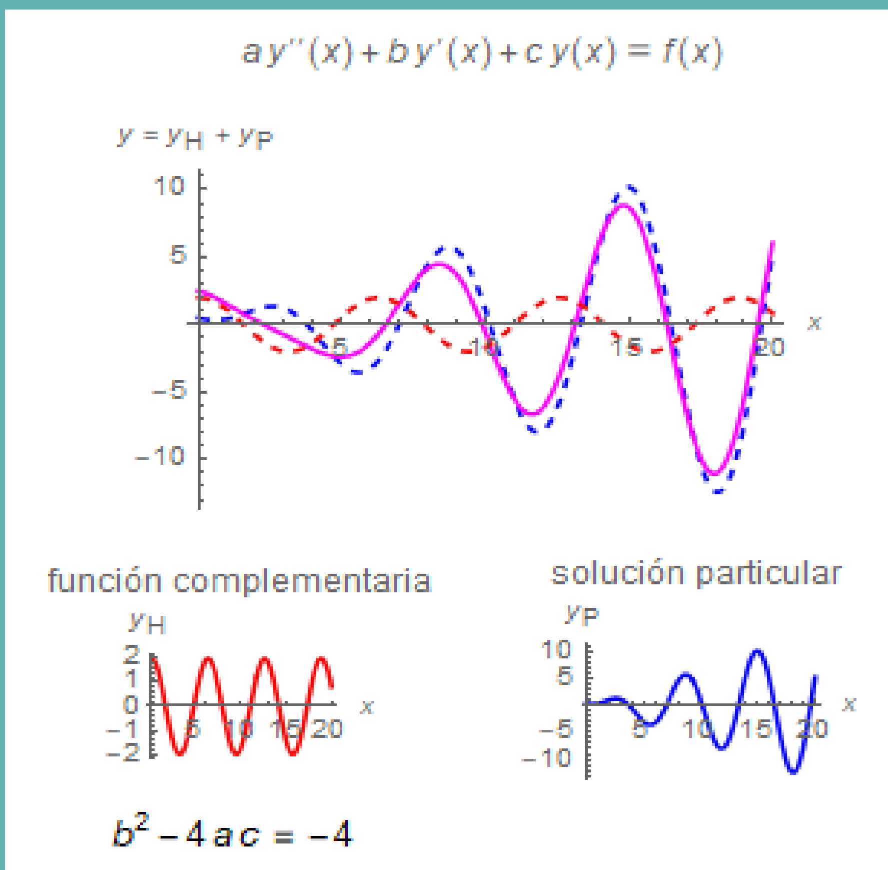
Ecuaciones Diferenciales ordinarias de orden superior

con apoyo interactivo y videos ilustrativos

M.Sc. Norberto Oviedo Ugalde



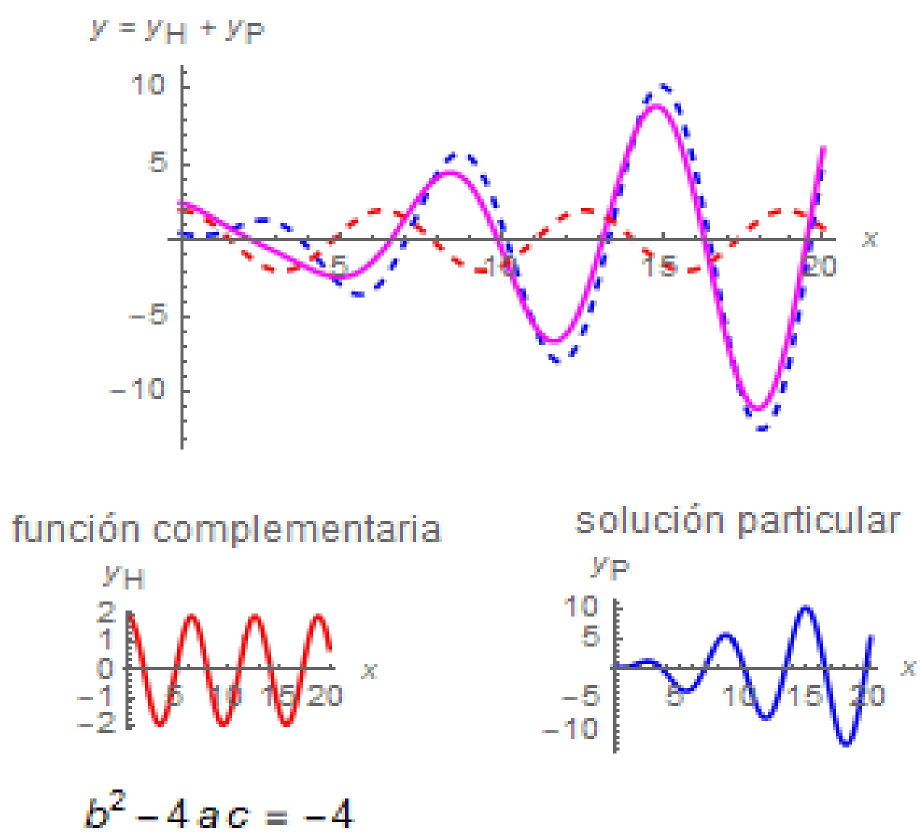
2022

Ecuaciones Diferenciales ordinarias de orden superior

con apoyo interactivo y videos ilustrativos

M.Sc. Norberto Oviedo Ugalde

$$a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = f(x)$$



2022

Revista digital Matemática Educación e Internet (https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/).
Correo Electrónico: noviedo@itcr.ac.cr
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Apdo. 159-7050, Cartago
Teléfono (506)25502015
Fax (506)25502493

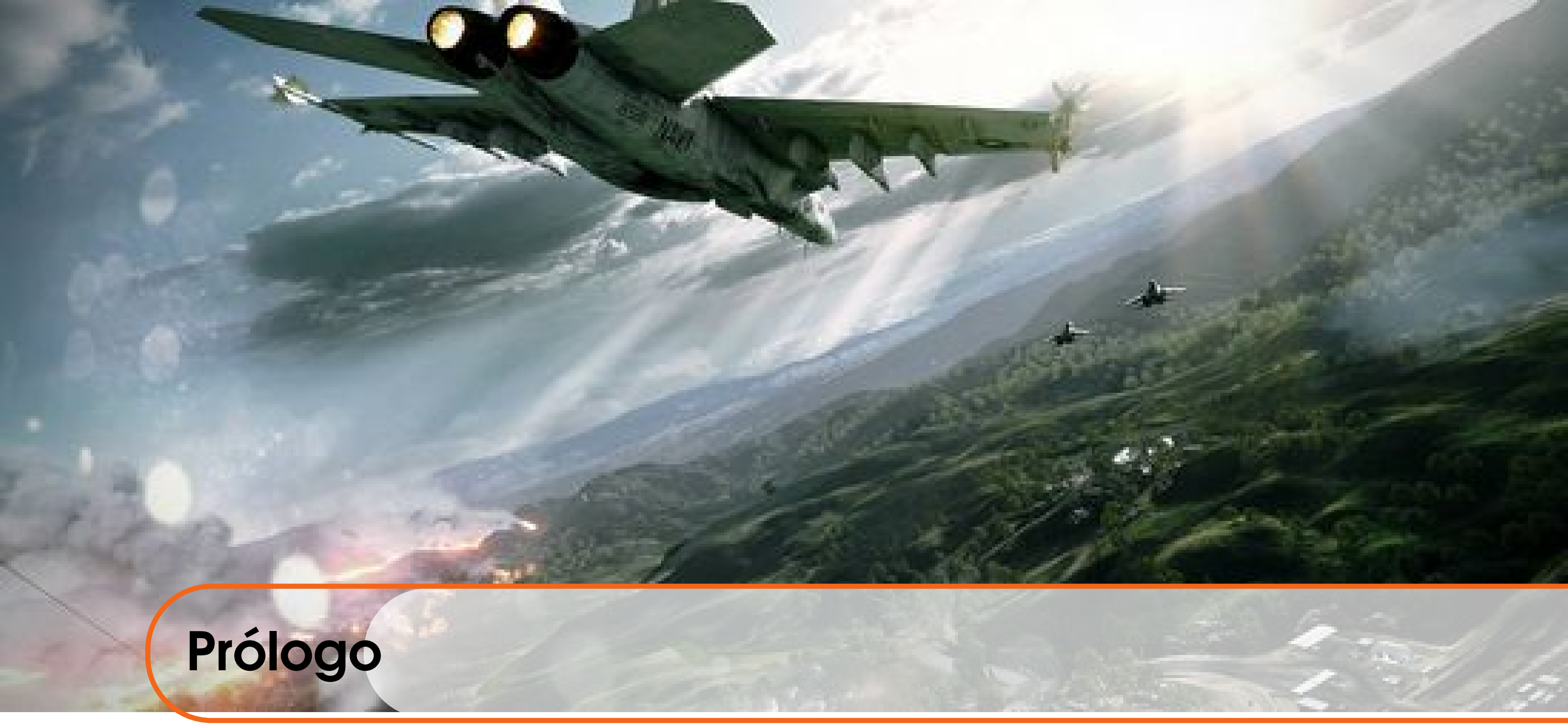
Oviedo Ugalde, Norberto Gerardo.
Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior con apoyo interactivo y videos ilustrativos. 1ra ed.
– Escuela de Matemática,Instituto Tecnológico de Costa Rica. 2022. 159 pp.
ISBN Obra Independiente: 978-9930-617-11-3
1. Preliminares teóricos sobre ecuaciones diferenciales lineales.
2. Independencia lineal y wronskianos de funciones.
3. Teorema de segunda solución en ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden.
4. Ecuación auxiliar e ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes homogéneas.
5.Solución de la ecuación homogénea según
raíces de la ecuación auxiliar.
6. Solución particular de la ecuación no homogénea.
7. Solución general de la ecuación no homogénea.
8. Método de los coeficientes indeterminados
para determinar una solución particular.
9. Métodos de variación de parámetros para
determinar una solución particular.
10. Ecuación diferencial ordinaria de Euler.
11. Método de operadores

Revista digital
Matemática, Educación e Internet.
https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/.

Oviedo Ugalde, Norberto
Contenido,
diseño editorial y edición LaTeX,
aplicaciones Wolfram CDF
y gráficos (Wolfram Mathematica 12.0, Inkscape).

Citar como:
Oviedo Ugalde, N. *Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior con apoyo interactivo y videos ilustrativos.* (2022) 1ra ed. [ebook] Cartago, Costa Rica. Revista digital, Matemática, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/. [Recuperado Abril, 2022].

Índice general



Prólogo

El presente libro comprende el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior mediante aspectos teóricos, ejemplos ilustrativos, ejercicios propuestos y asimismo incluye links hacia aplicaciones de carácter interactivo elaboradas en software Mathematica y guardadas bajo la versión gratuita Wolfram CDF player. Las “aplicaciones interactivas” son un archivo `.cdf` que se ejecuta con WOLFRAM CDF PLAYER y requieren haber instalado en la computadora esta aplicación WOLFRAM CDFPLAYER. Además de las aplicaciones en CDF player se incluye links directos que llevan a videos ilustrativos de ejercicios y ejemplos resueltos relacionados con los tópicos estudiados en cada sección. El objetivo principal del libro es servir como material teórico-práctico en el estudio de los distintos tópicos de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior (EDOLn), donde las aplicaciones en software y videos sean utilizadas como herramienta de apoyo para complementar dicho estudio y entendimiento de una forma más dinámica e interactiva.

Se divide en cinco capítulos que comprenden el estudio de: 1. Preliminares teóricos sobre ecuaciones diferenciales lineales, 2. Independencia lineal y wronskianos de funciones, 3. Teorema de segunda solución en ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, 4. Ecuación auxiliar y ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes , 5.Solución de la ecuación homogénea según raíces de la ecuación auxiliar, 6. Solución particular de la ecuación no homogénea, 7. Solución general de la ecuación no homogénea, 8. Método de los coeficientes indeterminados para determinar una solución particular, 9. Métodos de variación de parámetros para determinar una solución particular, 10. Ecuación diferencial ordinaria de Euler, 11. Método de operadores.

Se puede acceder desde la página principal de la revista digital de Matemática del Tecnológico de Costa Rica: `https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/`.

PROF. NORBERTO GERARDO OVIEDO UGALDE.
noviedo@itcr.ac.cr, noviedo2008@gmail.com
Escuela de Matemática
Revista digital Matemática, Educación e Internet
`https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/`
Instituto Tecnológico de Costa Rica. Cartago, Abril 2022.

1 — Fundamentos teóricos en ecuaciones diferenciales de orden superior

1.0.1 Objetivos Específicos

- Comprender los elementos básicos asociados al tópico de ecuaciones diferenciales de orden superior.
- Estudiar definición de ecuación diferencial lineal de énesimo orden, asi mismo problemas de valores iniciales, valores frontera.
- Estudiar conceptos de combinación lineal de funciones, wronskiano, teoremas asociados a la dependencia e independencia lineal.
- Estudiar concepto de operador lineal D^n, aniquilador o anulador y notación de ecuación diferencial en forma de operadores.
- Estudiar definición y teoremas asociados en ecuación diferencial lineal complementaria u homogénea y no homogénea.
- Comprender teorema de segunda solución y técnica de reducción de orden.

1.0.2 Contenidos

- Definición de ecuación diferencial lineal de énesimo orden.
- Problema de valor inicial y frontera en ecuación diferencial lineal de énesimo orden.
- Combinación lineal de funciones, el wronskiano y teoremas asociados en ecuación diferencial lineal de énesimo orden.
- Concepto de operador lineal, aniquilador y notación de ecuación diferencial lineal de énesimo orden en forma de operadores.
- Reducción de orden en ecuación diferencial lineal de énesimo orden y teorema de segunda solución.

1.1 Ecuaciones Diferenciales lineales de orden superior

1.1.1 Ecuación Diferencial Lineal de Enésimo Orden

Definición 1.1

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n ($n \in \mathbb{N}$) es **lineal** si puede escribirse de la forma :

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = F(x) \tag{1.1}$$

donde $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), F(x)$ son funciones reales continuas que dependen sólo de la variable independiente x y definidas en un intervalo común I, con $a_n \neq 0$ para toda $x \in I$. Una ecuación diferencial que no puede escribirse de la forma 1.1 es **No lineal**.

Dentro de las ecuaciones diferenciales lineales se distinguen:

- Ecuación diferencial lineal **homogénea** cuando el término independiente $F(x) = 0$.
- Ecuaciones diferenciales lineales con **coeficientes constantes**, cuando todos las funciones $a_i(x)$ $\forall i = 1, \ldots, n$ son funciones constantes.
- Ecuaciones diferenciales lineales con **coeficientes variables** si alguna función $a_i(x)$ no es una función constante, sino una dependiente solo de x.

Ejemplo 1.1

a) $y'' - 2y' + 3y = x^3 + senx$: ecuación diferencial lineal con coeficientes **constantes** no homogénea.

b) $2y' + x^2y' + 6y = 0$: ecuación diferencial lineal con coeficientes **variables** homogénea.

1.1.2 Problemas de valor inicial

Con frecuencia se pueden encontrar problemas en los que se busca una solución $y(x)$ de una ecuación diferencial de modo que $y(x)$ satisfaga condiciones adicionales prescritas, es decir, condiciones impuestas en la $y(x)$ desconocida o sus derivadas. Para ello, se expone la siguiente definición.

Definición 1.2 Problema de Valores Iniciales (PVI)

Si I es un intervalo que contiene a x_0, el problema de resolver

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = g(x) \text{ con } y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{1.2}$$

donde $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$ son constantes reales especificadas de manera arbitraria, se llama **problema de valores iniciales (PVI)** de n-ésimo orden. Los valores de $y(x)$ y sus primeras $n-1$ derivadas en un solo punto x_0: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ se llaman **condiciones iniciales.**

En el caso de una ecuación lineal de segundo orden, una solución del problema de valor inicial

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0)(x)y = g(x) \text{ sujeta a } y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1 \tag{1.3}$$

es una función que satisface la ecuación diferencial en I cuya gráfica pasa por (x_0, y_0) y tal que la pendiente de la curva en el punto es el valor de y_1, como se muestra en la figura 1.1.

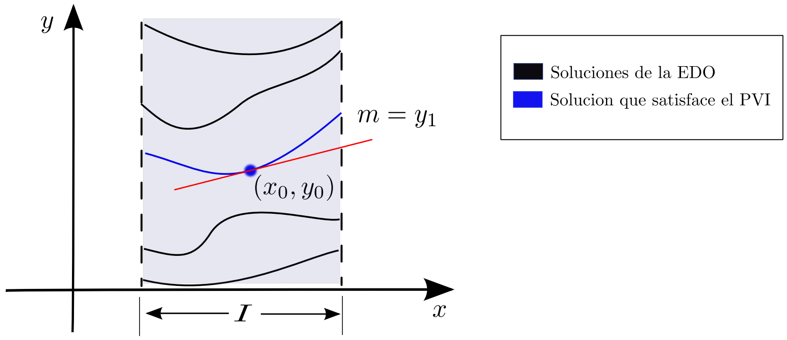


Figura 1.1: solución del PVI de segundo orden.
Fuente: elaboración propia con INKSCAPE 0.47.

Teorema 1.1 Existencia de solución única

Sean $a_n(x), a_{n-1}(x), ..., a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda x en I. Para cualquier $x = x_0 \in I$, existe entonces una solución $y(x)$ del problema de valor inicial dada en la definición 1.2 en el intervalo y tal solución es única[a].

[a] Note que en dicho teorema se requiere que $a_i(x),\ i = 0, 1, 2, \cdots .n$ sean continuas, además $a_n(x) \neq 0$ para **toda** $x \in I$ y en caso que $a_n(x) = 0$ para alguna x en I, entonces la solución del PVI puede no ser única, o incluso no existir.

Ejemplo 1.2

Verificar que la función $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ es solución del problema de valor inicial

$$y'' - 4y = 12x,\ \ y(0) = 4,\ \ y'(0) = 1$$

En efecto, observe que $a_2(x) = 1,\ a_1(x) = 0,\ a_0(x) = -4$ y $g(x) = 12x$, funciones continuas en $\mathbb{R}$, ademas $a_2(x) = 1 \neq 0$ en cualquier intervalo que contenga a $x = 0$. Luego se concluye que la función dada es la solución única.

Ejemplo 1.3

Verificar que la función $y = cx^2 + x + 3$ es solución del problema de valor inicial

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 6,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 1,$$

en el intervalo $]-\infty, \infty[$ para cualquier valor del parámetro c (infinitas soluciones).

En efecto, puesto que $y' = 2cx + 1$ y $y'' = 2c$, al sustituir en $x^2y'' - 2xy' + 2y = 6$, se verifica la igualdad para cualquier c en $\mathbb{R}$, por tanto $y = cx^2 + x + 3$ es solución de dicha ecuación. También note se satisface $y(0) = c(0)^2 + 0 + 3 = 3,$ y $y'(0) = 2c(0) + 1 = 1$. En software Mathematica se puede realizar una tabla de la familia de soluciones y grafiquelas .[a] y para ello ingrese lo siguiente:

```
 dx=Table[ C x^2 + x + 3 /. L -> i,{i, -2, 2 ,0.5}]
fx=Plot[Evaluate[dx], {x, -10 , 10}, PlotRange -> 10]
```

Luego de esta forma se genera lo mostrado en la figura 1.2.

[a]Note que apesar de ser una EDO lineal con $a_2(x) = x^2$, $a_1(x) = -2x$, $a_0(x) = 2$ y g(x)=6, funciones continuas en cualquier parte, el problema se presenta cuando $a_2(x) = x^2$ sea cero, es decir, en $x = 0$ y que las condiciones iniciales se impongan en $x = 0$, (punto donde la Ed no es continua) de ahí no contradice el teorema de existencia y unicidad para dicha x.

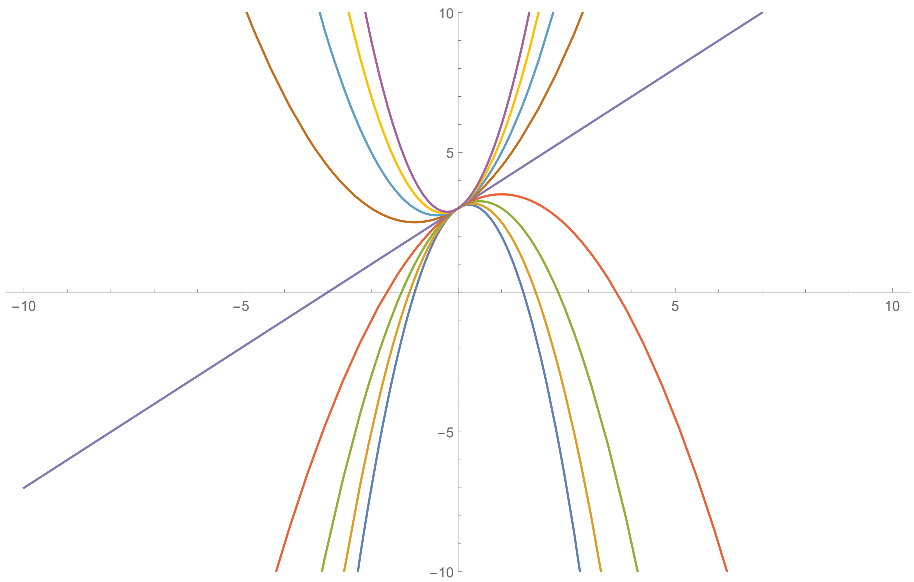


Figura 1.2: PVI: $x^2y'' - 2xy' + 2y = 6,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 1,$
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 10.3

1.1.3 Problema de valores en la frontera

Otro tipo de problema consiste en resolver una EDO de orden dos o mayor en donde la variable dependiente y junto con sus derivadas se específican en **diferentes puntos**.

Definición 1.3

El problema de resolver

$$a_2(x)y'' + a_1y' + a_0y = g(x) \text{ sujeta a } y(a) = y_0,\ y'(b) = y_1 \tag{1.4}$$

se llama **problema de valores en la frontera (PVF)** y los valores especificados $y(a) = y_0$ y $y(b) = y_1$ **condiciones en la frontera**.[a]

[a]Importante hacer notar que en un PVF puede tener varias soluciones, única o no existir la solución.

1.1.4 Combinación Lineal de funciones

Definición 1.4 (Combinación Lineal de funciones,conjunto generado y conjunto generador)

Sean $C_1, C_2, \cdots, C_n$ constantes reales y $f_1, f_2, \cdots, f_n$, funciones con derivada continua. La función $f = C_1 \cdot f_1 + C_2 \cdot f_2 + \cdots + C_n \cdot f_n$ se llama combinación lineal de $f_1, f_2, \cdots, f_n$. El conjunto de combinaciones lineales de las funciones $f_1, f_2, \cdots, f_n$ se llama Conjunto generado por $f_1, f_2, \cdots, f_n$ y se denota con $\prec f_1, f_2, \cdots, f_n \succ$. El conjunto $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ se llama conjunto generador de $\prec f_1, f_2, \cdots, f_n \succ$.

Ejemplo 1.4

El conjunto de funciones polinomiales $\{x^2, x, 1\}$ genera las funciones $ax^2 + bx + c$ de grado menor o igual que dos, donde a, b, c son constantes cualesquiera.

1.1.5 Dependencia e Independencia Lineal

Definición 1.5 (Dependencia Lineal)

Un conjunto de funciones $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ es linealmente dependiente en un intervalo I si existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ **no todas cero**, tales que, $\forall\ x \in I$, se cumple que:

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n = 0 \tag{1.5}$$

Definición 1.6 (Independencia lineal)

Un conjunto de funciones $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ es linealmente independientes en un intervalo I si $\forall\ x \in I$, la ecuación

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n = 0 \tag{1.6}$$

se satisface únicamente para $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$

Ejemplo 1.5

Determine si las funciones $\cos(2x)$ y $1 - 2sen^2 x$ son linealmente dependientes**(L.D)** o linealmente independientes**(L.I)** en $\mathbb{R}$.

Solución

Suponga que son **L.D** en $\mathbb{R}$, luego de acuerdo con la definición, existen constantes reales α y β no ambas cero, de tal manera que $\forall x \in \mathbb{R}$, se satisface la ecuación

$$\alpha \cos(2x) + \beta \left(1 - 2sen^2 x\right) = 0 \tag{1.7}$$

Como $\cos(2x) = \cos^2 x - sen^2 x = 1 - sen^2 x - sen^2 x = 1 - 2sen^2 x$, en la ecuación se tiene

$$\alpha \cos(2x) + \beta \cos(2x) = 0 \tag{1.8}$$

La ecuación anterior se satisface si $\alpha = -\beta$, así por ejemplo si $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = -1$. Por lo tanto, la ecuación tiene infinitas soluciones, en particular $\alpha = \beta = 0$. Esto quiere decir, que las funciones dadas son linealmente dependientes.

Note que en la figura 1.3 se muestran las gráficas de las funciones $\cos(2x)$ y $1-2sen^2x$, las cuales gráficamente se observa son funciones equivalentes. Los comandos asociados para obtener la grafica 1.3 en software Mathematica 10.3 son los siguientes:

```
Plot[{Cos[2 x], 1 - 2 Sin[x]^2}, {x, -2 Pi, 2Pi}, PlotStyle -> {Green, Dashed},
PlotLegends -> "Expressions"]
```

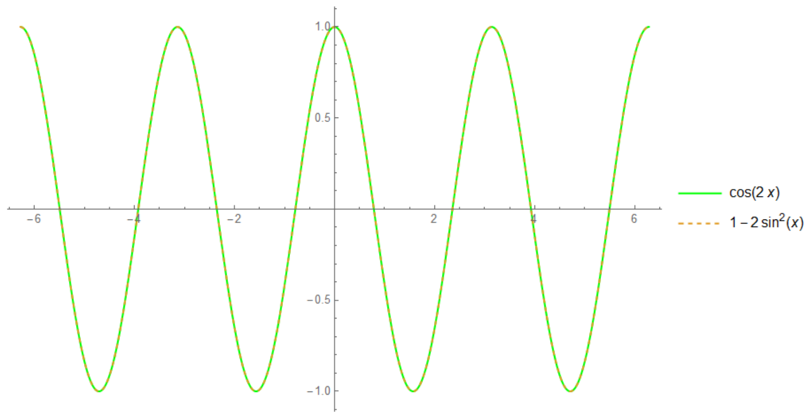


Figura 1.3: Gráfica de funciones con criterios: $\cos(2x)$ y $1-2sen^2x$
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 10.3

Ejemplo 1.6

Muestre que las funciones x y x^2 son linealmente independientes **(L.I)**.

Solución

Para que dichas funciones sean L.I debe cumplirse según la definición que los únicos valores que satisfacen la ecuación $\alpha x+\beta x^2=0$ son $\alpha=\beta=0$. Derivando dicha ecuación se tiene $\alpha+2\beta x=0$ $(*)$ y derivando nuevamente $2\beta=0$, así, sustituyendo en $(*)$ tenemos que $\alpha=0$. Por lo tanto, las funciones son *li*. En la figura 1.4 se muestra la gráfica de dichas funciones al ingresar en Mathematica

```
Plot[{x^2,x},{x,-5,5},PlotStyle->{Blue,Red},PlotRange->5,PlotLegends->"Expressions"]
```

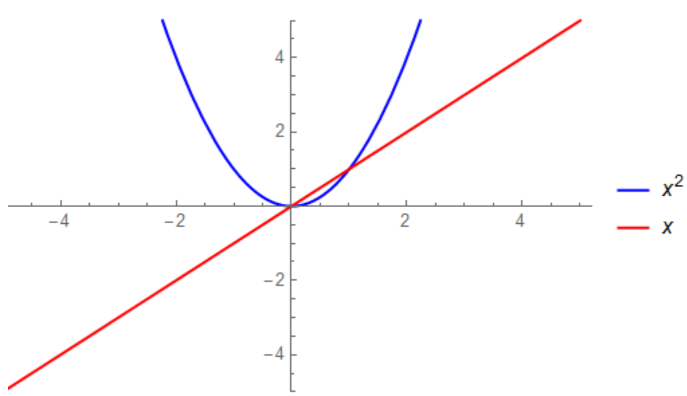


Figura 1.4: Gráfica de funciones con criterios: x^2 y x
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 10.3

Ejemplo 1.7

Mostrar que $e^{m_1 x}$ y $e^{m_2 x}$ son **L.I** (linealmente independientes) si $m_1 \neq m_2$.

Solución

Debe probarse que los únicos valores que satisfacen la ecuación $\alpha e^{m_1 x} + \beta e^{m_2 x} = 0$ son $\alpha = \beta = 0$
Haciendo $x = 0$ se tiene $\alpha + \beta = 0$, luego derivando $\alpha m_1 e^{m_1 x} + \beta m_2\, e^{m_2 x} = 0$ y haciendo $x = 0$ se obtiene $\alpha m_1 + m_2\, \beta = 0$. En el sistema se tiene

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha m_1 + m_2 \beta = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Multiplicando la primera ecuación por m_2 y restándolas tenemos $m_2 \alpha - \alpha m_1 = 0 \Rightarrow \alpha\,(m_2 - m_1) = 0$ y como $m_2 \neq m_1$ tenemos que $\alpha = 0$ y por tanto $\beta = 0$. Así, las funciones son **L.I**.

Ejemplo 1.8

La función $x^2 - 5x + 6$ pertenece al conjunto generado $\prec 1, x, x^2 \succ$. Si agrega la función $x^2 - 5x + 6$ al conjunto linealmente independiente. $\{1, x, x^2\}$ se obtiene $\{1, x, x^2, x^2 - 5x + 6\}$. Determine si es **L.D** o **L.I**.

Sean C_1, C_2, C_3, C_4 tales que $C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot (x^2 - 5x + 6) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Seleccionando entonces cualesquiera cuatro valores para x , por ejemplo:

$x = 0 \Rightarrow C_1 + 6C_4 = 0$
$x = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 + C_3 + 2C_4 = 0$
$x = 2 \Rightarrow C_1 + 2C_2 + 4C_3 = 0$
$x = 3 \Rightarrow C_1 + 3C_2 = 0$

Luego, resolviendo el sistema asociado se concluye que este tiene infinidad de soluciones

$$C_1 = -6C_4;\ C_2 = 5C_4;\ C_3 = -C_4;\ C_4 \in \mathbb{R}$$

Así $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ no es la única solución, por tanto $\{1, x, x^2, x^2 - 5x + 6\}$ es **L.D**.

Ejemplo 1.9

Las funciones $y_1(x) = x$ y $y_2(x) = |x|$ son linealmente independientes en $I =]-\infty, \infty[$, sin embargo, dichas funciones y_1 y y_2 son linealmente dependientes en $I =]0, \infty[$ dado que

$$c_1 x + c_2 |x| = c_1 x + c_2 x = (c_1 + c_2)x = 0$$

se satisface para cualquier valor diferente de cero de c_1 y c_2 tal que $c_1 = -c_2$. De ahí la importancia del intervalo en el cual las funciones estén definidas. En la gráfica 1.5 se muestra las funciones donde según intervalo son linealmente independientes y linealmente dependientes.

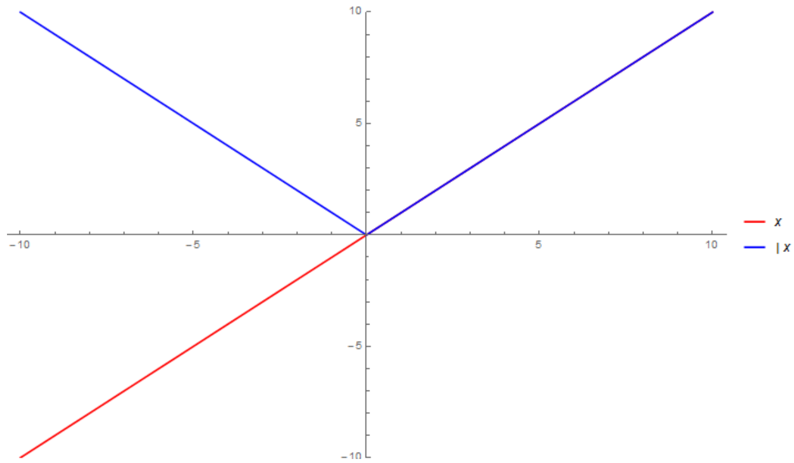


Figura 1.5: Gráfica de funciones con criterios: x y $|x|$
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 10.3

Observación 1.1 Si un conjunto de funciones es linealmente dependiente entonces una de estas funciones se puede expresar en términos de las otras, es decir, dicho conjunto de funciones se puede escribir como combinación lineal del resto.

1.1.6 El Wronskiano

En la mayoría de casos el cálculo de las constantes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ puede resultar bastante tedioso, por lo que el wronskiano que nos facilitará la toma de decisiones sobre la dependencia en conjuntos de funciones.

Definición 1.7 (Wronskiano de Segundo orden (W_{2x2}))
Sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ dos funciones definidas en I tales que $y_1'(x)$ y $y_2'(x)$ existen en I. El wronskiano de $y_1 \wedge y_2$, denotado $W(y_1, y_2)$ es una función definida por

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \tag{1.10}$$

Ejemplo 1.10

Considere las funciones $y_1 = \cos x$ y $y_2 = senx$ ambas definidas en $\mathbb{R}$, entonces

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos x & senx \\ -senx & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + sen^2 x = 1 \tag{1.11}$$

Definición 1.8 (Wronskiano de enésimo orden (W_{nxn}))
Sean $y_1(x)$, $y_2(x), ..., y_n(x)$ funciones definidas en I tales que cada una de ellas tiene al menos $(n-1)$ derivadas en I. El wronskiano de estas funciones, denotado $W(y_1, y_2, ..., y_n)$ está definido por

$$W\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ & \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{1.12}$$

Observación 1.2 El determinante de una matriz A_{nxn} $(n > 2)$ es

$$|A| = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left|M_{ij}\right| & \text{para cualquier } i \text{ fijo, o bien} \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left|M_{ij}\right| & \text{para cualquier } j \text{ fijo} \end{cases} \tag{1.13}$$

donde $\left|M_{ij}\right|$, llamado el menor de a_{ij}, es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila i y la columna j de A.

Ejemplo 1.11

Considere las funciones $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$ y $y_3 = 1$ todas definidas en $\mathbb{R}$ entonces

$$W\left(e^x, e^{-x}, 1\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & 1 \\ e^x & -e^{-x} & 0 \\ e^x & e^{-x} & 0 \end{vmatrix} = 2 \tag{1.14}$$

En la figura 1.6 se pueden visualizar las gráficas de dichas funciones y su wronskiano.

Figura 1.6: Wronskiano y gráfica de funciones con criterios: e^x ; e^{-x} y 1
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 10.3

Teorema 1.2 : Criterio para funciones linealmente independientes y dependientes

Sean $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ funciones definidas en I y que son $n-1$ veces derivables.

a. Si existe un punto $x_0 \in I$ y su wronskiano $W(y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x))(x_0) \neq 0$, entonces las funciones son linealmente independientes.

b. Si las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes entonces, $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$, **para toda** $x \in I$.[a]

[a] Recuerde que un conjunto de funciones son LD si alguna de estas es combinación lineal o múltiplo de otra.

Prueba a.

Se procede por contradicción, es decir, suponga que

i. $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$ para algún x_0 fijo en el intervalo I.

ii. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son funciones linealmente dependientes en I, es decir, existen constantes $c_1, c_2, \cdots, c_n$ no todas nulas tales que

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0 \ \ \forall x \in I. \qquad (1)$$

iii. Derivando $n-1$ veces la ecuación dada en (1) se tiene

$$\begin{cases} c_1 y_1' + c_2 y_2' + \cdots + c_n y_n' & = & 0 \\ c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + \cdots + c_n y_n'' & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n y_n^{(n-1)} & = & 0 \end{cases}$$

iv. Note el sistema formado por (1) y lo obtenido en (iii) para cada $x_0 \in I$ tiene solución diferente a la trivial ($c_i = 0$) y por lo cual el determinate de la matriz asociada cumple

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ & \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0, \ \ \forall x \in I \qquad (1.15)$$

pero dicho determinante es el $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, obteniendose de esta forma una contradicción dado que según (i.) se tiene que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$ para algún x_0 fijo en el intervalo I.

De esta forma el supuesto dado en (ii.) es falso y por tanto queda demostrado que si existe un punto $x_0 \in I$ y su wronskiano $W(y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x))(x_0) \neq 0$, entonces las funciones son linealmente independientes.

Prueba b.

Para demostrar que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$, **para toda** $x \in I$, a partir de la hipótesis las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes en I, se procede de forma análoga según lo dado en (ii.), (iii.) y (iv.) en donde se concluye lo que hay que demostrar.

Ejemplo 1.12

Las siguientes funciones x, x^2, x^3 son linealmente independientes (**L.I**). Dado que

$$W\left(x, x^2.x^3\right) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3 \neq 0, \ \forall x \neq 0. \tag{1.16}$$

En la figura 1.7 se pueden visualizar las gráficas de dichas funciones y su wronskiano.

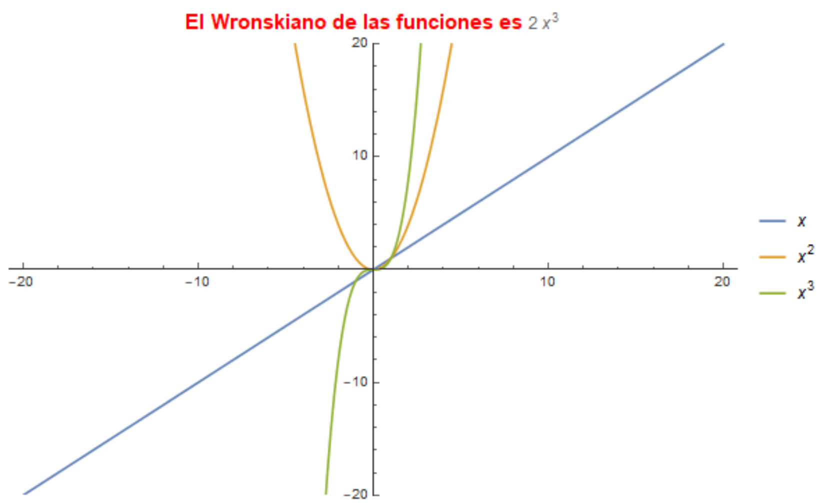


Figura 1.7: Wronskiano y gráfica de funciones con criterios: x y x^2 y x^3
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 10.3

Ejemplo 1.13

Note que $\{\sqrt{x}+5, \sqrt{x}+5x, x-1, x^2\}$ representa un conjunto de funciones linealmente dependientes **(LD)** en $I =]0, \infty[$, pues $\sqrt{x}+5x = 1 \cdot \sqrt{x} + 5 \cdot (x-1) + 0 \cdot x^2$ y además se puede probar al determinar el Wronskiano de dichas funciones, el cual es 0 para toda $x \in I$.

Observación 1.3 Si $W = 0$ para cualquier $x \in I$, esto no significa necesariamente que las funciones son LD. Por ejemplo escoja $y_1(x) = x^2$ y $y_2(x) = x|x|$, dichas funciones son LI en $I =]-\infty, \infty[$ (se puede visualizar al trazar su gráfica como se muestra en la figura 1.8 que una no es múltiplo de la otra), pero el $W(y_1, y_2) = 0$ **para todo** número real.

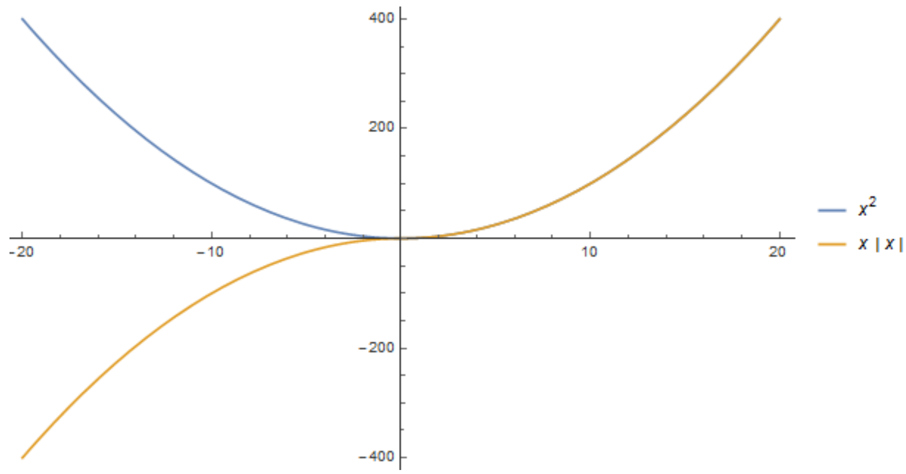


Figura 1.8: Gráfica de funciones con criterios: x^2 y $x \mid x \mid$
Fuente: elaboración propia con MATHEMATICA 10.3

Ejercicios 1.1 **[Ejercicios de retroalimentación]**

1.1.1 Determine el wronskiano de las funciones dadas y posteriormente ingrese a página interactiva **Wronskiano de funciones** para comprobar dichos resultados.

a. $.y_1(x) = x, \; y_2(x) = x^2$
b. $y_1(x) = e^{2x}, \; y_2(x) = 3e^{2x}$
c. $y_1(x) = e^{2x}, \; y_2(x) = 3e^{4x}$
d. $y_1(x) = e^{x}, \; y_2(x) = xe^{x}$
e. $y_1(x) = e^{3x}\cos(2x), \; y_2(x) = e^{3x}\sin(2x)$
f. $y_1(x) = \cos(5x), \; y_2(x) = \sin(5x)$
g. $y_1(x) = 7x^3, \; y_2(x) = 2x^2$
h. $y_1(x) = x^2e^{3x}, \; y_2(x) = \frac{e^{3x}}{x}$
i. $y_1(x) = x, \; y_2(x) = x^2, \; y_3(x) = x^3$
j. $y_1(x) = e^{2x}, \; y_2(x) = 3e^{2x}, \; y_3(x) = 7e^{2x}$
k. $y_1(x) = x, \; y_2(x) = e^{2x}, \; y_3(x) = e^{5x}$
l. $y_1(x) = e^{5x}, \; y_2(x) = xe^{5x}, \; y_3(x) = x^2e^{5x}$
m. $y_1(x) = 2, \; y_2(x) = \sin^2(x), \; y_3(x) = \cos^2(x)$
n. $y_1(x) = e^{x}, \; y_2(x) = 3e^{2x}, \; y_3(x) = 2e^{x} + 7e^{2x}$

1.1.2 Pruebe que si $f(x)$ es una función no idénticamente cero y continua en cierto intervalo I, entonces $f(x)$ y $xf(x)$ son funciones linealmente independientes.

1.1.3 Muestre que $W(e^{ax}, e^{bx}, e^{cx}) = e^{(a+b+c)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$

1.1.7 El operador Lineal D^n

Definición 1.9 (Operador)

Sea n un número entero positivo; los símbolos $D, D^2, \ldots, D^n$ se llaman **operadores** debido a que ellos definen la operación de tomar la primera, segunda, ..., enésima derivada de una función determinada, es decir, convierte una función derivable en otra función, así por ejemplo

$$D(x^2+1)=2x,\ D^2(e^{3x})=\frac{e^{3x}}{9}$$

De acuerdo a lo anterior se tienen las siguientes equivalencias:

$$Dy=\frac{dy}{dx}=y',\quad D^2y=\frac{d^2y}{dx^2}=y'',\ \ldots,\quad D^ny=\frac{d^ny}{dx^n}=y^{(n)}$$

Definición 1.10 (Operador lineal)

El operador D^n, n entero positivo, se denomina **operador lineal** si cumple las dos propiedades siguientes, para cualesquiera $f(x)$ y $g(x)$ funciones diferenciales y k constante:

- $D^n(f(x)+g(x))=D^nf(x)+D^ng(x)$
- $D^n(kf(x))=kD^nf(x)$

Ejemplo 1.14

Para la función $y=e^{-x}-3x^2$, evaluar $D^3y-D^2y+2Dy+y$.

Solución

$Dy=D(e^{-x}-3x^2)=D(e^{-x})-3D(x^2)=-e^{-x}-6x\Rightarrow$
$D^2(e^{-x}-3x^2)=D(-e^{-x}-6x)=e^{-x}-6\Rightarrow$
$D^3(e^{-x}-6)=D(e^{-x}-6)=-e^{-x}$

Sustituyendo en $D^3y-D^2y+2Dy+y$ se tiene

$$(D^3-D^2+2D+1)y=-3e^{-x}+6-12x-3x^2$$

.

Ejemplo 1.15

Para la función $y=senx-4x^3$, evaluar $D^2y-4Dy+y \quad (*)$

Solución

$Dy=D\left(senx-4x^3\right)=D(senx)-4D\left(x^3\right)=\cos x-12x^2\Rightarrow$

$D^2y = D\left(\cos x - 12x^2\right) = D\left(\cos x\right) - 12D\left(x^2\right) = -senx - 24x$

Sustituyendo en $(*)$ tenemos

$$\left(D^2 - 4D + 1\right)y = -senx - 24x - 4\left(\cos x - 12x^2\right) + senx - 4x^3 = -4x^3 + 48x^2 - 24x - 4\cos x$$

Ejemplo 1.16

Determine la ecuación diferencial correspondiente a $(D-\alpha)^2 y = 3$.

Solución

Dado que $(D-\alpha)^2 y = \left(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2\right)y = D^2y - 2\alpha Dy + \alpha^2 y = y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y$.

Por lo tanto la ecuación diferencial asociada es

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 3$$

Ejercicio

Verifique que $(D^2 + 5Dy + 6)y$ cumple que $(D+2)(D+3)y = (D+3)(D+2)y$

Observación 1.4 En los operadores diferenciales de coeficientes constantes, el orden de los factores no altera el producto,es decir, cumple propiedad de conmutatividad mientras en un OD de coeficientes variables no lo cumple, por ejemplo se puede probar que $(xD+1)(D+2) \neq (D+2)(xD+1)$.

1.1.8 Aniquilador o anulador

Se dice que el operador $\phi(D)$ con coeficientes constantes aniquila o es un anulador de la función $F(x)$ si y solo si $\phi(D)F(x) = 0$.

Ejemplo 1.17

a. D es anulador de toda función constante, pues $D(a) = 0$; $\forall a \in \mathbb{R}$.

b. D^2 es anulador de $ax+b$ donde $a,b \in \mathbb{R}$ en particular note que $D^2(2x+3) = 0$.

c. $D-4$ es anulador de e^{4x} porque $(D-4)e^{4x} = D(e^{4x}) - 4e^{4x} = 0$.

d. $(D+3)^2$ es anulador de $7xe^{-3x}$, pues $(D+3)^2(7xe^{-3x}) = 0$ (verificarlo).

e. $(D^2-2)^3$ es anulador de $x^2\cos\sqrt{2}x$, pues $(D^2-2)^3(x^2\cos(\sqrt{2}x))=0$.

f. D^2+b^2 es anulador de $\operatorname{sen}(bx)$ y de $\cos(bx)$ dado que se puede verificar

$$(D^2+b^2)\operatorname{sen}(bx)=0=(D^2+b^2)\cos(bx)$$

A continuación se muestra un resumen de algunos anuladores, donde a,β son constantes y $n\in\mathbb{N}$. La columna de la izquierda muestra el anulador de las funciones en la columna derecha y también de sus **combinaciones lineales**:

Anulador	**Funciones que anula** .
D^n	$1,x,x^2,\cdots x^{n-1}$
$D-a$	e^{ax}
$(D-a)^n$	$e^{ax},xe^{ax},x^2e^{ax}\cdots x^{n-1}e^{ax}$
$D^2+\beta^2$	$\cos(\beta x),\ \operatorname{sen}(\beta x)$
$(D^2+\beta^2)^n$	$\cos(\beta x),x\cos(\beta x),x^2\cos(\beta x)\cdots x^{n-1}\cos(\beta x)$ $\operatorname{sen}(\beta x),x\operatorname{sen}(\beta x),x^2\operatorname{sen}(\beta x)\cdots x^{n-1}\operatorname{sen}(\beta x)$
$((D-a)^2+\beta^2)^n$	$e^{ax}\cos(\beta x),xe^{ax}\cos(\beta x),x^2e^{ax}\cos(\beta x)\cdots x^{n-1}e^{ax}\cos(\beta x)$ $\operatorname{sen}(\beta x),xe^{ax}\operatorname{sen}(\beta x),x^2e^{ax}\operatorname{sen}(\beta x)\cdots x^{n-1}e^{ax}\operatorname{sen}(\beta x)$

Ejemplo 1.18

El anulador para la función $F(x)=5e^{3x}-6\operatorname{sen}(4x)$ es $(D-3)(D^2+16)$.

En efecto, al considerar los anuladores de cada una de las partes de la función y luego se toma el producto de ellos, se tiene que $D-3$ anula a e^{3x} pues $(D-3)e^{3x}=0$ y por otro lado D^2+16 anula a $\operatorname{sen}(4x)$ ya que $(D^2+16)(e^{3x})=0$ así entonces se tiene que

$$(D-3)(D^2+16)$$

es anulador de la función $F(x)=5e^{3x}-6\operatorname{sen}(4x)$.

Ejemplo 1.19

El anulador para la función $F(x)=x^3e^{2x}\operatorname{sen}(5x)+e^x(x+1)$ es $((D-2)+25)^4(D-1)^2$.

En efecto, pues al considerar los anuladores de cada una de las partes de la función, se tiene que $((D-2)+25)^4$ anula a $x^3e^{2x}\operatorname{sen}(5x)$ y por otro lado $(D-1)^2$ anula a $e^x(x+1)$.

Ejercicios 1.2 [**Ejercicios de retroalimentación**]

1.1.4 Determine el operador anulador de las siguientes funciones

a) $f(x) = 13x + 9x^2 - \operatorname{sen}(4x)$
b) $f(x) = (2 - e^x)^2$
c) $h(x) = 3 + e^x \cos(2x)$
d) $n(x) = e^x + 2xe^x - x^3 e^{-x}$
e) $m(x) = x^2 e^{2x} - \operatorname{sen} x + 10\cos(5x)$
f) $z(x) = xe^{2x}\cos(3x) + e^x - 2xe^x$
g) $r(x) = 2x^2 - 1 + 2x\operatorname{sen} x - 3\cos x$

1.1.5 Demostrar que si $f \in C^n(I)$ y $\phi(D)$ es $a \in \mathbb{R}$ o con a en los complejos entonces

$$\phi(D)(e^{ax} f(x)) = e^{ax}\phi(D+a)(f(x))$$

Use dicho resultado para comprobar

a) $(D+2)(D-2)^3(x^2e^{2x}) = 0$
b) $(D-3)^n(e^{3x}x^n) = n!e^{3x}$

1.1.9 Ecuaciones Lineales y la Notación de Operadores

La ecuación diferencial lineal de orden n : $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x)$ [1] se puede escribir en notación de operadores como

$$\left(a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right) y = F(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Si $\phi(D) = a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$, entonces la ecuación diferencial **(1)** puede escribirse de la siguiente forma

$$\phi(D)\, y = F(x) \qquad \textbf{(2)}$$

Observación 1.5 Otra notación referente a **(1)** es el operador diferencial

$$L = a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0,$$

escribiéndose la ecuación diferencial **(1)** como sigue

$$L(y) = F(x) \qquad \textbf{(3)}$$

[1] Recuerde que $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), F(x)$ son funciones reales continuas que dependen sólo de la variable independiente x y definidas en un intervalo común I, con $a_n \neq 0$ para toda $x \in I$

Ejemplo 1.20

La ecuación $3y^{(4)} - 5y''' + y = \operatorname{sen} x$ se expresa en la notación de operadores como

$$(3D^4 - 5D^3 + 1)y = \operatorname{sen} x;$$

además la forma abreviada de estas ecuaciones es de la forma $\phi(D)y = F(x)$ donde

$$\phi(D) = 3D^4 - 5D^3 + 1 \quad , \; F(x) = \operatorname{sen} x.$$

1.2 Ecuación diferencial lineal complementaria u Homogénea $\phi(D)y = 0$

Definición 1.11

Dada una ecuación diferencial lineal de orden n de la forma $\phi(D)y = F(x)$, con $F(x) \neq 0$ entonces su respectiva ecuación complementaria es $\phi(D)y = 0$. En particular, si $F(x) = 0$, la ecuación complementaria de $\phi(D)y = 0$ es ella misma.

Ejemplo 1.21

1. La ecuación complementaria u homogénea de $x^2y'' + xy' - 2y = \ln x$ esta dada por

$$x^2y'' + xy' - 2y = 0$$

2. La ecuación complementaria u homogénea de $3y''' - 2xy' = 0$ esta dada por ella misma.

Teorema 1.3 Principio de superposición ecuaciones $\phi(D)y = 0$

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones de la ecuación diferencial $\phi(D)y = 0$ de orden n, para x en el intervalo I, la combinación lineal

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

con $c_i,\ i = 1, 2, 3, \cdots, n$ constantes arbitrarias, también es una solución para $x \in I$.

Prueba

i. Sean $y_1,\ y_2, \ldots, y_n$ soluciones de la ecuación diferencial de orden n $\phi(D)y = 0$ de esta forma $\phi(D)y_1 = 0, \quad \phi(D)y_2 = 0 \cdots, \phi(D)y_n = 0$ y se debe probar

$$\phi(D)(c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n) = 0$$

con $c_i,\ i = 1, 2, 3, \cdots, n$ constantes arbitrarias.

iii. Se define $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ con $c_i,\ i = 1, 2, 3, \cdots, n$ constantes arbitrarias, luego por lo dado en (i) y además la propiedad de linealidad del operador se tiene

$$\begin{aligned}\phi(D)(c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n) &= c_1\phi(D)y_1+c_2\phi(D)y_2+\cdots+c_n\phi(D)y_n \\ . \qquad &= c_1\cdot 0+c_2\cdot 0+\cdots+c_n\cdot 0=0\end{aligned}$$

demostrándose de esta forma $y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$ es solución de la ecuación diferencial $\phi(D)y_n=0$.

Corolario

A. Un múltiplo constante $y=c_1y_1(x)$ con $y_1(x)$ una solución de la ecuación diferencial $\phi(D)y_n=0$ también es solución de dicha ecuación diferencial.

B. Toda ecuación diferencial lineal homogenéa siempre tiene la solución trivial $y(x)=0$..

Ejemplo 1.22

Considere la ecuación diferencial lineal homogenéa $y''(x)-5y(x)=0$, la cual puede comprobarse que tiene a $y_1(x)=e^{\sqrt{3}x}$ y $y_2(x)=e^{-\sqrt{3}x}$ como soluciones de dicha ecuación diferencial. Luego es fácil probar que la función $y=c_1\cdot e^{\sqrt{3}x}+c_2\cdot e^{-\sqrt{3}x}$ con c_1 y c_2 constantes arbitarias también es solución de la ecuación diferencial $y''(x)-5y(x)=0$.

1.2.1 Soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea y el wronskiano

Consideremos la ecuación diferencial lineal de orden n, $\phi\,(D)\,y=F\,(x)$ y su respectiva ecuación complementaria u homogénea $\phi\,(D)\,y=0$ donde $\phi\,(D)=a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\ldots+a_1D+a_0$ con $\boxed{a_n\neq 0.}$

Teorema 1.4 : Criterio para soluciones linealmente dependientes e independientes de $\phi\,(D)\,y=0$

Sean $y_1\,(x), y_2\,(x),\ldots,y_n\,(x)$ soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea $\phi\,(D)\,y=0$ en algún intervalo I.

a. Las soluciones $y_1,y_2,\ldots,y_n$ de $\phi\,(D)\,y=0$ son ld $\Leftrightarrow W(y_1,y_2,\ldots,y_n)=0$ para algún $x_0\in I$.

b. Las soluciones $y_1,y_2,\ldots,y_n$ de $\phi\,(D)\,y=0$ son li $\Leftrightarrow W(y_1,y_2,\ldots,y_n)\neq 0$ para todo $x_0\in I$.

Demostración a. Para el caso de $n=2$

$(\Rightarrow)$

Suponga que y_1 y y_2 son ld, se demostrará que $W\,(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'=0$. Si una de las dos funciones es cero, la conclusión es obvia. Al ser ld, se tiene que $y_2=cy_1$ para $c\in\mathbb{R}$, de modo que $y_2'=cy_1'$. Así que $y_1cy_1'-cy_1y_1'=0.\Rightarrow W\,(y_1,y_2)=0$

$(\Leftarrow)$

Suponga que $W\,(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'=0$, hay que probar que y_1 y y_2 son ld

Suponga que $y_1 \neq 0$, entonces al dividir wronskiano por y_1^2 se tiene

$$\frac{W(y_1, y_2)}{y_1^2} = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0,$$

integrando se obtiene $\dfrac{y_2}{y_1} = k$, con lo que $y_2 = k y_1$, para algún k. probandose que y_1, y_2 son ld.

Prueba b.

($\Leftarrow$)
Suponga $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ para todo $x_0 \in I$, luego hay que mostrar que las soluciones $y_1, y_2, ..., y_n$ de $\phi(D) y = 0$ son linealmente independientes (li) .

Sea $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0, \ \forall x \in I$ con $c_i, \ i = 1, 2, 3, \cdots, n$ constantes arbitrarias, luego derivando $n-1$ veces dicha ecuación se tiene el sistema

$$\begin{cases} c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n & = & 0 \\ c_1 y_1' + c_2 y_2' + \cdots + c_n y_n' & = & 0 \\ c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + \cdots + c_n y_n'' & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n y_n^{(n-1)} & = & 0 \end{cases}$$

Note en el sistema formado anteriormente para cada $x_0 \in I$ el determinante de la matriz asociada es equivalente al wronskiano $W(y_1, y_2, ..., y_n)$, el cual por hipótesis es dintinto de cero para todo $x_0 \in I$, por lo que se cumple que

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ & \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall x \in I \tag{1.17}$$

así, se prueba que $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ y de esta forma las soluciones $y_1, y_2, ..., y_n$ de $\phi(D) y = 0$ son linealmente independientes (li) para todo x_0 en el intervalo I.

($\Rightarrow$)

Suponga que las soluciones $y_1, y_2, ..., y_n$ de $\phi(D) y = 0$ son linealmente independientes (li) para todo x_0 en el intervalo I, ahora se debe probar que $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ para todo $x_0 \in I$. Para ello se recurre a prueba de reducción al absurdo.

Suponga $W(y_1, y_2, ..., y_n) = 0$ para algún $x_0 \in I$ y considere el sistema

$$\begin{cases} c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n & = & 0 \\ c_1 y_1' + c_2 y_2' + \cdots + c_n y_n' & = & 0 \\ c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + \cdots + c_n y_n'' & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n y_n^{(n-1)} & = & 0 \end{cases}$$

posteriormente como el determinante del sistema asociado es equivalente al $W(y_1, y_2, ..., y_n)$ se tendría

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ & \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0 \tag{1.18}$$

para algún $x_0 \in I$, lo que implica existan infinitas soluciones para $c_1, c_2, \cdots, c_n$, siendo esto una contradicción ya que por hipótesis se tiene $y_1, y_2, ..., y_n$ son soluciones de $\phi(D)y = 0$ linealmente independientes (li) para todo x_0 en el intervalo I. Por lo que de esta manera debe darse $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ para todo $x_0 \in I$.

Ejemplo 1.23

1. Si $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{4x}, y_3 = ke^{-3x}$ son soluciones de la ecuación $y'' - y' - 12y = 0$ entonces determine si:

   a) y_1 y y_2 son *ld* o *li*

   b) y_1 y y_3 son *ld* o *li*.

Solución (a)

Como $W\left(e^{-3x}, e^{4x}\right) = \begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{4x} \\ -3e^{-3x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 4e^{-3x} \cdot e^{4x} - \left(-3e^{-3x} \cdot e^{4x}\right) = 7e^{x} \neq 0$. Así se tiene que $\Rightarrow y_1$ y y_2 son *li*.

Solución (b) :

$W\left(e^{-3x}, ke^{-3x}\right) = \begin{vmatrix} e^{-3x} & ke^{-3x} \\ -3e^{-3x} & -3ke^{-3x} \end{vmatrix} = e^{-3x} \cdot -3ke^{-3x} - \left(-3e^{-3x} \cdot ke^{-3x}\right) = 0$. Luego entonces y_1 y y_3 son *ld*.

Ejemplo 1.24

Dadas las funciones $y_1 = x|x|$ y $y_2 = x^2$ en el intervalo $I = [-1, 1]$. Probar que y_1 y y_2

a. Son linealmente independientes en I, aunque su wronskiano es igual a cero.

b. Son solución de la ecuación diferencial $x^2y'' - 2y = 0$.

c. Justifique porque no contradice el teorema del criterio para EDO de soluciones LI-LD.

Solución a.

Observe que $y_1(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 & si \quad -1 \leq x < 0 \end{cases}$, además se tiene $y_2 = x^2$ en el intervalo $I = [-1,1]$. Por otro lado note que $W(y_1, y_2) = 0$ para toda $x \in [-1,1]$, pues:

- En $[-1,0]$ se cumple $W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} -x^2 & x^2 \\ -2x & 2x \end{vmatrix} = 0.$
- En $[0,1]$ se cumple $W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = 0.$

Para probar que y_1, y_2 son linealmente independientes en $I = [-1,1]$, se procederá por contradicción, es decir, suponga que y_1, y_2 son linealmente dependientes en el intervalo, entonces debemos encontrar dos constantes c_1 y c_2 no ambas cero, tales que:

$$c_1 x \mid x \mid + c_2 x^2 = 0 \ \ en \ \ -1 \leq x \leq 1$$

de donde si $-1 \leq x \leq 0$ se tiene $-c_1x^2 + c_2x^2 = 0$, es decir, $x^2(-c_1 + c_2) = 0$ y si $0 \leq x \leq 1$ se tiene $c_1x^2 + c_2x^2 = 0$, es decir, $x^2(c_1 + c_2) = 0$. De donde para $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$ este resultado es imposible. Esto prueba que las funciones son linealmente independientes en I.

Solución b.

Es fácil comprobar que $y_1 = x|x|$ y $y_2 = x^2$ en el intervalo $I = [-1,1]$ son soluciones de la ecuación diferencial $x^2y'' - 2y = 0$, pues:

- En $[-1,0]$ se cumple $y = -c_1x^2 + c_2x^2 = (-c_1 + c_2)x^2 \Rightarrow y' = -2(c_1 - c_2)x \Rightarrow y'' = -2(c_1 - c_2)$.

  sustituyendo en la ecuación diferencial $x^2y'' - 2y = 0$ se verifica dicha igualdad.
- En $[0,1]$ se cumple $y = c_1x^2 + c_2x^2 = (c_1 + c_2)x^2 \Rightarrow y' = 2(c_1 + c_2)x \Rightarrow y'' = 2(c_1 + c_2)$.
  sustituyendo en la ecuación diferencial $x^2y'' - 2y = 0$ se verifica dicha igualdad.
  Por lo tanto $y = c_1x|x| + c_2x^2$ es solución general de dicha ecuación diferencial.

Solución c.

De acuerdo a los resultados de **a. y b.** se comprobó que y_1, y_2 son linealmente independientes y su $W = 0$; esto parece contradecir al teorema; pero no es así, pues se observa que la hipótesis $a_2(x) \neq 0, \ \ \forall x$ en intervalo I común no se cumple en este caso, ya que que $a_2(x) = x^2$ es cero en $x = 0$, además despejando y'' de nuestra ecuación se tiene $y'' - \dfrac{2}{x^2}y = 0$, de donde $a_1(x) = -\dfrac{2}{x^2}$ es discontinua en $x = 0$. Por lo tanto, no se puede aplicar dicho teorema.

Teorema 1.5

Dada una ecuación diferencial lineal homogénea $\phi(D)y = 0$ de orden n sobre intervalo I existen n soluciones linealmente independientes de ella.

Prueba

Por TEU de ecuaciones diferenciales lineales $\phi(D)y = 0$ de orden n, existe una única solución

$$
\begin{array}{lll}
y_1(x) & \text{que satisface} & y_1(x_0)=1,\ y_1'(x_0)=0, y_1''(x_0)=0,\cdots,y_1^{(n-1)}(x_0)=0 \\
y_2(x) & \text{que satisface} & y_2(x_0)=0,\ y_2'(x_0)=1, y_2''(x_0)=0,\cdots,y_2^{(n-1)}(x_0)=0 \\
\vdots & & \vdots \\
y_n(x) & \text{que satisface} & y_n(x_0)=0,\ y_n'(x_0)=0, y_n''(x_0)=0,\cdots,y_n^{(n-1)}(x_0)=1
\end{array}
$$

lo anterior prueba la existencia de n soluciones, ahora basta probar que las funciones $y_1, y_2, ..., y_n$ de $\phi(D)y=0$ son linealmente independientes (li), para ello suponga existen constantes $c_1, c_2, \cdots, c_n$ tales que

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)=0,\ \forall x\in I$$

En particular si $x=x_0$ se obtiene que se debe cumplir $c_1=0$, derivando

$$c_2y_2'(x)+\cdots+c_ny_n'(x)=0,\ \forall x\in I$$

de igual forma en particular si $x=x_0$ se obtiene que se debe cumplir $c_2=0$, y derivando nuevamente

$$c_3y_3''(x)+\cdots+c_ny_n''(x)=0,\ \forall x\in I$$

y continuando el proceso se obtiene que

$$c_1=c_2=\cdots=c_n=0$$

probando así que $y_1, y_2, ..., y_n$ son soluciones de $\phi(D)y=0$ linealmente independientes (li).

Definición 1.12

Un sistema fundamental de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea normal de orden n es un conjunto de cualesquiera n soluciones particulares linealmente independientes.

Teorema 1.6 (Definición de solución general de ED homogénea)

Sean $y_1, y_2, ..., y_n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea $\phi(D)y=0$ en algún intervalo I, entonces su **solución general** es:

$$y=y_c=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n{}^{a}$$

[a] Las soluciones $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ linealmente independientes en I constituyen un **conjunto fundamental de soluciones.**

Prueba

Hay que probar que cualquier solución es combinación lineal de n soluciones linealmente independientes $y_1, y_2 ..., y_n$ de la ecuación diferencial homogénea $\phi(D)y=0$ en algún intervalo I .

Sea y una solución cualquiera de la ecuación diferencial que satisface las condiciones iniciales

$$y(x_0)=y_1,\ y'(x_0)=y_2, y''(x_0)=y_3,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_n$$

Sea $z(x)=\sum_{i=1}^{n}c_iy_i$ tal que $z(x_0)=y_1,\ z'(x_0)=y_2, z''(x_0)=y_3,\cdots,z^{(n-1)}(x_0)=y_n$ entonces

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)+\cdots+c_ny_n(x_0) & = & y_1 \\ c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)+\cdots+c_ny_n'(x_0) & = & y_2 \\ c_1y_1''(x_0)+c_2y_2''(x_0)+\cdots+c_ny_n''(x_0) & = & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+c_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\cdots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0) & = & y_n \end{cases}$$

Dado que el determinante de la matriz asociada a este sistema es $W[y_1,...,y_n]$ y estas funciones $y_1,...,y_n$ son li entonces $W[y_1,...,y_n]\neq 0$, por lo que el sistema tiene solución única, es decir existe constantes únicas $c_1,c_2,...,c_n$ que satisfacen que

$$z(x)=\sum_{i=1}^{n}c_iy_i \quad \text{con} \quad z(x_0)=y_1,\ z'(x_0)=y_2, z''(x_0)=y_3,\cdots,z^{(n-1)}(x_0)=y_n$$

de donde como $z(x)$ es solución de la ecuación entonces por el TEU en ecuaciones diferenciales lineales homogéneas se tiene que : $y(x)=z(x)$.

Ejemplo 1.25

Se sabe que $y_1=e^{-3x}$, $y_2=e^{4x}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación $y''-y'-12y=0$ entonces su solución general (o complementaria) es $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{4x}$

Ejemplo 1.26

Considere el problema de hallar la solución general de la ED homogénea con coeficientes constantes

$$y''-3y'+2y=0 \Leftrightarrow (D^2-3D+2)y=0$$

El operador diferencial tiene coeficientes constantes, por lo tanto

$$D^2-3D+2=(D-1)(D-2)=(D-2)(D-1)$$

y ademas es fácil comprobar que $(D^2-3D+2)(e^{2x})=0$ y $(D^2-3D+2)(e^x)=0$ entonces e^x y e^{2x} son solución de la ED homogénea y por teorema (Si y_1 y y_2 son solución de la ED homogénea entonces cualquier combinacion lineal de ellas es solución también de la ED homogénea) se tiene que

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^x$$

Falta por verificar si dichas soluciones $y_1=e^{2x}$ y $y_2=e^x$ son L.I, lo que fácilmente se puede comprobar mediante el Wronskiano donde se cumple que $W(y_1,y_2)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Luego finalmente se concluye que

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^x$$

es la solución general de la ED homogénea $y''-3y'+2y=0$.

1.3 Ecuación diferencial lineal no homogénea $\phi(D)y=F(x)$

Recordemos que una ecuación diferencial lineal de orden n de la forma $\phi(D)y=F(x)$, con $F(x)\neq 0$, se le conoce como ecuación diferencial no homogénea, acontinuación se aborda teoría relacionada con este tipo de ecuaciones diferenciales.

Teorema 1.7

Si la función $y_1 = u(x)$ es solución de la ecuación diferencial $\phi(D)y = F(x)$, y si la función $y_2 = v(x)$ es una solución de la respectiva ecuación complementaria $\phi(D)y = 0$, entonces la función $y = u(x) + v(x)$ es también una solución de la ecuacion diferencial $\phi(D)y = F(x)$.

Demostración

i) Como $y_1 = u(x)$ es solución de $\phi(D)y = F(x) \Rightarrow \phi(D)u(x) = F(x)$.
ii) Además, como $y_2 = v(x)$ es solución de $\phi(D)y = 0 \Rightarrow \phi(D)v(x) = 0$.

iii) Sumando las dos expresiones (i) y (ii) se tiene que:

$$\phi(D)u(x) + \phi(D)v(x) = F(x) \Leftrightarrow \phi(D)(u(x) + v(x)) = F(x)$$

Por lo tanto, $y = u(x) + v(x)$ es una solución de $\phi(D)y = F(x)$.

Del teorema anterior, se puede inferir que si $y_1(x) = u(x)$ es una solución particular (libre de parámetros) de $\phi(D)y = F(x)$ y si $y_2(x) = v(x)$ es la solución general (contiene n parámetros) de la ecuación homogénea $\phi(D)y = 0$, entonces

$$y = \underbrace{v(x)}_{y_c} + \underbrace{u(x)}_{y_p} = y_c + y_p$$

Es importante hacer la observación de que para determinar la y_p , es requisito indispensable conocer y_c, aspecto que se justificará mas adelante.

Ejemplo 1.27

Usando las técnicas estudiadas en lecciones anteriores, se puede verificar que la solución general de $y' - 3y = 8e^{-x}$ es $y = -2e^{-x} + Ce^{3x}$.

De donde, la solución complementaria de $y' - 3y = 0$ es $y_c = Ce^{3x}$ y una solución particular de $y' - 3y = 8e^{-x}$ es $y_p = -2e^{-x}$.

Ejemplo 1.28

Resuelva la ecuación de primer orden $y' + 4y = e^{2x}$.

Solución

Multiplicando la ecuacion $y' + 4y = e^{2x}$ por el factor integrante $u(x) = e^{\int 4dx} = e^{4x}$, se obtiene que

$$e^{4x}y' + 4ye^{4x} = e^{6x}$$

$$\Leftrightarrow [e^{4x}y]' = e^{6x}$$

$$\Leftrightarrow e^{4x}y = \int e^{6x}dx$$

$$\Leftrightarrow e^{4x}y = \frac{e^{6x}}{6} + c$$

$$\Leftrightarrow y = ce^{-4x} + \frac{e^{2x}}{6}$$

Por lo tanto, la solución complementaria de $y' + 4y = 0$ es $y_c = ce^{-4x}$ y una solución particular es $y_p = \dfrac{e^{2x}}{6}$.

Teorema 1.8 (Definición de solución general de ED NO homogénea)

Sean $y_1, y_2,...,y_n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea $L(y) = 0$[a] y sea y_p una solución particular de la ecuación diferencial $L(y) = g(x)$, entonces la solución de esta última ecuación es

$$y = \underbrace{c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n}_{y_c} + y_p$$

[a] Recuerde $L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0$ se refiere al operador diferencial de ecuación diferencial homogénea de orden n

Prueba

i. Sea $L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0$ el operador diferencial de ecuación diferencial homogénea de orden n y sean $Y(x)$ y $y_p(x)$ soluciones particulares de la ecuación no homogénea $L(y) = g(x)$ y por tanto se cumple $L(Y(x)) = g(x)$ y $L(y_p(x)) = g(x)$.

ii. Defina $u(x) = Y(x) - y_p(x)$, por la linealidad de $\phi(D)$ se debe cumplir

$$L(u(x)) = L(Y(x) - y_p(x)) = L(Y(x)) - L(y_p(x)) = g(x) - g(x) = 0$$

Esto demuestra que $u(x)$ es una solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$.

iii. Luego de acuerdo a lo obtenido anteriormente y por el teorema 1.6 referente a la solución general de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas se tiene

$$u(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + c_3 \cdot y_3(x) + \cdots + c_n \cdot y_n(x)$$

$$\Rightarrow Y(x) - y_p(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + c_3 \cdot y_3(x) + \cdots + c_n \cdot y_n(x).$$

Por lo tanto, se concluye

$$Y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + c_3 \cdot y_3(x) + \cdots + c_n \cdot y_n(x) + y_p(x)$$

Ejemplo 1.29

Considere la ecuación diferencial lineal de orden dos $y'' + y = \sec x$.

1. Verifique que $y_c = A\cos x + B\operatorname{sen} x$ es solución complementaria de $\phi(D)y = 0$
2. Verifique que $y_p = x\operatorname{sen} x + \cos x \ln(\cos x)$ es solución particular de $\phi(D)y = F(x)$
3. Determine la solución general de $\phi(D)y = F(x)$

Solución 1 :

Como $y_1 = \cos x$ y $y_2 = \operatorname{sen} x$ son ambas soluciones de $y'' + y = 0$ y además $W(\cos x, \operatorname{sen} x) = 1$ entonces son li, por teorema la solución complementaria está dada por $y_c = A\cos x + B\operatorname{sen} x$.

Solución 2:

Para $y_p = x\operatorname{sen} x + \cos x \ln(\cos x)$, se tiene que

$$y_p' = x\cos x - \sin x \ln(\cos x) \Rightarrow y_p'' = \cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x \ln(\cos x) + \frac{1}{\cos x}\operatorname{sen}^2 x.$$

Entonces sustituyendo en $y'' + y = 0$ tenemos

$$\left(\cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x \ln(\cos x) + \frac{1}{\cos x}\sin^2 x\right) + x\operatorname{sen} x + \cos x \ln(\cos x) = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

Por lo tanto es solución particular de $y'' + y = \sec x$.

Solución 3: Por 1, 2 y por teorema dado se tiene que la solución general de $y'' + y = \sec x$ está dada por

$$y = y_c + y_p = A\cos x + B\operatorname{sen} x + x\operatorname{sen} x + \cos x \ln(\cos x)$$

Mediante software Mathematica 10.3 se puede comparar dichos resultados de la siguiente manera: `DSolve[y''[x] + y[x] == Sec[x], y , x]` y dando por resultado

```
y->Function[{x}, C[1]Cos[x] + Cos[x]Log[Cos[x]] + xSin[x] + C[2]Sin[x]
```

Observación 1.6 Observe que de acuerdo a lo anterior la solución general de una ecuación lineal no homogénea consiste en la suma de dos funciones:

$$y = y_h + y_p$$

es decir, para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea primero se resuelve la ecuación homogénea asociada y luego se determina cualquier solución particular de la ecuación no homogénea. La solución general de la ecuación no homogénea.

Ejercicios 1.3 [**Ejercicios de retroalimentación**]

1.3.1 Verificar que $\phi(x) = x+1$ es solución de la ecuación diferencial $y'' + 3y' + y = x+4$, **pero** $\eta(x) = 2\phi(x)$ no es solución de dicha ecuación diferencial.(justifique por que no contradice el teorema 1.6 EDLn homogénea.

1.3.2 Demostrar que si, las fuciones y_1, y_2 son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y^2 = 0$, **NO** necesariamente se cumple que $\phi(x) = C_1y_1 + C_2y_2$ es solución de dicha ecuación diferencial.(Justifique)

1.3.3 Para cada afirmación indique V si es verdadera o F si es falsa según así corresponda:

a. Si se sabe que y_1, y_2, y_3 son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogéna de orden tres en un intervalo I y además, $W(y_1, y_2, y_3) \neq 0$, entonces la expresión $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$, con C_1, C_2, C_3 constantes reales, no es la solución general de la ecuación diferencial.

b. Si se sabe que y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogéna de orden cinco en un intervalo I y además, $W(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = 0$, entonces la expresión $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4 + C_5y_5$, con C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 constantes reales, es la solución general de la ecuación diferencial.

c. Considere la ecuación diferencial $x^2y'' + 6xy' + 6y = 0$, si $k_1\, y\, k_2$ corresponden a los valores distintos de k para que $y = x^k$ sea solución de la ecuación diferencial dada, entonces la solución general se puede escribir como $y = C_1.x^{k_1} + C_2.x^{k_2} + \dfrac{1}{x^{-k_1}}$.

d. Las funciones $y_1 = -e^{8x}, y_2 = 12e^{-x}, y_3 = -3e^{2x}$ son soluciones linealmente dependientes de la ecuación diferencial $y''' - 9y'' + 6y' + 16y = 0$.

e. Si se sabe que el conjunto de funciones $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$ es linealmente independiente en el intervalo I y además cumplen que $a_1f_1(x) + a_2f_2(x) + a_3f_3(x) = 0$, $\forall x \in$ I con a_1, a_2, a_3 constantes reales entonces $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$.

f. Considere la ecuación diferencial

$$\phi(D)y = F(x) \ [1]$$

lineal de coeficientes reales. Si $y_1 = e^x, y_2 = x$ son soluciones de la ecuación diferencial $\phi(D)y = 0$ y además $y = 3e^{-x}$ es solución particular de [1], entonces una solución de la ecuación diferencial [1] corresponde a $y = -4e^x - \frac{x}{2} + 3e^{-x}$.

g. Si y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, entonces con certeza c_1y_1, c_2y_2 son soluciones linealmente independientes siempre y cuando c_1 y c_2 sean constantes no nulas ambas.

1.3.4 Considere ecuación diferencial $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ en $]-\infty, \infty[$.

a. Compruebe que $y_1 = x^3$ y $y_2 = |x|^3$ son soluciones linealmente independientes de la EDO lineal dada.

b. Muestre que $W(y_1, y_2) = 0$ para todo número real.

c. Determine si lo obtenido en inciso anterior (b.) contradice el teorema del criterio para soluciones linealmente independiente.

d. Verificar que $Y_1 = x^3$ y $Y_2 = x^2$ son también soluciones linealmente independiente de la EDO lineal dada en $]-\infty, \infty[$.

1.4 Redución de Orden

La técnica de reducción de orden que se estudiará en esta sesión permite determinar en ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden homogéneas una segunda solución, y_2, a partir de una solución y_1 no trivial linealmente de ella.

Dicho método consiste en dada una solución $y_1(x)$ de la ecuación diferencial

$$y''(x) + P(x)y' + Q(x)y(x) = 0$$

tomar el cambio de variable $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ y determinar la función $u(x)$. Este método se llama reducción de orden porque debemos resolver una ecuación lineal de primer orden para hallar $u(x)$ de donde de acuerdo al cambio de variable planteado se llega a la ecuación diferencial

$$u''(x) + \left(P(x) + \frac{2y_1'}{y_1}\right) u'(x) = 0$$

.
posteriormente se toma cambio de variable $u'(x) = v(x)$ y de esta forma la ecuación anterior se transforma en la ED de primer orden en $v(x)$.

Por medio del siguiente ejemplo y teorema de segunda solución en ED lineales de segundo orden homogénea se ilustra los procesos involucrados.

Ejemplo 1.30

Sea $y_1 = x$ solución en $]0, \infty[$ de ecuación diferencial

$$xy'' + y' - \frac{1}{x}y = 0 \quad (\mathbf{1})$$

aplique el método de reducción de orden para determinar una segunda solución y_2 linealmente independiente a y_1.

[a] Tomando el cambio de variable $y = u(x)y_1(x) = u(x)x$, luego derivando con respecto a x dos veces

se tiene

$$y' = u'x + u, \; y'' = u''x + 2u' \quad (\mathbf{2})$$

de donde sustituyendo lo obtenido en la ecuación diferencial **(1)** se tiene ahora

$$u''x^2 + 3u'x = 0$$

dado que $x \neq 0$ debe darse $u''x + 3u' = 0$, la cual representa una ecuación diferencial lineal de segundo orden en $u(x)$ y se transforma mediante el cambio $u'(x) = v(x)$ en la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$v'x + 3v = 0$$

con $\mu = x^3$ y al resolverla se tiene

$$v = kx^{-3} \Rightarrow u' = kx^{-3}$$

de donde resolviendo esta última ecuación diferencial se obtiene

$$u(x) = \frac{-kx^{-2}}{2} + C$$

con k, C constantes arbitrarias y tomando $k = -2$ y $C = 0$ se tiene $u(x) = x^{-2}$ y de esta forma la segunda solucion viene dada por

$$y_2 = \frac{1}{x}$$

Puede probarse mediante el wronskiano que $W(y_1, y_2) \neq 0$ para toda $x \in]0, \infty[$.

[a]Conviene en un primer momento dividir por $a_2(x)$ la ED para transforma en $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$

Este procediemiento se generaliza mediante teorema 1.10 de la segunda solución de ecuación diferencial lineal de orden dos homogénea dado más adelante.

Teorema 1.9 (Identidad de Abel)

Sean $y_1, ..., y_n$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea

$$\phi(D)y = 0$$

en algún intervalo I entonces $W[y_1, y_2, ..., y_n] = Ce^{-\int \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}dx}$. Además, como $e^{-\int \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}dx} > 0$ entonces $W[y_1, y_2, ..., y_n] = 0 \Leftrightarrow C = 0$ o $W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0 \Leftrightarrow C \neq 0$.

Demostración orden 2: $a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$ **(1)**

Dado que $a_2(x) \neq 0$ la ecuación diferencial (1) se puede escribir $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ **(2)** y así de esta forma para y_1 y y_2 soluciones de (1) en un intervalo I, hay que probar que

$$W[y_1, y_2] = ce^{-\int P(x)dx} \tag{1.19}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Como y_1 y y_2 son soluciones de **(2)**, entonces cumplen con la ecuación, así

$$y_1'' + P(x)\,y_1' + Q(x)\,y_1 = 0 \Rightarrow y_1'' = -P(x)\,y_1' - Q(x)\,y_1 \quad (*)$$

$$y_2'' + P(x)\,y_2' + Q(x)\,y_2 = 0 \Rightarrow y_2'' = -P(x)\,y_2' - Q(x)\,y_2 \quad (**)$$

Por otra parte derivando el wronskiano $W[y_1, y_2]$ con respecto a la variable x, se tiene

$$\frac{dW}{dx} = \frac{d\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}{dx} = \frac{d\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right)}{dx} = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1''$$

luego de $(*)$ y $(**)$

$$\frac{dW}{dx} = y_1y_2'' - y_2y_1'' = y_1\left(-P(x)y_2' - Q(x)y_2\right) - y_2\left(-P(x)y_1' - Q(x)y_1\right)$$

$$\frac{dW}{dx} = -P(x)y_1y_2' + P(x)y_1'y_2 = P(x)\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right) = -P(x)W\left(y_1, y_2\right)$$

de tal forma se tendría que $w' + P(x)w = 0 \Rightarrow w = Ce^{-\int P(x)dx}$

Ejemplo 1.31

Considere las funciones $y_1 = e^x\cos(2x)$ y $y_2 = e^x sen(2x)$

a. Pruebe que son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

b. Verifique la identidad de Abel.

Solución Parte (a)

Vamos a verificar y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial, para ello primero

$$y_1 = e^x\cos(2x) \Rightarrow\ y_1' = e^x\cos 2x - 2e^x \operatorname{sen} 2x \Rightarrow\ y_1'' = -3e^x\cos 2x - 4e^x \operatorname{sen} 2x$$

donde luego sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene

$$-3e^x\cos 2x - 4e^x\sin 2x - 2\left(e^x\cos 2x - 2e^x \operatorname{sen} 2x\right) + 5\left(e^x\cos(2x)\right) = 0$$

Igualmente para y_2. Ahora se prueba que son linealmente independientes pues

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x\cos(2x) & e^x \operatorname{sen}(2x) \\ e^x\cos 2x - 2e^x\sin 2x & 2e^x\cos 2x + e^x \operatorname{sen} 2x \end{vmatrix}$$

$$= e^x\cos(2x)\cdot(2e^x\cos 2x + e^x \operatorname{sen} 2x) - (e^x\cos 2x - 2e^x\sin 2x\ )\,(e^x\sin(2x))$$
$$= 2e^{2x} \neq 0.$$

Por lo tanto son soluciones linealmente independientes.

Solución Parte (b)

Según la identidad de Abel debe cumplirse que $W(y_1,y_2) = Ce^{-\displaystyle\int -2dx} = Ce^{2x} = 2e^{2x} \Rightarrow C = 2.$

Ejemplo 1.32

Considere la siguiente ecuación diferencial $x^3y'' - 12x^2y' + y = 0$. Determine el wronskiano de dos de sus soluciones y_1 y y_2 que satisfacen que $y_1(1) = y_1'(1) = 2$, $y_2(1) = 0$ y $y_2'(1) = 33$

Solución

Dada la ecuación diferencial $x^3y'' - 12x^2y' + y = 0$ y utilizando teorema de la identidad de Abel se cumple entonces:

$$W(y_1(x),y_2(x)) = Ce^{\displaystyle\int \frac{12}{x}dx} = Cx^{12} \quad [\mathbf{1}]$$

Por otro lado si aplicamos la definición del wronskiano para y_1, y_2 se tiene, $W(y_1(x),y_2(x)) = y_1y_2' - y_1'y_2$ y dado que $y_1(1) = y_1'(1) = 2$, $y_2(1) = 0$ y $y_2'(1) = 33$ entonces :

$$W(y_1(1),y_2(1)) = y_1y_2' - y_1'y_2 = 66 \quad [\mathbf{2}]$$

luego observe que en [**1**] se tiene $W(y_1(1),y_2(1)) = C\cdot 1 = C$ [**3**], de donde por lo obtenido en [**2**] se obtiene

$$C = 66$$

de esta forma

$$W(y_1(x),y_2(x)) = 66x^{12}$$

1.4.1 La segunda solución de una ecuación diferencial de orden dos

El siguiente teorema nos permite obtener la segunda solución de una ecuación lineal de segundo orden, a partir de una solución conocida.

Teorema 1.10 (Teorema segunda solución)

Si $y_1(x)$ es solución, en algún intervalo I, de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ entonces la otra solución linealmente independiente con $y_1(x)$ en I, está dada por

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{(y_1(x))^2}dx \tag{1.20}$$

En tal caso la solución general es $y = C_1y_1 + C_2y_2$

Demostración

i) Recordemos que por identidad de Abel $W(y_1, y_2) = ce^{-\int p(x)dx} \Rightarrow y_1 y_2' - y_1' y_2 = ce^{-\int p(x)dx}$
de donde al dividir por $y_1 \neq 0$

$$y_2' - \frac{y_1'}{y_1} \cdot y_2 = \frac{ce^{-\int p(x)dx}}{y_1}, \tag{1.21}$$

es una ecuación diferencial lineal de primer orden en variable dependiente y_2.

ii) De donde su factor integrante será $F(y_1) = e^{\int -\frac{y_1'}{y_1} dy_1} = e^{-\ln y_1} = \frac{1}{y_1}$, y al mutiplicarlo en 1.21 se tiene

$$\frac{y_2' - y_2 \frac{y_1'}{y_1}}{y_1} = \frac{ce^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}$$

$$\left[y_2 \cdot \frac{1}{y_1} \right]' = \frac{ce^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}$$

$$y_2 \cdot \frac{1}{y_1} = \int \frac{ce^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx$$

de esta forma $y_2 = y_1 \int \frac{ce^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx$, , luego como c es una constante arbitaria tome $c = 1$ para obtener

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx$$

Además se verifica que y_1 y y_2 son linealmente independientes ya que

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx \\ y_1' & y_1' \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx + y_1 \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} \end{vmatrix}$$

$$= y_1 y_1' \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx + y_1^2 \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} - y_1 y_1' \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx = y_1^2 \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} = e^{-\int p(x)dx} \neq 0$$

Finalmente se tiene por solución general a

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$$

para C_1, C_2 constantes arbitrarias.

Ejemplo 1.33

Determine la otra solución y_2, linealmente independiente con la solución particular y_1, además indique la solución general de la respectiva ecuación diferencial

a) $y'' + 2y' - 15y = 0$ con $y_1 = e^{3x}$.

b) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$ con $y_1 = \dfrac{senx}{\sqrt{x}}$; $x > 0$.

Solución Parte (a.) : Como $y_1 = e^{3x}$, entonces $y_1' = 3e^{3x}$ y $y_1'' = 9e^{3x}$. Luego sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos

$$9e^{3x} + 2 \cdot 3e^{3x} - 15 \cdot e^{3x} = 0,$$

por lo tanto y_1 es solución.

Para hallar y_2 tomamos

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int 2dx}}{y_1^2} = e^{3x} \int \frac{e^{-2x}}{\left(e^{3x}\right)^2} dx = e^{3x} \int e^{-8x} dx = e^{3x} \cdot -\frac{1}{8} e^{-8x} = \frac{-1e^{-5x}}{8}$$

Asíentonces se tiene, $y_2 = \dfrac{-1e^{-5x}}{8}$

Como y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial entonces su solución general será

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-5x}$$

Solución Parte (b): Escribimos la ecuación como $y'' + \dfrac{y'}{x} + \left(1 - \dfrac{1}{4x^2}\right)y = 0$ y dado que $y_1 = \dfrac{senx}{\sqrt{x}}$ es solución entonces

$$y_2(x) = \frac{senx}{\sqrt{x}} \int \frac{e^{-\int \frac{dx}{x}}}{\left(\frac{senx}{\sqrt{x}}\right)^2} dx = \frac{senx}{\sqrt{x}} \int \frac{e^{-\ln x}}{\frac{sen^2 x}{x}} dx = \frac{senx}{\sqrt{x}} \int \csc^2 x dx = -\frac{senx}{\sqrt{x}} \cot x = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

Así, la solución general está dada por

$$y = C_1 \frac{senx}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

Puede ingresar a página interactiva **Teorema de la segunda solución** para comprobar dichos resultados.

Ejemplo 1.34

Muestre que $\varphi_1(x) = x \cdot sen(x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$$

luego determine $\varphi_2(x)$ de la ecuación diferencial anterior tal que $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ constituyan un sistema fundamental de soluciones para la ecuación diferencial dada.

Solución:

Note que si $\varphi_1(x) = x \cdot sen(x)$, entonces: $\varphi'(x) = sen(x) + x \cdot cos(x)$, $\varphi''(x) = 2cos(x) - x \cdot sen(x)$ luego si es solución debe satisfacer la ecuación diferencial $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$, en efecto pues al sustituir en ella se cumple

$x^2(2cos(x) - x \cdot sen(x)) - 2x(sen(x) + x \cdot cos(x)) + (x^2+2)(x \cdot sen(x))$

$= 2x^2 \cdot cos(x) - x^3 \cdot sen(x) - 2x \cdot sen(x) - 2x^2 \cdot cos(x) + x^3 \cdot sen(x) + 2x \cdot sen(x)$
$= 0$
De esta forma se verifica, $\varphi_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial dada.
Posteriormente para determinar la segunda solución $\varphi_2(x)$ linealmente independiente con $\varphi_1(x)$, primero se reescribe la ecuación diferencial dada como: $y'' - \dfrac{2y'}{x} + \dfrac{(x^2+2)y}{x^2} = 0$, luego de acuerdo al teorema de la segunda solución se tiene

$$\varphi_2 = \varphi_1 \int \frac{e^{-\int \frac{-2}{x}dx}}{\varphi_1^2}dx = x\,\mathrm{sen}(x) \cdot \int \frac{x^2}{x^2\,\mathrm{sen}^2(x)}dx = -x\,\mathrm{sen}(x)cot(x) = -x\cos(x)$$

Al ser $\{x\,\mathrm{sen}(x), -x\cos(x)\}$ soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial dada, se cumple constituyen un sistema fundamental de soluciones y por tanto se tiene por solución general:

$$\boxed{y = C_1 \cdot x\,\mathrm{sen}(x) - C_2 \cdot x\cos(x)}$$

para C_1, C_2 constantes arbitrarias.

Ejemplo 1.35

Verifique que la función $y_1 = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ es solución de la ecuación homogénea de

$$x^5y'' + 2x^4y' + y = 0$$

posteriormente determine la otra solución linealmente independiente de la ecuación diferencial homogénea.

Solución:

Para comprobar que y_1 es solución de la ecuación homogénea basta con derivar dos veces, sustituir y ver si satisface dicha ecuación diferencial, es decir, dado que

$$y_1' = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x^{-2} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2};\ y_1'' = \frac{-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x^{-2}\cdot x^2 - 2x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4} \Rightarrow y_1'' = \frac{-\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 2x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4}$$

y al sustituir lo obtenido en la ecuación homogénea $x^5y'' + 2x^4y' + y = 0$

$$\Rightarrow x^5\left(\frac{-\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 2x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4}\right) + 2x^4\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\right) + x\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\Rightarrow -x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 2x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + 2x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$\therefore y_1 = cos\left(\frac{1}{x}\right)$ es solución de la ecuación homogenéa.

Ahora para determinar la segunda solución linealmente con y_1, se recurre al teorema de la segunda solución

$$y_2 = y_1\int \frac{e^{\int p(x)dx}}{(y_1)^2}dx$$

$$= \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\int \frac{e^{-\int \frac{2}{x}dx}}{cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}dx$$

$$= \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\int \frac{e^{-2\ln(x)}}{cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}dx$$

$$= \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\int \frac{1}{x^2cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}dx$$

si en esta última integral se realiza la sustitución $u = \dfrac{1}{x}$ se tiene $du = -\dfrac{1}{x^2}dx$

$$= \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\int \frac{-1}{cos^2(u)}du$$

$$= \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\int -\sec^2(u)du$$

$$= \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot -\tan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y_2 = -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Finalmente la solución de la ecuación homogénea esta dada por

$$y = C_1\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right) + C_2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ejemplo 1.36

Considere la ecuación diferencial:

$$(x^3+1)y'' - 3x^2y' + 3xy = 0 \qquad (*)$$

1. Verifique que $y_1(x) = x$ es solución de (*)
2. Obtenga otra solución $y_2(x)$ de (*) y que sea linealmente independiente de $y_1(x)$.
3. Verifique que efectivamente y_1, y_2 son linealmente independientes.

Solución:

1. Si $y_1(x) = x$, entonces $y_1' = 1$, $y_2'' = 0$, sustituyendo en $(x^3+1)y'' - 3x^2y' + 3xy = 0$ se tiene que:

$$(x^3+1)\cdot 0 - 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot x = 0$$

2. Para obtener la segunda solución de dicha ecuación diferencial se utilice el teorema de la segunda solución de Abel de donde:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x \cdot \int \frac{e^{-\int -\frac{3x^2}{x^3+1}dx}}{x^2} dx \\ &= x \cdot \int \frac{e^{\ln(x^3+1)}}{x^2} dx \\ &= x \cdot \int \frac{x^3+1}{x^2} dx \\ &= x \cdot \int \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= x\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + c\right) \end{aligned}$$

por lo que se puede tomar $y_2(x) = \dfrac{x^3}{2} - 1$, con $c = 0$.

3. Aunque el teorema de segunda solución ya garantiza que la segunda solución obtenida en la parte anterior cumple ser linealmente independiente (l.i) a la solución ya dada, se puede verificar también utilizando el wronskiano:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & \frac{x^3}{2} - 1 \\ 1 & \frac{3x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{3x^3}{2} - \frac{x^3}{2} + 1 = x^3 + 1 \neq 0$$

por lo que y_1, y_2 son $l.i$ para toda $x \neq -1$

Ejemplo 1.37

Considere la ecuación diferencial:

$$(-1-2x-x^2)y'' + 2(1+x)y' = 2y \quad [1]$$

1. Halle una solución de la forma $y = 1 + bx$ de la ecuación diferencial [1].
2. Determine la solución general de la ecuación diferencial denotada con [1].

Solución

Puede visualizar explicación y solución de dicho ejemplo,dar click al video explicativo del mismo a través del link: https://youtu.be/M-Kz91akjko

Ejemplo 1.38

Halle una ecuación diferencial lineal homogénea **(necesariamente de coeficientes variables)** que tenga $y = Ae^x + Bx^4e^x$ como solución general con A, B constantes arbitrarias.

Solución:

Note que para $y = Ae^x + Bx^4e^x$ sea solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes variables, se tiene que $y_1 = e^x$ y $y_2 = x^4e^x$ generan el espacio solución. Por lo tanto, es suficiente encontrar una ecuación diferencial

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

que tenga $y_1 = e^x$ por solución y además por Teorema de segunda solución de Abel se cumpla $y_2 = u.y_1$ con $u = x^4$.

- La primera condición, que $y_1 = e^x$ sea solución nos dice que

  $$a_2(x) + a_1(x) + a_0(x) = 0$$

  y por lo tanto $a_0(x)$ quedará determinado una vez que hallemos $a_2(x)$ y $a_1(x)$.

- La condición $u = x^4$ se traduce en

  $$\int \frac{e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}}{e^{2x}}dx = x^4$$

  Así, es suficiente tomar

  $$\frac{e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}}{e^{2x}} = 4x^3 \Rightarrow e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx - 2x} = 4x^3 \Rightarrow -\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx = \ln(4x^3)$$

  de donde, se tiene que

  $$-\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = 2 + \frac{3}{x}$$

Si tomamos $a_2(x) = x^2$ (aquí la escogencia es totalmente arbitraria), $a_1(x)$ y por lo tanto $a_0(x)$ quedan determinados de siguiente forma:

$$a_1(x) = -x^2\left(2+\frac{3}{x}\right) = -x(2x+3) \text{ y } a_0 = -a_2(x) - a_1(x) = x(x+3)$$

Por tanto una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes que tiene por solución general

$$y = Ae^x + Bx^4e^x$$

viene dada por

$$x^2y'' - x(2x+3)y' + x(x+3)y = 0$$

Ejercicios 1.4 **[Ejercicios de retroalimentación]**

1.4.1 Para cada ecuación diferencial y una solución de ella, determine la solución general. Posteriormente ingrese a página interactiva **Teorema de la segunda solución** para comprobar dichos resultados.

a. $x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = 0, \quad y_1(x) = x^2$
b. $e^{-2x}y''(x) - e^{-2x}y'(x) + y(x) = 0, \quad y_1(x) = \operatorname{sen}(e^x)$
c. $x^2y''(x) - (x+2)xy'(x) + (x+2)y(x) = 0, \quad y_1(x) = xe^x$
d. $\left(3x^2+5x\right)y''(x) - (6x+5)y'(x) + 6y(x) = 0, \quad y_1(x) = x^2$
e. $x^2y''(x) - 6y(x) = 0, \quad y_1(x) = x^3$
f. $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0, \quad y_1(x) = e^{-3x}$
g. $y''(x) + 9y(x) = 0, y_1(x) = \cos(3x)$
h. $\left(1-x^2\right)y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 0, \quad y_1(x) = -x$
i. $x^2y''(x) - 3xy'(x) + 5y(x) = 0, y_1(x) = x^2\cos(\ln(x))$
j. $4x^2y''(x) + y(x) = 0, \quad y_1(x) = \sqrt{x}\ln(x)$

1.4.2 Considere la ecuación diferencial

$$xy'' - (x+6)y' + 6y = 0$$

Si se sabe que e^x es una solución de la ecuación diferencial, entonces determine $W(y_1, y_2)$.

1.4.3 ¿Cúal es la ecuación diferencial de menor orden posible con coeficientes reales, con función incógnita $y(x)$ que satisfacen que:

$$W(f(x), \cos(11x), g(x)) = \begin{vmatrix} f(x) & \cos(11x) & g(x) \\ 1 & \cos(11x) & 4e^{4x} \\ 0 & -121\cos(11x) & 16e^{4x} \end{vmatrix}$$

2 — Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes constantes

2.0.1 Objetivos Específicos

- Resolver ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes.
- Determinar soluciones particulares y la solución general de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

2.0.2 Contenidos

- Solución de la ecuación homogénea según raíces de la ecuación auxiliar.
- Solución particular de la ecuación no homogénea.
- Solución general de la ecuación no homogénea.
- Método de los coeficientes indeterminados para determinar una solución particular.

2.1 Ecuación diferencial de orden superior homogénea con coeficientes constantes

Definición 2.1 Ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de orden n

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es **lineal con coeficientes constantes** si puede escribirse de la siguiente forma :

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = F(x) \tag{2.1}$$

donde $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ son todas funciones **CONSTANTES** reales y $F(x)$ una función real continua que depende sólo de la variable independiente x y definida en un intervalo común I.

Recordatorios:

- Usando operadores la ecuación anterior 2.1 se expresa como $\phi(D)y = F(x)$ y la ecuación complementaria (homogénea) asociada a ella, viene dada por $\phi(D)y = 0$, donde

$$\phi(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 \quad \text{con } a_n \neq 0 \tag{2.2}$$

- La solución general de la ecuación diferencial de orden n, $\phi(D)\, y = F(x)$ está dada por

$$y = y_c + y_p$$

  , donde y_c (provista de parámetros arbitrarios) es la solución complementaria de la ecuación homogénea $\phi(D)\, y = 0$, mientras que y_p (libre de parámetros) es una solución particular de la ecuación no homogénea $\phi(D)\, y = F(x)$.

2.1.1 Solución complementaria de la ecuación homogénea $\phi(D)\, y = 0$, de orden dos

Como introducción al tema considere la ecuación lineal homogénea de primer orden con coeficientes constantes $y' + a_0 y = 0$, escrita como $(D + a_0)\, y = 0$, o bien $\phi(D)\, y = 0$ con $\phi(D) = D + a_0$, obtenemos que su factor integrante es $\mu(x) = e^{\int a_0 dx} = e^{a_0 x}$. Así la ecuación diferencial $y' + a_0 y = 0$ tiene solución general de la forma $y = Ce^{mx}$, lo que sugiere que toda ecuación diferencial $\phi(D)\, y = 0$, con coeficientes constantes, tiene por solución particular una función exponencial de la forma $y = e^{mx}$.

En efecto $y = e^{mx}$, $y' = me^{mx}$, sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos

$$me^{mx} + a_0 e^{mx} = 0 \Leftrightarrow e^{mx}(m + a_0) = 0 \Leftrightarrow m = -a_0$$

Por lo tanto, $y = e^{-a_0 x}$ es una solución particular de la ecuación $y' + a_0 y = 0$ y su respectiva solución general es $y = Ce^{-a_0 x}$

Se puede observar que su solución general de $\phi(D)\, y = 0$, se puede obtener el cero o raíz de la ecuación $\phi(m) = 0$ (ecuación auxiliar), donde $\phi(m)$ tiene la misma forma que $\phi(D)$ a saber $\phi(m) = m + a_0$.

Lo anteriormente descrito para la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' + a_0 y = 0$, se puede generalizar para ecuación diferencial homogéneas de orden n con coeficientes constantes.

Por ejemplo para la ecuación diferencial homogénea de orden 2 con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

escrita usando operadores como $\left(aD^2 + bD + c\right) y = 0$, o bien $\phi(D) y = 0$ con $\phi(D) = aD^2 + bD + c$, se tiene que $y = e^{mx}$ es una solución de $(*)$.

Así $y' = me^{mx}$, $y'' = m^2 e^{mx}$. Sustituyendo en [**1**] tenemos

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$
$$e^{mx}\left(am^2 + bm + c\right) = 0$$

$\Leftrightarrow am^2 + bm + c = 0 \rightarrow$**Ecuación auxiliar llamada asociada o característica.**

Note que, $\phi(m) = am^2 + bm + c = 0$ es una ecuación cuadrática y sus ceros dependen del valor del discriminante, por lo que se deben considerar los siguientes tres casos dados a continuación.

Caso 1. El discrimintante es mayor que cero

Si $\triangle > 0 \Rightarrow \phi(m) = 0$ tiene dos soluciones reales diferentes m_1 y m_2
Las soluciones linealmente independientes de la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$ $(*)$ son $y_1 = e^{m_1 x}$ y $y_2 = e^{m_2 x}$.
Por lo tanto, la solución complementaria o general está dada por

$$\boxed{y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}}$$

Caso 2. El discriminante es igual a cero

Si $\triangle = 0 \Rightarrow \phi(m) = 0$ tiene dos raíces reales iguales $m_1 = m_2 = m$, de esta forma sólo se puede encontrar una solución exponencial $y_1 = e^{mx}$. Posteriormente, la segunda solución, la cual es linealmente independiente a y_1 de la ecuación $ay'' + by' + c = 0$ se obtiene de la siguiente forma:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx = e^{mx} \int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{2mx}} dx$$

pero como la solución $m = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow 2m = -\dfrac{b}{a}$, se tendría que la segunda solución L.I con $y_1 = e^{mx}$ es

$$y_2 = e^{mx} \int \frac{e^{2mx}}{e^{2mx}} dx = e^{mx} \int dx = xe^{mx}$$

Así la solución general de la ecuación $ay'' + by' + c = 0$ está dada por

$$\boxed{y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}}$$

Caso 3. El discriminante es menor que cero

Si $\triangle < 0 \Rightarrow \phi(m) = 0$ tiene dos soluciones complejas conjugadas $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, luego se tiene que las soluciones linealmente independientes de la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$ son

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x} \qquad \text{y} \qquad y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Por lo tanto, la solución complementaria o general está dada por

$$y = Ae^{(\alpha+\beta i)x} + Be^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}\left(Ae^{(\beta x)i} + Be^{(-\beta x)i}\right)$$

Usando el hecho de que $e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$, en ecuación anterior se tiene que

$$y = e^{\alpha x}\left(Ae^{(\beta x)i} + Be^{(-\beta x)i}\right) = e^{\alpha x}\left[A\cos(\beta x) + Aisen(\beta x) + B\cos(-\beta x) + Bisen(-\beta x)\right]$$
$$= e^{\alpha x}\left[(A+B)\cos(\beta x) + (A-B)\,isen(\beta x)\right]$$
$$= e^{\alpha x}\left(C_1\cos(\beta x) + C_2 sen(\beta x)\right)$$

De donde finalmente se concluye que para ED: $\phi(D)y = 0$, lineal de orden dos con coeficientes constantes, con soluciones complejas

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x} \qquad \text{y} \qquad y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$$

se tiene por solución general de la homogénea

$$\boxed{y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos(\beta x) + C_2 sen(\beta x)\right)}$$

Ejemplo 2.1

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lienales homogéneas con coeficientes constantes

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $4y'' + 12y' + 9y = 0$
3. $2y'' - 6y' + 5y = 0$

Solución 1

En la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 2y = 0$, se tiene que la ecuación característica asociada es $m^2 - 3m + 2 = 0$, donde $\triangle = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 1 > 0$, entonces las soluciones de la ecuación auxiliar $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$.

Así, la solución general de la ecuación diferencial será

$$\boxed{y = C_1e^x + C_2e^{2x}}$$

Solución 2

En la ecuación diferencial: $4y'' + 12y' + 9y = 0$, se tiene que la ecuación característica asociada es $4m^2 + 12m + 9 = (2m+3)^2 = 0$, donde $\triangle = (12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$, entonces la solución de la ecuación auxiliar $\phi(m) = 0$ es la raíz doble $m = \dfrac{-3}{2}$.

Así, la solución general de la ecuación diferencial será

$$\boxed{y = C_1 e^{\frac{-3x}{2}} + C_2 x e^{\frac{-3x}{2}}}$$

Solución 3

En la ED: $2y'' - 6y' + 5y = 0$, se tiene que la ecuación característica asociada es $2m^2 - 6m + 5 = 0$, donde $\triangle = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -4 < 0$, entonces las soluciones de la ecuación auxiliar $\phi(m) = 0$ son

$$m_1 = \frac{6 + \sqrt{-4}}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2} + \frac{i}{2} \quad \textbf{y} \quad m_2 = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$$

Así, la solución general de la ecuación diferencial será

$$\boxed{y = e^{\frac{3}{2}x}\left[A\cos\left(\frac{x}{2}\right) + Bsen\left(\frac{x}{2}\right)\right]}$$

2.1.2 Ecuación diferencial lineal homogénea $\phi(D)y = 0$ de orden superior mayor a dos

Para resolver ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden superior es una generalización de la técnica desarrollada para las ecuaciones lineales de orden dos, así los ceros o raíces de su respectiva ecuación auxiliar $\phi(m) = 0$ determinan la solución general de $\phi(D) = 0$ sabiendo que una solución particular de ésta es una función exponencial de la forma $y = e^{mx}$, para m un número real o complejo.

Caso 1. La ecuación auxiliar $\phi(m) = 0$ tiene n raíces reales diferentes

La solución complementaria general de $\phi(D)y = 0$ viene dada por

$$\boxed{y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots + C_n e^{m_n x}}$$

Caso 2. La ecuación auxiliar $\phi(m) = 0$ tiene a m_1 como raíz repetida k veces (multiplicidad k), por lo que $(m - m_1)^k$ es un factor de dicha ecuación

La solución complementaria general viene dada por

$$\boxed{y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x} + C_3 x^2 e^{m_1 x} + \ldots + C_k x^{k-1} e^{m_1 x}}$$

Caso 3. La ecuación auxiliar $\phi(m) = 0$ tiene raíces complejas conjugadas, diferentes o repetidas, a saber $m = a \pm bi$ (por parejas)

A cada pareja le corresponde una solución de la forma

$$\boxed{y = e^{ax}\left(C_1 \cos(bx) + C_2 sen(bx)\right)}$$

La solución general (complementaria) de la ecuación diferencial $\phi(D)y = 0$ resulta de combinar las soluciones anteriores, con las otras soluciones de la ecuación auxiliar $\phi(m) = 0$; para la cual, se aplican, según corresponda, los casos vistos para las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden.

Ejemplo 2.2

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas

1. $y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0$
2. $3y''' - 19y'' + 36y' - 10y = 0$
3. $2y''' + y'' - 18y' - 9y = 0$
4. $y''' - 3y'' + 4y = 0$
5. $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 2y''' + 4y'' + y' + 2y = 0$

Solución 1: $y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0$

Note que es una ecuación diferencial de orden superior homogénea tiene ecuación característica asociada o auxiliar :

$m^4 + 3m^2 - 4 = 0$
$\Rightarrow (m^2 - 1)(m^2 + 4) = 0$
$\Rightarrow (m-1)(m+1)(m-2i)(m+2i) = 0$

de donde son soluciones de ella $m_1 = 1$; $m_2 = -1$; $m_3 = 2i$; $m_4 = -2i$, luego de esta forma se tiene por soluciones de la ecuación diferencial homogénea:

$y_1 = e^x$; $y_2 = e^{-x}$; $y_3 = \cos(2x)$; $y_4 = \operatorname{sen}(2x)$

Se puede comprobar que $W(e^x, e^{-x}, cos(2x), sen(2x)) \neq 0$ en cierto intervalo común I, así de esta forma se tiene entonces por solución general de la ecuación diferencial homogénea:

$$y = C_1 \cdot e^x + C_2 e^{-x} + C_3 cos(2x) + C_4 sen(2x)$$

para C_1, C_2, C_3, C_4 constantes arbitrarias.

Solución 2: $3y''' - 19y'' + 36y' - 10y = 0$

Dicha ecuación diferencial tiene por ecuación característica asociada o auxiliar a:

$$3m^3 - 19m^2 + 36m - 10 = 0$$

en la cual aplicamos técnica de división sintéctica

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -19 & 36 & -10 \\ \frac{1}{3} & & 1 & -6 & 10 \\ \hline & 3 & -18 & 30 & 0 \end{array}$$

y se obtiene que una solución es $m = \frac{1}{3}$ y además el polinomio $3m^2 - 18m^2 + 30 = 0$ mediante la fórmula general.

$$\Rightarrow m = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = 3 \pm i$$

de donde se generan las soluciones linealmente independientes $y_1 = e^{\frac{x}{3}}$, $y_2 = e^{3x}\cos(x)$, $y_3 = e^{3x}\operatorname{sen}(x)$ $(W \neq 0)$. De esta forma la ecuación homogénea tiene por solución

$$y = C_1 e^{\frac{x}{3}} + e^{3x}\left(C_2 \cos(x) + C_3 \operatorname{sen}(x)\right)$$

Solución 3

En la ED: $2y''' + y'' - 18y' - 9y = 0$, se tiene que la ecuación característica es

$$2m^3 + m^2 - 18m - 9 = (m-3)(2m+1)(m+3) = 0$$

$\Rightarrow m_1 = 3, \quad m_2 = \frac{-1}{2} \quad$ y $\quad m_3 = -3$

Por tanto, la solución general está dada por

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{\frac{-1}{2}x} + C_3 e^{-3x}$$

Solución 4

En la ED: $y''' - 3y'' + 4y = 0$, se tiene que la ecuación característica es

$$m^3 - 3m^2 + 4 = (m-2)^2 (m+1) = 0$$

$\Rightarrow m_1 = -1 \quad$ y $\quad m_2 = 2$ (raíz real doble)

La solución general está dada por

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}$$

Solución 5

En la ED: $y^{(5)}+2y^{(4)}+2y'''+4y''+y'+2y=0$ se tiene que la ecuación característica es

$$(m+2)\left(m^2+1\right)^2=0$$

$\Rightarrow m_1=-2 \quad$ y $\quad m_2=\pm i$ (raíz compleja doble). Por tanto, la solución general está dada por

$$y=C_1e^{-2x}+C_2senx+C_3\cos x+C_4xsenx+C_5x\cos x$$

Ejemplo **2.3**

Considere la ecuación diferencial **J:** $y''(x)+a_1y'(x)+a_0y(x)=G(x)$ con solución particular $y_1=\cos(2x)$. Además sean $y_2(x)=e^{-x}$, $y_3(x)=e^{2x}$ soluciones de la homogénea asociada. Determine

1. La solución general de ecuación diferencial dada por **J**.
2. El valor de las constantes a_0 y a_1, y la función $G(x)$.

Solución

a) De acuerdo a la teoría se tiene que al ser $y_2(x)=e^{-x}$, $y_3(x)=e^{2x}$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada estas son LI y además como $y_1=\cos(2x)$ es solución particular de la ED lineal no homogénea, se tiene que la solución general de **J** viene dada por

$$\boxed{y=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{2x}+\cos(2x)}$$

b) Por otro lado para hallar a_0 y a_1 se considera la ED homogénea asociada a **J**, de la cual se sabe que tiene solución $y_h=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{2x}$, con lo que $m=-1$ y $m=2$ son raíces del polinomio característico m^2-m-2. De donde la ED homogénea es $y''-y'-2y=0$ y de esta forma se desprende que $a_1=-1$ y $a_0=-2$.

Para determinar la función $G(x)$ se considera la solución particular $y=\cos(2x)$, la cual debe satisfacer la ecuación diferencial dada por **J**, de esta forma derivándola

$y'=-2\operatorname{sen}(2x)\Rightarrow y''=-4\cos(2x)$ y sustituyendo en **J** se tiene que

$$-4\cos(2x)+2\operatorname{sen}(2x)-2\cos(2x)=G(x)$$

De donde finalmente $2\operatorname{sen}(2x)-6\cos(2x)=G(x)$ y la ED asociada viene dada por

$$\boxed{y''-y'-2y=2\operatorname{sen}(2x)-6\cos(2x)}$$

Ejemplo 2.4

Determine el valor de las constantes a, b, c, d y la función f tales que la ecuación diferencial $y^{(4)} + ay''' + by'' + cy' + dy = f(x)$ tenga como solución general:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + e^{-x}(C_3 \cdot \operatorname{sen}(3x) + C_4 \cdot \cos(3x)) + x^2 + 4 \qquad (*)$$

Solución:

Por la forma que presenta la solución general de la ecuación diferencial dada se tiene que la ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea posee como solución a 1 (repetido) y las soluciones complejas $-1 \pm 3i$, por lo que la ecuación característica tiene la forma:

$$\begin{aligned}(m-1)(m-1)[m-(-1+3i)][m-(-1-3i)] &= (m^2-2m+1)\left[(m+1)^2-(3i)^2\right] \\ &= (m^2-2m+1)\left[m^2+2m+1+9\right] \\ &= (m^2-2m+1)\left[m^2+2m+10\right] \\ &= m^4+7m^2-18m+10\end{aligned}$$

De la ecuación característica anterior se deduce fácilmente que $a = 0$, $b = 7$, $c = -18$, $d = 10$ y la ecuación diferencial correspondiente tiene la forma

$$y^{(4)} + 7y'' - 18y' + 10y = f(x) \; (**)$$

Como en la solución general dada por (*) el término $x^2 + 4$ corresponde a una solución particular de (**), entonces procedemos de la siguiente forma:

Sea $y_p(x) = x^2 + 4$, entonces $y_p'(x) = 2x$; $y_p''(x) = 2$; $y_p'''(x) = y^{(4)} = 0$. De donde:

$$\begin{aligned}y^{(4)} + 7y'' - 18y' + 10y = f(x) &\Rightarrow 0 + 7(2) - 18(2x) + 10(x^2+4) = f(x) \\ &\Rightarrow 14 - 36x + 10x^2 + 40 = f(x)\end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = 10x^2 - 36x + 54$$

y la ecuación diferencial asociada viene dada por

$$\boxed{y^{(4)} + -4y''' + 15y'' - 22y' + 10y = 10x^2 - 36x + 54}$$

Ejemplo 2.5 **Ecuación diferencial dada la solución general**

Determine la ecuación diferencial lineal que tiene como solución general la función dada por:

a) $y = c_1 e^{7x} + c_2 e^{3x} - 9xe^{3x} + 2x + \dfrac{20}{21}$

> $b)\ y = A\,\mathrm{sen}(2x) + B\cos(2x) + e^{-x}(C\,\mathrm{sen}(x) + D\cos(x))$

Solución a)

De la solución general dada se desprende que $y_H = c_1e^{7x} + c_2e^{3x}$ y $y_P = -9xe^{3x} + 2x + \dfrac{20}{21}$
Como $y_H = c_1e^{7x} + c_2e^{3x}$ comprende dos constantes arbitrarias, se tiene que la ecuación diferencial lineal asociada a ella es de orden dos, en donde : $y_1 = e^{7x} \wedge y_2 = e^{3x}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea.

Por otra parte, de las soluciones $y_1 = e^{7x} \wedge y_2 = e^{3x}$ se tiene que $m_1 = 7 \wedge m_2 = 3$ deben ser raíces de la ecuación característica o auxiliar de la ecuación diferencial homogénea asociada y de esta forma se debe cumplir $(m-7)(m-3) = 0$, es decir,

$$m^2 - 10m + 21 = 0$$

es la ecuación característica (EC) a la ecuación diferencial homogénea:

$$y'' - 10y' + 21y = 0$$

luego, la ecuación diferencial lineal no homogénea es de la forma: $y'' - 10y' + 21y = F(x)$.

En ella tiene que cumplirse que $y_P = -9xe^{3x} + 2x + \dfrac{20}{21}$ sea solución. Por lo que al obtener su primera y segunda derivada y sustituir debe satisfacerla, de esta forma

$y_P' = -9e^{3x} - 27xe^{3x} + 2, \quad y_P'' = -27e^{3x} - 27e^{3x} - 81xe^{3x} = -54e^{3x} - 81xe^{3x}$

al sustituir en $y'' - 10y' + 21y = F(x)$ se obtiene:

$-54e^{3x} - 81xe^{3x} - 10(-9e^{3x} - 27xe^{3x} + 2) + 21\left(-9xe^{3x} + 2x + \dfrac{20}{21}\right) = F(x)$

$\Rightarrow -54e^{3x} - 81xe^{3x} + 90e^{3x} + 270xe^{3x} - 20 - 189xe^{3x} - 42x + 20 = F(x).$

Por lo que se tiene $36e^{3x} - 42x = F(x)$. De donde finalmente la ecuación diferencial lineal que se busca corresponde a :

$$\boxed{y'' - 10y' + 21y = 36e^{3x} - 42x}$$

$b)\ y = A\,\mathrm{sen}(2x) + B\cos(2x) + e^{-x}(C\,\mathrm{sen}(x) + D\cos(x))$

Solución b)

Primero de acuerdo a la solución general dada note involucra cuatro constantes arbitrarias, por lo que corresponde a una ecuación diferencial lineal homogénea de orden cuatro.

Además recordando que cuando una solución de la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial homogénea es de la forma $m = a \pm bi$ dicha solución va a estar dada por $y = e^{ax}\left(C_1\cos(bx) + C_2\,\mathrm{sen}(bx)\right)$, de donde se deduce que las raíces de la ecuación característica para nuestra ecuación diferencial solicitada corresponden a $m = \pm 2i$ y $m = -1 \pm i$, y de esta forma debe darse

$$(m-2i)(m+2i)(m+1-i)(m+1+i) = 0$$

$$\Rightarrow (m^2+4)(m^2+m-im+m+1-i+im+i+1) = 0$$

$$\Rightarrow (m^2+4)(m^2+2m+2) = 0$$

siendo de esta forma la ecuación característica

$$m^4+2m^3+6m^2+8m+8 = 0$$

Por lo que finalmente la ecuación diferecial lineal buscada corresponde a

$$\boxed{y^{(4)}+2y'''+6y''+8y'+8y = 0}$$

2.1.3 Ejemplos mediante videos explicativos

Ejemplo 2.6

Determine una ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes de menor orden posible para que las funciones

$$f_(x) = 1, f_2(x) = e^{3x}\cos x, f_3(x) = e^{3x}\operatorname{sen} x$$

constituyan un sistema fundamental de soluciones.

Solución

Puede visualizar explicación y solución de dicho ejemplo, mediante video explicativo a través del link: `https://www.youtube.com/watch?v=31tFuexpl0g`

Ejemplo 2.7 **Ecuación diferencial con coeficientes reales**

Determinar una ecuación diferencial lineal de **coeficientes reales de menor orden** posible que tiene a $y_1(x) = x$ y $y_2(x) = x\cos(3x)$ como soluciones de la homogénea y a $y(x) = 2x^3$ como una solución particular.

Solución

Dado que se pretende que las funciones $y_1(x) = x$ y $y_2(x) = x\cos(3x)$ sean soluciones de la ecuación diferencial homogénea, de estas se desprende que $m = 0$ y $m = 3i$ deben ser raíces dobles del polinomio característico asociado a la ecuación diferencial lineal homogénea, y como se quiere una EDL con coeficientes reales y de menor orden posible, se debe considerar $m = -3i$ también como raíz doble de la ecuación característica (EC). De esta forma debe darse :

$$m^2(m-3i)^2(m+3i)^2 = 0 \Rightarrow m^6+18m^4+81m^2 = 0$$

Por lo que la ecuación diferencial Homogénea asociada viene dada por $y^{(6)} + 18y^4 + 81y'' = 0$ y la ecuación diferencial no homogénea asociada es de la forma

$$y^{(6)} + 18y^4 + 81y'' = g(x)$$

Ahora basta encontrar la función $g(x)$, de donde se considera la solución particular $y(x) = 2x^3$, la cual debe verificar la ecuación diferencial $y^{(6)} + 18y^4 + 81y'' = g(x)$, así se deben calcular las derivadas de la y_p :

$$y' = 6x^2 \Rightarrow y'' = 12x \Rightarrow y''' = 12 \Rightarrow y^{(4)} = y^{(5)} = y^{(6)} = 0$$

y sustituyendo en dicha ecuación diferencial se tendría que $0 + 18 \cdot 0 + 81 \cdot 12x = g(x) \Rightarrow g(x) = 972x$. Por lo tanto la ecuación diferencial lineal no homogénea buscada es

$$\boxed{y^{(6)} + 18y^4 + 81y'' = 972x}$$

Puede visualizar explicación y solución de dicho ejemplo, mediante video explicativo a través del link: https://www.youtube.com/watch?v=XMASlgduxYo

Ejemplo 2.8

Considere la ecuación diferencial

$$y'''(x) + a_1y'(x) + a_2y(x) = G(x) \ \ [\mathbf{1}]$$

con solución particular $y_1 = x\cos(2x)$. Además, sean $y_2(x) = e^{-x}, y_3(x) = e^{2x}$ soluciones de la homogénea. Determine:

a. Solución general de la ecuación diferencial **[1]**.
b. El valor de las constantes a_1, a_2 y la función $G(x)$.

Solución

Puede visualizar explicación y solución de dicho ejemplo, mediante video explicativo a través del link: https://www.youtube.com/watch?v=wjXAehfND-0

Ejercicios 2.1 [**Ejercicios de retroalimentación**]

2.1.1 Para cada ecuación diferencial lineal homogénea determine la solución general. Posteriormente ingrese a página interactiva **Ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de orden dos homogénea** para visualizar paso a paso proceso de resolución y comprobar dichos resultados.

a. $2y''(x)-5y'(x)-3y(x)=0$
b. $4y''(x)+4y'(x)+y(x)=0$
c. $4y''(x)-y(x)=0$
d. $y''(x)+2y'(x)+5y(x)=0$
e. $y''(x)-2y'(x)+y(x)=0$
f. $9y''(x)-4y(x)=0$
g. $y''(x)=0$
h. $y''(x)+y(x)=0$
i. $16y''(x)+9y(x)=0$
j. $9y''(x)+y(x)=0$
k. $y''(x)-4y'(x)+13y(x)=0$
l. $2y''(x)+5y'(x)=0$
m. $4y''(x)-4y'(x)-y(x)=0$
n. $20y''(x)-5y'(x)=0$
ñ. $4y''(x)-12y'(x)+9y(x)=0$

2.1.2 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas

a. $y^{(4)}+3y''-4y=0$
b. $3y'''-19y''+36y'-y=0$
c. $y^{(5)}-y^{(4)}-2y'''+2y''+y'-y=0$

2.1.3 Determine la ecuación diferencial lineal que tiene como solución general la función dada por:

1. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}$
2. $y=Asen\,(2x)+B\cos(2x)+e^{-x}\,(Csenx+D\cos x)$
3. $y=c_1e^{7x}+c_2e^{3x}-9xe^{3x}+2x+\frac{20}{21}$

2.1.4 Sabiendo que $y=Ae^{\frac{x}{2}}+e^{-2x}\,(Bsen\,(4x)+C\cos(4x))$ es la solución general de la ecuación lineal $\left(a_0D^3+a_1D^2+a_2D+a_3\right)y=0$, determine el valor de los coeficientes a_0,a_1,a_2 y a_3 y escriba la ecuación diferencial resultante.

2.1.5 Determine el valor de las constantes a,b,c,d y la función f tales que la ecuación diferencial

$$y^{(4)}+ay'''+by''+cy'+dy=f(x)$$

tenga como solución general

$$y=(A+Bx)e^x+e^{-x}(C\operatorname{sen}(3x)+D\cos(3x))+x^2+4$$

2.1.6 Sea $\phi(D)y=F(x)$ una ecuación diferencial lineal con coeficientes reales no homogénea, que tiene a $y_1=e^x$, $y_2=x$ soluciones de ED homogenéa asociada a ella y además tiene a $y=3e^{-x}$ como solución de $\phi(D)y=F(x)$. Determine la ecuación diferencial $\phi(D)y=F(x)$

2.1.7 Demuestre que la solución de la ecuación de segundo orden $\left[D^2-2aD+\left(a^2+b^2\right)\right]y=0$ se puede escribir como $y=C_1e^{ax}\cos\left(bx+C_2\right)$

2.1.8 Para cada afirmación indique **V** si es verdadera o **F** si es falsa según así corresponda:

a. Sea $\phi(D)y=0$ una ecuación diferencial lineal con coeficientes reales, que tiene a $y_1=e^x$, $y_2=x$ soluciones. Con certeza se garantiza que la solución general viene dada por $y=C_1e^x+C_2x$ con C_1,C_2 constantes arbitrarias.

b. El menor orden de una ecuación diferencial lineal con coeficientes reales que satisface que $m_1=-16$ y $m_2=-10+i$ (doble) sean raíces del polinomio característico asociado en dicha ecuación diferencial, es orden 5

c. Al considerar $y_1=x, y_2=-3i, y_3=xe^{3x}$ soluciones de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes reales de menor orden posible, se cumple que su solución general viene dada por $y=C_1x+C_2\cos(3x)+C_3\operatorname{sen}(3x)+C_4xe^{3x}$

d. Una ecuación característica posible de una ecuación diferencial lineal homogénea que tenga por solución $y(t)=Ae^{9t}+Bte^{9t}+e^{-3t}(C\cos(\sqrt{11}t)+D\operatorname{sen}(\sqrt{11}t)$ es $m^4+6m^3+20m^2=0$.

2.2 Método de los coeficientes indeterminados

Se sabe que la solución de la ecuación diferencial $\phi\left(D\right)y=F\left(x\right)$ con coeficientes constantes tiene la forma $y=y_c+y_p$. Para esto debemos encontrar primero la solución complementaria y_c de la ecuación homogénea asociada y luego hallar una solución particular y_p de la ecuación no homogénea.

Existe una técnica llamada coeficientes indeterminados que nos permite hallar una solución particular y_p de la ecuación lineal no homogénea de orden n, $\phi\left(D\right)y=F\left(x\right)$ que cumplen con las condiciones simultáneas siguientes:

1. La ecuación defirencial debe ser de coeficientes constantes.
2. La función $F\left(x\right)$ debe contener:
    a) expresiones polinomiales (constantes, lineales, de grado dos, etc)
    b) expresiones exponenciales o trigonométricas de la forma e^{ax}, $sen\left(bx+c\right)$, $\cos\left(bx+c\right)$ donde (a, b y c constantes)
    c) combinaciones lineales de sumas y productos finitos de estas expresiones.

Ejemplo 2.9

Resolver la ecuación diferencial $y''+3y'+2y=4x^2$.

La ecuación homogénea asociada a la ecuación está dada por

$$y''+3y'+2y=0,$$

en notación de operadores $\phi(D)y = (D^2+3D+2)y = 0$ con ecuación característica o auxiliar

$$m^2+3m+2=0$$

de donde $m_1=-2$ y $m_2=-1$. Así las soluciones están dadas por $y_1(x)=e^{-2x}$ y $y_2(x)=e^{-x}$.

Por lo que la solución complementaria de la ecuación homogénea está dada por

$$\boxed{y_c = C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}}$$

Ahora vamos a determinar y_p, la cual debe cumplir que $y_p''+3y_p'+2y_p=4x^2$. Así, parece razonable pensar que y_p tiene la forma

$$y_p(x)=a+bx+cx^2$$

donde $y_p'=b+2cx$ y $y_p''=2c$, luego sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos

$$2c+3(b+2cx)+2\left(a+bx+cx^2\right)=4x^2 \Leftrightarrow 2cx^2+(6c+2b)x+(2c+3b+2a)=4x^2$$

igualando coeficientes de polinomios se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 2c+3b+2a=0 \\ 6c+2b=0 \\ 2c=4 \end{cases}, \text{Cuya solución es : } [a=7, b=-6, c=2]$$

Por tanto, la solución particular está dada por $\boxed{y_p = 7-6x+2x^2}$ y la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es

$$\boxed{y = C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+7-6x+2x^2}$$

Existen algunas **generalizaciones según casos para la función** $F(x)$ de la siguiente manera:

Caso 1

La forma de la solución particular (o bien de $F(x)$) no está contenida en la solución complementaria, o sea

$$y_p \not\subset y_c.$$

Lo anterior se puede sintetizar diciendo que la solución particular NO está contenida en la solución complementaria u homogénea(entiéndase ningún término de la propuesta de la y_p coincide con términos de la y_h). A continuación algunas propuestas que puede ser de utilidad para identificar la forma de la solución particular.

Propuestas de soluciones particulares basado en la estructura de $F(x)$

Función $F(x)$	**Forma de y_p.**
x^n	$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$
e^{ax}	Ae^{ax}
$sen(ax+b)$ o $\cos(ax+b)$	$Asen(ax+b) + B\cos(ax+b)$
$x^n e^{ax}$	$a_n e^{ax} x^n + a_{n-1}e^{ax}x^{n-1} + \ldots + e^{ax}a_0$
$x^n sen(ax+b)$ o $x^n \cos(ax+b)$	$a_n sen(ax+b)x^n + a_{n-1}sen(ax+b)x^{n-1} + \ldots + sen(ax+b)a_0$ $+b_n\cos(ax+b)x^n + b_{n-1}\cos(ax+b)x^{n-1} + \ldots + \cos(ax+b)b_0$
$e^{ax}sen(ax+b)$ o $e^{ax}\cos(ax+b)$	$Ae^{ax}sen(ax+b) + Be^{ax}\cos(ax+b)$
$x^n e^{ax} sen(ax+b)$ o $x^n e^{ax} sen(ax+b)$	$a_n sen(ax+b)e^{ax}x^n + a_{n-1}sen(ax+b)e^{ax}x^{n-1} + \ldots + sen(ax+b)e^{ax}a_0$ $+b_n\cos(ax+b)e^{ax}x^n + b_{n-1}\cos(ax+b)e^{ax}x^{n-1} + \ldots + \cos(ax+b)e^{ax}b_0$

Ejemplo 2.10

Resuelva la siguiente ecuación diferencial $\quad y'' + 3y' - 10y = x(6e^x - 5)$

Solución

La ecuación homogénea asociada es $y'' + 3y' - 10y = 0$ donde $m^2 + 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow m = -5 \vee m = 2.$

Luego la solución complementaria será

$$\boxed{y_c = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}}$$

Para la solución particular cuando derivamos $g(x) = 6xe^x$ tenemos $g'(x) = 6(e^x + xe^x)$ y $g''(x) = 6(e^x + e^x + xe^x)$ por eso para g necesitamos una función y_p que tenga la forma $y_{p_1} = Axe^x + Be^x$.
Para la función $r(x) = -5x$ necesitamos una función y_p que tenga la forma $y_{p_2} = Cx + D$, por lo que para la función particular $\quad y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$, se tiene que la forma de dicha solución particular estaría dada por:

$$\boxed{y_p = Axe^x + Be^x + Cx + D,}$$

que además cumple las condiciones del caso I ($y_p \not\subset y_c$). Luego derivando

$$y_p' = A(e^x + xe^x) + Be^x + C$$
$$y_p'' = A(e^x + e^x + xe^x) + Be^x$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial original $\ y'' + 3y' - 10y = 6xe^x - 5x\ $ tenemos debe cumplirse

$$2Ae^x + Axe^x + Be^x + 3\left(A\left(e^x + xe^x\right) + Be^x + C\right) - 10\left(Axe^x + Be^x + Cx + D\right) = 6xe^x - 5x$$

De aquí se construye el sistema

$$\begin{cases} 5A - 6B = 0 \\ -6A = 6 \\ 3C - 10D = 0 \\ -10C = -5 \end{cases}, \left[A = -1, B = -\tfrac{5}{6}, C = \tfrac{1}{2}, D = \tfrac{3}{20}\right]$$

Así, la solución particular será $y_p = -xe^x + \dfrac{-5}{6}e^x + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{20}$. y de esta manera la solución general será

$$\boxed{y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} + -xe^x + \tfrac{-5}{6}e^x + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{20}}$$

Ejemplo 2.11

Resuelva la ecuación $y'' + 2y' + y = senx + 3\cos x$

Solución

En dicha ecuación diferencial, la ecuación homogénea asociada es $y'' + 2y' + y = 0$, se tiene por ecuación auxiliar

$$m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 = 0$$

Luego, la solución complementaria de la ecuación será

$$\boxed{y_c = C_1 e^x + C_2 xe^x}$$

Para la solución particular, note que cuando se deriva $g(x) = senx + 3\cos x$, se tiene $g'(x) = \cos x - 3senx$ y $g''(x) = -senx - 3\cos x$ por eso para g necesitamos una función y_p que tenga la forma

$$\boxed{y_p = Asenx + B\cos x,}$$

que además note que cumple que $y_p \not\subset y_c$ en I, con $y_p' = A\cos x - Bsenx$ y $y_p'' = -Asenx - B\cos x$

Sustituyendo en la ecuación diferencial original, $y'' + 2y' + y = senx + 3\cos x$ tenemos debe cumplirse

$$-Asenx - B\cos x + 2\left(A\cos x - Bsenx\right) + \left(Asenx + B\cos x\right) = senx + 3\cos x$$

De aquí se construye el sistema

$$\begin{cases} -2B = 1 \\ 2A = 3 \end{cases}, \text{ cuya solución es: } \left[A = \tfrac{3}{2}, B = \tfrac{-1}{2}\right]$$

Así, la solución particular será $y_p = \dfrac{3}{2} senx - \dfrac{1}{2}\cos x$, de esta manera la solución general será

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \tfrac{3}{2} senx - \tfrac{1}{2}\cos x}$$

Ejemplo 2.12

Determine la solución general de la ecuación diferencial $y^{(4)} - 2y'' + y = 8084(cos(x) + sen(x))$.

Solución

La ecuación característica relacionada a la ecuación diferencial homogénea corresponde a: $m^4 - 2m^2 + 1 = 0$, la cual tiene por soluciones: $m = -1$ (doble) y $m = 1$ (doble). De esta forma se tiene

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$$

Para obtener la solución particular se propone $y_p = Asen(x) + Bcos(x)$, en donde

$$\begin{aligned}
&y_p' = Acos(x) - Bsen(x)\\
&\Rightarrow y_p'' = -Asen(x) - Bcos(x)\\
&\Rightarrow y_p''' = -Acos(x) + Bsen(x)\\
&\Rightarrow y_p^{(4)} = Asen(x) + Bcos(x)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial dada se obtiene:

$$\begin{aligned}
&Asen(x) + Bcos(x) - 2(-Asen(x) - Bcos(x)) + Asen(x) + Bcos(x) = 8084(cos(x) + sen(x))\\
&\Rightarrow Asen(x) + Bcos(x) + 2Asen(x) + 2Bcos(x) + Asen(x) + Bcos(x) = 8084(cos(x) + sen(x))\\
&\Rightarrow 4Asen(x) + 4Bcos(x) = 8084cos(x) + 8084sen(x)
\end{aligned}$$

de donde debe darse $4A = 4B = 8084 \Rightarrow A = B = 2021$. Por lo que

$$y_p = 2021cos(x) + 2021sen(x)$$

Finalmente la solución general de la ecuación diferencial viene dada por:

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} + 2021cos(x) + 2021sen(x)}$$

Caso 2

Una o varias de las funciones que conforman la propuesta de y_p también forman parte de algún o algunos de los componentes de la solución complementaria y_c, es decir, $y_p \subset y_c$.

Aquí la diferencia es que se deben considerar cuántas veces aparece en la solución complementaria, el o los componentes que también están en la función $F(x)$ y que, por lo tanto formaran parte de y_p.

Para hacer la propuesta adecuada de y_p se debe seguir un procedimiento análogo a lo estudiado en lo que respecta a **"raíces repetidas" reales o complejas, de la ecuación auxiliar** asociada a la ecuación homogénea.

Ejemplo 2.13

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $y'' - 2y' + y = 7e^x$, con $y(0) = 3$; $y'(0) = 2$
2. $y''' - 3y'' = 1 + e^{3x}$
3. $4y'' - 4y' + y = 12 + 4e^{\frac{x}{2}}$
4. $y'' + y = -4senx$
5. $y^{(4)} - 2y''' + 4y'' = 1 + xe^x$
6. $y''' + 2y'' = -8x + 3e^{-2x}$. **(ejercicio)**

Solución 1

Primero se resuleve la ecuación $y'' - 2y' + y = 0$ (*), la cual tiene por ecuación característica $m^2 - 2m + 1 = 0$, con solución $m = 1$ (repetida). Por lo que la solución de (*) es

$$y_h(x) = ae^x + bxe^x$$

Luego se va a proponer la forma de una solución particular para $y'' - 2y' + y = 7e^x$. En este caso la propuesta inicial es $y_p(x) = Ae^x$, sin embargo, para obtener una solución particular que sea linealmente independiente con y_h, la solución propuesta puede ser:

$$\begin{aligned} y_p(x) = Ax^2e^x \quad &\Rightarrow \quad y_p'(x) = 2Axe^x + Ax^2e^x \\ &\Rightarrow \quad y_p''(x) = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y = 7e^x \quad &\Rightarrow \quad 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x - 2(2Axe^x + Ax^2e^x) + Ax^2e^x = 7e^x \\ &\Rightarrow \quad 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x - 4Axe^x - 2Ax^2e^x + Ax^2e^x = 7e^x \\ &\Rightarrow \quad 2Ae^x = 7e^x \end{aligned}$$

De esta forma $A = \frac{7}{2}$, de donde $y_p(x) = \dfrac{7}{2}x^2e^x$. Así se tiene que solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = ae^x + bxe^x + \frac{7}{2}x^2e^x$$

utilizando las condiciones iniciales dadas $y(0) = 3$; $y'(0) = 2$, se va a determinar las constantes a y b:

$y(0) = ae^0 + 0 + 0 = a = 3$, por lo que $y(x) = 3e^x + bxe^x + \dfrac{7}{2}x^2e^x$
$y'(x) = 3e^x + be^x + bxe^x + 7xe^x + \frac{7}{2}x^2e^x \Rightarrow y(x) = 3 + b = 2 \Rightarrow b = -1$

De donde finalmente la solución al PVI dado corresponde a

$$\boxed{y(x) = 3e^x - xe^x + \frac{7}{2}x^2e^x}$$

Solución 2

Primero se resuelve $y''' - 3y'' = 0$, la cual tiene por ecuación característica $m^3 - 2m^2 = 0$, con solución $m = 0$ (doble) y $m = 2$. Por lo que la solución de la homogénea corresponde a

$$y_c(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{3x} \qquad (*)$$

Por otra parte, dado que la función externa es $g(x) = 1 + e^{3x}$ se propone inicialmente como solución particular la forma $y_p = B_1 + B_2 e^{3x}$. Dado que esta forma propuesta es coincidente con los términos de la solución de la homogénea $C_1, C_3 e^{3x}$ establece que la solución particular de la ecuación diferencial $y''' - 3y'' = 1 + e^{3x}$ tiene la forma

$$y_p(x) = Ax^2 + Bxe^{3x}$$

donde A y B son constantes por determinar. Luego,

$(y_p)'(x) = 2Ax + Be^{3x} + 3Bxe^{3x}$;
$(y_p)''(x) = 2A + 6Be^{3x} + 9Bxe^{3x}$;
$(y_p)'''(x) = 27Be^{3x} + 27Bxe^{3x}$

Ahora se sustituyen las derivadas en la ED original:

$$(27Be^{3x} + 27Bxe^{3x}) - 3(2A + 6Be^{3x} + 9Bxe^{3x}) = 1 + e^{3x} \Leftrightarrow B = \frac{1}{9}, \qquad A = \frac{-1}{6}$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$\boxed{y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{3x} - \frac{x^2}{6} + \frac{xe^{3x}}{9}}.$$

Solución 3

En la ED: $4y'' - 4y' + y = 12 + 4e^{\frac{x}{2}}$, la ecuación característica o auxiliar es $4m^2 - 4m + 1 = (2m-1)^2 = 0$, de donde $m = \frac{1}{2}$, es raíz repetida de multiplicidad 2, entonces la solución complementaria es

$$y_c = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 x e^{\frac{x}{2}}$$

Como $F(x) = 12 + 4e^{\frac{x}{2}}$, parece razonable según lo que hemos visto que la solución particular podría ser de la forma $y_p = A + Be^{\frac{x}{2}}$, de dónde $y_p' = \dfrac{B}{2} e^{\frac{x}{2}}$ y $y_p'' = \frac{B}{4} e^{\frac{x}{2}}$,

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene $4\left(\dfrac{B}{4} e^{\frac{x}{2}}\right) - 4\dfrac{B}{2} e^{\frac{x}{2}} + A + Be^{\frac{x}{2}} = A = 12 + 4e^{\frac{x}{2}}$

De dónde se obtiene que $A + 0 = 12 + 4e^{\frac{x}{2}}$, de donde $A = 12$ y $0 = 4e^{\frac{x}{2}}$, esta última es una contradicción pues no existe $x \in \mathbb{R}$ que cumpla dicha igualdad.

Podemos notar que $y_{p_2} = Be^{\frac{x}{2}}$ está presente en la solución complementaria $y_c = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 x e^{\frac{x}{2}}$, lo que significa que $e^{\frac{x}{2}}$ es una solución de la ecuación $4y'' - 4y' + y = 0$, por lo que cualquier múltiplo de ella, como $Be^{\frac{x}{2}}$ también lo es, así que al sustituirla en la ecuación $4y'' - 4y' + y = 4e^{\frac{x}{2}}$ obtendremos $0 = 4e^{\frac{x}{2}}$, así que la suposición de y_p es incorrecta.

Así, dado que y_c tiene prioridad sobre y_p, como $e^{\frac{x}{2}}$ aparece por primera y segunda vez en y_c entonces a y_{p_2} le corresponde la tercera posición, por lo que la propuesta buscada debe ser

$$y_{p_2} = Bx^2 e^{\frac{x}{2}},$$

entonces $y'_{p_2} = B\left(2xe^{\frac{x}{2}} + \dfrac{x^2 e^{\frac{x}{2}}}{2}\right)$ y $y''_{p_2} = B\left(2\left(e^{\frac{x}{2}} + \dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{2}\right) + \dfrac{2xe^{\frac{x}{2}} + x^2\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}}{2}\right)$, sustituyendo en la ecuación

$$4y'' - 4y' + y = 4e^{\frac{x}{2}}$$

se obtiene que $4\left(B\left(2\left(e^{\frac{x}{2}} + \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{2}\right) + \frac{2xe^{\frac{x}{2}} + x^2\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}}{2}\right)\right) - 4\left(B\left(2xe^{\frac{x}{2}} + \frac{x^2 e^{\frac{x}{2}}}{2}\right)\right) + Bx^2 e^{\frac{x}{2}} = 4e^{\frac{x}{2}}$

De lo anterior se desprende que $8Be^{\frac{x}{2}} = 4e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow B = \frac{1}{2}$. Así, la solución particular es

$$\boxed{y_p = 12 + \tfrac{1}{2}x^2 e^{\frac{x}{2}}}$$

Por lo tanto la solución general será

$$\boxed{y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 xe^{\frac{x}{2}} + 12 + \tfrac{1}{2}x^2 e^{\frac{x}{2}}}$$

Solución 4

En la ED: $y'' + y = -4senx$, se tiene que la ecuación característica es $m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm i$, entonces la solución complementaria es

$$\boxed{y_c = C_1 senx + C_2 \cos x}$$

Como $F(x) = -4senx$, parece razonable según lo que hemos visto que la solución particular podría ser de la forma $y_p = Asenx + B\cos x$, de dónde $y'_p = A\cos x - Bsenx$ y $y''_p = -Asenx - B\cos x$. Luego sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene

$$-Asenx - B\cos x + Asenx + B\cos x = 0 = -4senx$$

De dónde se obtiene que $0 = -4senx$, de esta forma no es posible encontrar el valor de A y de B.

Podemos notar que $y_{p_2} = Asenx + B\cos x$ está presente en la solución complementaria $y_c = C_1 senx + C_2 \cos x$, lo que significa que $senx$ y $\cos x$ son soluciones de la ecuación $y'' + y = 0$, por lo que cualquier múltiplo de ella, como $Asenx$ y $B\cos x$ también lo son, así que al sustituirlas en la ecuación $y'' + y = -4senx$ obtendremos $0 = -4senx$, así que la suposición de y_p es incorrecta.

Así, dado que y_c tiene prioridad sobre y_p, como $senx$ y $\cos x$ aparecen por primera en y_c entonces a y_p le corresponde la segunda posición, por lo que la propuesta buscada debe ser

$$y_p = Axsenx + Bx\cos x,$$

entonces al derivar se obtiene

$$y'_p = A(senx + x\cos x) + B(\cos x - xsenx) \Rightarrow y''_p = A(2\cos x - xsenx) + B(-2senx - x\cos x),$$

luego sustituyendo en la ecuación $y'' + y = -4senx$ se tiene que

$A(2\cos x - xsenx) + B(-2senx - x\cos x) + Axsenx + Bx\cos x = 2A\cos x - 2Bsenx = -4senx$

de donde se tiene $2A = 0$ y $-2B = -4 \Rightarrow A = 0$ y $B = 2$. Así, la solución particular sería

$$\boxed{y_p = 2x\cos x}$$

Por lo tanto la solución general será

$$y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + 2x\cos x,$$

si se consideran las condiciones $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ y $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Para $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ se tiene $C_1 = -1$ y como $y' = C_1 \cos x - C_2 \operatorname{sen} x + 2(\cos x - x \operatorname{sen} x)$ entonces para $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 0 = -C_2 - 2 \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow C_2 = -\pi$

Por lo tanto, la solución general viene dada por

$$\boxed{y = -\operatorname{sen} x - \pi\cos x + 2x\cos x}$$

Solución 5

En la ecuación diferencial $y^{(4)} - 2y''' + 4y'' = 0$, se tiene por ecuación auxilar $m^4 - 2m^3 + 4m^2 = 0$, en donde

$$\begin{aligned}
& m^4 - 2m^3 + 4m^2 = 0 \\
\Rightarrow\quad & m^2(m^2 - 2m + 4) = 0 \\
\Rightarrow\quad & m = 0 \quad \vee \quad m = 0 \quad \vee \quad m = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i
\end{aligned}$$

$$\boxed{y_h(x) = c_1 + c_2 x + e^x\left(c_3 \operatorname{sen}\sqrt{3}x + c_4 \cos\sqrt{3}x\right)}$$

Dada que en $y^{(4)} - 2y''' + 4y'' = 1 + xe^x$ se tiene que $F(x) = 1 + xe^x$ se propone como solución particular de tal forma ninguna de sus partes coincida con la y_h a

$$y_p(x) = ax^2 + (cx + d)e^x$$

Luego derivando cuatro veces

$$\begin{aligned}
& y_p(x) = ax^2 + (cx+d)e^x \\
\Rightarrow\quad & y_p'(x) = 2ax + ce^x + (cx+d)e^x \\
\Rightarrow\quad & y_p''(x) = 2a + ce^x + ce^x + (cx+d)e^x = 2a + 2ce^x + (cx+d)e^x \\
\Rightarrow\quad & y_p'''(x) = 2ce^x + ce^x + (cx+d)e^x = 3ce^x + (cx+d)e^x \\
\Rightarrow\quad & y_p^{(4)}(x) = 3ce^x + ce^x + (cx+d)e^x = 4ce^x + (cx+d)e^x
\end{aligned}$$

Así sustituyendo en la ecuación diferencial $y^{(4)} - 2y''' + 4y'' = 1 + xe^x$ se tiene

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & 4ce^x + (cx+d)e^x - 2(3ce^x + (cx+d)e^x) + 4(2a + 2ce^x + (cx+d)e^x) = 1 + xe^x \\
\Rightarrow\quad & 4ce^x + cxe^x + de^x - 6ce^x - 2cxe^x - 2de^x + 8a + 8ce^x + 4cxe^x + de^x = 1 + xe^x \\
\Rightarrow\quad & 8a + (4c + d - 6c - 2d + 8c + 4d)e^x + (cx - 2cx + 4cx)e^x = 1 + xe^x \\
\Rightarrow\quad & 8a + (6c + 3d)e^x + 3cxe^x = 1 + xe^x
\end{aligned}$$

De donde se extrae el sistema $8a = 1, 6c + 3d = 0, 3c = 1$, el cual al resolver se obtiene $a = \dfrac{1}{8}$, $c = \dfrac{1}{3}$, $d = \dfrac{-2}{3}$, luego solución particular viene dada por

$$\boxed{y_P(x) = \frac{1}{8}x^2 + \left(\frac{1}{3}x + \frac{-2}{3}\right)e^x}$$

Por lo tanto, la solución general corresponde a

$$\boxed{y(x) = c_1 + c_2x + e^x\left(c_3 \operatorname{sen}\sqrt{3}x + c_4\cos\sqrt{3}x\right) + \tfrac{1}{8}x^2 + \left(\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}\right)e^x}$$

Solución 6: **Respuesta:** $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-2x} + x^2 - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{3}{4}xe^{-2x}$

Ejemplo 2.14

Resuelva el siguiente problema de valores frontera: $y'' + y = 4x + 10sen(x)$ con $y(\pi) = 0$ y $y'(\pi) = 2$

Solución

Se procede primero a resolver la ecuación diferencial homogénea y luego la solución particular por medio de coeficientes indeterminados.

En la ecuación diferencial homogénea $y'' + y = 0$ se tiene como ecuación característica asociada: $m^2 + 1 = 0$, la cual al resolver tiene por raíces a $m = \pm i$ de esta forma

$$y_H = C_1\cos(x) + C_2\operatorname{sen}(x)$$

con C_1, C_2 constantes arbitrarias. Luego, como $F(x) = 4x + 10\operatorname{sen}(x)$, entonces se propone y_P de en dos partes una y_{P_1} para $F_1(x) = 4x$ y una y_{P_2} para $F_2(x) = 10\operatorname{sen}(x)$ siendo la propuesta final $y_P = y_{P_1} + y_{P_2}$. Así de esta forma para la $F_1(x) = 4x$ se propone $y_{P_1} = Ax + B$, la cual note no conicide ninguna de sus partes cona la y_h por tanto es válida. Asimismo para la $F_2(x) = 10\operatorname{sen}(x)$ se propone inicialmente $y_{P_2} = C\operatorname{sen}(x) + D\cos(x)$, sin embargo, note que en y_{P_2} hay términos coincidentes a y_H por lo que se hace una nueva propuesta $y_{P_2} = Cx\operatorname{sen}(x) + Dx\cos(x)$.

De esta forma finalmente se propone

$$y_P = Ax + B + Cx\cdot\operatorname{sen}(x) + Dx\cdot\cos(x)$$

$\Rightarrow y_P' = A + C\cdot\operatorname{sen}(x) + Cx\cdot\cos(x) + D\cdot\cos(x) - Dx\cdot\operatorname{sen}(x)$
$\Rightarrow y_P'' = 2C\cdot cos(x) - Cx\cdot\operatorname{sen}(x) - 2D\cdot\operatorname{sen}(x) - Dx\cdot\cos(x)$.

Para hallar las constantes involucradas en la y_P, se considera que ella es solución, entonces hay que sustituir ella y sus derivadas en la ecuación diferencial $y_P'' + y_P = 4x + 10sen(x)$, de donde :

$2C\cdot\cos(x) - Cx\cdot\operatorname{sen}(x) - 2D\cdot\operatorname{sen}(x) - Dx\cdot\cos(x) + Ax + B + Cx\cdot\operatorname{sen}(x) + Dx\cdot\cos(x) = 4x + 10\operatorname{sen}(x)$
$\Rightarrow 2C\cdot\cos(x) - 2D\cdot\operatorname{sen}(x) + Ax + B = 4x + 10\operatorname{sen}(x)$,

lo anterior válido para $A = 4; B = 0; C = 0; D = -5$, siendo entonces

$$y_P = 4x - 5x\cdot\cos(x)$$

y la solución general :

$$\boxed{y = C_1cos(x) + C_2sen(x) + 4x - 5x \cdot cos(x)}$$

, como se tiene que cumplir que $y(\pi) = 0$; entonces de la solución general:

$0 = C_1cos(\pi) + C_2 \operatorname{sen}(\pi) + 4\pi - 5\pi \cdot \cos(\pi)$
$\Rightarrow 0 = -C_1 + 4\pi + 5\pi$
$\Rightarrow C_1 = 9\pi$

Para obtener y', se deriva la solución general con respecto a variable independiente x y se usa $y'(\pi) = 2$:

$y' = -C_1sen(x) + C_2cos(x) + 4 - 5cos(x) + 5x \cdot sen(x)$ y dado que $y'(\pi) = 2$, entonces:
$2 = -C_1sen(\pi) + C_2cos(\pi) + 4 - 5cos(\pi) + 5\pi \cdot sen(\pi)$
$\Rightarrow 2 = -C_2 + 4 + 5$
$\Rightarrow C_2 = 7.$

Por lo tanto, la solución que cumple las condiciones frontera corresponde a:

$$\boxed{y = 9\pi cos(x) + 7sen(x) + 4x - 5x \cdot cos(x)}$$

2.2.1 Ejemplos mediante videos explicativos

Ejemplo 2.15

Considere la ecuación diferencial de orden tres con coeficientes constantes:

$$\phi(D)y = 12x + 4e^{\frac{x}{2}} + e^{-x}\cos(2x) \quad [\mathbf{1}]$$

cuya solución de la ecuación homogénea viene dada por

$$y_h = C_1 + C_2e^{\frac{x}{2}} + C_3xe^{\frac{x}{2}} + e^{-x}[(C_4x + C_5)\cos(2x) + (C_6x + C_7)\operatorname{sen}(2x)]$$

Determine la forma de la solución particular de la ecuación diferencial denotada con **[1]**

Solución

Puede visualizar explicación y solución de dicho ejemplo, mediante video explicativo a través del link:
https://www.youtube.com/watch?v=2ufnxMCA6mc

Ejemplo 2.16

Considere la ecuación diferencial de orden tres con coeficientes constantes:

$$y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4\operatorname{sen}x - \cos x \quad [\mathbf{1}]$$

cuya solución de la ecuación homogénea viene dada por

$$y_h = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(x) + C_4 \operatorname{sen}(x)]$$

Determine la forma de la solución particular de la ecuación diferencial denotada con **[1]**

Solución

Puede visualizar explicación y solución de dicho ejemplo, mediante video explicativo a través del link:
https://www.youtube.com/watch?v=wddYDVKA5Yk

Ejemplo 2.17

Considere la ecuación diferencial de orden 4:

$$\phi(D)y = 4e^{-2x} + (3x-1)\cos(2x) - e^{-2x}\operatorname{sen} x \quad [1]$$

Sabiendo que $m_1 = -2, m_2 = 1, m_3 = -2 - i$ son raíces de la ecuación característica asociada a $\phi(D)y = 0$. Determine la **forma** de la solución particular que resuelve a la ecuación diferencial **[1]**.

Solución

Puede visualizar explicación y solución de dicho ejemplo, mediante video explicativo a través del link:
https://www.youtube.com/watch?v=i2BV4laXjiM

2.2.2 Ejemplos varios sobre ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Ejemplo 2.18 Coeficientes indeterminados

Considere la siguiente ecuación de orden tres con coeficientes constantes:

$$\mathbf{L}: y''' + y'' - y' - y = 4\operatorname{sen}(x) + 8(1+x)e^x$$

a) Verifique que $y(x) = e^x + e^{-x} + xe^{-x}$ es solución de la ecuación homogénea asociada a la ecuación **L.** No se vale realizar una sustitución directa.

b) Determine la solución general de la ecuación diferencial **L** .

Solución a.

Si consideramos la ecuación diferencial homogénea de L se tiene por ecuación característica $(m+1)^2(m-1) = 0$ de donde $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$ y $y_3 = e^x$ de esta forma si en y_H se toma $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ se tiene que $y(x) = e^x + e^{-x} + xe^{-x}$ es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada a L.

Solución b.

Para hallar la solución general de L basta determinar la y_p, la cual es de la forma

$$y_p = A\cdot\cos x + B\cdot\operatorname{sen} x + x(Cx+D)e^x$$

luego derivando dicha forma de la y_p, se obtiene

$$\begin{aligned}
y_p' &= -A\operatorname{sen} x + B\cos x + (2C+D)xe^x + Cx^2e^x + De^x\\
y_p'' &= -A\cos x - B\operatorname{sen} x + (2C+2D)e^x + (4C+D)xe^x + Cx^2e^x\\
y_p''' &= A\operatorname{sen} x - B\cos x + (6C+3D)e^x + (6C+D)xe^x + Cx^2e^x
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial L, asimismo simplificando se tiene que

$$(2A-2B)\operatorname{sen} x + (-2A-2B)\cos x + (8C+3D)e^x + (8C+D)xe^x = 4\operatorname{sen}(x) + 8e^x + 8xe^x$$

de donde debe darse que

$$\begin{cases} 2A-2B=4\\ -2A-2B=0\\ 8C+3D=8\\ 8C+D=8 \end{cases}, \qquad \mathbf{A=1, B=-1, C=1, D=0}$$

por lo tanto se tiene por solución particular de la ecuación diferencial L

$$y_p = \cos(x) - \operatorname{sen}(x) + x^2e^x$$

De esta manera se tiene por solucón general de la ecuación diferencial **L**

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x}\cos(x) - \operatorname{sen}(x) + x^2e^x$$

para C_1, C_2, C_3 constantes arbitrarias.

Ejemplo 2.19 Forma de la solución particular

Proponga únicamente **la forma de la solución particular** correspondiente a las ecuaciones diferenciales:

(a) $y''' - 2y'' - 3y' = x^2e^{-x} + 2x^3e^{3x}$
(b) $y^{(4)} + 4y'' = sen(2x) - xe^{3x} + 5$

Solución (a): $y''' - 2y'' - 3y' = x^2e^{-x} + 2x^3e^{3x}$

Primero se procede a resolver la ecuación diferencial homogénea $y''' - 2y'' - 3y' = 0$. Dicha ecuación diferencial tiene como ecuación característica asociada: $m^3 - 2m^2 - 3m = 0$, en la cual

$m(m^2-2m-3) = 0$
$\Rightarrow m(m-3)(m+1) = 0$

$\Rightarrow m_1 = 0 \wedge m_2 = 3 \wedge m_3 = -1$

de donde se tiene por soluciones linealmente independientes $y_1 = 1 \wedge y_2 = e^{3x} \wedge y_3 = e^{-x}$, de esta forma

$$y_H = C_1 + C_2e^{3x} + C_3e^{-x}$$

con C_1, C_2, C_3 constantes arbitrarias.

Luego, como $F(x) = x^2e^{-x} + 2x^3e^{3x}$, entonces se propone y_P en dos partes una y_{P_1} para $F_1(x) = x^2e^{-x}$ y una y_{P_2} para $F_2(x) = 2x^3e^{3x}$ siendo la propuesta final $y_P = y_{P_1} + y_{P_2}$. Para la $F_1(x) = x^2e^{-x}$ se propone inicialmente $y_{P_1} = a_2x^2e^{-x} + a_1xe^{-x} + a_0e^{-x}$, la cual note conicide términos con la y_h por tanto no es es válida y se propone luego

$$y_{P_1} = a_2x^3e^{-x} + a_1x^2e^{-x} + a_0xe^{-x}$$

Luego para $F_2(x) = 2x^3e^{3x}$, se propone inicialmente $y_{P_2} = b_3x^3e^{3x} + b_2x^2e^{3x} + b_1xe^{3x} + b_0e^{3x}$. Sin embargo, como nuestra y_{P_2} propuesta contiene términos que coinciden en la yh, se multiplica por la variable independiente x para que no coincidan términos y así se propone ahora

$$y_{P_2} = b_3x^4e^{3x} + b_2x^3e^{3x} + b_1x^2e^{3x} + b_0xe^{3x}$$

Por lo tanto **la forma para la solución particular** viene dada por

$$\boxed{y_P = a_2x^3e^{-x} + a_1x^2e^{-x} + a_0xe^{-x} + b_3x^4e^{3x} + b_2x^3e^{3x} + b_1x^2e^{3x} + b_0xe^{3x}}$$

Solución (b): $y^{(4)} + 4y'' = sen(2x) - xe^{3x} + 5$

Primero se procede a resolver la ecuación diferencial homogénea $y^{(4)} + 4y'' = 0$. Dicha ecuación diferencial tiene como ecuación característica asociada: $m^4 + 4m^2 = 0$, en la cual

$m^2(m^2 + 4) = 0$
$\Rightarrow m^2(m - 2i)(m + 2i) = 0$
$\Rightarrow m_1 = 0 \wedge m_2 = 0 \wedge m_3 = 2i \wedge m_4 = -2i$

de donde se tiene por soluciones linealmente independientes $y_1 = 1 \wedge y_2 = x \wedge y_3 = cos(2x) \wedge y_4 = sen(2x)$, de esta forma

$$y_H = C_1 + C_2x + C_3cos(2x) + C_4sen(2x)$$

con C_1, C_2, C_3 constantes arbitrarias.

Luego, como $F(x) = sen(2x) - xe^{3x} + 5$, se va proponer para $F_1(x) = \text{sen}(2x)$, $F_2(x) = xe^{3x}$, $F_3(x) = 5$ las soluciones y_{P_1}, y_{P_2}, y_{P_3} de la siguiente forma respectivamente:
$y_{P_1} = a_1sen(2x) + a_0cos(2x)$; $y_{P_2} = b_1xe^{3x} + b_0e^{3x}$; $y_{P_3} = c_0$

Sin embargo note que tanto en y_{P_1} como en y_{P_3} tienen términos que coinciden en y_H por lo que se hace una nueva propuesta para y_{P_1} y y_{P_3} de tal forma que ya no existan términos coincidentes con la y_h, es así entonces: $y_{P_1} = a_1x \cdot sen(2x) + a_0x \cdot cos(2x)$; $y_{P_3} = c_0x^2$

Por lo tanto **la forma para la solución particular** viene dada por

$$\boxed{y_P = a_1xsen(2x) + a_0xcos(2x) + b_1xe^{3x} + b_0e^{3x} + c_0x^2}$$

Ejemplo 2.20 **Solución particular**

Considere la ecuación diferencial lineal $y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=F(x)$, si en ella para $F(x)=e^{3x}-1$ se tiene a $y_1(x)$ una solución particular y para $F(x)=x^3-2\cos(3x)$ a $y_2(x)$ una solución particular. Determinar una solución particular de la ecuación diferencial.

$$y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=e^{3x}-1+x^3-2\cos(3x)\ \ [1]$$

Solución

Por teorema de superposición de soluciones se tiene que la suma de las funciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ es una solución de la EDL [1] cuyo término independiente es la suma de los términos de las ecuaciones para los cuales las funciones son solución. De esta forma la solución solicitada viene dada por

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)$$

Ejemplo 2.21 **Forma de la solución general**

Considere la ecuación diferencial

$$\mathbf{N}:\ \ y^{(4)}+y''=3x^2+4\operatorname{sen}x-2\cos x$$

Determine **la forma de la solución general** de la ecuación diferencial **N**.

Solución

Sabiendo que $m_1=0$ (doble), $m_2=i$, y $m_3=-i$ son raíces de la ecuación característica asociada a EDL homogenea de **N**: $y^{(4)}+y''=0$, se tiene que la solución

$$y_H=C_1+C_2\cdot x+C_3\cdot\cos(x)+C_4\cdot\operatorname{sen}(x)$$

Se propone inicialmente $y_p=(Ax^2+Bx+C)+(D\operatorname{sen}x+E\cos x)$ pero en ella hay partes contenidas en la y_H, por lo que luego se debe proponer una forma

$$y_p=x^2(Ax^2+Bx+C)+x(D\operatorname{sen}x+E\cos x)$$

Finalmente se tendría que **la forma de la solución general** de la ecuación diferencial **N** viene dada por

$$\boxed{y(x)=C_1+C_2\cdot x+C_3\cdot\cos(x)+C_4\cdot\operatorname{sen}(x)+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx\operatorname{sen}x+Ex\cos x}$$

Ejemplo 2.22 **Ecuación diferencial con coeficientes constantes**

Considere una ecuación diferencial lineal homogénea, de coeficientes constantes, de la forma $\phi(D)y=0$ con $\phi(D)=a_nD^{(n)}+\cdots+a_2D^2+a_1D+a_0$.

a) Determine una ecuación diferencial de la forma $\phi(D)y=0$ con coeficientes **reales** y de menor orden posible, sabiendo que los ceros de la respectiva ecuación característica (o auxiliar) son:

$m = -i, m = 0$ (triple), $m = 2$ y $m = -2$.

b) Con base en la parte **a)**, si se tiene que $\phi(D)y = x + xe^{2x} + 3cos(x)$, proponga **la forma** que tendría la solución particular de la ecuación anterior.

Solución a)

Como se sabe que las soluciones de la ecuación característica son $m = -i$, $m = 0$ (triple), $m = 2$ y $m = -2$ se cumple que $m^3(m+i)(m-2)(m+2) = 0$, y solicitarse una ecuación diferencial linela con coeficientes constantes **reales** debe tambien considerarse como solución de la ecuación característica asociada a $m = i$ y de esta forma debe cumplirse $m^3(m+i)(m-i)(m^2-4) = 0$, de donde se obtiene la ecuación auxiliar

$$m^7 - 3m^5 - 4m^3 = 0$$

Por lo que una ecuación diferencial solicitada viene dada por :

$$\boxed{y^{(7)} - 3y^{(5)} - 4y''' = 0}$$

Solución b)

De acuerdo a lo dado en la parte anterior se tiene que la solución de la ecuación homogénea está dada por:

$$y_c = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{2x} + C_5e^{-2x} + C_6\cos(x) + C_7\,\mathrm{sen}(x)$$

Por otro lado al considerar la función externa $F(x) = x + xe^{2x} + 3cos(x)$ en la ecuación diferencial no homogénea. La solución particular de la ecuación diferencial dada es de la siguiente forma:

$$\boxed{y_p = x^3(Ax+B) + Cx^2e^{2x} + Dxe^{2x} + Exsen(x) + Fxcos(x)}$$

Ejercicios 2.2 **[Ejercicios de retroalimentación]**

2.2.1 A continuación se presentan ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes no homogéneas de la formas:

I. $a_1xy' + a_0xy + xy'' = ax + b$ con $a_1,\ a_0,\ a,\ b$ constantes reales

II. $a_1y'(x) + a_2y(x) + y''(x) = e^{ax}\cos(bx)$ con $a_1,\ a_2,\ b,\ a$ constantes reales.

Para cada de las ecuaciones dadas a continuación resuelvalas y posteriormente ingrese a página interactiva **Ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de orden dos homogénea NO homogénea mediante método de coeficientes indeterminados** para visualizar paso a paso proceso de resolución y comprobar dichos resultados.

a. $y''(x) + y(x) = 2x + 3$
b. $y''(x) - 3y'(x) + y(x) = 6x + 1$

c. $y''(x) = x + 10$
d. $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 6x + 8$
e. $y''(x) - y(x) = e^x \cos(x)$
f. $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x \cos(x)$
g. $y''(x) + y(x) = \cos(x)$
h. $y''(x) - 2y'(x) = e^{2x} \cos(x)$
i. $y''(x) - y'(x) - y(x) = e^{2x} \cos(4x)$
j. $y''(x) - y'(x) = x + 7$

2.2.2 Para cada ecuación diferencial lineal homogénea determine la solución general. Posteriormente ingrese a página interactiva **Ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de orden tres y cuatro homogénea NO homogénea mediante método de coeficientes indeterminados** para visualizar paso a paso proceso de resolución y comprobar dichos resultados.

a. $y^{(4)}(x) + y''(x) = e^x + 1$
b. $y'''(x) - 6y''(x) + 11y'(x) - 6y(x) = (12x - 25)e^{-x}$
c. $y^{(4)}(x) + 3y'''(x) - 8y''(x) - 12y'(x) + 16y(x) = x^2 + \cos(x)$
d. $y'''(x) + y''(x) = x\,\mathrm{sen}(x) + 4$
e. $y^{(4)}(x) - 2y''(x) + y(x) = 8084(\mathrm{sen}(x) + \cos(x))$
f. $y^{(4)}(x) + 2y'''(x) - 2y'(x) - y(x) = e^x - x$
g. $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 3x + 3e^x + 2\cos(2x) + 2$
h. $y'''(x) + y''(x) - y'(x) - y(x) = 8e^x(x+1) + 4\,\mathrm{sen}(x)$
i. $y^{(4)}(x) - 4y''(x) + 16y'(x) + 32y(x) = xe^{-2x}\cos(2x)$
j. $y'''(x) - 3y'(x) - 2y(x) = 27xe^{-x}$
k. $y'''(x) + y''(x) = 9e^{3x} - 4x$
l. $y'''(x) + 2y''(x) = 3e^{-2x} - 8x$

2.2.3 Proponga únicamente la forma de la solución particular correspondiente a las ecuaciones diferenciales
a) $y''' - 2y'' - 3y' = x^2e^{-x} + 2x^3e^{3x}$
b) $y^{(4)} + 4y'' = \mathrm{sen}\,(2x) - xe^{3x} + 5$
c) $w^{(4)} + 36w'' = tcos(6t) - 7t + 18$
d) $w^2q'' = -wq' + 81q$

2.2.4 Se sabe que $\phi(D)y = 9 + 6e^{-12x} + x\cos(\sqrt{5}x)$, representa una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes reales. Determine la forma que tendría una solución particular de dicha ecuación diferencial y de menor orden posible, cuya ecuación auxiliar corresponde a : $m^2(m+12)^3(m^2+5) = 0$

2.2.5 Si se sabe que la función $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$ es la solución complementaria de la ecuación lineal homogénea $\phi(D)\,y = 0$, resuelva la ecuación $\phi(D)\,y = 3\left(5e^{2x} - 2\right)$

2.2.6

Determine la ecuación diferencial que tiene como solución general la función indicada:
a) $y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}senx$
b) $y = C_1e^{-x} + e^{2x}\left[C_2\cos\left(\sqrt{3}x\right) + C_3sen\left(\sqrt{3}x\right)\right] + xe^{-x} - x^2$

2.2.7 Si 0 y -4 son las soluciones de la ecuación característica asociada a la ecuación $au''(t)+cu'(t)=20c$ [**1**], con a y c constantes reales distintas de cero, Determine la solución general de la ecuación diferencial **[1]**.

2.2.8 Halle los valores de las constantes a,b,c y una función para $P(x)$ tales que la solución general de la ecuación diferencial $ay''+by'+cy=-6xe^x$, este dada por $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+P(x)$

2.2.9 Suponga que $\phi_1(x)=x$ solución de la homogénea, y $\phi_2(x)=x+e^x, \phi(x)=1+x+e^x$ son dos soluciones de una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes no homogénea

$$y''+a_1y'+a_0y=F(x)$$

a) Determine la solución general de la ecuación diferencial $y''+a_1y'+a_0y=0$.

b) Halle las constantes a_1,a_0 y la función $F(x)$

2.2.10 Sea $\lambda>0$ en el problema : $y^{(4)}-\lambda y=0$, con $y(0)=y'(0)=y''(0)=0, y(1)=0$ Estudie si existen valores de λ¸ para los cuales el problema tiene solución no trivial.

2.2.11 ($\triangle$) Sea $\varphi(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una solución no trivial de la ecuación $y''-2by'+cy=0$ [1], donde b,c son constantes arbitrarias, y $\varphi(0)=\varphi(1)=0$

(a) Demuestre que para cada $n\in\mathbb{N}$ se cumple que $\varphi(n)=0$

(b) Sea $k\in\mathbb{N}$, encontrar los valores de c tal que la ecuación diferencial [1] tiene una solución no trivial que satisface $y(0)=y(2\pi k)=0$

2.2.12 ($\triangle$) Encuentre la solución de la ecuación:

$$a^7y^{(7)}+a^6y^{(6)}+\cdots+a^2y''+ay'+y=0$$

que satisface las condiciones iniciales $y(0)=1$, $y'(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2a}$ y $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$ con $a<0$

2.2.13 Sea $\phi(x)$ una solución de $y''-3y'-4y=0$ y $\Psi(x)$ una solución de $y''+4y'-5y=0$. Encontrar dichas soluciones si se tiene que: $\phi(0)=0=\Psi(0), \phi'(0)=\Psi'(0)$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[\Psi(x)]^4}{\phi(x)}=\frac{5}{6}$

2.2.14 Determine la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $y^{(v)}+8a^3y''=a+e^{at}\cos(at)$ con a constante real.
b) $z''+wz=t\cos(\sqrt{w}t)$ con w constante real (analice los casos para w).
c) $(1+t^2)^2y''+2t(1+t^2)y'+y=\arctan^3(t)+\cos(\arctan(t))$ (sug. debe realizar un cambio de variable apropiado)

2.2.15 Considere la ecuación diferencial $z''(x)-kz'(x)+cz(x)=8k$ con c,k constantes reales, $k\neq0$. Si 0 es solución simple de la ecuación característica asociada, determine la solución general de la ecuación.

3 — Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior-variación de parámetros.

3.0.1 Objetivo específico

1. Determinar soluciones particulares y la solución general de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes o variables mediante método de variación de parámetros.

3.0.2 Contenidos

- Método de variación de parámetros para la solución particular de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

3.1 Método variación de parámetros en ecuación diferencial: $\phi(D)y = F(x), F(x) \neq 0$

Se sabe que la solución de la ecuación diferencial lineal $\phi(D)y = F(x)$, $F(x) \neq 0$ no homogénea tiene la forma $y = y_c + y_p$. Para esto se debe encontrar primero la solución complementaria y_c de la ecuación homogénea asociada y luego hallar una solución particular y_p de la ecuación no homogénea.

Sean $a_n(x), \cdots a_0(x)$ **constantes o variables** con $a_n \neq 0,\ \forall x \in I$ y $F(x)$ anulable o no.[1] Este método de Variación de parámetros se utiliza para construir una solución particular y_p de la ecuación diferencial(ED)

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x)$$

donde la función $F(x)$, puede contener no solo funciones anulables, sino también funciones $F(x)$ del tipo como : $\ln x,\ \frac{1}{x},\ \tan x,\ \sec x,\ arsecx,\ arctanx,$ entre otras. En un primer momento se debe hallar para su ED complementaria $a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ la solución general

$$\boxed{y_c = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n}$$

donde $y_1, y_2 \cdots, y_n$ son soluciones linealmente independientes (L.I) de la ED homogénea y $C_1, C_2, \cdots, C_n$ son constantes.

Posteriormente el método variación de parámetros consiste en determinar funciones $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ que hacen que

$$\boxed{y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 + \cdots, +u_n(x)y_n}$$

sea solución particular de la ED completa, donde $y_1, y_2, \cdots, y_n$ son las mismas soluciones linealmente independientes (L.I) de la homogénea y_c.

3.1.1 Descripción del método, para ED lineal de segundo orden: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x)$

A continuación se detalla la descripción del método de variación de parámetros en ED lineal de segundo orden:

1. Sea la ED lineal de segundo orden de la forma $a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = h(x)$, la cual se reduce a la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x) \quad (1) \quad \text{con } F(x) = \frac{h(x)}{a_2}$$

2. Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0\,(*)$$

Así, la **solución de esta ecuación homogénea** está dada por

$$\boxed{y_c = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)} \quad \text{donde} \quad C_1 \text{ y } C_2 \quad \text{son constantes arbitrarias.}$$

[1] variación de parámetros es general, a diferencia del método de coeficientes indeterminados que se limita a ED lineales no homogéneas con coeficientes constantes y funciones externas $F(x)$ anulables como los polinomios, exponenciales y trigonométricas $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$. Además se considera que funciones en proceso de resulución son funciones integrables y bien definidas.

3. Suponga existe una solución particular de la ecuación $y''+P(x)y'+Q(x)y=F(x)$ de la forma

$$y_p = u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$$ [2]

donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son **funciones desconocidas** por determinar.

4. Bajo el supuesto de que existen funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ tales que $y_p = u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$ es solución de la ED lineal $y''+P(x)y'+Q(x)y=F(x)$, para hallar las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ se requiere determinar en este caso **dos ecuaciones**, (por ser de orden dos) las cuales se indican a continuación:

   - Para la primera ecuación , se parte del supuesto de que las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son tales que satisfacen la expresión

$$\boxed{\mathbf{u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)=0}}\ \textbf{(E1)}$$

   - La segunda ecuación se obtiene al sustituir la $y_p = u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$, así con todas sus derivadas en la ecuación diferencial por resolver, dada en su forma estándar, $y''+P(x)y'+Q(x)y=F(x)$, lo cual nos conduce a la ecuación [3]

$$\boxed{\mathbf{u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)=F(x)}}\ \textbf{(E2)}$$

5. Para determinar las funciones $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$, se debe resolver el sistema de las dos ecuaciones obtenidas en el punto anterior, a saber:

$$\begin{cases} \mathbf{u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)=0} \\ \mathbf{u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)=F(x)} \end{cases}$$

donde $F(x)=\dfrac{h(x)}{a_2}$ en la ED lineal dada en la forma $a_2(x)y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y=h(x)$.

6. Puesto que y_1 y y_2 son soluciones L.I, entonces $W(y_1,y_2)\neq 0$; por tanto usando la **regla de Cramer** se puede determinar las funciones $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$ de la siguiente forma:

$$u_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ F(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} \qquad \text{y} \qquad u_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & F(x) \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)}$$

7. Basándose en lo anterior, las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ se obtienen integrando $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$ respectivamente. Finalmente, la **solución general** es

$$\boxed{\mathbf{y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)}}$$ [4]

[2] Note que esta y_p consiste en cambiar parámetros C_1 y C_2 de la solución y_c, por funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$, de ahí el nombre variación de parámetros.

[3] ver demostración en la página siguiente

[4] El método de variación de parámetros se generaliza para las ED lineales de orden n, de donde la solución general es de la forma $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_n\cdot y_n(x)+u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)+\cdots+u_n(x)y_n(x)$.

Demostración de la obtención de las ecuaciones involucradas en el sistema de ecuaciones del punto 5.

Bajo el supuesto de que existen funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ tales que $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ es solución de la ED lineal $y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x)$, para hallar las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ se requiere determinar en este caso **dos ecuaciones**, (por ser de orden dos) las cuales se muestran a continuación:

1. Note que al ser y_1, y_2 soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, se cumple que

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

   y además $y_h = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ para C_1, C_2 constantes arbitrarias.

2. Luego para $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ se cumple

$$y_p' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'$$

   supongase una primera ecuación $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$, en donde luego $y_p' = u_1y_1' + u_2y_2'$ y por ende

$$y_p'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''$$

   .

3. Sustituyendo en la ecuación diferencial $y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x)$ lo obtenido en el punto anterior

$$y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p = F(x)$$

$$u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'' + P(x)(u_1y_1' + u_2y_2') + Q(x)(u_1y_1 + u_2y_2) = F(x)$$

   de donde ordenando un poco se tendría

$$u_1(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1) + u_2(y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2) + u_1'y_1' + u_2'y_2' = F(x)$$

   de donde al considerar lo dado en 1. se tendría que la segunda ecuación corresponde a

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = F(x)$$

4. De esta forma se demuestra que las ecuaciones involucradas para determinar luego las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ corresponden a

$$\begin{cases} \mathbf{u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0} \\ \mathbf{u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = F(x)} \end{cases}$$

Ejemplo 3.1

Resolver la ecuación diferencial $y'' + y = \tan x.$

La ecuación homogénea asociada a dicha ecuación diferencial esta dada por $y'' + y = 0$, la cual posee coeficientes contantes y por ende tiene por ecuación característica, $m^2 + 1 = 0$, cuyas soluciones complejas son $m_1 = i$ y $m_2 = -i$, de esta forma se tiene que $y_1(x) = e^{(0+i)x} = e^{ix}$ y $y_2(x) = e^{(0-i)x} = e^{-ix}$.

Por lo que la solución complementaria de la ecuación homogénea[5] está dada por

$$y_c = C_1 sen x + C_2 \cos x$$

Ahora vamos a determinar y_p, para la cual variamos los parámetros haciendo

$$y_p(x) = u_1(x)\, sen x + u_2(x) \cos x$$

Debe cumplirse que

$$\begin{cases} u_1' sen x + u_2' \cos x = 0 \\ u_1' \cos x - u_2' sen x = \tan x \end{cases}$$

Este es un sistema de ecuaciones de variables u_1' y u_2', que tendrá solución siempre que

$$\begin{vmatrix} sen x & \cos x \\ \cos x & -sen x \end{vmatrix} = -sen^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

Usando la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones se tiene

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \tan x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}}{-1} = \tan x \cos x = \operatorname{sen} x; \qquad u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 0 \\ \cos x & \tan x \end{vmatrix}}{-1} = -\operatorname{sen} x \tan x$$

Luego las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ se obtienen integrando.

$u_1(x) = \displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x$

y $u_2(x) = -\displaystyle\int \frac{sen^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{(1 - \cos^2 x)}{\cos x} dx = -\int (\sec x - \cos x)\, dx = -\ln(\sec x + \tan x) + sen x$

Así, entonces se tiene que $y_p = u_1(x)\, sen x + u_2(x) \cos x = -\cos x\, sen x + (-\ln(\sec x + \tan x) + sen x) \cos x$, es decir,

$$y_p = -\cos x (\ln(\sec x + \tan x))$$

Por lo tanto la **solución general** de la ecuación es

$$\boxed{y = C_1 sen x + C_2 \cos x - \cos x (\ln(\sec x + \tan x))}$$

[5]Recuerde que en este tipo de ED lineales con coeficientes contantes de orden dos, si se tiene soluciones complejas conjugadas $y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}$ y $y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$ la solución general de la homogénea esta dada por $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 sen(\beta x))$

Ejemplo 3.2

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' - 4y' + 4y = \sqrt[3]{x^2} \cdot e^{2x}$$

Solución:

Primero se resuelve la ecuación diferencial homogénea $y'' - 4y' + 4y = 0$, que tiene por ecuación auxiliar $m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = 2$ (solución repetida) y de esta forma

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

Para $y'' - 4y' + 4y = \sqrt[3]{x^2} \cdot e^{2x}$ dado que la función externa $F(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot e^{2x}$ es no anulable se propone como solución particular :

$$y_p(x) = u(x) \cdot e^{2x} + v(x) \cdot x e^{2x}$$

Entonces luego se debe resolver el sistema: $\begin{cases} u'(x) \cdot e^2 + v'(x) \cdot x e^{2x} = 0 \\ 2u'(x) \cdot e^{2x} + v'(x)(e^{2x} + x e^{2x}) = \sqrt[3]{x^2} \cdot e^{2x} \end{cases}$ Usando Regla de Cramer:

Note $W(e^{2x}, xe^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x} + 2xe^{4x} - 2xe^{4x} = e^{4x} \neq 0$ y además

$$W_u = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ \sqrt[3]{x^2} e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix} = -\sqrt[3]{x^5} e^{4x} \quad W_v = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \sqrt[3]{x^2} e^{2x} \end{vmatrix} = -\sqrt[3]{x^2} e^{4x}$$

Por lo que:

$u'(x) = \dfrac{W_u}{W} = \dfrac{-\sqrt[3]{x^5} e^{4x}}{e^{4x}} = -x^{\frac{5}{3}} \Rightarrow u(x) = -\dfrac{3}{8} x^{\frac{8}{3}}$

$v'(x) = \dfrac{W_v}{W} = \dfrac{-\sqrt[3]{x^2} e^{4x}}{e^{4x}} = -x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow v(x) = -\dfrac{3}{5} x^{\frac{5}{3}}$

De esta forma la solución particular tiene la forma $y_p(x) = -\dfrac{3}{8} x^{\frac{8}{3}} \cdot e^{2x} + \dfrac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \cdot x e^{2x}$, siendo finalmente la **solución general** de la ecuación diferencial

$$\boxed{y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} - \tfrac{3}{8} x^{\frac{8}{3}} \cdot e^{2x} + \tfrac{3}{5} x^{\frac{8}{3}} e^{2x} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \tfrac{9}{40} x^{\frac{8}{3}} e^{2x}}$$

Ejemplo 3.3

Si $y_1(x) = \cos(\ln x)$ y $y_2(x) = sen(\ln x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación $x^2 y'' + xy' + y = 0$, hallar la **solución general** de la ecuación

$$x^2 y'' + xy' + y = \sec(\ln x)$$

La ecuación debe estar de la forma $y'' + P(x) y' + Q(x) y = F(x)$. Así, dividiendo entre x^2 se tiene

$$y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{\sec(\ln x)}{x^2}$$

De donde la solución de la ecuación complementaria es

$$y_c(x) = C_1 \cos(\ln x) + C_2 sen(\ln x)$$

Luego para determinar la solución particular debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} u_1' \cos(\ln x) + u_2' sen(\ln x) = 0 \\ -u_1' \dfrac{sen(\ln x)}{x} + u_2' \dfrac{\cos(\ln x)}{x} = \dfrac{\sec(\ln x)}{x^2} \end{cases}$$

Este es un sistema de ecuaciones de variables u_1' y u_2', que tendrá solución siempre que

$$\begin{vmatrix} \cos(\ln x) & sen(\ln x) \\ -\dfrac{sen(\ln x)}{x} & \dfrac{\cos(\ln x)}{x} \end{vmatrix} = \frac{\cos^2(\ln x)}{x} + \frac{sen^2(\ln x)}{x} = \frac{1}{x} \neq 0$$

Usando la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones se tiene

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sen(\ln x) \\ \dfrac{\sec(\ln x)}{x^2} & \dfrac{\cos(\ln x)}{x} \end{vmatrix}}{\frac{1}{x}} = -\frac{sen(\ln x)\sec(\ln x)}{x} = -\frac{\tan(\ln x)}{x}$$

$$u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(\ln x) & 0 \\ -\dfrac{sen(\ln x)}{x} & \dfrac{\sec(\ln x)}{x^2} \end{vmatrix}}{\frac{1}{x}} = \frac{\cos(\ln x)\sec(\ln x)}{x} = \frac{1}{x}$$

Luego las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ se obtienen integrando, es decir,

$$u_1(x) = \int -\frac{\tan(\ln x)}{x} dx = -\int \frac{senu}{\cos u} dx = \ln(\cos(\ln x)) \quad y \quad u_2(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

Así,entonces se tiene que

$$y_p = u_1(x)\cos(\ln x) + u_2(x)\, sen(\ln x) = \ln(\cos(\ln x))\cos(\ln x) + \ln x sen(\ln x)$$

Por lo tanto la **solución general** de la ecuación es

$$\boxed{y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 sen(\ln x) + \ln(\cos(\ln x))\cos(\ln x) + \ln x sen(\ln x)}$$

Solución

Puede visualizar explicación y solución de dicho ejemplo, mediante video explicativo a través del link: https://www.youtube.com/watch?v=aQwbqEo7CoM

Ejemplo 3.4 **Explicación mediante video**

Considere la ecuación diferencial

$$\mathbf{N}: \;\; x^2(1-2\ln x)y'' + x(1+2\ln x)y' - 4y = x^3(1-2\ln x)^2$$

Si $\{\ln x, x^2\}$ es un conjunto linealmente independiente de soluciones para la ecuación diferencial homogénea de asociada a **[N]**, determine la solución general de **[N]**.

Solución

Puede visualizar explicación y solución de dicho ejemplo, mediante video explicativo a través del link: https://www.youtube.com/watch?v=864PF7D1cCs

Ejemplo 3.5

Resuelva la ecuación $(1-x)^2y'' + (x-x^2)y' - (1-x)y = 4(x-1)^3$ sabiendo que $y_1 = e^x$ es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.

Solución:

Como $y_1 = e^x$ es una solución de la ecuación diferencial homogénea $(1-x)^2y'' + (x-x^2)y' - (1-x)y = 0$, falta determinar la segunda solución linealmente a ella y para ello se recurre al teorema de la segunda solución de Abel en donde conviene primero al reescribir la ecuación diferencial como:

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{y}{x-1} = 4x-4, \;\; x \neq 1$$

Así de esta forma para determinar la segunda solución se realiza:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}dx}{(y_1)^2} \\ &= e^x \int \frac{e^{-\int \frac{x}{1-x}dx}dx}{e^{2x}} \\ &= e^x \int \frac{e^{-\int \frac{1}{1-x}-1dx}dx}{e^{2x}} \\ &= e^x \int \frac{e^{\ln(1-x)+x}dx}{e^{2x}} \\ &= e^x \int \frac{(1-x)dx}{e^x} \\ &= e^x \int e^{-x} - xe^{-x}dx \end{aligned}$$

$$= -e^x \cdot xe^{-x} = -x$$

De esta forma $y_H = C_1e^x + C_2x$ con C_1, C_2 constantes arbitrarias. Luego, se propone la solución particular $y_P = u_1(x) \cdot e^x + u_2(x) \cdot x$ donde u_1 y u_2 son funciones por determinar con variable independiente x.

Para determinaralas, se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} u_1' \cdot e^x + u_2' \cdot x &= 0 \\ u_1' \cdot e^x + u_2' &= 4x-4 \end{cases}$$

Dicho sistema tiene solución única pues: $W(e^x, -x) = \begin{vmatrix} e^x & -x \\ e^x & -1 \end{vmatrix} = -e^x + xe^x = e^x(x-1) \neq 0, \; x \neq 1$

Usando Regla de Cramer:

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -x \\ 4x-4 & -1 \end{vmatrix}}{W(e^x, -x)} = \frac{4x^2-4x}{e^x(x-1)} = \frac{4x}{e^x} \Rightarrow u_1(x) = 4\int xe^{-x}dx = -4(x+1)e^{-x}$$

$$u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 4x-4 \end{vmatrix}}{W(e^x, -x)} = \frac{4e^x(x-1)}{e^x(x-1)} = 4 \Rightarrow u_2(x) = \int 4dx = 4x.$$

De donde $y_P = -4(x+1)e^{-x}e^x + 4x \cdot x = 4x^2 - 4x - 4$ y además la **solución general** viene dada por

$$\boxed{y(x) = C_1e^x + C_2x + 4x^2 - 4x - 4}$$

Ejemplo 3.6

Considere la siguiente ecuación diferencial lineal :

$$\textbf{ED}: xy'' - (x+1)y' + y = x^2e^{2x} \quad \text{con } x > 0$$

Encuentre a constante tal que $y_1 = e^{ax}$ sea solución de la ED homogénea.
Dar la solución general de la ED homogénea.
Encuentre una solución particular de ED.
Escriba la solución general de la ED.

a) Sustituye $y_1 = e^{ax}$ y sus respectivas derivadas y', y y'' en la ecuación diferencial homogénea

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0$$

de donde

$$a^2xe^{ax} - (x+1)ae^{ax} + e^{ax} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2x - ax - a + 1)e^{ax} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2-1)x-(a-1)=0$$

lo cual es válido solo si $a=1$ entoces $y_1=e^x$ es solución de dicha ecuación diferencial homogénea.

b) La ecuación diferencial es de orden dos por lo tanto para obtener la segunda solución linealmente independiente con y_1 se aplica el teorema de la segunda solución de Abel en donde

$$\begin{aligned} y_2 &= e^x \int \frac{e^{-\int \frac{-(x-1)}{x}dx}}{e^{2x}}dx \\ &= e^x \int xe^{-x}dx \end{aligned}$$

al resolver dicha integral por la técnica de partes y simplificar se obtiene ahora

$$y_2=-x-1$$

Por lo tanto la solución de la ecuación diferencial homogénea viene dada por

$$y_h=C_1e^x+C_2(-x-1)$$

c) Falta solo determinar la solución particular de nuestra ecuación diferencial no homogénea

$$xy''-(x+1)y'+y=x^2e^{2x}$$

y para ello utilizaremos el método de variación de parámetros[6] de esta forma sea

$$y_p=u_1(x)e^x+u_2(x)(-x-1)$$

donde u_1,u_2 son funciones por determinar. Para ello se plantea y resuelve el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1'\cdot e^x+u_2'\cdot(-x-1) & = & 0 \\ u_1'\cdot e^x-u_2' & = & xe^{2x} \end{array} \right.$$

Dicho sistema tiene solución única pues: $W\left(e^x,-x-1\right)=\begin{vmatrix} e^x & -x-1 \\ e^x & -1 \end{vmatrix}=xe^x\neq 0$

Usando Regla de Cramer:

$$u_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -x-1 \\ xe^{2x} & -1 \end{vmatrix}}{xe^x}=\frac{x(x+1)e^{2x}}{xe^x}=(x+1)e^x \Rightarrow u_1(x)=\int(x+1)e^x dx=xe^x$$

$$u_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & xe^{2x} \end{vmatrix}}{xe^x}=\frac{xe^{3x}}{xe^x}=e^{2x}\Rightarrow u_2(x)=\int e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{2}$$

De donde $y_P=xe^{2x}-\dfrac{e^{2x}}{2}(x+1)$ y además la **solución general** viene dada por

$$\boxed{y(x)=C_1e^x+C_2(-x-1)+xe^{2x}-\frac{e^{2x}}{2}(x+1)}$$

[6]note al ser $F(x)=x^2e^{2x}$, también se podría plantear la solución particular mediante el método de coeficientes indeterminados

Ejercicios 3.1 [**Ejercicios de retroalimentación**]

3.1.1 Resuelva cada de las ecuaciones dadas a continuación y posteriormente ingrese a página interactiva **Ecuación diferencial lineal con variables de orden dos NO homogénea mediante método variación de paramétros** para visualizar paso a paso proceso de resolución y comprobar dichos resultados.

a. $y''(x)+2y'(x)+y(x)=e^{-x}\ln(x)$
b. $y''(x)+y(x)=\csc(x)$
c. $y''(x)+4y(x)=4\sec(2x)$
d. $y''(x)-2y'(x)+2y(x)=e^{x}\sec(x)$
e. $y''(x)+4y(x)=2\tan(x)$
f. $y''(x)-6y'(x)+9y(x)=\dfrac{e^{3x}}{x^2}$
g. $y''(x)+3y'(x)+2y(x)=\dfrac{1}{e^{x}+1}$
h. $y''(x)+4y'(x)+4y(x)=\dfrac{e^{-2x}}{x^3}$
i. $4y''(x)+36y(x)=4\csc(3x)$
j. $y''(x)-2y'(x)+y(x)=\dfrac{e^{x}}{\sqrt{4-x^2}}$

3.1.2 Resuelva cada de las ecuaciones diferenciales dadas a continuación en las que se conoce una solución de su ecuación diferencial homogénea y posteriormente ingrese a página interactiva **Ecuación diferencial lineal con variables de orden dos NO homogénea mediante método variación de paramétros** para visualizar paso a paso proceso de resolución y comprobar dichos resultados.

a. $x^2y''(x)+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y(x)+xy'(x)=x^{3/2},\ y_1(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}$
b. $xy''(x)+(x-1)y'(x)-y(x)=\frac{4x^2}{e^x},\ y_1(x)=e^{-x}$
c. $x^2y''(x)+xy'(x)+y(x)=\sec(\ln(x)), y_1(x)=\cos(\ln(x))$
d. $\dfrac{y(x)}{x^2}+\ln(x)y''(x)-\dfrac{y'(x)}{x}=\ln^2(x),\ y_1(x)=\ln(x)+1$
e. $\left(\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)y(x)+y''(x)+\left(1-\dfrac{2}{x}\right)y'(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+1}, y_1(x)=x$
f. $x^4y''(x)+2x^3y'(x)+y(x)=\dfrac{1}{x^2}, y_1(x)=\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
g. $x^2\ln(x)y''(x)-x(\ln(x)+1)y'(x)+y(x)(\ln(x)+1)=3x\ln^2(x), y_1(x)=x$
h. $xy''(x)+(x-1)y'(x)-y(x)=\dfrac{4x^2}{e^x}, y_1(x)=e^{-x}$
i. $\left(x^2-1\right)y''(x)-2xy'(x)+2y(x)=x^2-1, y_1(x)=x^2+1$
j. $xy''(x)-2(x+1)y'(x)+(x+2)y(x)=\dfrac{36e^x}{x}, y_1(x)=e^x$

3.1.3 Para cada afirmación indique **V** si es verdadera o **F** si es falsa según así corresponda:

a. Al resolver la ecuación diferencial $8y'' - 80y' + 200y = 136e^{-4x}\ln(x)$ se determina que una solución particular es de la forma $y_p = U(x)e^{5x} + xe^{5x}V(x)$ donde e^{5x} y xe^{5x} son soluciones de la respectiva ecuación complementaria. Un sistema de ecuaciones en las incógnitas $U'(x)$ y $V'(x)$ que ayuda a determinar $U(x)$ y $V(x)$ es.

$$\begin{cases} e^{5x}U'(x) + xe^{5x}V'(x) &= 0 \\ 5e^{5x}U'(x) + (e^{5x} + 5xe^{5x})V'(x) &= 17e^{-4x}\ln x \end{cases}$$

b. Para determinar la solución particular de la ecuación $y'' + 100y = \tan(4x)$ al utilizar el método de variación de parámetros, las ecuaciones que permite hallar los parámetros de esa solución particular son

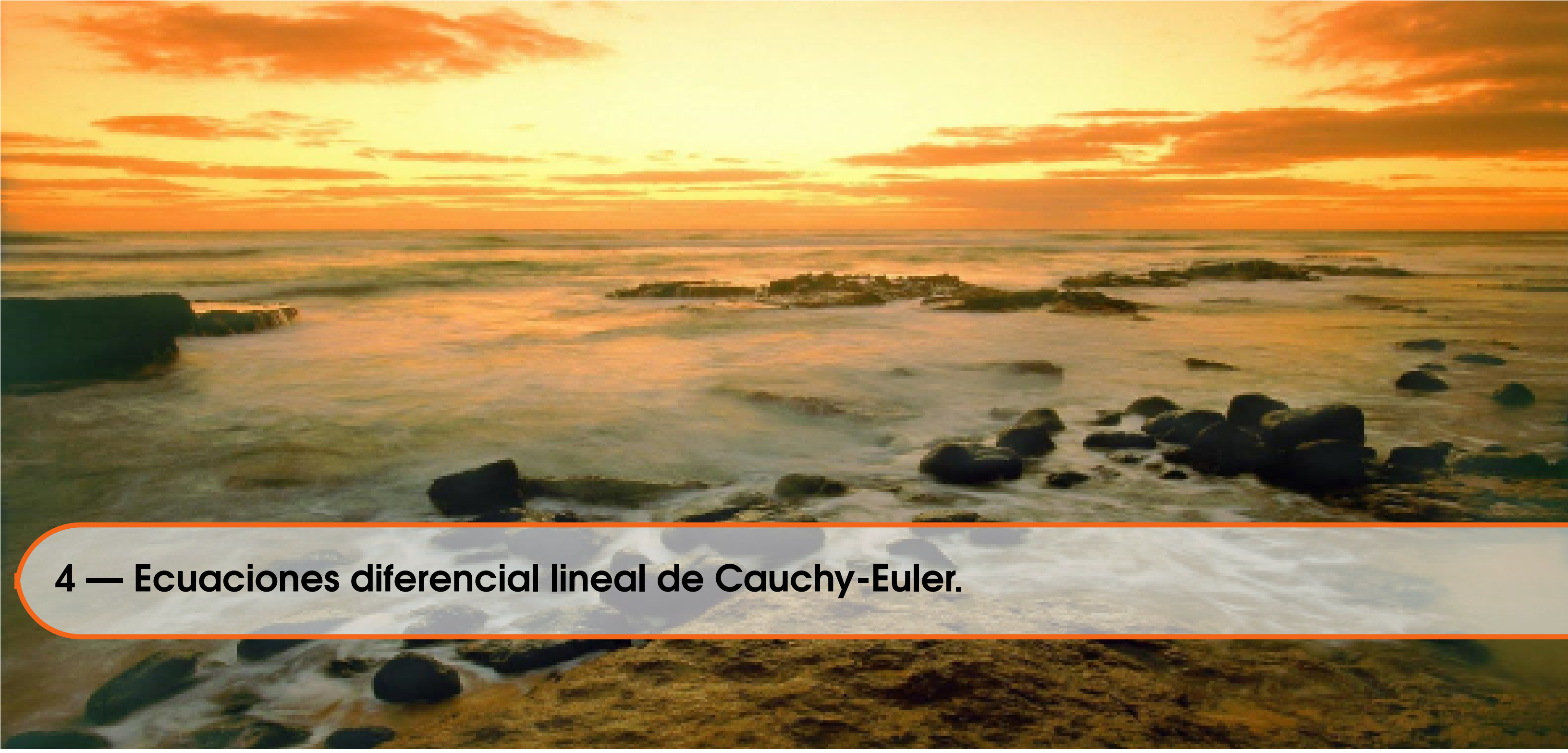
$$\begin{cases} \operatorname{sen}(10x)U'(x) + \cos(10)V'(x) &= 0 \\ 10\cos(10x)U'(x) + 10\operatorname{sen}(10x)V'(x) &= \tan(4x) \end{cases}$$

c. Considere una ecuación diferencial de la forma $y'' + a_1y' + a_2y = x^{12}e^{20x}$. Suponga que e^{20x} y xe^{20x} son soluciones de la respectiva ecuación complementaria, y que el método de variación de parámetros propone una solución particular $y_p = U(x)e^{20x} + V(x)xe^{20x}$, entonces $U(x)$ es igual a $\dfrac{-x^{15}}{15}$

d. Considere una ecuación diferencial de la siguiente forma $y'' - 2y' + y = 8\operatorname{sen}x$, entonces el método de variación de parámetros propone una solución particular de la forma $y_p = C_1\operatorname{sen}(x) + C_2\cos(x)$ para C_1, C_2 constantes arbitrarias.

e. Sean $y_1 = \cos(17x); y_2 = \operatorname{sen}(17x)$ soluciones linealmente independientes de la ecuación complementaria de la ecuación diferencial $y''(x) + a_0(x)y(x) = \sec^3(17x)$, la solución particular de dicha ecuación diferencial corresponde a $y_p = \dfrac{\sec(17x)}{578} + \dfrac{\tan(17x)\operatorname{sen}(17x)}{289}$

f. Considere la ecuación diferencial de orden dos dada de la forma $\phi(D)y = -2e^{5x}\sec(9x)$ [1], donde $y_1 = e^{5x}\cos(9x); y_2 = e^{5x}\operatorname{sen}(9x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea asociada a [1]. La solución particular de [1] corresponde a $y_p = \dfrac{-2}{9}\ln(\cos(9x))e^{5x}\cos(9x) - 2xe^{5x}\operatorname{sen}(9x)$



4 — Ecuaciones diferencial lineal de Cauchy-Euler.

4.0.1 Objetivo específico

1. Resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de la forma ED Cauchy-Euler.

4.0.2 Contenidos

- Método para la solución de ED lineales en forma de EULER.

4.1 Poceso de resolución de ecuación diferencial de Cauchy- Euler

Considere la ecuación diferencial de Cauchy-Euler de la forma

$$c_n(ax+b)^n y^{(n)} + c_{n-1}(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + c_1(ax+b)y' + c_0 y = h(x)$$

En el caso de $a = 1, \ \ b = 0$ se considera la ecuación de Euler caso simple de la forma

$$c_n x^n y^{(n)} + c_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + c_1 x y' + c_0 y = h(x)$$

Observación 4.1 .

- Note que en cada término $c_n(ax+b)^n y^n$ el exponente en $(ax+b)^n$ es igual al orden $y^{(n)}$.
- En la siguiente sección se verá que toda ecuación diferencial (ED) de Euler se puede transformar en una ED lineal con coeficientes constantes, haciendo el cambio de variable $ax+b = e^z$ con lo cual, la variable independiente x cambia a variable independiente z, y por tanto la función y así como todas sus derivadas también van a depender de la nueva variable z.

4.1.1 Solución de una ecuación diferencial de Euler de segundo orden

A continuación se ilustra el método o procedimiento que permite resolver ecuaciones diferenciales de Euler de segundo orden con $a = 1$ y $b = 0$. Es decir de forma

$$\boxed{a_2 x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = F(x)} \quad (1)$$

con $a_2 \neq 0$. No obstante cabe mencionar que dicho algoritmo de solución se puede extender a ecuaciones de orden n.

Procedimiento para resolver ED de Euler de segundo orden: $a_2 x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = F(x)$

- Sea $x = e^z$ (por lo que $z = \ln x$ y se asume que $x > 0$). De esta forma $\dfrac{dx}{dz} = e^z$, lo cual es equivalente a
$$\frac{dz}{dx} = e^{-z}$$
- Por lo otro lado, se tiene que $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = y'(z)\, e^{-z}$, es decir, $\boxed{y'(x) = y'(z)\, e^{-z}}$ (2)
Ahora, $y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d(y'(x))}{dx} = \dfrac{d(y'(x))}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{d(y'(z)\, e^{-z})}{dz} \cdot e^{-z} = \left[y''(z) \cdot e^{-z} + -y'(z)\, e^{-z}\right] e^{-z}$
es decir,
$$\boxed{y''(x) = \left[y''(z) - y'(z)\right] e^{-2z}} \quad (3)$$
- Sustituyendo (2) y (3) en la ecuación diferencial original (1) tenemos

$$a_2e^{2z}\left(y''(z)-y'(z)\right)e^{-2z}+a_1e^{z}\left(y'(z)e^{-z}\right)+a_0y(z)=G(z)$$
$$a_2y''(z)-a_2y'(z)+a_1y'(z)+a_0y(z)=G(z)$$

$$\boxed{a_2y''(z)+(a_1-a_2)\,y'(z)+a_0y(z)=G(z)} \quad (4)$$

Note se trata de una **ecuación diferencial lineal de orden superior con coeficientes constantes en variable** z.

Observación 4.2 .

- En la ecuación de Euler $a_2(ax+b)^2y''(x)+a_1(ax+b)y'(x)+a_0y(x)=H(x)$ con a_2,a_1,a_0 constantes reales y $a_2\neq 0$ mediante cambio de variable $ax+b=e^z$ se transforma en la ecuación diferencial con coeficientes constantes

$$a^2a_2y''(z)+(aa_1-a^2a_2)y'(z)+a_0y(z)=G(z)$$

  Puede ingresar a la página interactiva **Ecuación diferencial de Euler** para visualizar paso a paso proceso de resolución y comprobar dichos resultados.

- Se puede generalizar la técnica de Euler para resolver las ecuaciones de tercer orden, por ejemplo para la ecuación diferencial $a_3x^3y'''+a_2x^2y''+a_1xy'+a_0y=F(x)$, la cual puede verificar que mediante cambio de variable $x=e^z$ se transforma en la ecuación diferencial de coeficientes constantes:

$$a_3y'''(z)+(a_2-a_3)y''(z)+(2a_3-a_2+a_1)y'(z)+a_0y(z)=G(z)$$

.

Ejemplo 4.1

Resolver la ecuación diferencial $x^2y''+4xy'+2y=-2\ln x^2$

Solución

- Sea $x=e^z$ (o sea $z=\ln x$) donde usando (4) se transforma en la ecuación de coeficientes constantes con variable dependiente z

$$y''+3y'+2y=-2\ln e^{2z}=-4z$$

- La ecuación auxiliar asociada a la ED homogénea es $m^2+3m+2=0\Leftrightarrow m_1=-2$ y $m_2=-1$. Así,

$$y_c(z)=C_1e^{-2z}+C_2e^{-z}$$

- La solución particular estará dada por $y_p(z)=Az+B$. Obteniendo $y'(z)=A$ y $y''(z)=0$. Luego sustituyendo en la ED diferencial dada, se tiene $3(A)+2(Az+B)=-4z\Leftrightarrow 3A+2Az+2B=-4z$ De donde debe cumplirse $2A=-4\Rightarrow A=-2$ y $3A+2B=0\Rightarrow B=3$.

- Por tanto, la solución particular en terminos de z está dada por $y_p(z) = -2z + 3$
- La solución general en términos de z será

$$y(z) = C_1 e^{-2z} + C_2 e^{-z} - 2z + 3$$

- Y finalmente la **solución general en términos de** x será

$$\boxed{y(x) = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-1} - 2\ln x + 3}$$

Ejemplo 4.2

Resuelva la ecuación diferencial $\quad x^3 y''' + 3x^2 y'' + 2xy' = \sec(\ln x), \quad \text{con } x \in \left]e^{\frac{-\pi}{2}},\ e^{\frac{\pi}{2}}\right[$

Solución

- Sea $x = e^z \Rightarrow e^z = \dfrac{dx}{dz} \Rightarrow e^{-z} = \dfrac{dz}{dx}$
- Se tiene que $\quad y'(x) = \dfrac{dy}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = y'(z)\, e^{-z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'(x) = y'(z)\, e^{-z}} \quad (1)$
- Además, $\quad y''(x) = \dfrac{d\left(y'(z)\, e^{-z}\right)}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = \left(y''(z)\, e^{-z} - y'(z)\, e^{-z}\right) \cdot e^{-z} \Rightarrow \boxed{y''(x) = e^{-2z}[y''(z) - y'(z)]} \quad (2)$
- Además, $\quad y'''(x) = \dfrac{d\left(e^{-2z} y''(z) - e^{-2z} y'(z)\right)}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = e^{-2z}[y'''(z) - 3y''(z) + 2y'(z)] \cdot e^{-z}$, luego de esta manera se tiene que

$$\boxed{y'''(x) = e^{-3z}[y'''(z) - 3y''(z) + 2y'(z)]} \quad (3)$$

- Luego sustituyendo $(1),\ (2)\ y\ (3)$ en la ED dada se tiene que

$$e^{3z}\left(e^{-3z}[y'''(z) - 3y''(z) + 2y'(z)]\right) + 3e^{2z}\left[e^{-2z}[y''(z) - y'(z)]\right] + 2e^z y'(z) e^{-z} = \sec z$$

es decir, se obtiene la **ED en coeficientes constantes de variable independiente** z

$$\boxed{y'''(z) + y'(z) = \sec z \quad (4)}$$

- Ecuación auxiliar de la ED homogénea : $m^3 + m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \ \wedge \ m = \pm i$. De tal forma que

$$\boxed{y_h = A + B\cos(z) + C\,\mathrm{sen}(z)} \quad \text{y} \quad \boxed{y_p(z) = u_1(z) + u_2(z)\cos(z) + u_3(z)\,\mathrm{sen}(z)}$$

Debe cumplirse que

$$\begin{cases} u_1'(z) \cdot 1 + u_2'(z)\cos z + u_3'\,\mathrm{sen}\, z = 0 \\ u_1'(z) \cdot 0 - u_2'(x)\,\mathrm{sen}\, z + u_3'\cos(z) = 0 \\ u_1'(z) \cdot 0 - u_2'(x)\cos z - u_3'\,\mathrm{sen}(z) = \sec(z) \end{cases}$$ [1]

[1] Note sistema se obtiene mediante método variación de paramétros para ecuación diferencial de tercer orden (4).

Este es un sistema de ecuaciones de variables $u_1'(z)$, $u_2(z)$ y $u_3'(z)$, que tendrá solución siempre que

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(z) & \operatorname{sen}(z) \\ 0 & -sen(z) & \cos(z) \\ 0 & -\cos(z) & -\operatorname{sen}(z) \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Usando la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones se tiene

$$u_1'(z) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos(z) & \operatorname{sen}(z) \\ 0 & -\operatorname{sen}(z) & \cos(z) \\ \sec(z) & -\cos(z) & -\operatorname{sen}(z) \end{vmatrix}}{1} = \sec(z);$$

$$u_2'(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \operatorname{sen}(z) \\ 0 & 0 & \cos(z) \\ \sec(z) & \sec(z) & -\operatorname{sen}(z) \end{vmatrix}}{1} = -1;$$

$$u_3'(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos(z) & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}(z) & 0 \\ 0 & -\cos(z) & \sec(z) \end{vmatrix}}{1} = \frac{-\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)};$$

Luego las funciones $u_1(z)$, $u_2(z)$ y $u_3(z)$ se obtienen integrando.

$$u_1(z) = \int \sec z dz = \ln|\sec z + \tan z|; \;\; u_2(x) = -\int 1 dz = -z \; ; \;\; u_3(x) = -\int \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} dz = \ln(\cos z)$$

Así, entonces se tiene que

$$\boxed{y_p(z) = \ln|\sec z + \tan z| - z\cos(z) + \ln(\cos z)\operatorname{sen}(z)},$$

Por lo tanto la **solución general** en z de la ecuación es

$$\boxed{y(z) = A + B\cos(z) + C\operatorname{sen}(z) + \ln|\sec z + \tan z| - z\cos(z) + \ln(\cos z)\operatorname{sen}(z)}$$

Entonces finalmente en términos de la variable independiente x, la **solución general** de la ED es

$$\boxed{y(x) = A + B\cos(\ln(x)) + C\operatorname{sen}(\ln(x)) + \ln|\sec(\ln(x)) + \tan(\ln(x))| - z\cos(\ln(x)) + \ln(\cos\ln(x))\operatorname{sen}(\ln(x))}$$

Ejemplo 4.3

Resolver la ecuación diferencial $(3x+2)^2 y'' - (3x+2) y' + 3y = 5(3x+2)^2 - 4$

Solución

- Sea $3x+2 = e^z \Rightarrow e^z = 3\dfrac{dx}{dz} \Rightarrow 3e^{-z} = \dfrac{dz}{dx}$

- Se tiene que $y'(x) = \dfrac{dy}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = y'(z)\, 3e^{-z}$

- Además, $y'' = \dfrac{d\left(y'(z)\, 3e^{-z}\right)}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = \left(3y''(z)\, e^{-z} - 3y'(z)\, e^{-z}\right) \cdot 3e^{-z}$

- Luego sustituyendo en la ED dada se tiene que

$$e^{2z}\left[\left(3y''(z)\, e^{-z} - 3y'(z)\, e^{-z}\right) \cdot 3e^{-z}\right] - e^z\left[y'(z)\, 3e^{-z}\right] + 3y = 5e^{2z} - 4$$

  es decir,

$$9y''(z) - 12y'(z) + 3y = 5e^{2z} - 4$$

- Ecuación auxiliar de la ED homogénea : $9m^2 - 12m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3} \ \wedge \ m = 1$. De tal forma que

$$\boxed{y_h = c_1 e^{z/3} + c_2 e^z} \quad \text{y} \quad \boxed{y_p = Ae^{2z} + B}$$

- Calculando las derivadas $y_p'(z) = 2Ae^{2z}$, $y_p''(z) = 4Ae^{2z}$ luego sustituyendo en la ecuación ED dada, y resolviendo el sistema de ecuaciones asociado, se obtiene que $A = \frac{1}{3}$ y $B = \frac{-4}{3}$. De donde se obtiene la solución particular con respecto a z: $y_p(z) = \dfrac{e^{2z}}{3} - \dfrac{4}{3}$, de esta forma la solución general es

$$y(z) = c_1 e^{z/3} + c_2 e^z + \frac{e^{2z}}{3} - \frac{4}{3}$$

  cuya solución general en términos de la variable independiente x es

$$\boxed{y(x) = c_1 (3x+2)^{\frac{1}{3}} + c_2 (3x+2) + \frac{(3x+2)^2}{3} - \frac{4}{3}}$$

Ejemplo 4.4 Explicación mediante video

Considere la ecuación diferencial

$$\mathbf{N}: \quad (5x-4)^2 y''(x) - 15(5x-4)y'(x) + 100y(x) = 5x$$

a) Utilice cambio de variable adecuado para convertir **N** en una ecuación diferencial de coeficientes constantes.

b) Resuelva ecuación diferencial obtenida en a) para obtener solución general de **N**.

Solución

Puede visualizar explicación y solución de dicho ejemplo, mediante video explicativo a través del link: https://www.youtube.com/watch?v=ApMTq_32s0Q

Ejemplo 4.5 Ejemplo de ecuación diferencial con técnica de Euler

Resolver la ecuación diferencial $y'' + (\tan x)y' + (\cos^2 x)y = e^{\operatorname{sen} x}\cos^4 x$ (Sug: aplique la técnica de Euler con $z = \operatorname{sen} x$)

Solución

Haciendo el cambio de variable $x = \operatorname{arc\,sen} z \Rightarrow \operatorname{sen} x = z$ de donde se cumple $\cos x = \dfrac{dz}{dx}$. Además dado que $z = \operatorname{sen} x$, se tiene que $1 - \cos^2 x = z^2$, es decir, $1 - z^2 = \cos^2 x$ y de esta forma se tiene

$$\boxed{\sqrt{1-z^2} = \cos x = \frac{dz}{dx}} \quad \textbf{[1]}$$

Por otro lado, dado que se necesita transformar nuestra ecuación diferencial dada en una de variables dependiente y e independiente z, se utiliza regla de la cadena de la siguiente forma:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = y'(z)\sqrt{1-z^2}$, así $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = y'(z)\sqrt{1-z^2}}$ **[2]**

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d(y'(z)\sqrt{1-z^2})}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = \left(y''(z)\sqrt{1-z^2} - \dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}y'(z)\right)\sqrt{1-z^2}$, así $\boxed{\dfrac{d^2y}{dx^2} = (1-z^2)y''(z) - zy'(z)}$ **[3]**

utilizando nuestro cambio de variable $z = \operatorname{sen} x$ y lo obtenido en **[1]**, **[2]**, **[3]** en la ecuación diferencial dada, se tiene

$$y''(z)(1-z^2) - zy'(z) + zy'(z) + (1-z^2)y = e^z(1-z^2)^2$$

si se divide dicha ecuación entre $1 - z^2$, se obtiene la ecuación diferencial de coeficientes constantes en $y(z)$

$$\boxed{y'' + y = e^z(1-z^2)}$$

donde al resolverla se obtiene por solución general

$$y = C_1 \cos z + C_2 \operatorname{sen} z - e^z\left(\frac{1}{2}z^2 - z\right)$$

y de esta forma al retomar nuestro cambio de variable inicial $z = \operatorname{sen} x$se obtiene por solución de la ecuación dada

$$\boxed{y = C_1 \cos(\operatorname{sen} x) + C_2 \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - e^{\operatorname{sen} x}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x\right]}$$

4.1.2 Método alternativo de Euler

Considere la ecuación diferencial $a_2x^2y''(x)+a_1xy'(x)+a_0y(x)=0$, suponga que admite una solución de la forma $y=x^m$ como m real por determinar. Por otra parte se tiene

$$y=x^m \Rightarrow y'=mx^{m-1} \Rightarrow y''=m(m-1)x^{m-2}$$

al sustituir en la ecuación diferencial dada

$$\begin{aligned}
& a_2x^2y''(x)+a_1xy'(x)+a_0y(x)=0 \\
\Rightarrow\quad & a_2m(m-1)x^m+a_1mx^m+a_0x^m=0 \\
\Rightarrow\quad & (a_2m(m-1)+a_1m+a_0)x^m=0 \\
\Rightarrow\quad & (a_2m^2+(a_1-a_2)m+a_0)x^m=0
\end{aligned}$$

Así $y=x^m$ es una solución de la ecuación diferencial siempre que m sea una solución de la ecuación auxiliar

$$a_2m^2+(a_1-a_2)m+a_0=0$$

Hay tres casos distintos por considerar en dicha ecuación característica u auxiliar, a saber:

I Caso: Raíces reales distintas

Sean m_1 y m_2 raíces reales distintas, entonces se tiene $y_1=x^{m_1}$ y $y_1=x^{m_2}$ forman un conjunto fundamental de soluciones. De esta forma la solución general viene dada por

$$y=C_1x^{m_1}+C_2x^{m_2}$$

para C_1,C_2 constantes arbitrarias.

II Caso: Raíces reales iguales

Sean m_1 y m_2 raíces reales iguales, entonces se tiene $y_1=x^{m_1}$ con $m_1=\dfrac{-a_1+a_2}{2a_2}$. Para hallar la segunda solución linealmente a y_1 se recurre al teorema de segunda solución de Abel en donde se puede verificar que

$$y_2=x^{m_1}\ln x$$

De esta forma la solución general viene dada por

$$y=C_1x^{m_1}+C_2x^{m_1}\ln x$$

para C_1,C_2 constantes arbitrarias.

III Caso: Raíces complejas

Si las raíces de la ecuación auxiliar son de la forma Sea $m_1 = a+bi$ y $m_2 = a-bi$ (raíces complejas), entonces se tiene por solución general

$$y = x^a(C_1\cos(b\ln x) + C_2\,\text{sen}(b\ln x))$$

para C_1, C_2 constantes arbitrarias.

Ejemplo 4.6

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $x^3y'''(x) - x^2y''(x) - 6xy'(x) + 18y = 0$
2. $3x^2y'' + 11xy' - 3y = 0$

Solución 1.

Note que se trata de una ecuación diferencial de Euler de tercer orden en donde se supone admite una solución de la forma $y = x^m$, por lo que se calcula sus derivadas hasta la de orden 3 y se sustituye en la ecuación diferencial dada, con lo cual se reduce a

$$\begin{aligned}
& x^3y'''(x) - x^2y''(x) - 6xy'(x) + 18y = 0 \\
\Rightarrow\ & x^3m(m-1)(m-2)x^{m-3} - x^2m(m-1)x^{m-2} - 6xmx^{m-1} + 18x^m = 0 \\
\Rightarrow\ & (m(m-1)(m-2) - m(m-1) - 6m + 18)x^m = 0 \\
\Rightarrow\ & (m-3)^2(m+2) = 0
\end{aligned}$$

luego $m_1 = m_2 = 3,\ \ m_3 = -2$, de esta forma se tiene por solución general de la ecuación diferencial dada

$$y(x) = (C_1 + C_2\ln x)x^3 + C_3x^{-2}$$

Solución 2.

Suponga dicha ecuación diferencial admite una solución de la forma $y = x^m$, por lo que se calcula sus derivadas hasta la de orden 2 y sustituye en la ecuación diferencial homogénea con lo cual se reduce a

$$\begin{aligned}
& 3x^2y'' + 11xy' - 3y = 0 \\
\Rightarrow\ & 3x^2m(m-1)x^{m-2} + 11xmx^{m-1} - 3x^m = 0 \\
\Rightarrow\ & (3m(m-1) + 11m - 3) = 0 \\
\Rightarrow\ & 3m^2 + 8m - 3 = 0
\end{aligned}$$

luego $m_1 = \dfrac{1}{3},\ \ m_2 = -3$, de esta forma se tiene por solución general de la ecuación diferencial dada

$$y(x) = C_1x^{\frac{1}{3}} + C_2x^{-3}$$

Ejercicios 4.1 [**Ejercicios de retroalimentación**]

4.1.1 Resuelva cada una de las ecuaciones dadas a continuación y posteriormente ingrese a página interactiva **Ecuación diferencial de Euler** para visualizar paso a paso el proceso de resolución y comprobar dichos resultados.

a. $x^2y''(x)+3xy'(x)+y(x)=8-\ln\left(x^3\right)$
b. $x^2y''(x)+4xy'(x)+2y(x)=-2\ln\left(x^2\right)$
c. $(x-1)^2y''(x)-2(x-1)y'(x)-4y(x)=4\ln(x-1)-3x$
d. $x^2y''(x)+xy'(x)+y(x)=\tan(\ln(x))$
e. $(3x+2)^2y''(x)-(3x+2)y'(x)+3y(x)=5(3x+2)^2-4$
f. $(x-2)^2y''(x)+3(x-2)y'(x)+y(x)=\ln^2(x-2)-5\ln(x-2)+6$
g. $x^2y''(x)+xy'(x)+y(x)=\sec(\ln(x))$
h. $(2x+1)^2y''(x)-2(2x+1)y'(x)+4y(x)=0$

4.1.2 Generalice la técnica de Euler para resolver las siguientes ecuaciones de tercer orden.

$$\left(Sug: \text{ verifique que } y'''(x)=e^{-3z}\left[y'''(z)-3y''(z)+2y'(z)\right]\right)$$

a) $x^3y'''+3x^2y''=1+x$

b) $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=2\ln x^3-35$

c) $x^3y'''-2xy'=5\ln x$

4.1.3 Haciendo uso de la sustitución $x=arcsenz$, aplique la técnica de Euler para resolver las ecuaciones

a) $y''+(\tan x)\,y'+\left(\cos^2 x\right)y=\cos^2 x$

b) $y''+(\tan x)\,y'+\left(\cos^2 x\right)y=e^{senx}\cos^4 x$

4.1.4 Determine la ecuación diferecial lineal con coeficientes constantes en $y(z)$ que se obtiene al realizar el cambio de variable $x=cos(z)$ en la ecuación diferencial

$$y''-\cot(x)y'-\operatorname{sen}^2(x)y=0$$

4.1.5 Para cada afirmación indique **V** si es verdadera o **F** si es falsa según así corresponda:

a. Una solución particular de la ecuación diferencial $w^2q''=-wq'+25q$ corresponde a

$$q=12w^5+7w^{-5}$$

b. La solución general de la ecuación diferencial $5xy'' - 2x^{-3} + 20y' = 0$ corresponde a

$$y = C_1 + C_2x^{-3} - 0{,}2x^{-2}$$

c. Al realizar cambio de variable apropiado, la ecuación diferencial $x^2y''(x) + 3xy'(x) + 15y(x) = -7x^2 + 15ln(x)$, se convierte en

$$y''(z) - 2y'(z) + 15y(z) = -7e^{2z} + 15z$$

d. La ecuación diferencial

$$-6(-3x+1)^2y''(x) - 3(-3x+1)y'(x) - 2y(x) = 5(-3x+1)^2 - 4$$

, al realizar el cambio de variable $-3x+1 = e^z$ se transforma en la ecuación diferencial

$$-54y''(z) - 63y'(z) - 2y(z) = 5e^{2z} - 4$$

e. El cambio de variable que convierte la ecuación diferencial

$$4(3x+1)^2y''(x) + (3x+1)y'(x) + y(x) = x^2 + \ln x$$

en una ecuación diferencial con coeficientes constantes corresponde a $z = 3x+1$.

f. Al aplicar el cambio de variable apropiado, la ecuación diferencial

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} = -5xy + x^4$$

se obtiene la ecuación diferencial $y''(z) - 2y'(z) + 5y(z) = e^{3z}$

g. Al realizar el cambio de variable $e^z = 7x+4$, la ecuación diferencial

$$(7x+4)^2y''(x) + (7x+4)y'(x) + 7y(x) = F(x)$$

, se reescribe como $49y''(z) - 42y'(z) + 7y(z) = F\left(\frac{e^z+4}{7}\right)$

h. Al resolver la ecuación diferencial

$$y'' - \frac{1}{t}y' + \frac{1}{t^2}y = \frac{4\ln t}{t}, \qquad t > 0$$

se tiene por solución general

$$y(t) = c_1t + c_2\ln(t)t + 4t\ln(t) + 8t$$

5 — Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior mediante aniquiladores

5.0.1 Objetivo específico

1. Resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden superior mediante aniquiladores.

5.0.2 Contenidos

- Método de aniquiladores para resolución de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes constantes.

5.1 Ecuaciones diferenciales de orden superior mediante aniquiladores

De acuerdo a lo visto en la sección 1.1.9 sobre notación de la ecuación diferencial lineal de orden n : $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x)$ con $a_n \neq 0$ [1] se puede escribir en notación de operadores como

$$\left(a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1D + a_0\right)y = F(x) \qquad (\mathbf{1})$$

Si $\phi(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1D + a_0$, entonces la ecuación diferencial **(1)** puede rescribirse de la siguiente forma

$$\phi(D)y = F(x) \qquad (\mathbf{2})$$

Observación 5.1 .

$\star$ Otra notación referente a **(1)** es el operador diferencial $L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1D + a_0$, escribiéndose la ecuación diferencial **(1)** como sigue $L(y) = F(x)$ $(\mathbf{3})$.

Asimismo la solución general de ecuación diferencial **(1)** está dada por $y = y_c + y_p$, donde y_c (provista de parámetros arbitrarios) es la solución complementaria de la ecuación homogénea $\phi(D)y = 0$, mientras que y_p (libre de parámetros) es una solución particular de la ecuación no homogénea $\phi(D)y = F(x)$.

El método de aniquiladores es un método alternativo al de coeficientes indeterminados pues aplica a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior con **coeficientes constantes** no homogénea para determinar la forma de solución particular y_p para $F(x)$ básicamente de funciones como polinomios, exponenciales base e de la forma e^{ax}y trigonométricas sen(βx) y $\cos(\beta x)$; así como combinacion lineal o productos finitos de ellas. El método en general en un primer momento sugiere expresar la ecuación diferencial en forma de operadores y buscar aniquilador para la función $F(x)$ entre otros procesos que se estudiará en esta sección.

Observación 5.2 .

Según lo estudiado en la sección de operadores del capítulo 1, con respecto al operador $\phi(D)$ se recuerda lo siguiente:

$\star$ $\phi(D)$ puede ser factorizado en $\mathbb{R}$, esto pues todos los a_i con $i = 0, \cdots, n$ son constantes.

$\star$ Los factores de $\phi(D)$ pueden ser conmutados.

$\star$ El operador $\phi(D)$ con coeficientes constantes aniquila o es un anulador de la función $F(x)$ si y solo si $\phi(D)y(F(x)) = 0$.

$\star$ Si el operador D_1 aniquila a $F(x)$ pero no a $G(x)$ y si el operador D_2 aniquila a $G(x)$ pero no a $F(x)$, entonces el producto de los operadores $D_1 \cdot D_2$ aniquila a cualquier combinación lineal de F y G, por ejemplo $C_1F(x) + C_2G(x)$.

[1] Recuerde que $a_0(x), a_1(x), ..., a_n(x), F(x)$ son funciones reales continuas que dependen sólo de la variable independiente x y definidas en un intervalo común I, con $a_n \neq 0$ para toda $x \in I$

A continuación se muestra una tabla resumen de los principales anuladores para la función $F(x)$ de la ecuación diferencial $\phi(D) = F(x)$ lineal de coeficientes contantes, donde $F(x)$ involucra funciones polinomiales, exponenciales y trigonométricas, $\text{sen}(\beta x)$, $\cos(\beta x)$. Para a, β constantes y $n \in \mathbb{N}$, la columna de la izquierda muestra el anulador de las funciones en la columna derecha y también sus **combinaciones lineales**:

Anulador	**Funciones que anula .**
D^n	$1, x, x^2, \cdots x^{n-1}$
$D-a$	e^{ax}
$(D-a)^n$	$e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax} \cdots x^{n-1}e^{ax}$
$D^2+\beta^2$	$\cos(\beta x)$, $\text{sen}(\beta x)$
$(D^2+\beta^2)^n$	$\cos(\beta x), x\cos(\beta x), x^2\cos(\beta x) \cdots x^{n-1}\cos(\beta x)$ $\text{sen}(\beta x), x\,\text{sen}(\beta x), x^2\,\text{sen}(\beta x) \cdots x^{n-1}\,\text{sen}(\beta x)$
$((D-a)^2+\beta^2)^n$	$e^{ax}\cos(\beta x), xe^{ax}\cos(\beta x), x^2e^{ax}\cos(\beta x) \cdots x^{n-1}e^{ax}\cos(\beta x)$ $\text{sen}(\beta x), xe^{ax}\,\text{sen}(\beta x), x^2e^{ax}\,\text{sen}(\beta x) \cdots x^{n-1}e^{ax}\,\text{sen}(\beta x)$

5.1.1 Ejemplos de aniquilador para la funciones $F(x)$.

Ejemplo 5.1

Halle el aniquilador de las siguientes funciones:

1. $F(x) = 3e^{-2x} - 5xe^{x} - 2x^3e^{x}$

   Los aniquiladores respectivos son $D+2$, $(D-1)^2$, $(D-1)^4$
   Como el segundo es subconjunto del tercero, entonces el aniquilador total es
   $\phi(D) = (D-1)^4(D+2)$ y de esta forma puede comprobar que $\phi(D)F(x) = 0$.

2. $F(x) = xe^{-x}(2-3x) + xe^{4x} = 2xe^{-x} + 3x^2e^{-x} + xe^{4x}$

   Los aniquiladores respectivos son $(D+1)^2$, $(D+1)^3$, $(D-4)^2$
   Note que el aniquilador$(D+1)$ es subconjunto del $(D+1)^3$, por lo que se toma $(D+1)^3$
   y así entonces el aniquilador total es $\phi(D) = (D+1)^3(D-4)^2$.

$\star$ **Note que cuando un aniquilador D_1 es subconjunto de otro D_2, se toma el de mayor grado**.

Ejemplo 5.2

Halle el aniquilador de la siguiente función

1. $F(x) = 1 - 2x - xe^{-x} + 3e^{7x}$

   Los aniquiladores respectivos son $D,\ D^2,\ (D+1)^2,\ (D-7)$
   Como el primero es subconjunto del segundo, entonces el aniquilador total es
   $\phi(D) = D^2 (D+1)^2 (D-7)$

Ejemplo 5.3

Halle el aniquilador de la siguiente función $F(x) = x^3 + e^{-3x}(1 - x\,\mathrm{sen}\,x) - e^{8x}$

Los aniquiladores respectivos son $D^4,\ (D+3),\ \left(D^2 - 2aD + \left(a^2+b^2\right)\right)^2,\ (D-8)$
Como $a = -3$ y $b = 1$, asi entonces el aniquilador de $F(x)$ es

$$\phi(D) = D^4 (D+3) \left(D^2 + 6D + 10\right)^2 (D-8)$$

Ejemplo 5.4

Halle el aniquilador de la siguiente función

1. $F(x) = 5xsen\left(\sqrt{2}x\right) - 3\cos\left(\sqrt{2}x\right)$

   Los aniquiladores respectivos son $\left(D^2+2\right)^2,\ \left(D^2+2\right)$
   Como el segundo es subconjunto del primero, entonces el aniquilador total es
   $\phi(D) = \left(D^2+2\right)^2$

2. $F(x) = e^{-x}(3 - x + senx) - sen\left(\sqrt{5}x\right) = 3e^{-x} - xe^{-x} + senxe^{-x} - sen\left(\sqrt{5}x\right)$

   Los aniquiladores respectivos son $D+1,\ (D+1)^2,\ \left(D^2+2D+2\right),\ \left(D^2+5\right)$
   Como el primero es subconjunto del segundo, entonces el aniquilador total es
   $\phi(D) = (D+1)^2 \left(D^2+2D+2\right) \left(D^2+5\right)$

5.2 Solución de ecuaciones diferenciales $\phi(D)y = F(x)$ mediante aniquiladores

Considere la ecuación diferecial lineal con coeficientes constantes no homogénea $\phi(D)y = F(x)$, se determina el aniquilador D_1 de $F(x)$, y este se aplica a ambos lados de la ecuación, conduciendo a una nueva ecuación diferencial, por lo general llamada super homogénea:

$$D_1\phi(D)y = D_1F(x) = 0$$

Al resolver esta última ecuación, la cual es de mayor orden que la original, se puede determinar **la forma de una solución particular** para la ecuación diferencial propuesta. Acontinuación se enuncia un esquema de resolución con los principales pasos de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes no homogénea $\phi(D)y = F(x)$ mediante el método de **aniquiladores u operadores:**

a. Se determina primero la solución complementaria y_c para la ecuación homogénea $\phi(D)y = 0$.

b. Luego aplique el aniquilador D_1 a ambos lados de la ecuación $\phi(D)y = F(x)$.

c. Posteriormente se determina la solución de la nueva ecuación homogénea de acuerdo a lo obtenido en paso anterior $D_1\phi(D)y = 0$.

d. Se comparan solución de la homogénea obtenida en paso del punto a con la obtenida en paso c, de donde se eliminan todos los términos que están duplicados en ambas soluciones mencionadas
Con los términos restantes, determine la estructura básica de y_p, la cual será la forma de una solución particular para $\phi(D)y = F(x)$.

e. Una vez conocida la forma de la solución particular, se debe hallar las constantes involucradas en ella y entonces para ello se recurre al proceso de sustituir y_p y sus derivadas en la ecuación original $\phi(D)y = F(x)$, se iguala los coeficientes de las diferentes funciones que aparecen y se resuelve el sistema de ecuaciones para hallar los valores de los coeficientes indeterminados de y_p.

f. Finalmente, se determina la solución general correspondiente $y = y_c + y_p$.

Ejemplo 5.5

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + 3y' + 2y = 4x^2$$

Solución

Observe que la ecuación diferencial dada, en términos del operador D se escribe de la siguiente manera :

$$\left(D^2 + 3D + 2\right)y = 4x^2$$

De acuerdo al proceso de solución antes descrito se tiene:

a. Se determina la La ecuación auxiliar asociada a nuestra ED, la cual es $m^2 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow m_1 = -1$ y $m_2 = -2$, así que

$$\boxed{y_c = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}\ [1]}$$

b. Note el aniquilador de $F(x) = 4x^2$ es D^3. Por lo que se aplica este aniquilador a ambos lados de la ecuación $D^3\left(D^2+3D+2\right)y = D^3\left(4x^2\right)$

es decir,

$$\boxed{\left(D^5+3D^4+2D^3\right)y = 0}$$

c. Se determina la solución de esta nueva ecuación diferencial obtenida en paso anterior , de donde corresponde a

$$\boxed{y_{cn} = A + Bx + Cx^2 + De^{-x} + Ee^{-2x}\ [2]}$$

d. Ahora para obtener la solución particular asociada a la ED dada, se debe suprimir términos duplicados de [1] y [2], es decir,

$$y_p = y_{cn} - y_c = A + Bx + Cx^2$$

e. Dada la forma de la y_p, se deriva las veces del orden de ED(en este caso dos veces) y sustituye en ecuación original y así obtener las constantes asociadas a dicha forma de la y_p, $y' = B + 2Cx$ y $y'' = 2C$

$$2C + 3(B+2Cx) + 2\left(A+Bx+Cx^2\right) = 4x^2, \text{ igualando coeficientes}$$

$$\left\{\begin{array}{c} 2C = 4 \\ 6C + 2B = 0 \\ 2C + 3B + 2A = 0 \end{array}\right. ,[A = 7, B = -6, C = 2]$$

Así la solución particular de la ED dada es

$$\boxed{y_p = 7 - 6x + 2x^2}$$

f. Luego finalmente la **solución general** será

$$\boxed{y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 7 - 6x + 2x^2}$$

Ejemplo 5.6

Resuelva la siguiente ecuación diferencial : $y''' + y'' = e^x \cos x$.

Solución

Observe que la ecuación en términos del operador D viene dada por : $\left(D^3+D^2\right)y = e^x \cos x$.

Considerando los pasos descritos para el proceso de solución mediante aniquiladores :

a. La ecuación diferencial $(D^3+D^2)y = 0$ tiene por ecuación auxiliar $m^3 + m^2 = 0 \Rightarrow m_1 = 0$ (multiplicidad 2) y $m_2 = -1$, así que

$$\boxed{y_c = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x},\ [1]}$$

b. El **aniquilador de** $F(x) = e^x \cos x$ es $D^2 - 2D + 2$. Aplicando este aniquilador a ambos lados de la ecuación diferencial $\left(D^3 + D^2\right) y = e^x \cos x$ se tiene

$$\left(D^2 - 2D + 2\right)\left(D^3 + D^2\right) y = \left(D^2 - 2D + 2\right)\left(e^x \cos x\right)$$

es decir,

$$\left(2D^2 - D^4 + D^5\right) y = 0 \Leftrightarrow D^2 (D+1)\left(D^2 - 2D + 2\right) y = 0$$

c. Resolviendo la ecuación diferencial anterior se tiene que la solución de esta nueva ecuación es

$$\boxed{y_{cn} = A + Bx + Ce^{-x} + e^x (Dsenx + E\cos x)\ \ [2]}$$

d. Luego suprimiendo términos idénticos de lo obtenido en [1] y [2], se obtiene que la solución particular de la ecuación diferencial inicial es de la forma

$$y_p = y_{cn} - y_c = e^x (Dsenx + E\cos x)$$

e. Luego se calculan las siguientes derivadas de y_p :

$y' = e^x (Dsenx + E\cos x) + e^x (D\cos x - Esenx) = e^x ((D-E)\operatorname{sen} x + (E+D)\cos x)$

$y'' = e^x ((D-E)\operatorname{sen} x + (E+D)\cos x) + e^x ((D-E)\cos x - (E+D)\operatorname{sen} x) = e^x (2D\cos x - 2E\operatorname{sen} x)$

$y''' = e^x (2D\cos x - 2E\operatorname{sen} x) + e^x (-2D\operatorname{sen} x - 2E\cos x)$, sustituyendo en la ecuación diferencial dada

$e^x (2D\cos x - 2E\operatorname{sen} x) + e^x (-2D\operatorname{sen} x - 2E\cos x) + e^x (2D\cos x - 2E\operatorname{sen} x) = (4D-2E) e^x \cos x + (-2D-4E)\operatorname{sen} x e^x = e^x \cos x$, igualando coeficientes

$$\begin{cases} 4D - 2E = 1 \\ -2D - 4E = 0 \end{cases},\ \left[D = \tfrac{1}{5}, E = -\tfrac{1}{10}\right],$$

Así de esta forma se obtiene por solución particular de la ED

$$\boxed{y_p = e^x \left(\frac{1}{5} senx - \frac{1}{10}\cos x\right)}$$

f. Finalmente **la solución general** de nuestra ED será

$$\boxed{y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + e^x \left(\frac{1}{5} senx - \frac{1}{10}\cos x\right)}$$

Ejemplo 5.7

Determine una ecuación diferencial lineal, de **menor orden posible**, tal que, cada una de las siguientes funciones sea una solución particular:

$$0, 1, 2, 3, x, -x, xe^x, xe^x \cos x$$

Solución:

Se determina los anuladores u operador aniquilador para cada una de las distintas funciones dadas:

- Note que las funciones $0, 1, 2, 3, \pm x$ todas poseen el mismo anulador: D^2.
- Por otro lado, la función xe^x tiene como anulador el operador $(D-1)^2$.
- Finalmente, la función $xe^x \cos x$ es anulada por el operador $(D-2D+2)^2$.

Así, de esta forma la ecuación diferencial que satisface lo indicado corresponde a

$$\boxed{D^2(D-1)^2(D-2D+2)^2 y = 0}$$

o bien

$$\boxed{y^{(8)}(x) - 6y^{(7)}(x) + 17y^{(6)}(x) - 28y^{(5)}(x) + 28y^{(4)}(x) - 16y'''(x) + 4y''(x) = 0}$$

5.2.1 Ejemplos de ecuaciones diferenciales mediante operadores con video explicativo

Ejemplo 5.8

Considere la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes:

$$\phi(D)y = 12x + 4e^{\frac{x}{2}} + e^{-x}\cos(2x) \quad [\mathbf{1}]$$

cuya solución de la ecuación homogénea viene dada por

$$y_h = C_1 + C_2 e^{\frac{x}{2}} + C_3 x e^{\frac{x}{2}} + e^{-x}[(C_4 x + C_5)\cos(2x) + (C_6 x + C_7)\,\mathrm{sen}(2x)]$$

Determine la **forma de la solución particular** de la ecuación diferencial denotada con **[1]**

Solución

Puede visualizar explicación y solución de dicho ejemplo, mediante video explicativo a través del link:
https://www.youtube.com/watch?v=avGi2BotI0O

Ejemplo 5.9

Considere la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes:

$$y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4\,\mathrm{sen}\,x - \cos x \quad [\mathbf{1}]$$

cuya solución de la ecuación homogénea viene dada por

$$y_h = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(x) + C_4\,\mathrm{sen}(x)]$$

Determine la **forma de la solución particular** de la ecuación diferencial denotada con **[1]**

Solución

Puede visualizar explicación y solución de dicho ejemplo, mediante video explicativo a través del link: https://www.youtube.com/watch?v=4fpOyezeFoA

Ejercicios 5.1

5.2.1 Determine el operador anulador de las siguientes funciones

a) $f(x) = 13x + 9x^2 - \operatorname{sen}(4x)$
b) $f(x) = (2 - e^x)^2$
c) $h(x) = 3 + e^x \cos(2x)$
d) $n(x) = e^x + 2xe^x - x^3e^{-x}$
e) $m(x) = x^2e^{2x} - \operatorname{sen} x + 10\cos(5x)$
f) $z(x) = xe^{2x}\cos(3x) + e^x - 2xe^x$
g) $r(x) = 2x^2 - 1 + 2x\operatorname{sen} x - 3\cos x$

5.2.2 Para cada ecuación diferencial lineal no homogénea determine la solución general, usando el método de aniquiladores estudiado en este capítulo.

a) $y^{(4)}(x) + y''(x) = e^x + 1$
b) $y'''(x) - 6y''(x) + 11y'(x) - 6y(x) = (12x - 25)e^{-x}$
c) $y^{(4)}(x) + 3y'''(x) - 8y''(x) - 12y'(x) + 16y(x) = x^2 + \cos(x)$
d) $y'''(x) + y''(x) = x\operatorname{sen}(x) + 4$
e) $y^{(4)}(x) - 2y''(x) + y(x) = 8084(\operatorname{sen}(x) + \cos(x))$
f) $y^{(4)}(x) + 2y'''(x) - 2y'(x) - y(x) = e^x - x$
g) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 3x + 3e^x + 2\cos(2x) + 2$
h) $y'''(x) + y''(x) - y'(x) - y(x) = 8e^x(x+1) + 4\operatorname{sen}(x)$
i) $y^{(4)}(x) - 4y''(x) + 16y'(x) + 32y(x) = xe^{-2x}\cos(2x)$
j) $y'''(x) - 3y'(x) - 2y(x) = 27xe^{-x}$
k) $y'''(x) + y''(x) = 9e^{3x} - 4x$
l) $y'''(x) + 2y''(x) = 3e^{-2x} - 8x$

5.2.3 Proponga únicamente la **forma de la solución particular** correspondiente a las ecuaciones diferenciales

a) $y''' - 2y'' - 3y' = x^2e^{-x} + 2x^3e^{3x}$
b) $y^{(4)} + 4y'' = \operatorname{sen}(2x) - xe^{3x} + 5$
c) $w^{(4)} + 36w'' = tcos(6t) - 7t + 18$
d) $w^2q'' = -wq' + 81q$

5.2.4 Considere la ecuación diferencial coeficientes con constantes de orden n: $\phi(D)y =$

$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(t)$ donde

$$g(t) = a\cos(\beta t) + b\,\mathrm{sen}(\beta t);\;\; \beta \neq 0$$

Encuentre la **forma de la solución particular** de la ecuación diferencial. (Sugerencia: considere primero el caso en que el anulador de g no es factor de $\phi(D)$.)

5.2.5 Considere la ecuación diferencial lineal coeficientes con constantes de orden n:

$$\phi(D)y = a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$

donde a_i; $i = 0;\cdots;n$ son constantes con $a_n \neq 0$.

$$g(t) = t^{2ab-1} e^{abt}(a\cos(bt) + b\,\mathrm{sen}(at)$$

con a y b enteros positivos. Encuentre la **forma de la solución particular** considerando separadamente el caso en que el anulador de $g(t)$ no es un factor de $\phi(D)$ y el caso en que si lo es y con multiplicidades.

5.2.6 Demostrar que si $f \in C^n(I)$ y $\phi(D)$ es $a \in \mathbb{R}$ o con a en los complejos entonces

$$\phi(D)(e^{ax} f(x)) = e^{ax}\phi(D+a)(f(x))$$

Use dicho resultado para comprobar

a) $(D+2)(D-2)^3(x^2 e^{2x}) = 0$
b) $(D-3)^n(e^{3x}x^n) = n!e^{3x}$

5.2.7 Pruebe $(x^m D^m)x^k = k(k-1)\cdots(k-m+1)x^k$ para cualquier número real k.

5.2.8 Demuestre que la solución de la ecuación diferencial

$$[D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)]y = 0$$

se puede escribir como $y = C_1 e^{ax}\cos(bx + c_2)$ con C_1, C_2 constantes arbitrarias.

5.2.9 Demuestre que

$$(D-\alpha)^k x^m e^{\alpha x} = \begin{cases} 0 \quad si \quad k > m \\ m(m-1)\cdots(m-k+1)x^{m-k}e^{\alpha x} \quad si \quad k \leq m \end{cases}$$

Deduzca en particular que

$$(D-\alpha)^m x^m e^{\alpha k} = m!e^{\alpha k}$$

5.3 Bibliografía

- Abell, Martha L. y Braselton James P. (2016), Differential Equations with Mathematica, Elsevier Science & Technology Books, 4a edición.

- Ayres, Frank Jr.(2001). Ecuaciones diferenciales.McGraw Hill-Serie Schaum, México.

- Boyce, W. E. e Diprima, R. C. (2012). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. México. Editora Limusa Wiley, 5a edición.

- Coddington E.(1971). Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias Compañía Editorial Continental, S.A,2a edición.

- Figueroa, G. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Editorial Tecnológica de Costa Rica, 2010.

- Lomen D. y Lovelock D. (2000). Ecuaciones Diferenciales a través de gráficas, modelos y datos. Primera edición. Compañía editorial Continental, México.

- Meneses R. Sharay (2016). Folletos de curso Ecuaciones diferenciales. Tecnológico de Costa Rica.

- Mora Walter (2013). Plantilla del formato y diseño de Revista Matemática. Tecnológico de Costa Rica.

- Murray R. Spiegel (1983). Ecuaciones diferenciales aplicadas. Tercera edición. México. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.

- Zill, Dennis G. (2009) Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera.Editorial Thompson, sétima edición, México.

- Wolfram Demonstration Project.(s.f). http://demonstrations.wolfram.com/

6 — Solución de los ejercicios

Soluciones del Capítulo 1

Soluciones del Capítulo 2

1.1.1

a) x^2
b) 0
c) $6e^{6x}$
d) e^{2x}
e) $2e^{6x}$
f) 5
g) $-14x^4$
h) $-3e^{6x}$
i) $2x^3$
j) 0
k) $3e^{7x}(10x-7)$
l) $2e^{15x}$
m) 0
n) 0

1.1.2 Demostración

1.1.3 Demostración

1.1.4

a) $D^3(D^2+16)$
b) $D(D-1)(D-2)$
c) $D((D-2)^2-4)$
d) $(D-1)^2(D+1)^4$
e) $(D-2)^3(D^2-1)(D^2-25)$

f) $(D^2-4D+13)^2(D-1)^2$
g) $D^3(D^2+1)$

1.1.5

a) Demostrativo
b) Demostrativo

1.3.1 $\eta(x)=2\phi(x)$ no es solución de dicha ecuación diferencial pues EDL no es homogénea.

1.3.2 Note $\phi(C_1y_1+C_2y_2)\neq C_1\phi(y_1)+C_2\phi(y_2)$, dicho teorema aplica para ecuaciones diferenciales **lineales** homogéneas y tal ecuación dada no es lineal.

1.3.3

a. Verdadero
b. Falso
c. Verdadero
d. Falso
e. Verdadera
f. Verdadera
g. Verdadero

1.3.4

a.
b.
c. Note en $x^2y''-4xy'+6y=0$ se tiene $a_2(x)=x^2\neq 0\ \ \forall x\in I$ se puede expresar como $y''-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}y=0$ puesse toma $x\neq 0$ donde $P(x)=-\frac{4}{x}$ y $Q(x)=\frac{6}{x^2}$ son ambas continuas $\forall x\neq 0$, por lo que no contradice teorema ya que en este caso no aplica al ser $P(x)$, ',' $Q(x)$ discontinuas en $x\in 0$.
d.

1.4.1

a) $y(x)=C_1.x^2+C_2.\left(x^2\ln(x)\right)$
b) $y(x)=C_1.\operatorname{sen}(e^x)+C_2.(-\cos(e^x))$
c) $y(x)=C_1.(e^xx)+C_2.(-x)$
d) $y(x)=C_1.x^2+C_2.\left(-3x-\frac{5}{2}\right)$
e) $y(x)=C_1.x^3+C_2.\left(\frac{-1}{5x^2}\right)$
f) $y(x)=C_1.e^{-3x}+C_2.\left(e^{-3x}x\right)$
g) $y(x)=C_2.\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)\right)+C_1.\cos(3x)$
h) $Y(x)=C_2.\left(-x^2-1\right)+C_1.x$
i) $y(x)=C_2.\left(x^2\operatorname{sen}(\ln(x))\right)+C_1.\left(x^2\cos(\ln(x))\right)$
j) $Yy(x)=C_2.(-\sqrt{x})+C_1.(\sqrt{x}\log(x))$

1.4.2 $W(y_1,y_2)=x^6e^x$

1.4.3 $y^{(5)}-4y^{(4)}+121y^{(3)}-484y''=0$

Soluciones del Capítulo 3

2.1.1

a. $y_h = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 e^{3x}$
b. $y_h = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{x}{2}} x$
c. $y_h = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 e^{x/2}$
d. $y_h = C_2 e^{-x} \sin(2x) + C_1 e^{-x} \cos(2x)$
e. $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{x} x$
f. $y_h = C_1 e^{-\frac{2x}{3}} + C_2 e^{\frac{2x}{3}}$
g. $y_h = C_2 x + C_1$
h. $y_h = C_2 \sin(x) + C_1 \cos(x)$
i. $y_h = C_2 \sin\left(\frac{3x}{4}\right) + C_1 \cos\left(\frac{3x}{4}\right)$
j. $y_h = C_2 \sin\left(\frac{x}{3}\right) + C_1 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$
k. $y_h = C_2 e^{2x} \sin(3x) + C_1 e^{2x} \cos(3x)$
l. $y_h = C_1 e^{-\frac{5x}{2}} + C_2$
m. $y_h = C_1 e^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{2})x} + C_2 e^{\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)x}$
n. $y_h = C_2 e^{x/4} + C_1$
ñ. $y_h = C_1 e^{\frac{3x}{2}} + C_2 e^{\frac{3x}{2}} x$

2.1.2

a. $y = Ae^{-x} + Be^{x} + C\cos(2x) + Dsen(2x)$
b. $y = Ae^{\frac{x}{3}} + e^{3x}(Bsenx + C\cos x)$
c. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \left(C_3 + C_4 x + C_5 x^2\right)e^{x}$

2.1.3

a. $y''' - y'' - 8y' + 12y = 0$
b. $y^{(4)} + 2y''' + 6y'' + 8y' + 8y = 0$
c. $y'' - 10y' + 21y = 42x + 36e^{3x}$

2.1.4 $a_0 = 2,\ a_1 = 7,\ a_2 = 36$ y $a_3 = -20$

2.1.5 $y^(4) + 7y'' - 18y' + 10y = 10x^2 - 36x + 54$

2.1.6 $y''' - y'' = -6e^{-x}$

2.1.7 Demostrativo

2.1.8

a. Falso
b. Verdadero
c. Falsa
d. Verdadero

2.2.1

a. $y = c_2 \sin(x) + c_1 \cos(x) + 2x + 3$
b. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + 3x + 5$

c. $y = c_2x + c_1 + \left(\frac{x}{6} + 5\right)x^2$
d. $y = c_2e^x x + c_1e^x + 6x + 20$
e. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + e^x\left(\frac{2\sin(x)}{5} - \frac{\cos(x)}{5}\right)$
f. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-x}x + e^x\left(\frac{4\sin(x)}{25} + \frac{3\cos(x)}{25}\right)$
g. $y = c_2\sin(x) + c_1\cos(x) + \frac{1}{2}x\sin(x)$
h. $y = \frac{1}{2}c_1e^{2x} + c_2 + e^{2x}\left(\frac{2\sin(x)}{5} - \frac{\cos(x)}{5}\right)$
i. $y = c_1e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x} + c_2e^{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)x} + e^{2x}\left(\frac{4}{123}((4x)\sin) - \frac{5}{123}((4x)\cos)\right)$
j. $y = c_1e^x + c_2 + \left(-\frac{x}{2} - 8\right)x$

2.2.2

a. $y = c_4x - c_2\,\mathrm{sen}(x) - c_1\cos(x) + c_3 + \frac{x^2}{2} + \frac{e^x}{2}$
b. $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-x}x + \frac{e^{-x}}{2}$
c. $y = c_1e^{-4x} + c_2e^{-2x} + c_3e^x + c_4e^{2x} + \frac{x^2}{16} + \frac{3x}{32} - \frac{3(x\sin)}{170} + \frac{x\cos}{34} + \frac{17}{128}$
d. $y = c_3x + c_1e^{-x} + c_2 + 2x^2 - \frac{1}{2}x\,\mathrm{sen}(x) - \mathrm{sen}(x) + \frac{1}{2}x\cos(x) - \frac{3\cos(x)}{2}$
e. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-x}x + c_3e^x + c_4e^x x + 2021\,\mathrm{sen}(x) + 2021\cos(x)$
f. $y = c_3e^{-x}x^2 + c_2e^{-x}x + c_1e^{-x} + c_4e^x + \frac{e^x x}{8} + x - 2$
g. $y = c_2e^{-x}x + c_1e^{-x} + 3x + \frac{3e^x}{4} + \frac{8}{25}\,\mathrm{sen}(2x) - \frac{6}{25}\cos(2x) - 4$
h. $y = c_2e^{-x}x + c_1e^{-x} + c_3e^x + e^x x^2 - \mathrm{sen}(x) + \cos(x)$
i. $y = c_3e^{-2x} + c_4e^{-2x}x + c_1e^{2x}\,\mathrm{sen}(2x) + c_2e^{2x}\cos(2x) + \frac{3}{256}e^{-2x}\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{1}{128}e^{-2x}x\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{3}{512}e^{-2x}\cos(2x) - \frac{1}{128}e^{-2x}x\cos(2x)$
j. $y = c_2e^{-x}x + c_1e^{-x} + c_3e^{2x} - \frac{1}{2}3e^{-x}x^3 - \frac{3}{2}e^{-x}x^2$
k. $y = c_3x + c_1e^{-x} + c_2 - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + \frac{e^{3x}}{4}$
l. $y = c_3x + \frac{1}{4}c_1e^{-2x} + c_2 + \left(1 - \frac{2x}{3}\right)x^2 + \frac{3}{4}e^{-2x}x$

2.2.3

a) $y_p = \left(Ax + Bx^2 + Cx^3\right)e^{-x} + \left(Dx + Ex^2 + Fx^3 + Gx^4\right)e^{3x}$
b) $y_p = x\left(Asen\,(2x) + B\cos\,(2x)\right) + (Cx + D)\,e^{3x} + Ex^2$
c) $w_p = t^2(D + Et) + t(F + Gt)\cos(6t) + t(H + It)\,\mathrm{sen}(6t)$
d) $q = -5w^9 + 20w^{-9}$

2.2.4 $y_p = Ax^2 + Bx^3e^{-12x} + x(Cx + D)\cos(\sqrt{5}x) + x(Ex + F)\,\mathrm{sen}(\sqrt{5}x)$

2.2.5 $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + 3xe^{2x} + 1$

2.2.6

a) $y'' - 2y' = \left(\frac{1}{2}senx - \cos x\right)e^{2x}$
b) $y''' - 3y'' + 3y' + 7y = 12e^{-x} - 7x^2 - 6x + 6$

2.2.7 $u = c_1 + c_2e^{-4t} + 20t$

2.2.8 $a = 1, b = -3, c = 2, P(x) = (-3x^2 + 6x)e^x$

2.2.9

a) $y = A + Bx + e^x$

b) $a_0 = a_1 = 0,\ F(x) = e^x$

2.2.10 $y = C_1 e^{-\sqrt[4]{\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt[4]{\lambda}x} + C_3 \cos(\sqrt[4]{\lambda}x) + C_4 \operatorname{sen}(\sqrt[4]{\lambda}x),\ C_3 = 0, C_1 = -C_2, C_4 = -2C_2$, con $C_2 \neq 0$ y solo se cumple solución no trivial si $\lambda = 0$

2.2.11

a) Solución tiene la forma $y(t) = C_2 e^{bt} \operatorname{sen}(k\pi t)$ con $C_2 \neq 0$

b) Basta tomar $c = \pm\sqrt{1 - \frac{n^2}{4K^2}}$ con $n \in \mathbb{N}$

2.2.12 $y = e^{\frac{\sqrt{2}t}{2a}}\left(C_1 \cos(\frac{\sqrt{2}t}{2a} + C_2 \operatorname{sen}(\frac{\sqrt{2}t}{2a}\right) + e^{\frac{-\sqrt{2}t}{2a}}\left(C_3 \cos(\frac{\sqrt{2}t}{2a} + C_4 \operatorname{sen}(\frac{\sqrt{2}t}{2a}\right) + C_5 \cos\left(\frac{t}{a}\right) + C_6 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{a}\right) + C_7 e^{\frac{-t}{a}}$, aplicando condiciones se llega a $y(t) = e^{\frac{\sqrt{2}t}{2a}} \cos(\frac{\sqrt{2}t}{2a})$

2.2.13 Las soluciones son $\phi(x) = \dfrac{6e^{4x}}{5} - \dfrac{6e^{-x}}{5},\ \Psi(x) = e^x - e^{-5x}$

2.2.14

a) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-2at} + c_4 e^{at} \cos(a\sqrt{3}t) + c_5 e^{at} \operatorname{sen}(a\sqrt{3}t) - \dfrac{e^{at}\cos(at)}{40a^5} + \dfrac{3e^{at}\operatorname{sen}(at)}{40a^5} + \dfrac{t^2}{16a^2}$

b) Caso $w > 0$: $z(t) = c_1 \cos(\sqrt{w}t) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{w}t) + \dfrac{1}{4\sqrt{w}} t^2 \operatorname{sen}(\sqrt{w}t)$, Caso $w = 0$: $z(t) = \frac{t^3}{6} + c_1 t + c_2$, Caso $w < 0$: No tiene sentido.

c) El cambio de variable apropiado $u = \arctan(t)$ lleva a la ecuación diferencial $y''(u) + y = u^3 + e^{3u} + \cos(u)$ de donde finalmente $y(t) = c_1 \cos(\arctan(t)) + c_2 \operatorname{sen}(\arctan(t)) - 6\arctan(t) + \arctan^3(t) - \dfrac{e^{3\arctan(t)}}{10} + \dfrac{1}{2}\arctan(t)\operatorname{sen}(\arctan(t))$

2.2.15 $z(x) = A + e^{kx} - 8x$

Soluciones del Capítulo 4

3.1.1

a. $y = C_2 e^{-x} x + C_1 e^{-x} + e^{-x}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x^2 \ln(x)\right) + xe^{-x}(x\ln(x) - x)$

b. $y = C_2 \operatorname{sen}(x) + C_1 \cos(x) - x\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\ln(\operatorname{sen}(x))$

c. $y = C_2 \operatorname{sen}(2x) + C_1 \cos(2x) + 2x\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)\ln(\cos(2x))$

d. $y = C_2 e^x \operatorname{sen}(x) + C_1 e^x \cos(x) + xe^x \operatorname{sen}(x) + e^x \cos(x)\ln(\cos(x))$

e. $y = C_2 \operatorname{sen}(2x) + C_1 \cos(2x) - 2\left(\frac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)\right)\cos(2x) + \operatorname{sen}(2x)\left(\ln(\cos(x)) - \cos^2(x)\right)$

f. $y = C_2 e^{3x} x + C_1 e^{3x} - e^{3x} - e^{3x}\ln(x)$

g. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + e^{-2x}(\ln(e^x + 1) - e^x) + e^{-x}\ln(e^x + 1)$

h. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} x + \frac{e^{-2x}}{2x}$

i. $y = C_2(\operatorname{sen}(3x)) + C_1(\cos(3x)) - \dfrac{1}{3}x(\cos(3x)) + \dfrac{1}{9}(\operatorname{sen}(3x))(\ln(\operatorname{sen}(3x)))$

j. $y = C_2 xe^x + C_1 e^x + e^x\sqrt{4 - x^2} + xe^x \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{2}$

3.1.2

a. $y(x) = C_1 . \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}} + C_2 . \left(-\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b. y

c. $y(x)=C_2.\operatorname{sen}(\ln(x))+C_1.\cos(\ln(x))+\ln(x)\operatorname{sen}(\ln(x))+\cos(\ln(x))\ln(\cos(\ln(x)))$
c. $y(x)=C_1.e^{-x}+C_2.(x-1)-2e^{-x}\left(x^2-2\right)$
d. $y(x)=C_2.x+C_1.(\ln(x)+1)+\dfrac{1}{2}x^2(\ln(x)-1)$
e. $y(x)=C_1.x+C_2.(-e^{-x}x)+x\left((e^{-x}+1)\ln(e^x+1)-1\right)$
f. $y(x)=C_2.\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)+C_1.\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}-2$
g. $y(x)=C_1.x+C_2.\left(\dfrac{1}{2}x\ln^2(x)\right)+x\ln^3(x)$
h. $y(x)=C_1.e^{-x}+C_2.(x-1)-2e^{-x}\left(x^2-2\right)$
i. $y(x)=C_1.\left(x^2+1\right)+C_2.(-x)-x^2+\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2-1\right)+2x\tanh^{-1}(x)$
j. $y(x)=C_2.\dfrac{e^x x^3}{3}+C_1.e^x-4e^x(3\ln(x)+1)$

3.1.3

a. Verdadero
b. Falso
c. Verdadero
d. Falso
e. Verdadero
f. Verdadero

Soluciones del Capítulo 5

4.1.1

a. $y(x)=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2\ln(x)}{x}-3\ln(x)+14$
b. $y(x)=\dfrac{C_1}{x^2}+\dfrac{C_2}{x}-2\ln(x)+3$
c. $y(x)=C_2(x-1)^4+\dfrac{C_1}{x-1}+\dfrac{1}{2}((x-2\ln(x-1)+2)$
d. $y(x)=-C_2\operatorname{sen}(\ln(x))+C_1\cos(\ln(x))+\cos(\ln(x))\ln(\tan(\ln(x))+\sec(\ln(x)))$
e. $y(x)=C_1\sqrt[3]{3x+2}+C_2(3x+2)+\frac{1}{3}\left((3x+2)^2-4\right)$
f. $y(x)=\frac{C_1}{x-2}+\frac{C_2\ln(x-2)}{x-2}+\ln^2(x-2)-9(\ln(x-2))+22$
g. $y(x)=-C_2\operatorname{sen}(\ln(x))+C_1\cos(\ln(x))+\ln(x)\operatorname{sen}(\ln(x))+\cos(\ln(x))\ln(\cos(\ln(x)))$
h. $y(x)=C_1(2x+1)+C_2(2x+1)\ln(2x+1)$

4.1.2

a) $y=C_1+C_2x^{-1}+C_3x+\left(\frac{x}{2}-1\right)\ln x$

b) $y=C_1x+C_2x^2+C_3x^3+4-\ln x$

c) $y=C_1+C_2\ln x+C_3x^3+\dfrac{5}{8}\left(\ln^2 x+\ln^3 x\right)$

4.1.3

a) $y=C_1\cos(senx)+C_2sen(senx)+1$

b) $y=C_1\cos(senx)+C_2sen(senx)-e^{senx}\left[\frac{1}{2}sen^2x-senx\right]$

4.1.4 $y''(z)-y(z)=0$

4.1.5

a. Verdadero
b. Verdadero
c. Falso
d. Falso
e. Verdadero
f. Verdadero
g. Falso
h. Verdadero

Soluciones del Capítulo 6

5.2.1

a) $D^3(D^2+16)$
b) $D(D-1)(D-2)$
c) $D((D-2)^2-4)$
d) $(D-1)^2(D+1)^4$
e) $(D-2)^3(D^2-1)(D^2-25)$
f) $(D^2-4D+13)^2(D-1)^2$
g) $D^3(D^2+1)$

5.2.2

a. $y=c_4x-c_2\operatorname{sen}(x)-c_1\cos(x)+c_3+\frac{x^2}{2}+\frac{e^x}{2}$
b. $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}-\frac{1}{2}e^{-x}x+\frac{e^{-x}}{2}$
c. $y=c_1e^{-4x}+c_2e^{-2x}+c_3e^x+c_4e^{2x}+\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{3x}{32}-\dfrac{3(x\operatorname{sen})}{170}+\dfrac{x\cos}{34}+\dfrac{17}{128}$
d. $y=c_3x+c_1e^{-x}+c_2+2x^2-\frac{1}{2}x\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(x)+\frac{1}{2}x\cos(x)-\dfrac{3\cos(x)}{2}$
e. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-x}x+c_3e^x+c_4e^xx+2021\operatorname{sen}(x)+2021\cos(x)$
f. $y=c_3e^{-x}x^2+c_2e^{-x}x+c_1e^{-x}+c_4e^x+\frac{e^xx}{8}+x-2$
g. $y=c_2e^{-x}x+c_1e^{-x}+3x+\frac{3e^x}{4}+\frac{8}{25}\operatorname{sen}(2x)-\frac{6}{25}\cos(2x)-4$
h. $y=c_2e^{-x}x+c_1e^{-x}+c_3e^x+e^xx^2-\operatorname{sen}(x)+\cos(x)$
i. $y=c_3e^{-2x}+c_4e^{-2x}x+c_1e^{2x}\operatorname{sen}(2x)+c_2e^{2x}\cos(2x)+\dfrac{3}{256}e^{-2x}\operatorname{sen}(2x)+\dfrac{1}{128}e^{-2x}x\operatorname{sen}(2x)+\dfrac{3}{512}e^{-2x}\cos(2x)-\dfrac{1}{128}e^{-2x}x\cos(2x)$
j. $y=c_2e^{-x}x+c_1e^{-x}+c_3e^{2x}-\frac{1}{2}3e^{-x}x^3-\frac{3}{2}e^{-x}x^2$
k. $y=c_3x+c_1e^{-x}+c_2-\frac{2x^3}{3}+2x^2+\frac{e^{3x}}{4}$
l. $y=c_3x+\frac{1}{4}c_1e^{-2x}+c_2+\left(1-\frac{2x}{3}\right)x^2+\frac{3}{4}e^{-2x}x$

5.2.3

a) $y_p=\left(Ax+Bx^2+Cx^3\right)e^{-x}+\left(Dx+Ex^2+Fx^3+Gx^4\right)e^{3x}$
b) $y_p=x\left(Asen\left(2x\right)+B\cos\left(2x\right)\right)+\left(Cx+D\right)e^{3x}+Ex^2$
c) $w_p=t^2(D+Et)+t(F+Gt)\cos(6t)+t(H+It)\operatorname{sen}(6t)$

d) $q = -5w^9 + 20w^{-9}$

5.2.4 Caso1 anulador de g no es factor de $\phi(D)$: $y_p(t) = A\cos(\beta t) + B\,\mathrm{sen}(\beta t)$, Caso2 anulador de g es factor de $\phi(D)$: $y_p(t) = t^r\,(A\cos(\beta t) + B\,\mathrm{sen}(\beta t))$, con r multiplicidad que evita factores repetidos

5.2.5 Caso1 anulador de g no es factor de $\phi(D)$ con $a \neq b$: $y_p = P(x)e^{abt}\,(a\cos(bt) + b\,\mathrm{sen}(bt) + a\cos(at) + b\,\mathrm{sen}(a$ donde $P(x)$ es un polinomio de grado $2ab-1$, Caso2 anulador de g es factor de $\phi(D)$ con $a \neq b$: $y_p = t^r P(x)e^{abt}\,(a\cos(bt) + b\,\mathrm{sen}(bt)) + t^s P(x)e^{abt}\,(a\cos(at) + b\,\mathrm{sen}(at))$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado $2ab-1$, además r, s multiplicidades de raíces en ecuación auxiliar que coinciden con factores anuladores de g

5.2.6

a) Demostrativo

b) Demostrativo

5.2.7 Aplique inducción matemática sobre m

5.2.8 Note solución de Ed viene dada por $y = e^{ax}(k_1\cos(bx) + k_2\,\mathrm{sen}(bx))$, luego basta tomar $C_1 = k_1\cos(k_2)$ y $C_2 = -k_1\,\mathrm{sen}(k_2)$

5.2.9 Aplique inducción matemática sobre k