^2}{4}$ para una única recta de la familia ω, lo anterior se puede apreciar en la figura 6.3.

Puede complementar y visualizar aspectos teóricos, ejemplos ilustrativos y comportamiento geométrico de curvas solución en este tipo de ecuaciones diferenciales mediante la página interactiva **Ecuación diferencial de Clairaut.**

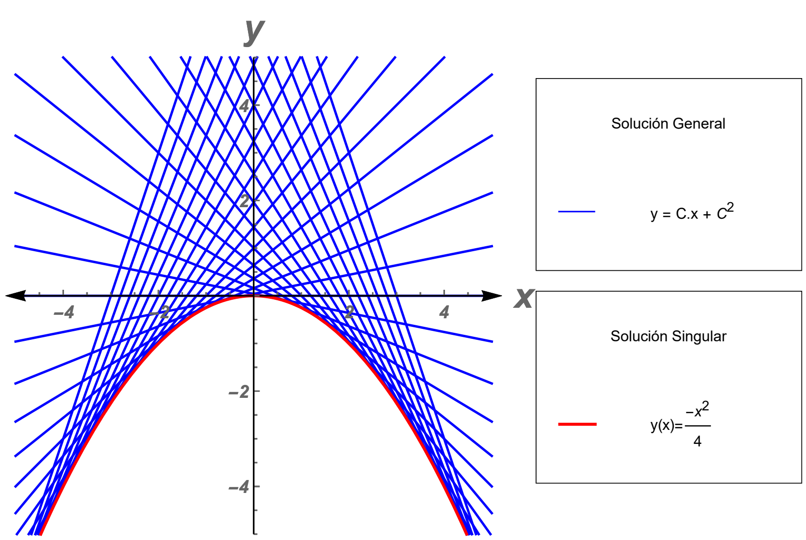


Figura 6.3: gráfica de la solución singular $y(x) = -\dfrac{x^2}{4}$ y solución general $y(x) = C.x + C^2$.
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 11.2.

Ejemplo 6.8

Determine una solución singular de la ecuación diferencial

$$y = xy' + 1 - \ln(y')$$

Realizando el cambio $v = y'$, se determina de acuerdo a la teória vista que la familia de soluciones o solución general de la ecuación diferencial dada es

$$y = C.x + 1 - \ln(C)$$

Identificando $g(y') = 1 - \ln(y') \Rightarrow g(v) = 1 - \ln(v)$, de esta forma la solución singular está dada por las ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -g'(v) \\ y & = & -v.g'(v) + g(v) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\left(-\dfrac{1}{v}\right) = \dfrac{1}{v} \\ y & = & \dfrac{1}{v} \cdot v + 1 - \ln(v) = 2 - \ln(v) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{1}{v} \\ y & = & 2 - \ln(v) \end{array}\right.$$

de esta forma de acuerdo a dichas ecuaciones obtenidas se desprende la solución singular

$$y = 2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$ [a]

La familia de curvas de la solución general y solución singular se pueden visualizar mediante la figura 6.4.

---

[a] Puede complementar y visualizar aspectos teóricos, ejemplos ilustrativos y comportamiento geométrico de curvas solución en este tipo de ecuaciones diferenciales mediante la página interactiva **Ecuación diferencial de Clairaut.**
.

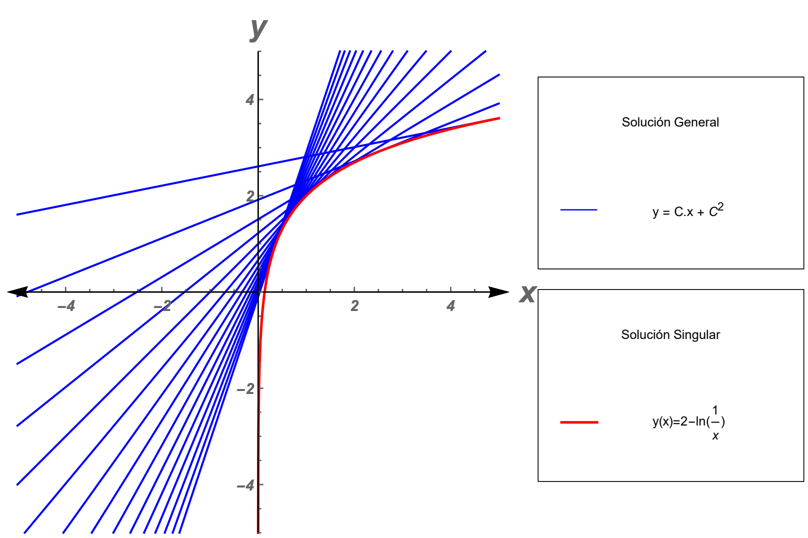


Figura 6.4: gráfica de la solución singular $y(x) = 2 - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ y solución general $y(x) = C.x + 1 - \ln(C)$.
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 11.2.

Ejemplo 6.9

Utilice un procedimiento similar al de la técnica empleada en la resolución de la ecuación de Clairaut, para probar que en la ecuación diferencial $y = y' \ln(y')$ se cumple que $y' = e^{-1\pm\sqrt{2x}}$

Solución:

Sea $v = y'$, así $y = y' \ln(y') \Rightarrow y = v\ln(v)$

Derivando

$$\begin{aligned}
& y' = v' \ln(v) + v \cdot \frac{1}{v} v' \\
\Rightarrow \quad & v = v' \ln(v) + v' \\
\Rightarrow \quad & v = \frac{dv}{dx}(\ln(v)+1) \\
\Rightarrow \quad & dx = \frac{\ln(v)+1}{v} dv \\
\Rightarrow \quad & x = \ln v + \frac{\ln^2}{2} v + C \\
\Rightarrow \quad & x = \frac{(\ln(v)+1)^2}{2} + K \text{ donde } K = C - \frac{1}{4} \\
\Rightarrow \quad & \ln(y') + 1 = \pm\sqrt{2x-k} \\
\Rightarrow \quad & y' = e^{-1\pm\sqrt{2x-k}}
\end{aligned}$$

En el caso particular en que $K = 0$ se tiene $\Rightarrow y' = e^{-1\pm\sqrt{2x}}$.

Ejemplo 6.10

Considere la ecuación diferencial en la que la variable y es una función de x

$$x = (y')^6 \operatorname{sen}(y')$$

su solución general esta dada por

$$\begin{cases} x &= z^{-\alpha} \operatorname{sen}(z) \\ y &= \displaystyle\int \left(z^{-5} \cos(z) - 6z^{\beta} \operatorname{sen}(z) dz \right) \end{cases}$$

con $z \in \mathbb{R}$.

Solución:

Tome cambio de variable $z = y'$ en la ecuación diferencial dada $x = (y')^6 \operatorname{sen}(y')$, luego se tiene $x = z^{-6} \operatorname{sen}(z)$ con lo que se tiene que $\alpha = 6$.

Por otro lado si derivamos $x = z^{-6}\operatorname{sen}(z)$ con respecto a y y considerando $\frac{1}{z} = \frac{dx}{dy}$ se cumple

$$
\begin{aligned}
x &= z^{-6}\operatorname{sen}(z) \\
\Rightarrow \quad & \frac{dx}{dy} = \left(-6z^{-7}\operatorname{sen} z + z^{-6}\cos z\right)\frac{dz}{dy} \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{z} = \left(-6z^{-7}\operatorname{sen} z + z^{-6}\cos z\right)\frac{dz}{dy} \\
\Rightarrow \quad & dy = \left(-6z^{-6}\operatorname{sen} z + z^{-5}\cos z\right)dz \\
\Rightarrow \quad & y = \int \left(-6z^{-6}\operatorname{sen} z + z^{-5}\cos z\right)dz
\end{aligned}
$$

De donde se deduce $\beta = -6$.

Ejemplo 6.11

Considere la ecuación diferencial en la que la variable y es una función de x

$$y = \frac{1}{(y')^3} - (y')^3$$

la componente x de su solución general, en forma paramétrica, está dada por la expresión

$$x = \frac{3}{4}u^{-4} - \frac{3}{2}u^2 + C$$

con $u \in \mathbb{R}^+, C \in \mathbb{R}$. ¿Cuál es el valor de la constante C cuya solución particular cumple $y\left(\frac{49}{4}\right) = 0$?

Solución:

Tome cambio de variable $u = y'$ en la ecuación diferencial dada $y = \frac{1}{(y')^3} - (y')^3$, luego se tiene solución en forma paramétrica

$$
\begin{cases}
x = \frac{3}{4}u^{-4} - \frac{3}{2}u^2 + C \ (1) \\
y = u^{-3} - u^3 \ (2)
\end{cases}
$$

con $u \in \mathbb{R}^+$. Como $y\left(\frac{49}{4}\right) = 0$ se sustituye en (2) , entonces

$$0 = u^{-3} - u^3 \Rightarrow u^6 = 1 \Rightarrow u = 1, \ (u > 0)$$

Ahora sustituyendo en (1) y usando $y\left(\frac{49}{4}\right) = 0$ se tiene ahora

$$\frac{49}{9} = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + C \Rightarrow 13 = C$$

Ejercicios 6.1 [**Ejercicios de ED de Ricatti**]

6.3.1 Resuelva y determine la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales en las que se les indica una solución o forma de esta.

a) $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$ con solución de la forma $y_1 = ax + b$
b) $y' = \dfrac{2\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + y^2}{2\cos x}$ con solución $y_1 = \operatorname{sen} x$.
c) $xy' + x^2y^2 = (4x^2 \ln x - 1)y - 4x^2 \ln^2 x + 2\ln x + 2$ con solución de la forma $y_1 = a\ln x$.
d) $y' - y^2 + 2xy = x^2$ con solución polinomial.
e) $y' + x^2 + 2x - 2xy - 2y + y^2 = 0$ con solucón de la forma $y_1 = ax + b$.
f) $y' = 2\tan x \sec x - y^2 \operatorname{sen} x$ con $\phi(x) = secx$ una solución.
g) $y' = -8xy^2 + 4x(4x+1)y - 8x^3 - 4x^2 + 1$ con una solución polinomial.
h) $y' - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x} + y^2$ con $\phi(x) = \dfrac{1}{x}$ una solución.
i) $y' = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{y}{x} + y^2$ con solucion por determinar.

Ejercicios 6.2 [**Ejercicios de ED de Lagrange**]

6.3.2 Resuelva y determine la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $y = x(y')^2 + (y')^2$.
b) $y = 2x(y')^2 - 3(y')^2$.
c) $y = x + y' - 3(y')^2$
d) $y = 2xy' - (y')^3$
e) $x(y')^2 = e^{(y')^{-1}}$

Ejercicios 6.3 [**Ejercicios de ED Clairaut**]

6.3.3 Resuelva y determine la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $y = xy' - 2(y')^2$
2. $y = xy' - \sqrt{1 + (y')^2}$
3. $y = xy' + 1 - \ln(y')$
4. $y = xy' + \tan(y')$
5. $y = (x+4)y' + (y')^2$

6.3.4 Al resolver la ecuación diferencial $y = (x-2)y' + (y')^{12}$ se obtiene, como parte de su solución singular, dependiendo del parámetro$v$ $y(v) = \alpha v^{12}$. Determine el valor de α

6.4 Bibliografía

- Abell, Martha L. y Braselton James P. (2004), Differential Equations with Mathematica, Elsevier Science & Technology Books.

- Ayres, Frank Jr.(1991). Ecuaciones diferenciales.McGraw Hill-Serie Schaum, México.

- Boyce, W. E. e Diprima, R. C. (2004). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. México. Editora Limusa Wiley, 4a edición.

- Coddington E.(1968). Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias Compañía Editorial Continental, S.A.

- Figueroa, G. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Editorial Tecnológica de Costa Rica, 2010.

- Lomen D. y Lovelock D. (2000). Ecuaciones Diferenciales a través de gráficas, modelos y datos. Primera edición. Compañía editorial Continental, México.

- Meneses R. Sharay (2016). Folletos de curso Ecuaciones diferenciales. Tecnológico de Costa Rica.

- Mora Walter (2013). Plantilla del formato y diseño de Revista Matemática. Tecnológico de Costa Rica.

- Murray R. Spiegel (1983). Ecuaciones diferenciales aplicadas. Primera edición. México. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.

- Zill, Dennis G. (2002) Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado.Editorial Thompson, sétima edición, México.

- Wolfram Demonstration Project.(s.f). http://demonstrations.wolfram.com/

7 — Solución de los ejercicios

Soluciones del Capítulo 1

Soluciones del Capítulo 2

1.1.1

1. Orden 1, no lineal.
2. Orden 2, lineal.
3. Orden 1, no lineal.
4. Orden 4, lineal.
5. Orden 6, no lineal.

1.1.2

1. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2+e^{xy}+xy}{x^2+y}$.
2. $y'' = -\dfrac{5}{3x}y' + \dfrac{8}{3x^2}y + \dfrac{e^x\cos x}{x^2}$.
3. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2+y^2}{3e^x-2y}$.
4. $\left(\dfrac{d^4y}{dx^4}\right) = -\tan x\dfrac{d^2y}{dx^2} - e^x\dfrac{dy}{dx} + xy + e^{3x}$.
5. $y^{vi} = \dfrac{5}{4}y''' - 2y'' - \dfrac{3}{4}yy' + \dfrac{x\ln x}{4(x+1)}$.

1.1.3

1. Sí.
2. Sí.
3. $\varphi_1(x)$. sí, $\varphi_2(x)$ sí.
4. Sí.
5. Sí.
6. Sí.
7. No.

1.1.4 ↰ 👁 $r = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$

1.1.5 ↰ 👁
Sí es solución implícita , $y=-4$. es solución singular, luego $C=-4$ cuando $y(1)=-3$.

1.1.6 ↰ 👁
No; Si $y(x)=0$.

1.1.7 ↰ 👁 No

1.1.8 ↰ 👁

1.1.9 ↰ 👁
No; Si $y(x)=0$.

1.1.10 ↰ 👁

1.1.11 ↰ 👁
$y^2-xy=2$

1.1.12 ↰ 👁
1. $x^2y''-2xy'+2y=0$
2. $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$
3. falta
4. $y'=1+(y-x)\cot(x)$
5. $(y')^2+2x^3y'-4x^2y=0$
6. $y^2(y')^2+y^2=4$

1.2.1 ↰ 👁

1.2.2 ↰ 👁

1.2.3 ↰ 👁
1.
2.

1.3.1 ↰ 👁

1.3.2 ↰ 👁

1.3.3 ↰ 👁
1. No.
2. Sí.
3. No.
4. Sí.
5. Sí.

1.3.4 ↰ 👁

1.3.5 ↰ 👁

1.
2.

1.3.6

1.
2.

1.3.7

1.
2.

1.3.8

1.3.9

1.
2.

Soluciones del Capítulo 3

2.2.1

2.2.2

1. $\ln(\operatorname{sen} y) = K + \cos x$ o equivalentemente $y = \arcsin\left(Ce^{\cos x}\right)$ donde $e^k = C$
2. $\ln(1+y^2) = K + \dfrac{e^{-x^2}}{2}$ equivalentemente $y^2 = Ce^{e^{-x^2}} - 1$ donde $e^k = C$
3. $\ln y - 2y = \operatorname{sen} x + C$.
4. $e^y(1-y) = x - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$
5. $(x^2-2x+2)(y^2+1)e^{2\arctan(y)} = C$.
6. $y = \arctan x + C$
7. $y + \dfrac{y^3}{3} = \arctan x + C$

2.2.3

1.
2.

2.2.4 ED en variables separables $u' = \dfrac{u^3}{1+u^2}$. SG: $\dfrac{-1}{2y^2e^{2x}} + \ln|ye^x| = x + C$. SS: $y = 0$

2.2.5

1. $\arctan(x+y) = x + C$
2. SG: $\tan(x-y+1) = x + C$ SS: $x - y + 1 = \left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)$ con $K \in \mathbb{Z}$
3.

2.3.1

2.3.2

2.3.3

1. **SG:** $\dfrac{-x}{y} = \ln|x| + C$
2. **SG:** $x(\ln x - 1) + (y - x)\ln y = Cy$
3. **SG:** $x^2y^2 + x^3y = C$
4. **SG:**
5. $\ln\left|\frac{y^3}{x^3} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1\right| = -3\ln x + K$ o $y^3 + y^2x + x^2y + x^3 = C$ con $K = \ln C$
6. **SG:** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) = \ln|y| + C$
7. **SG:** $\dfrac{e^{\frac{2x}{y}}}{2} = 4\ln|y| + C$
8. **SG:** $C \cdot x = \sqrt{1 + \sqrt{\dfrac{y}{x}}}$
9. **SG:** $x^3 \ln(Cx^3) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$
10. **SG:** $3\ln|x + y + 1| - 2x - y = C$
11. **SG:** $y = -x\ln\left(\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) + C\right)$

2.3.4 $n = \dfrac{3}{2}$, **SG:** $y = -x^{\frac{3}{2}}\sqrt{\dfrac{4C + x^5}{x^5 - C}}$

2.3.5

2.3.6

Soluciones del Capítulo 4

3.1.1

1. $x^2y^3 - 2x^3y^2 = C$
2. $e^{2y}x - \operatorname{sen} xy + y^2 = C$
3. $xye^x - 2y + x = C$
4. $x^2y - y^2 - \tan x = C$
5. $xy^2 + \cos x - \tan y = C$
6. $xy^3 - 5y + 2x^3 = -2$
7. $x^2y + y + y\sqrt{x^2 + 1} - y\ln x - 2\ln y = C$
8. $-\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) = C$
9. $\dfrac{-x^2}{2} + y\operatorname{sen} x + \dfrac{y^2}{2} = C$
10. $x\operatorname{sen}(xy) = C$

3.1.2

1. $e^{2y}x - \operatorname{sen} xy + y^2 = C$
2. $xye^x + 2y + x = C$
3. $x^2y + y^2 - \tan x = C$
4. $x^2y\operatorname{sen} x = C$
5. $x^2\ln y + \dfrac{1}{3}(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3}$

6. $\dfrac{-y^2}{x}+\ln|x|=C$
7. $x^2y^3+xy^6=0$
8. $x^2e^y+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{x}{y^3}=C$

3.1.3
a) $k=10$
b) $k=9$

3.1.4 $M(x,y)=e^{xy}y-\dfrac{y}{x^2}-y^2+\phi(x)$

3.1.5 $g(y)=y-\cos y$

3.1.6 $a=2$ y la solución general $3xy^2+5x^2y^2-2y=C$

3.1.7 $A=3$ y $B=2$

3.1.8 $M(x,y)=e^x\operatorname{sen} y+k(x)$

3.1.9 $e^x(1-x)+e^y(1-y)+\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)=C$

3.1.10 $f(x)=1$ con **Solución General**: $-xy^2+3x+\dfrac{1}{2}e^x\operatorname{sen}(x)-\dfrac{1}{2}e^x\cos(x)-\dfrac{y^3}{3}=C$

3.1.11 Ver video ejemplo complementario.

3.2.1

3.2.2
a) FI: $\mu(y)=y^2$ **SG** :$y^3+xy^3-\dfrac{y^4}{4}=C$

b) FI: $\mu(y)=\dfrac{2}{y}$ **SG** :$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\cos(2x)}{2y}+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{1}{2y}=C$

c) FI: $\mu(x)=\dfrac{1}{x^3}$ **SG** :$x^3\tan(y)+\dfrac{y^3}{x^2}+y^4=C$

d) FI: $\mu(y)=\dfrac{2}{y}$ **SG:** $x^2y^3+xy^6=C$

e) FI: $\mu(y)=\dfrac{1}{y^4}$ **SG:** $x^2e^y+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{x}{y^3}=C$

f) FI: $\mu(y)=e^{2y}$ **SG:** $xe^{2y}-e^{3y}=C$

3.2.3 $a=-1,b=-2.$ **FI**: $\mu(x,y)=x^{-1}y^{-2}$ **SG:** $\ln(x)-\dfrac{1}{2x^2y^2}=C$

3.2.4 Se toman $a=b=-2$. El factor integrante es $\rho(x,y)=x^{-2}y^{-2}$. Solución General es

$$\frac{x^3}{3}+\frac{1}{xy}+\frac{y^3}{3}=C$$

3.2.5 $m = n = -1$, FI: $= \dfrac{1}{xy}$, SG: $y + x + \ln y \ln x = C$

3.2.6 $\alpha = 9$, **SG:** $3x^2y^3 + x\cos y = C$

3.2.7 $N(y) = \dfrac{-1}{y^2}$ **SG:** $x^3 - 3xy = C$

3.2.8

3.2.9

1. Para la ecuación $(y^2 + 2xy)dx - x^2dy = 0$, el factor integrante es $\mu(x,y) = y^{-2}$ $(n = -2)$ y la solución general es $x + \dfrac{x^2}{y} = C$
2. Para la ecuación $(2x^3y^2 + 4x^2y + 2xy^2 + xy^4 + 2y)dx + 2(y^3 + x^2y + x)dy = 0$, el factor integrante es $\mu(x,y) = e^{x^2}$ y la solución general es
$$2e^{x^2}\left(\frac{y^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + xy\right) = C$$
3. Para la ecuación $(3xy + y^2)dx + (3xy + x^2)dy = 0$, se necesita que $a = b$ y y el factor integrante es $\mu(x,y) = a(y + x)$ y la solución general es
$$a\left(2x^2y^2 + x^3y + xy^3\right) = C$$
4. Para la ecuación $(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4)dx + ydy = 0$, se necesita que $a = b$ y el factor integrante es
$$\mu(x,y) = \frac{1}{b^2(x^2 + y^2)^2}$$
y la solución general es
$$\frac{-1}{2b^2(x^2 + y^2)} + \frac{x}{b^2} = C$$
5. Para la ecuación $(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0$, el factor integrante es $\mu(x,y) = x + y^2$ y la solución general es
$$x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = C$$
6. Para la ecuación $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$, el factor integrante es
$$\mu(x,y) = \frac{1}{(1 - x^2 + y^2)^2}$$
y la solución general es
$$\frac{x}{1 - x^2 + y^2} = C$$

3.2.10

3.2.11

3.2.12

3.2.13

La solución polinomial de la ecuación $y'+y^2=1+x^2$ es $\phi(x)=x$ el factor integrante sería $\mu(x,y)=\dfrac{e^{-x^2}}{(y-x)^2}$ y la solución general es $\dfrac{-e^{-x^2}}{y-x}-e^{-x}=C$

3.2.14

1. Para la ecuación $y(x^2y^2+2)+x(2-2x^2y^2)y'=0$ tenemos es factor integrante $\mu(x,y)=\dfrac{1}{3(xy)^3}$ siempre que $xy\neq 0$, y la solución general es

$$\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{3x^2y^2}-\frac{2}{3}\ln|y|=c$$

Si $xy=0$, es decir, si estamos en alguno de los ejes, la ecuación se reduce a $y+xy'=0$ cuya solución es $y=\dfrac{c}{x}$.

2. Para la ecuación $y(2xy+1)dx+x(1+2xy-x^3y^3)dy=0$ tenemos el factor integrante

$$\mu(x,y)=\frac{1}{(xy)^4}$$

siempre que $xy\neq 0$, y la solución general es

$$\frac{-1}{x^2y^2}-\frac{3}{x^3y^3}-\ln|y|=c$$

Si $xy=0$, es decir, si estamos en alguno de los ejes, la ecuación se reduce a $y+xy'=0$ cuya solución es $y=\dfrac{c}{x}$.

3.2.15 $g(x,y)=\dfrac{x}{y}\operatorname{sen}(xy)+\dfrac{\cos(xy)}{y^2}-\dfrac{1}{y^2}$; $\quad g(x,2011)=\dfrac{x}{2011}\operatorname{sen}(2011x)+\dfrac{\cos(2011x)}{(2011)^2}-\dfrac{1}{(2011)^2}$

3.2.16 Las funciones están dadas por $f(t)=\dfrac{t}{2}+ct^{-1}$. La solución General es $\dfrac{t^4}{4}+\dfrac{t^2}{2}y+Cy=D$

3.2.17

1. $\begin{cases} F(x) &= 2x+x^2\cot x \\ G(y) &= 1+y \end{cases}$
2. La solución General es $x^2y\operatorname{sen}(x)e^y=C$

3.2.18 $a=1$ **SG**: $t+e^{-t}\operatorname{sen}y=C$

Soluciones del Capítulo 5

4.1.1

4.1.2 **SP :** $e^y=4-\dfrac{24}{x^3}$

4.1.3

4.1.4

4.1.5 **SG :** $\frac{x}{y} = e^y + C$

4.1.6 **SG :** $\ln y = x(2x+C)$

4.2.1

a) SG: $\frac{1}{y} = C \cdot e^{x^2} + 1$

b) SG: $\frac{1}{y^3} = -\frac{9}{5x} + C \cdot x^{-6}$

c) SG: $y^{-1} = C \cdot e^{x^2} + \frac{1}{x}$

d) SG: $y^{-1} = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

e) SG: $y^2 = \frac{2}{5}x^3 + C \cdot x^{\frac{4}{3}}$

f) SP: $\frac{1}{y^4} = x^8(2x^2 - \frac{31}{16})$

g)

4.2.2

1. **SG:** $y^2 \ln^2(x) = x^2 + 2x\ln(x) - 2x + C$
2. **SG:** $x = \frac{4y}{C - y^4}$
3. **SG:** $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + C \cdot (1+x)}}$
4. **SG:** $\frac{x}{y} = -x + 1 + C \cdot e^{-x}$

4.2.3 Se debe considerar $x = x(y)$ para que quede una ecuación de Bernoulli cuya solución general es $x^2 = -y^2 + Ce^{-y}$ y la solución particular que satisface $y(1) = 0$ es $x^2 = -y^2 + e^{-y}$

4.2.4

1. El cambio de variable es $z = f(y)$ y la ecuación lineal es $z' + p(x)z = q(x)$.
2. En el caso de $y' + 1 = 4e^{-y}\operatorname{sen} x$ la ecuación después del cambio es $z' + z = 4\operatorname{sen} x$. La solución general es $e^y = 2\cos x + 2\operatorname{sen} x + ce^{-x}$.

4.2.5

1. Demostrativa.
2. La ecuación después del cambio es $v' + 2v\tan x + v^2 \operatorname{sen} x = 0$. La solución general es

$$v^{-1} = -\frac{\cos x}{3} + c\cos^{-2} x$$

3. La solución de la ecuación original es

$$(y - \sec x)^{-1} = -\frac{\cos x}{3} + c\cos^{-2} x$$

4.2.6

1. La ecuación después del cambio es $y' - \frac{2x}{1+x^2}y - \frac{4\arctan x}{\sqrt{x^2+1}}\sqrt{y} = 0.$
2. La solución general de la ecuación anterior es $\sqrt{y} = (\arctan^2 x)\sqrt{1+x^2} + c\sqrt{1+x^2}$
3. La solución de la ecuación original es $\sqrt{xu} = (\arctan^2 x)\sqrt{1+x^2} + c\sqrt{1+x^2}$

4.2.7 Al hacer el cambio $x = x(y)$, se obtiene la ecuación $x' = xy + x^2y^3$, cuya solución general viene dada por $x^{-1} = -(y^2-2) + C \cdot e^{\left(-\frac{y^2}{2}\right)}$

4.2.8 Tomamos $\ln y$ en lugar de $\ln x$ en la ecuación. Haciendo el cambio $x = x(y)$ se obtiene la ecuación $yx' = x^2 \ln y - x$. La solución general es $x^{-1} = -\ln y - 1 + Cy$

Soluciones del Capítulo 6

5.1.1 **Solución particular**: $-2e^{-y} = x - 3$

5.1.2 **Solución particular**: $\frac{1}{2}\ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right) = x+1$

5.1.3 **Solución particular**: $\left|\frac{y-2}{y+4}\right| = \frac{1}{2}e^{3x}$

5.1.4 **Solución general**: $y = x^2 + A\ln x + B$

5.1.5 **Solución general**: $y = -2\ln(1-Be^x) + x + C$

5.1.6 **Solución particular**: $\frac{2}{3}\ln\left|\frac{2y-3}{y}\right| = x + \ln 4$

5.1.7 **Solución particular**: $\operatorname{arc\,sen}\frac{y}{10} = 2x + \frac{\pi}{2}$

5.1.8 **Solución Particular**: $y = \left(\sqrt{\frac{2}{3}x}\right)^3 + 1$

5.2.1

5.2.2

5.2.3

a)

b)

5.2.4

5.2.5