TEC | Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática

6º Libro Números

Educación virtual para estudiantes de sexto año de primaria

Proyecto EVEPRIM 6

Ivonne Sánchez Fernández
Carlos Monge Madriz
Rebeca Solís Ortega
Zuleyka Suárez Valdés-Ayala

Revista digital Matemática, Educación e Internet (**https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/**).

Correo electrónico: rsolis@itcr.ac.cr

Escuela de Matemática

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Apdo. 159-7050, Cartago

Teléfono (506)25502015

Sánchez Fernández, I., Monge Madriz, C., Solís Ortega, R., Suárez Valdés-Ayala, Z.

Números. Educación virtual para estudiantes de sexto año de primaria. 1ra ed.

Escuela de Matemática,Instituto Tecnológico de Costa Rica. 2023.

ISBN Obra Independiente: 978-9930-617-29-8

1) Teoría de números.
2) Números Naturales.
3) Fracciones.
4) Operaciones.
5) Soluciones a las prácticas.
6) Activando conocimientos.
7) Para saber más.

Las imágenes que se utilizan en este libro digital son de uso libre y gratuito (excepto cuando se indique lo contrario) diseñadas por **@Freepik** y **Vecteezy.com**.

Agradecimientos

A la Lic. Marianela del Carmen Chinchilla Morales y al Lic. José David Gómez Acuña, por su dedicación y esfuerzo en la creación de las aplicaciones tecnológicas incluidas en este libro como parte del trabajo final de graduación titulado "Eveprim: Recursos Educativos Abiertos para Sexto Año en Relaciones y Álgebra y Números", de la licenciatura en Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos. Su arduo trabajo ha sido fundamental para la mejora de los materiales de esta obra.

A la Vicerrectoría de Investigación y Extensión del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

A los asesores nacionales de matemática de primer y segundo ciclo del Ministerio de Educación Pública: Hermes Mena Picado y Xinia Zuñiga Esquivel, que tuvieron la gentileza de dar soporte logístico y acompañamiento durante el proceso de creación de los materiales.

Al asesor regional de Matemática de Aguirre, Adolfo Alejandro Monge Zamora, por sus comentarios y sugerencias.

A todos los docentes de primaria participantes, quienes fueron siempre la guía para la realización de este material.

A los estudiantes Jean Carlo Guillén Méndez, Steven Sánchez Ramírez y Michelle Chinchilla Chinchilla por la ayuda al editar este libro.

Prefacio

La Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica, por medio de su proyecto Eveprim6, pretende contribuir a la formación académica de los estudiantes de sexto año de primaria y a la vez ofrecer un recurso para padres y maestros de esta población. Para ello, se han considerado las habilidades contempladas en el programa de estudios vigente, en el área de matemática, según el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

El equipo de Eveprim6, les insta a revisar con atención todo el material a su disposición, ya que el mismo ha sido elaborado con el fin de promover el auto-aprendizaje a distancia.

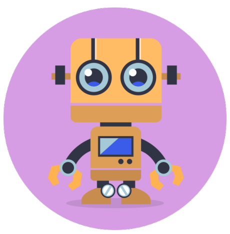
Este libro contiene 7 capítulos, en cada uno de ellos encontrará aspectos teóricos, ejemplos, ejercicios con solución, problemas introductorios, videos explicativos y actividades interactivas de la web. Se le recomienda hacer una lectura a profundidad, reflexionando y analizando cada uno de los ejemplos, ejercicios y problemas propuestos.

Procure no avanzar en los temas hasta que considere que ya asimiló la información. Para su autoevaluación puede apoyarse en las prácticas que aparecen al final de cada capítulo y su respectiva solución. Con el fin de que la lectura de este libro le permita detenerse en contenidos particulares se ofrecen algunas secciones con información adicional.

A lo largo de este libro se utilizan una serie de imágenes y símbolos para representar secciones determinadas. A continuación, se presentan los significados de las mismas.

Símbolo	Sección	Descripción
	Activación de conocimientos	Al hacer clic sobre la imagen, tendrá acceso a un apartado del libro que contiene aspectos teóricos y ejemplos de contenidos estudiados en años anteriores. Estos son necesarios para la correcta asimilación de los nuevos aprendizajes.

Símbolo	Sección	Descripción
	Recuerde que...	Muestra contenidos previos que son necesarios para los aprendizajes.
	Para saber más...	Encontrará información o ejercicios de un nivel más avanzado.
	Sabías que...	Contiene aspectos que permiten relacionar la matemática con hechos históricos, aplicaciones a situaciones del entorno, curiosidades, entre otros.
	Videos	Al dar clic, tendrá acceso a materiales audiovisuales diseñados exclusivamente como complemento de este libro. Según su objetivo se clasifican en: ▪ Introducción de contenidos. ▪ Refuerzo de aspectos teóricos. ▪ Solución de ejercicios y problemas, paso a paso. Se recomienda abrir estos enlaces en una nueva pestaña para evitar retornar al inicio del libro.

Símbolo	Sección	Descripción
	Práctica	Serie de ejercicios y problemas que se incluyen al final de cada capítulo. Todas las prácticas propuestas contienen su respectiva solución. Hay ejercicios que enlazan a su solución en video o a alguna aplicación interactiva de la web. Para dirigirse a la solución respectiva de un ejercicio haga clic sobre el símbolo y para regresar al enunciado del ejercicio haga clic sobre el símbolo .
	Aplicaciones tecnológicas	Al dar clic al enlace, lo dirigirá al material interactivo. Aplicaciones como Geogebra pueden ayudarle a fortalecer el aprendizaje o profundizar los conocimientos de una manera divertida. Se recomienda abrir estos enlaces en una nueva pestaña para evitar retornar al inicio del libro.

Índice general

Capítulo 1

Teoría de números

1.1 Divisibilidad, factores y múltiplos

Activación de conocimientos

Para esta sección necesita recordar el tema de múltiplos. Si quiere repasar este tema, presione sobre la imagen.

Teorema

Roberto trabaja en un supermercado y necesita acomodar abarrotes en los estantes. Dentro de estos artículo se tienen: bolsas de arroz, bolsas de frijoles, cajas de leche, sobres de sopa, latas de atún y botellas de aceite. Cada artículo viene empacado dentro de cajas que contienen 12 productos. Si Roberto acomodó una caja de cada producto cada día de lunes a viernes, ¿cuántos productos acomodó en total al final de la semana?

Solución: Para responder a esta pregunta se debe conocer cuántos abarrotes hay en total. Note que los productos que se tienen son: arroz, frijoles, leche, sopa, atún y aceite, o sean, en total hay seis productos distintos. Además, se sabe que cada uno de estos, viene empacado en cajas de 12 productos cada una.

Así, para saber la cantidad total de abarrotes que se deben acomodar cuando se toma una caja de cada producto, se tiene que multiplicar **12** (cantidad de productos que vienen en cada caja) por **6** (cantidad de abarrotes). Por lo que se tiene:

$$12 \times 6 = 72$$

Como se sabe que Roberto realizó la labor de acomodar estos productos durante cinco días (lunes, martes, miércoles, jueves y viernes), se debe multiplicar **72** (cantidad de productos acomodados por día) por **5** (total de días). Por lo que se tiene:

$$72 \times 5 = 360$$

Para saber más...

En otros libros se utiliza el símbolo de punto ($\cdot$) para representar la multiplicación entre dos números, usualmente representada por el símbolo $\times$. Por ejemplo:

$$a \times b = a \cdot b$$

Así, se tiene que Roberto acomodó un total de 360 productos al fin de la semana.

Para comprender el concepto de divisor y factor, analice lo siguiente:

Del número 12, se sabe que:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 4 \\ \cline{2-2} -\ 12 & 3 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ \cline{2-2} -\ 12 & 4 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

De esta forma, se puede notar que 3 y 4 son divisores del 12, pues al realizar la división correspondiente, su resultado es 0. Además, se puede escribir el 12 como el producto de ambos números:

$$12 = 3 \times 4 = 4 \times 3$$

Video 1.1

En este video se repasarán los conceptos de divisores, factores y múltiplos.

Al mismo tiempo los números 3 y 4 son factores del 12, pues se puede expresar el resultado como un producto.
Note además, que el 12 es un múltiplo de 3 y de 4 porque corresponde al resultado de multiplicar un número por 3 y al resultado de multiplicar un número por 4.

Para generalizar el concepto anterior, se dice que:

Definición 1.1
Un número a es divisible entre un número b, si al realizar la división $a \div b$, el residuo es cero.

Ejemplo 1.1

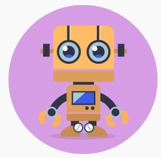
Observe las siguientes operaciones y complete la tabla con los valores correctos.

Operación	Factores	Divisores	Múltiplo
$48 = 6 \times 8$			
$100 \div 5 = 20$			
$36 = 36 \times 1$			
$27 \div 3 = 9$			

Solución: Al analizar las operaciones que se presentan se tiene:

Operación	**Factores**	**Divisores**	**Múltiplo**
$48 = 6 \times 8$	6 y 8 porque son términos del producto	6 y 8 porque se divide 48 entre 8 o 48 entre 6, el residuo es cero	48 porque es el resultado de multiplicar un número por 6 o un número por 8
$100 \div 5 = 20$	5 y 20 porque 100 se puede escribir como $100 = 5 \times 20$	5 y 20 porque si se divide 100 entre 5 o 100 entre 20, el residuo es cero	100 porque es el resultado de multiplicar un número por 5 o un número por 20
$36 = 36 \times 1$	36 y 1 porque son términos del producto. El 1 es factor de todos los números.	36 y 1 porque si se divide 36 entre 1 o 36 entre 36, el residuo es cero. Recuerde que el 1 es divisor de todos los números y un número es divisor de sí mismo	36 porque es el resultado de multiplicar un número por 36 o un número por 1
$27 \div 3 = 9$	3 y 9 porque 27 se puede escribir como $27 = 3 \times 9$	3 y 9 porque si se divide 27 entre 3 o entre 9, el residuo es cero	27 porque es el resultado de multiplicar un número por 3 o un número por 9

Aplicaciones tecnológicas



En este enlace podrá repasar y practicar el concepto de divisibilidad, factores y múltiplos. Clic Aquí

Video 1.2

Antes de resolver la práctica que sigue, se recomienda repasar el concepto de divisores y múltiplos observando el siguiente video

Para saber más...

Si desea aprender como calcular todos los divisores de un número, haga clic en la imagen.

1.2 Práctica: divisibilidad, factores y múltiplos

1.2.1 Plantee y resuelva el siguiente problema:

Samantha tiene dos cintas de colores con las que quiere confeccionar lazos para el cabello. Las cintas miden 94 cm y 64 cm respectivamente. Ella quiere cortarlas en pedazos del mismo tamaño ¿cuál es la mayor longitud de las cintas con las que se puede hacer esta división?

1.2.2 Escriba **seis múltiplos** de cada número

a) 3: ___ , ___ , ___ , ___ , ___ , ___.

c) 7: ___ , ___ , ___ , ___ , ___ , ___.

b) 11: ___ , ___ , ___ , ___ , ___ , ___.

d) 23: ___ , ___ , ___ , ___ , ___ , ___.

1.2.3 Complete los espacios en blanco de modo que la afirmación sea verdadera:

a) $7 \times$ ___ $= 21$ entonces ___ es múltiplo de ___ y ___.

b) ___ $\times 9 = 36$ entonces ___ es _____ de ___ y de ___.

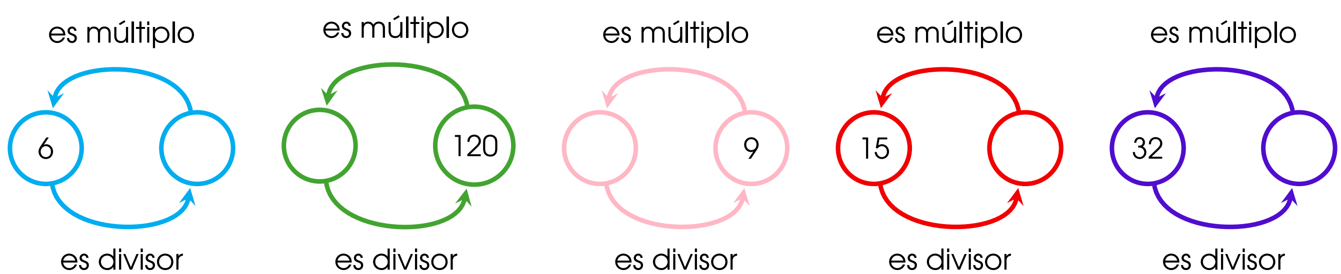
c) $2 \times 28 =$ ___ entonces ___ es divisor de 56.

d) ___ $\times 12 = 24$ entonces ___ es _____ de 24.

1.2.4 En cada fila **encierre en un círculo los múltiplos** del número dado

Número	**Posibles Múltiplos**
8	24, 32, 56, 88
10	101, 220, 50, 44
12	24, 38, 48, 52

1.2.5 Complete de manera que se establezca una relación adecuada entre divisor y múltiplo.



1.2.6 Escriba **V** si es verdadero o **F** si es falso.

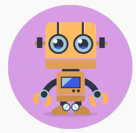
a) 0 es divisor de cualquier número ___.

b) 1 es múltiplo de todos los números ___.

c) 3 es un divisor de 123 ___.

d) 70 es un múltiplo de 35 ___.

Aplicaciones tecnológicas



Autoevaluación:
En el siguiente enlace, podrá evaluar su conocimiento sobre divisibilidad, factores y múltiplos.
Aplicación interactiva

1.3 Números primos y compuestos

Activación de conocimientos

Para repasar las reglas de divisibilidad de los números, puede dar clic en la imagen.

Teorema

A continuación, se muestran los primeros 100 números naturales:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Haciendo uso de las reglas de divisibilidad, coloree todos los múltiplos de 2, 3, 5 y 7. Con base en esto, responda:

a) ¿Qué características nota en los números coloreados con relación a sus divisores?

b) ¿Cuáles son los divisores de los números no coloreados?

Solución: Primero se debe colorear todos los múltiplos de 2, excepto el 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Seguidamente, se debe colorear todos los múltiplos de 3 (que no se hayan coloreado), excepto el 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Luego, se colorean todos los múltiplos de 5 (que no se hayan coloreado), excepto el 5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Finalmente, se deben colorear todos los múltiplos de 7 (que no se hayan coloreado), excepto el 7.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Con base a este proceso, se pueden contestar las preguntas planteadas:

a) ¿Qué características nota en los números coloreados con relación a sus divisores?

Respuesta: Los números coloreados son aquellos números que tiene más de dos divisores.

b) ¿Cuáles son los divisores de los números no coloreados?

Respuesta: Los números no coloreados solamente son divisibles por 1 y por sí mismos.

Definición 1.2
Cuando un número tiene solamente por divisores al uno y a el mismo, se le llama **número primo**.
Por otro lado, los números que tienen más de dos divisores se llaman **números compuestos**.

Si observa la tabla final del ejercicio anterior, puede notar que todos los números que quedaron sin colorear son números primos y el resto, excepto el 1 (que no es primo ni compuesto), son los números compuestos hasta el 100.

Así, los números primos menores que 100 son:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

Y los números compuestos menores que 100 son:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 69, 70, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 99

Video 1.3

En este video se explicará como encontrar los números primos menores a 100.

Sabías que...

Los números primos se usan como base para crear códigos secretos que usualmente se utilizan para guardar información importante como por ejemplo: claves de bancos.

Aplicaciones tecnológicas

El siguiente link le permitirá utilizar la Criba de Eratóstenes, con una aplicación de Geogebra.

Aplicación Geogebra

Sabías que...

El proceso desarrollado al inicio de esta sección, permitió determinar los números primos y compuestos menores que 100, esta tabla se llama Criba de Eratóstenes (el mismo método que empleó su creador, un matemático griego que vivió en el siglo III a.C.) Eratóstenes, hizo muchos aportes, pero uno de los más sobresalientes fue determinar un método para medir el radio de la Tierra. Puede encontrar más información sobre este matemático en el sitio web:**https://www.astromia.com/biografias/eratostenes.htm**.

Figura 1.1: Nota. Image from page 323 of "Bulletin - United States National Museum". (Fotografía) por Internet Archive Book Images, 1877. Flickr. **https://www.flickr.com/photos/internetarchivebookimages/20499529722/.** CC0 1.0

Para saber más...

Si desea aprender como factorizar números y expresarlos por medio de un producto de números primos, haga clic sobre la imagen.

1.4 Práctica: números primos y compuestos

1.4.1 Lea de forma detenida la siguiente información:

Conjetura

En 1742, el matemático alemán Christian Goldbach hizo una predicción interesante, que se llegó a conocer como la conjetura de Goldbach. Una conjetura es una predicción basada en un cálculo aproximado.

Goldbach aseguró que **"todo número par mayor que 2 se puede escribir como la suma de dos números primos".**

Por ejemplo, el $80 = 73 + 7$ (73 y 7 son primos) y, también, el $42 = 37 + 5$ (37 y 5 son primos).

Referencia: Ministerio de Educación Pública. (2020). Plantilla para planeamiento de matemática, sexto año, febrero 2020. San José, Costa Rica: MEP

Comprueba la conjetura de Goldbach para los números pares mayores que 30 pero menores que 40.

$32 = \underline{\hspace{1.5cm}} + \underline{\hspace{1.5cm}}$ $\qquad$ $36 = \underline{\hspace{1.5cm}} + \underline{\hspace{1.5cm}}$

$34 = \underline{\hspace{1.5cm}} + \underline{\hspace{1.5cm}}$ $\qquad$ $40 = \underline{\hspace{1.5cm}} + \underline{\hspace{1.5cm}}$

1.4.2 Escriba **V** si es verdadero o **F** si es falso.

a) Todos los números primos son impares ________

b) Todo número primo y compuesto es divisible por uno ________

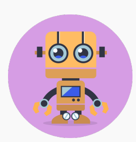
c) Entre 20 y 30 hay tres números primos________

d) 3 es el primer número primo________

1.4.3 Escriba al lado de cada número si es primo o compuesto

37: ____________________	21: ____________________
40: ____________________	99: ____________________
13: ____________________	74: ____________________
15: ____________________	31: ____________________

Aplicaciones tecnológicas



En el siguiente enlace podrá evaluar su conocimiento sobre números primos y compuestos.
Aplicación interactiva

Capítulo 2

Números Naturales

2.1 Potencias

Sabías que...

Las células, unidad básica de funcionamiento de todos los organismos vivos, se reproduce, mediante el proceso llamado División Celular. En este proceso, cada célula se divide en dos células exactamente iguales a la original. De esta manera, cada célula nueva vuelve a dividirse y así sucesivamente se reproducen con mucha rapidez. En la siguiente imagen, se puede observar este proceso.

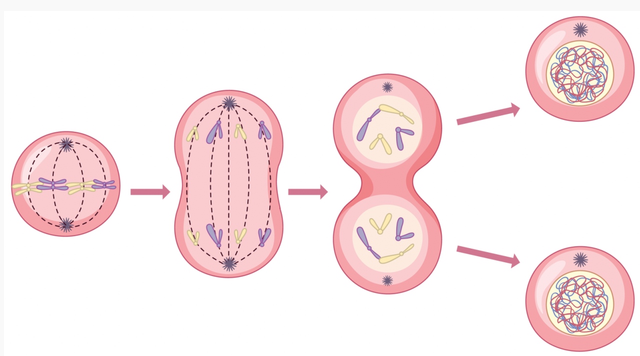


Figura 2.1: Ejemplo de la división celular.

Teorema

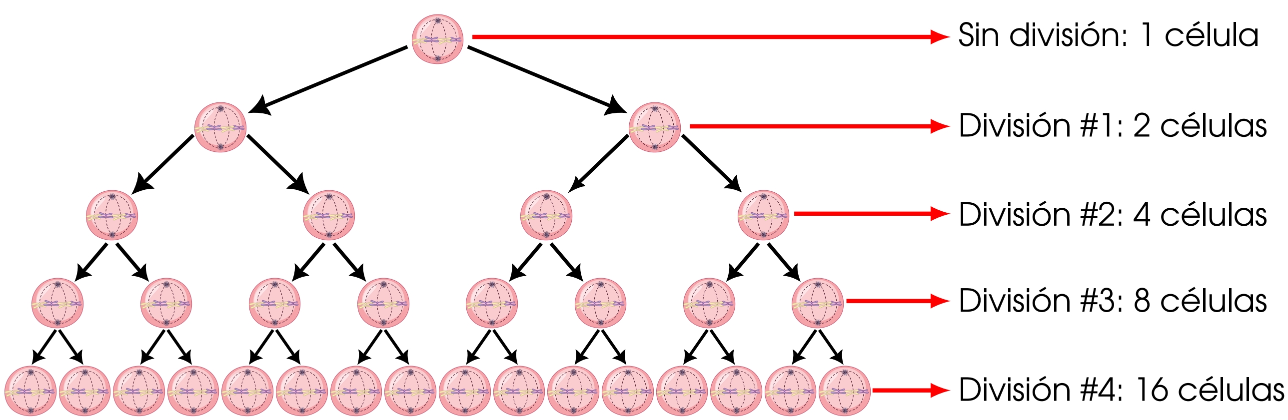
Tomando en cuenta lo expuesto en el **Sabías que...** anterior. Si cada nueva célula se duplica, responda:

a) ¿Cuántas células se forman en la cuarta división?

b) ¿Cuántas células se forman en la sexta división?

Solución: Este problema se puede resolver por medio de un gráfico o de una tabla. A continuación, se presentan ambas soluciones.

a) **Solución gráfica:** Se pude hacer un dibujo que muestre la división celular. A continuación, se presenta un ejemplo donde se muestra hasta la cuarta división celular:



Se puede ver que en la cuarta división habrán 16 células.

Siguiendo el esquema de la figura anterior, se podría hacer el cálculo de la cantidad de células que habrán en la sexta división, sin embargo, es un proceso muy largo y complicado de representar. Por este motivo, se muestra la solución por medio de tablas.

b) **Solución por medio de tabla:** Otra forma de resolver el ejercicio es por medio de una tabla, donde se van duplicando la cantidad de células en cada paso. A continuación se muestra un ejemplo:

Situación	**Operaciones**	**Total de células**
Al inicio, no hay divisiones, así que la cantidad de células es 1	1	1
En la división #1, se duplica (multiplica por 2) la cantidad anterior. Note que el 2 aparece 1 vez	2	2
En la división #2, se duplica la cantidad anterior. Note que el 2 aparece 2 veces	2×2	4
En la división #3, se duplica la cantidad anterior. Note que el 2 aparece 3 veces	$2 \times 2 \times 2$	8
En la división #4, se duplica la cantidad anterior. Note que el 2 aparece 4 veces	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	16
Ahora bien, en la división #5, se debe repetir el mismo patrón y se duplica la cantidad anterior. Note que el 2 aparece 5 veces	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	32
Entonces, el valor que contesta la pregunta realizada, para la división #6, se debe repetir el mismo patrón y se duplica la cantidad anterior. Note que el 2 aparece 6 veces	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	64

Note que para saber la cantidad de células que habrán en la sexta división, bastaba multiplicar 6 veces el número 2

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{6 veces el 2}} = 64$$

¿Que pasaría si se quisiera saber la cantidad de células en la octava división?

Si se sigue el patrón, bastaría con multiplicar 8 veces el 2, tal y como se muestra a continuación:

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{8 veces el 2}} = 256$$

Definición 2.1 Potencia
Potencia de un número es el resultado que se obtiene tras la sucesiva multiplicación de un número por sí mismo.

Video 2.1

En este video se explicará la definición de potencia.

Sabías que...

Una aplicación de las potencias puedes observarla en el siguiente video sobre la historia del ajedrez. Clic aquí

Las potencias se representan de forma general, de la siguiente manera:

$$\text{base} \longrightarrow a^{b} \longrightarrow \text{exponente}$$

El valor de la base, corresponde al número que se va a multiplicar sucesivamente y el exponente representa la cantidad de veces que se debe multiplicar. Así por ejemplo, la potencia:

$$3^2$$

Se lee tres elevado a la dos y es equivalente a multiplicar 2 veces el 3, así:

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

Así, el resultado de la potencia 3^2 es 9.

Es importante destacar que la lectura de la potencia requiere que se emplee la expresión "elevado a la", como en el ejemplo anterior, "tres elevado a la dos".

Ejemplo 2.1

Escriba como se lee cada uno de las siguientes potencias y calcule su valor.

a) 5^2

b) 2^4

c) 7^1

Solución:

a) 5^2

Se lee: cinco elevado a la dos. La base corresponde a 5 y el exponente es 2. Se tiene:

$$5^2 = \underbrace{5 \times 5}_{\text{2 veces el 5}} = 25$$

b) 2^4

Se lee: dos elevado a la cuatro. La base corresponde a 2 y el exponente es 4. Se tiene:

$$2^4 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{4 veces el 2}} = 16$$

c) 7^1

Se lee: siete elevado a la uno. La base corresponde a 7 y el exponente es 1. Se tiene:

$$7^1 = \underbrace{7}_{\text{1 vez el 7}} = 7$$

Datos importantes: Cuando la base de una potencia es un número diferente de cero y el exponente sí es cero, el resultado es 1. O sea:

$$a^0 = 1$$

Ejemplo 2.2

Escriba como se lee cada uno de las siguientes potencias y calcule su valor.

a) 5^0

b) 256^0

c) 7619^0

Solución:

a) 5^0

Se lee: cinco elevado a la cero. La base corresponde a 5 y el exponente es 0. Se tiene:

$$5^0 = 1$$

b) 256^0

Se lee: cinco elevado a la cero. La base corresponde a 256 y el exponente es 0. Se tiene:

$$256^0 = 1$$

c) 7619^0

Se lee: siete mil seiscientos diecinueve elevado a la cero. La base corresponde a 7619 y el exponente es 0. Se tiene:

$$7619^0 = 1$$

2.2 Cuadrados y cubos perfectos

Cuando en una potencia el exponente es dos, se puede leer: **base elevada al cuadrado**, porque el área de un cuadrado se calcula con la fórmula:

$$A_{cuadrado} = \underbrace{lado \times lado}_{\substack{\text{2 veces la medida} \\ \text{del lado,} \\ \text{es decir, lado} \\ \text{elevado al cuadrado}}} = lado^2$$

Ejemplo 2.3

Calcule el área de un cuadrado cuyo lado mide:

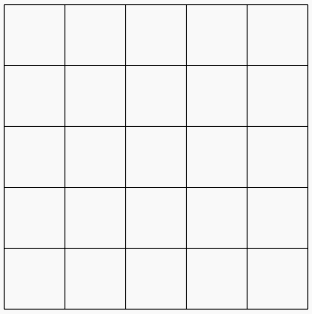
a) 5 cm

b) 8 m

Solución:

a) 5 cm

El área de un cuadrado de lado 5 cm, se calcula:



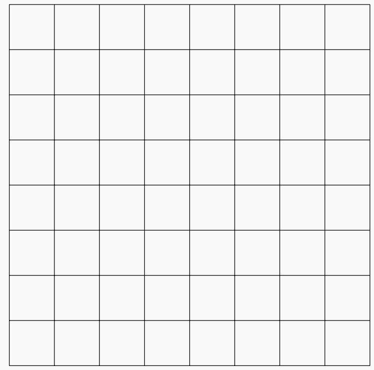
$$5 \times 5 = 5^2 = 25$$

$$A_{cuadrado} = 5cm \times 5cm = 25cm^2$$

Cinco centímetros elevados al cuadrado equivale a veinticinco centímetros cuadrados.

b) 8 m

El área de un cuadrado de lado 8 m, se calcula:



$$8 \times 8 = 8^2 = 64$$

$$A_{cuadrado} = 8m \times 8m = 64m^2$$

Ocho metros elevados al cuadrado equivale a sesenta y cuatro metros cuadrados.

Cuando en una potencia el exponente es tres, se puede leer: **base elevada al cubo**, porque el volumen de un cubo se calcula con la fórmula:

$$V_{cubo} = \underbrace{lado \times lado \times lado}_{\substack{\text{3 veces la medida del lado,} \\ \text{es decir, lado elevado cubo}}} = lado^3$$

Ejemplo 2.4

Calcule el volumen de un cubo cuyo lado mide:

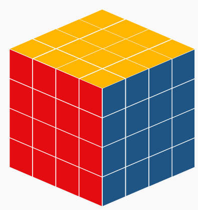
a) 4 cm

b) 6 cm

Solución:

a) 4 cm

El volumen de un cubo de lado 4 cm, se calcula:



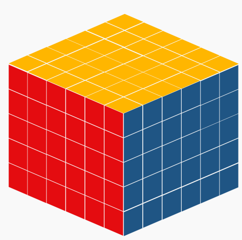
$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$$

$$V_{cubo} = 4cm \times 4cm \times 4cm = 64cm^3$$

Cuatro centímetros elevados al cubo equivale a sesenta y cuatro centímetros cúbicos.

b) 6 cm

El volumen de un cubo de lado 6 cm, se calcula:



$$6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$$

$$V_{cubo} = 6cm \times 6cm \times 6cm = 216cm^3$$

Seis centímetros elevados al cubo equivale a doscientos dieciséis centímetros cúbicos.

Sabías que...

El siguiente edificio corresponde a una biblioteca ubicada en la ciudad alemana de Stuttgart y tiene forma cúbica, su arquitectura está inspirada en un cubo Rubik. ¡Es un cubo perfecto!

Puede encontrar más información sobre esta y otras bibliotecas de Alemania el sitio web: **https://www.germany.travel/es/inspiring-germany/bibliotecas-dignas-de-ver.html**.

Figura 2.2: Nota. Stuttgart city library by night. (Fotografía) por paiviyk, 2014. Flickr. **https://www.flickr.com/photos/66974770@N06/15856317887/.** CC BY-SA 2.0

Ejercicio. Complete los datos de la siguiente tabla:

Lectura	Base	Exponente	Representación	Resultado
Tres elevado a la cuatro				
	8	1		
			9^2	
			7^2	
Quince elevado a la cero				
Cuatro elevado a la tres, o bien, cuatro al cubo				
	10	0		
	10	1		
	10	2		
	10	3		
	10	4		
	10	5		
	10	6		

Solución:

Lectura	Base	Exponente	Representación	Resultado
Tres elevado a la cuatro	3	4	3^4	81
Ocho elevado a la uno	8	1	8^1	8
Nueve elevado a la dos, o bien, nueve al cuadrado	9	2	9^2	81
Siete elevado a la dos, o bien, siete al cuadrado	7	2	7^2	49
Quince elevado a la cero	15	0	15^0	1
Cuatro elevado a la tres, o bien, cuatro al cubo	4	3	4^3	64
Diez elevado a la cero	10	0	10^0	1
Diez elevado a la uno	10	1	10^1	10
Diez elevado a la dos, o bien, diez al cuadrado	10	2	10^2	100
Diez elevado a la tres, o bien, diez al cubo	10	3	10^3	1000
Diez elevado a la cuatro	10	4	10^4	10 000
Diez elevado a la cinco	10	5	10^5	100 000
Diez elevado a la seis	10	6	10^6	1 000 000

Observe en la tabla anterior los ejercicios donde la base corresponde al número diez.

Note la relación entre el valor del exponente y la cantidad de ceros que tiene el resultado:

¡El resultado tiene la misma cantidad de ceros que indica el exponente!

Entonces...¿cuántos ceros tiene el resultado de 10^8?

$$10^8 = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{\text{8 veces el 10}} = \underbrace{100\,000\,000}_{\text{El resultado tiene 8 ceroas}}$$

Este descubrimiento permitirá expresar los números de una forma más sencilla:

2 000

$$2\,000 = 2 \times \underbrace{1\,000}_{\text{3 ceros}} = \underbrace{2 \times 10^{3}}_{\text{el exponente es 3}}$$

7 000 000

$$7\,000\,000 = 7 \times \underbrace{1\,000\,000}_{\text{6 ceros}} = \underbrace{7 \times 10^{6}}_{\text{el exponente es 6}}$$

Sabías que...

Al elevar 5 a cualquier potencia, el resultado será un número que terminará en 5. Por ejemplo:

$$5^3 = 125$$
$$5^5 = 3\,125$$
$$5^7 = 78\,125$$

Sabías que...

Al elevar 6 a cualquier potencia, el resultado será un número que terminará en 6. Por ejemplo:

$$6^3 = 216$$
$$6^4 = 1\,296$$
$$6^7 = 279\,936$$

Aplicaciones tecnológicas

En este enlace podrá repasar y practicar el concepto de cuadrados y cubos perfectos.

Aplicación Geogebra

2.3 Práctica: números naturales

2.3.1 La Hidra de Lerna es un personaje de la mitología Griega. Según las historias esta era un monstruo con varias cabezas, donde cada vez que alguien le cortaba alguna de ellas le crecían dos nuevas cabezas en su lugar. Suponga que se tiene una Hidra de una cabeza y que un personaje intentaba vencerla cortándole todas sus cabezas cada día. Con base en esta información, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas cabezas tendría la Hidra el tercer día?

b) ¿Cuántas cabezas tendría la Hidra al cabo de 10 días intentando vencerla?

2.3.2 ¿Cuáles son los dos primeros números naturales que son cuadrados y cubos perfectos a la vez?

2.3.3 Plantee y resuelva el siguiente problema:
Una bacteria se reproduce dividiéndose en tres bacterias cada minuto. Por ejemplo, después de un minuto se tendrían tres bacterias, luego de dos minutos se tendrían nueve bacterias y así sucesivamente. ¿Cuántas bacterias se tendrían al transcurrir ocho minutos?

2.3.4 Resuelva los siguientes problemas usando potencias:

a) Si se tienen cinco cajas con cinco caramelos cada una. ¿Cuántos caramelos se tienen en total?

b) Si se tienen cuatro bolsas y dentro de cada se tienen cuatro cartucheras y dentro de cada cartuchera hay cuatro lápices. ¿Cuántos lápices hay en total?

c) El números de pétalos de una flor indica la clasificación de la planta. Las flores monocotiledóneas son aquellas que tienen tres pétalos.

La mamá de Paula colecciona este tipo de flores y en la entrada de su casa tiene tres macetas, cada maceta tiene un lirio, una orquídea y una bromelia. Si la mamá de Paula le dice a la hija: "Te tengo un reto, estas tres plantas son monocotiledóneas, ¿sabes sin mirar, cuántos pétalos tienen estas tres macetas en total ?" Ayudémosle a Paula.

2.3.5

Escriba **V** si es verdadero o **F** si es falso. Además, justifique su respuesta.

a) El 81 es un cubo perfecto.

b) El 64 es un cuadrado perfecto.

c) El 144 es un cubo perfecto.

d) El 32 es un cuadrado perfecto.

2.3.6 Utilizando potencias, complete la siguiente tabla

Número	**Base**	**Exponente**	**Resultado**
4^3			
	5	2	
			32
1^7			

2.3.7 RETO:

¿Sabe que los números también pueden ser felices?

La felicidad en un número no se determina por una sonrisa o el estado de sus emociones. Para saber si un número es feliz o no, se suman los cuadrados de sus dígitos y se repite este mismo proceso cuanto sea necesario, si en algún momento se obtiene un 1 entonces el número es feliz. Por ejemplo: El 28 es un número feliz. Para determinarlo, primero se suman los cuadrados de sus dígitos:

$$2^2 + 8^2 = 68$$

Se repite el proceso con 68, así se suman los cuadrados de sus dígitos:

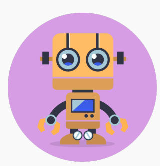
$$6^2 + 8^2 = 100$$

Se hace lo mismo con 100, así se suman los cuadrados de sus dígitos:

$$1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$$

Como se obtiene un 1, entonces se acaba el proceso y el número es feliz.
Como reto encuentre cuántos números felices hay entre el 15 y el 20.

Aplicaciones tecnológicas



Autoevaluación:
Accese al siguiente enlace para evaluar su conocimiento sobre potencias. Si se equivoca, la aplicación le recuerda e invita a intentarlo nuevamente. ¡Suerte!
Clic Aquí

2.4 Potencias de base 10

Recuerde que...

Los números se pueden descomponer en unidades, decenas, centenas, etc., pues nuestro sistema de numeración se llama decimal (tiene base 10).

Teorema

Exprese el número 23964 en forma desarrollada y haciendo uso de las potencias.

Solución:

2 3 9 6 4

- 4 → 4 unidades
- 6 → 60 unidades
- 9 → 900 unidades
- 3 → 3 000 unidades
- 2 → 20 000 unidades

El número 23 964 se puede descomponer como

$$23\,964 = 20\,000 + 3\,000 + 900 + 60 + 4$$

Sin embargo, también se puede escribir de la siguiente manera:

$$23\,964 = 2 \times 10\,000 + 3 \times 1\,000 + 9 \times 100 + 6 \times 10 + 4 \times 1$$

Entonces, según lo visto en el tema de potencias, el número se puede escribir también así :

$$23\,964 = 2 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

Recuerde

El valor neutro en la multiplicación es el 1, porque al multiplicar cualquier número por 1, el resultado que se obtiene es el mismo número.
Ejemplo $8 \times 1 = 8$ (el resultado no varía)

Video 2.2

En este video podrá entender el uso de potencias de base 10 en notación desarrollada.

Video 2.3

Video que muestra como escribir un número a partir de su notación desarrollada.

Ejemplo 2.5

Descomponga cada uno de los siguientes números en notación desarrollada utilizando potencias de base 10.

a) 3 452

b) 16 109

c) 971

d) 289 237

e) 5 124 854

Solución: Se tiene:

a) El número 3 452 se expresa en notación desarrollada como:

$$3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

b) El número 16 109 se expresa en notación desarrollada como:

$$1 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 9 \times 10^0$$

También puede escribirse

$$1 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^0$$

c) El número 971 se expresa en notación desarrollada como:

$$9 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

d) El número 289 237 se expresa en notación desarrollada como:

$$2 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

e) El número 5 124 854 se expresa en notación desarrollada como:

$$5 \times 10^6 + 1 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

Ejemplo 2.6

A partir de la notación desarrollada que se le presenta, escriba el número correspondiente:

a) $9 \times 10^6 + 7 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 4? \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0$

b) $4 \times 10^5 + 1 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 2 \times 10^0$

c) $8 \times 10^6 + 0 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

d) $1 \times 10^6 + 2 \times 10^5 + 3 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 7 \times 10^0$

Solución:

a) $9 \times 10^6 + 7 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 4? \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0$ equivale a:

$$9\,000\,000 + 700\,000 + 0 + 4\,000 + 400 + 20 + 1 = 9\,704\,421$$

Y se lee nueve millones setecientos cuatro mil cuatrocientos veintiuno.

b) $4 \times 10^5 + 1 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 2 \times 10^0$ equivale a:

$$400\,000 + 10\,000 + 1\,000 + 300 + 90 + 2 = 411\,392$$

Y se lee cuatrocientos once mil trescientos noventa y dos.

c) $8 \times 10^6 + 0 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0$ equivale a:

$$8\,000\,000 + 1\,000 + 10 + 5 = 8\,001\,015$$

Y se lee ocho millones un mil quince.

d) $1 \times 10^6 + 2 \times 10^5 + 3 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 7 \times 10^0$ equivale a:

$$1\,000\,000 + 200\,000 + 30\,000 + 4\,000 + 500 + 60 + 7 = 1\,234\,567$$

Y se lee un millón doscientos treinta y cuatro mil quinientos sesenta y siete.

2.5 Práctica: potencias

2.5.1 Complete los espacios vacíos con los **números** que permitan completar la notación desarrollada:

a) $\_\_\_ \times 10^6 + \_\_\_ \times 10^5 + \_\_\_ \times 10^4 + \_\_\_ \times 10^3 + \_\_\_ \times 10^2 + \_\_\_ \times 10^1 + \_\_\_ \times 10^0 = 3\,582\,852$

b) $\_\_\_ \times 10^5 + \_\_\_ \times 10^4 + \_\_\_ \times 10^3 + \_\_\_ \times 10^2 + \_\_\_ \times 10^1 + \_\_\_ \times 10^0 = 129\,743$

c) $\_\_\_ \times 10^6 + \_\_\_ \times 10^5 + \_\_\_ \times 10^4 + \_\_\_ \times 10^3 + \_\_\_ \times 10^2 + \_\_\_ \times 10^1 + \_\_\_ \times 10^0 = 6\,457\,350$

2.5.2 Complete los espacios vacíos con las **potencias en base 10** que permitan completar la notación desarrollada:

a) $5 \times \underline{\quad\quad} + 7 \times \underline{\quad\quad} + 4 \times \underline{\quad\quad} + 3 \times \underline{\quad\quad} + 1 \times \underline{\quad\quad} + 2 \times \underline{\quad\quad} = 574\,312$

b) $1 \times \underline{\quad\quad} + 9 \times \underline{\quad\quad} + 3 \times \underline{\quad\quad} + 3 \times \underline{\quad\quad} + 7 \times \underline{\quad\quad} + 5 \times \underline{\quad\quad} + 8 \times \underline{\quad\quad} = 1\,933\,758$

c) $7 \times \underline{\quad\quad} + 3 \times \underline{\quad\quad} + 2 \times \underline{\quad\quad} + 1 \times \underline{\quad\quad} + 4 \times \underline{\quad\quad} + 8 \times \underline{\quad\quad} + 1 \times \underline{\quad\quad} = 7\,321\,481$

2.5.3 Utilizando potencias de base 10, escriba los siguientes números en notación desarrollada:

a) $305\,046 =$ ____

b) $1\,230\,843 =$ ____

c) $345\,670 =$ ____

2.5.4 Observe cuidadosamente los siguientes números escritos en notación desarrollada y **escriba el número correspondiente:**

a) $2 \times 10^5 + 3 \times 10^4 + 5 \times 10^2 + 8 \times 10^0 =$

b) $8 \times 10^6 + 7 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 1 \times 10^1 =$

c) $6 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 =$

2.5.5 Para cada uno de los siguientes números en su notación desarrollada, **coloque en la casita de valores el dígito correspondiente según su valor posicional:**

a) $7 \times 10^5 + 1 \times 10^4 + 9 \times 10^2 + 4 \times 10^0$

Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades

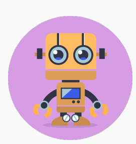
b) $8 \times 10^6 + 3 \times 10^4 + 1 \times 10^2 + 7 \times 10^0$

Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades

c) $2 \times 10^5 + 7 \times 10^6 + 9 \times 10^2 + 6 \times 10^3 + 5 \times 10^0 + 3 \times 10^1$

Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades

Aplicaciones tecnológicas



En el siguiente enlace, podrá evaluar su conocimiento de notación desarrollada utilizando potencias de base 10.
Aplicación interactiva

Capítulo 3

Fracciones

Activación de conocimientos

En este capítulo se estudiará el tema de fracciones. Si quiere repasar los conceptos introductorios del tema, presione sobre la imagen.

3.1 Fracciones equivalentes

Teorema

María y José son hermanos gemelos. Para su fiesta de cumpleaños sus padres decidieron comprarle un queque pequeño a cada uno de ellos. Si María se comió $\frac{2}{4}$ de su queque y José $\frac{1}{2}$ de su queque, ¿quién comió más cantidad?

Solución: Una forma de resolver la situación anterior es mediante la representación gráfica de las fracciones. Así, lo primero que se debe hacer es dibujar la fracción que representa cada porción de queque que comió cada hermano.

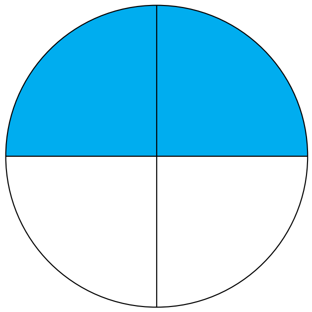


Figura 3.1: Fracción de queque que comió María

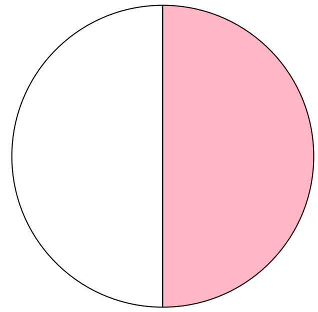


Figura 3.2: Fracción de queque que comió José

Al comparar ambas figuras, si se colocan de forma que la parte pintada de la primera quede exactamente sobre la parte pintada de la segunda (se traslapan), se puede apreciar que representan exactamente la misma fracción del queque. Así que ambos hermanos comieron la misma cantidad.

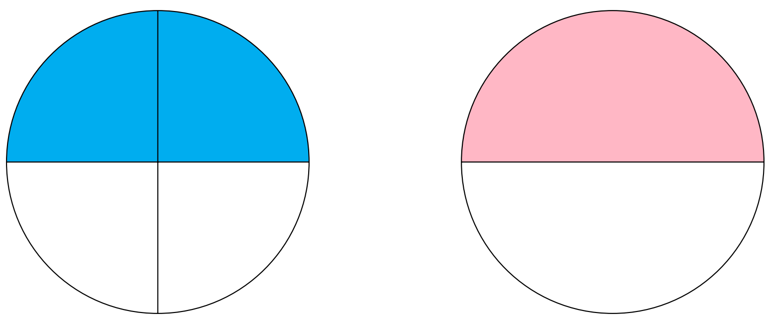


Figura 3.3: Comparación de las fracciones que comió cada hermano

Note que, a pesar de que los números se ven diferentes $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ representan la misma cantidad. A este tipo de fracciones se les conoce como **fracciones equivalentes**.

Video 3.1

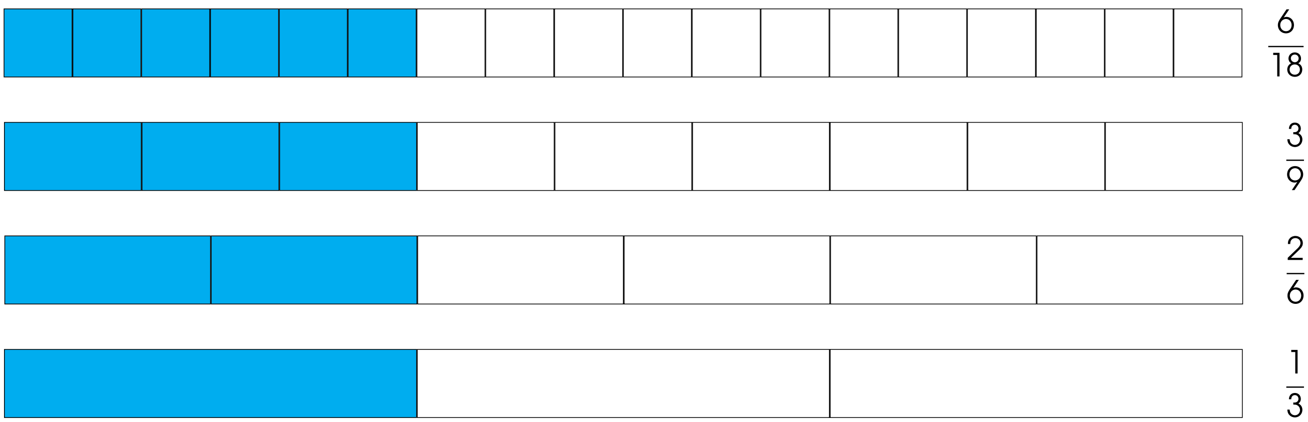
En este video se mostrará la solución de la situación anterior y una explicación de las fracciones equivalentes.

Ejemplo 3.1

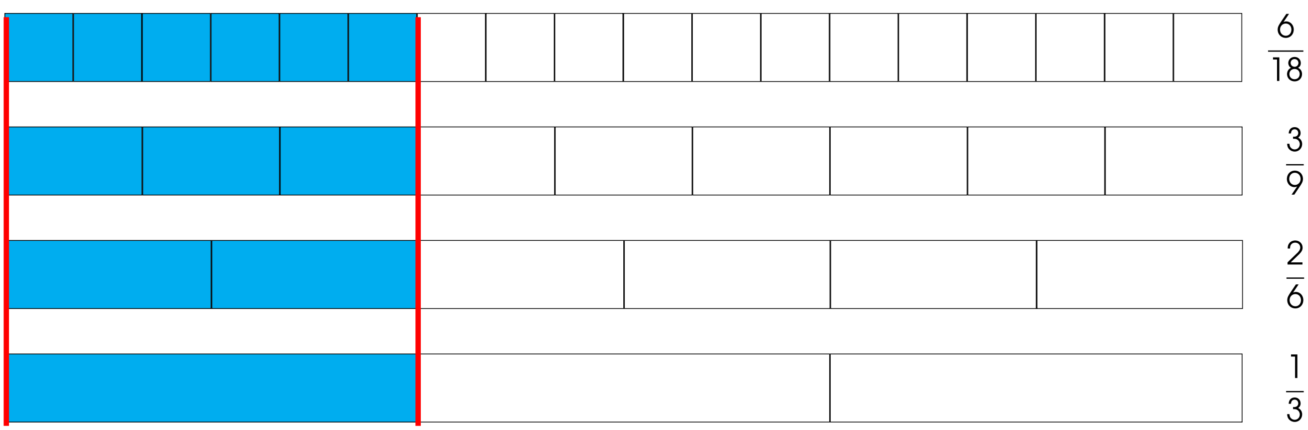
Determine si las siguientes fracciones son equivalentes

$$\frac{6}{18}, \frac{3}{9}, \frac{2}{6}, \frac{1}{3}$$

Solución:
Primero se debe representar gráficamente cada una de las fracciones dadas:



A continuación, se presentan unas líneas coloreadas que muestran la relación que existe entre las cuatro fracciones representadas.



Note nuevamente que las fracciones anteriores, tienen escritura diferente entre sí y sin embargo, representan la misma parte de la unidad, por tanto, estas fracciones son equivalentes entre sí.

Formalmente, se tiene:

Definición 3.1 Fracciones equivalentes
Las fracciones equivalentes son aquellas fracciones donde el numerador y el denominador son números distintos, pero ambas representan un mismo valor numérico.

3.2 Práctica: fracciones equivalentes

3.2.1 Jesús, Esteban y Paula son tres amigos que aman las plantas y cada uno compró un paquete de abono para que estas se mantengan bonitas. El abono deben disolverlo en un litro de agua dependiendo de la planta. Ellos buscaron en internet la cantidad correcta que debían añadir a un litro de agua. Jesús gastó $\frac{4}{5}$ del paquete, Esteban $\frac{2}{3}$ y Paula $\frac{4}{6}$. ¿ Cuáles amigos gastaron la misma cantidad de abono ?

3.2.2 En un restaurante se preparan diferentes salsas de tomate picantes. La cantidad de partes de chile que se agrega a cada uno de los frascos se muestra a continuación:

- Salsa A: $\frac{1}{4}$ de chile.
- Salsa B: $\frac{2}{6}$ de chile
- Salsa C: $\frac{2}{8}$ de chile.
- Salsa D: $\frac{3}{12}$ de chile.
- Salsa E: $\frac{1}{3}$ de chile.
- Salsa F: $\frac{3}{9}$ de chile.

Represente la porción de chile que se le agrega a cada uno de los frascos.

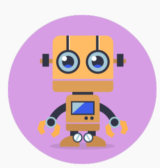
3.2.3 Encierre en un círculo las **tres** fracciones equivalentes de cada uno de los siguientes grupos:

a) **Grupo #1:** $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{3}{15}$ $\frac{3}{10}$

b) **Grupo #2:** $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{4}{15}$ $\frac{3}{12}$

c) **Grupo #3:** $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{12}$ $\frac{4}{12}$

Aplicaciones tecnológicas



Autoevaluación:
Accese al siguiente enlace para evaluar su conocimiento sobre fracciones equivalentes:
Aplicación interactiva

Sabías que...

A continuación, se presenta un dibujo del ojo de Horus. Este es un símbolo de la mitología del Antiguo Egipto.

Los egipcios utilizaron los símbolos que componían este jeroglífico para representar algunas fracciones. Puede encontrar más información en el sitio web: **https://concepto.de/ojo-de-horus**.

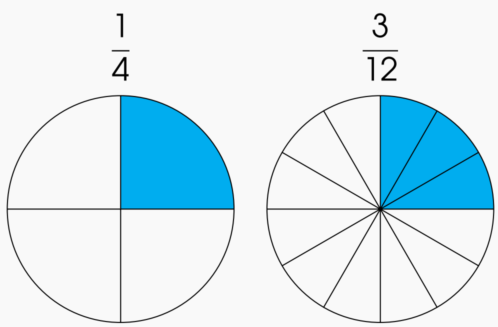
3.3 Amplificación y simplificación de fracciones

Una estrategia para determinar o construir fracciones equivalentes, es la amplificación y la simplificación de fracciones. A continuación, se estudiarán ambos temas.

3.3.1 Amplificación de fracciones

Teorema

Se sabe que las siguientes fracciones son equivalentes:



Pero... ¿qué operación matemática debe realizarse para que la fracción $\frac{1}{4}$ se convierta en $\frac{3}{12}$?

Solución: Primero, debe notar que para convertir $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{12}$ se debe realizar una operación matemática que afecte tanto al numerador como al denominador, de forma que la fracción siga siendo equivalente.

En este caso, se debe multiplicar por una fracción unitaria conveniente.

$$\frac{1}{4} \times \frac{}{} = \frac{3}{12}$$

Dicha fracción corresponde a $\frac{3}{3}$, pues:

$$\frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{12}$$

Con este proceso se puede decir que la fracción $\frac{1}{4}$ ha sido **amplificada**.

En general, cuando se amplifican fracciones, la expresión original se multiplica por una fracción unitaria. De esta forma, el producto obtenido es una fracción equivalente.

La amplificación también puede ser aplicada a números naturales. Por ejemplo, al amplificar 7 por 3 se obtiene:

$$7 = \frac{7}{1} \times \frac{3}{3} = \frac{21}{3}$$

Así, 7 y $\frac{21}{3}$ son fracciones equivalentes.

¿Pero... cómo escoger los valores de fracción unitaria? Por el momento se indicarán los valores que debe usar para amplificar las fracciones. Las fracciones se pueden amplificar tantas veces como se desee.

Recuerde

El número 1 es el neutro de la multiplicación, así que al multiplicarlo por un número, el resultado será el número que se tenía originalmente.

$$5 \times 1 = 5$$

Además, cualquier fracción con el denominador igual al numerador (fracción unitaria) es equivalente a 1.

$$\frac{8}{8} = 1$$

Recuerde

Si un número entero se divide entre 1, su resultado es equivalente al número original.

$$5 = \frac{5}{1} \qquad 7 = \frac{7}{1}$$

Ejemplo 3.2

Amplifique las siguientes fracciones por el número que se indica.

a) $\frac{7}{4}$ por 8

b) $\frac{1}{5}$ por 3

c) $\frac{4}{9}$ por 7

d) 5 por 2

Solución:

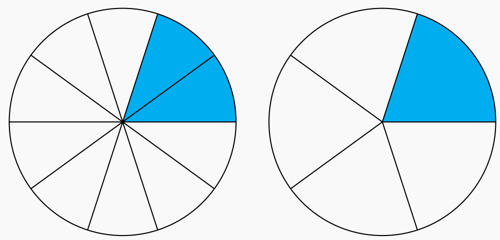
Ejemplo	Fracción original	Fracción unitaria	Operación	Fracción equivalente
a)	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{7}{4} \times \frac{8}{8} = \frac{56}{32}$	$\frac{56}{32}$
b)	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$
c)	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{4}{9} \times \frac{7}{7} = \frac{28}{63}$	$\frac{28}{63}$
d)	$5 = \frac{5}{1}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{1} \times \frac{3}{3} = \frac{15}{3}$	$\frac{15}{3}$

3.3.2 Simplificación de fracciones

Teorema

Se sabe que las siguientes fracciones son equivalentes:

$$\frac{2}{10} \qquad \frac{1}{5}$$



Pero... ¿qué operación matemática debe realizarse para que la fracción $\frac{2}{10}$ se convierta en $\frac{1}{5}$?

Solución: Primero se debe notar que para convertir $\frac{2}{10}$ en $\frac{1}{5}$ se debe realizar una operación matemática que afecte tanto al numerador como al denominador, de forma que la fracción siga siendo equivalente.

En este caso, se debe dividir por una fracción unitaria conveniente, de forma que tanto el numerador como el denominador sean divisibles por dicho número.

$$\frac{2}{10} \div \text{—} = \frac{1}{5}$$

Dicha fracción corresponde a $\frac{2}{2}$, pues:

$$\frac{2}{10} \div \frac{2}{2} = \frac{1}{5}$$

Con este proceso se puede decir que la fracción $\frac{2}{10}$ ha sido **simplificada**.

De forma similar al proceso de amplificación, la simplificación es un método para determinar fracciones equivalentes, solo que esta vez, en lugar de multiplicar por 1, se va a dividir entre un 1 (fracción unitaria).

Sin embargo, para que la simplificación se pueda efectuar, tanto el denominador y numerador de la fracción unitaria debe ser un divisor común del numerador y el denominador de la fracción original.

Entonces simplificar fracciones implica crear una fracción equivalente al dividir tanto el numerador como el denominador por un mismo número.

Analice la siguientes fracción: $\frac{50}{45}$. Note que:

- Los divisores del 50 son: 1, 2, 5, 10, 25, 50.
- Los divisores del 45 son: 1, 3, 5, 9, 15, 45.

En este caso, el único número que es divisor común para ambos números es el 5. Por lo que, se procede a simplificar $\frac{50}{45}$ por 5.

$$\frac{50}{45} \div \frac{5}{5} = \frac{10}{9}$$

Por lo tanto, $\frac{50}{45}$ y $\frac{10}{9}$ son fracciones equivalentes.

Analice otra fracción $\frac{36}{48}$. Note que:

- Los divisores del 36 son: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.
- Los divisores del 48 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

En este caso, hay más de un divisor en común, y se puede simplificar la fracción original, para cada uno de esos divisores:

Fracción original	**Simplificar por 2**	**Simplificar por 3**	**Simplificar por 4**	**Simplificar por 6**	**Simplificar por 12**
$\frac{36}{48}$	$\frac{36}{48} \div \frac{2}{2} = \frac{18}{24}$	$\frac{36}{48} \div \frac{3}{3} = \frac{12}{16}$	$\frac{36}{48} \div \frac{4}{4} = \frac{9}{12}$	$\frac{36}{48} \div \frac{6}{6} = \frac{6}{8}$	$\frac{36}{48} \div \frac{12}{12} = \frac{3}{4}$

Observe que las fracciones (simplificadas) y equivalentes a la fracción original son:

$$\frac{18}{24}, \frac{12}{16}, \frac{6}{8}, \frac{3}{4}$$

Note que el 12 es el mayor de todos los divisores en común del 36 y 48. Cuando se simplificó $\frac{36}{48}$ por 12, se obtuvo la fracción $\frac{3}{4}$, donde el 3 y el 4 no tienen divisores en común.

Entonces $\frac{3}{4}$ es una fracción que no se puede simplificar más. A este tipo de fracciones, que no se pueden simplificar más se les conoce como fracción canónica.

Recuerde que...

Anteriormente se trabajó el tema de los divisores. Si lo requiere, puede repasarlo haciendo clic en la imagen.

Sabías que...

Dos números cualesquiera se denominan **primos relativos**, si el máximo divisor común entre ellos es el 1.

Cuando se solicita simplificar al máximo una fracción, se está solicitando encontrar la fracción canónica.

Ejemplo 3.3

Encuentre la fracción canónica de cada una de las siguientes fracciones:

a) $\frac{25}{15}$

b) $\frac{27}{18}$

c) $\frac{7}{9}$

d) $\frac{32}{36}$

Solución:

Ejemplo	Fracción original	Divisores en común	Operaciones	Fracción canónica
a)	$\frac{25}{15}$	1, 5	$\frac{25}{15} \div \frac{5}{5} = \frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$
b)	$\frac{27}{18}$	1, 3, 9	$\frac{27}{18} \div \frac{3}{3} = \frac{9}{6}$ $\frac{27}{18} \div \frac{9}{9} = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
c)	$\frac{7}{9}$	1	La fracción es canónica	$\frac{7}{9}$
d)	$\frac{32}{36}$	1, 2, 4	$\frac{32}{36} \div \frac{2}{2} = \frac{16}{18}$ $\frac{32}{36} \div \frac{4}{4} = \frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$

3.4 Práctica: amplificación y simplificación de fracciones

3.4.1 Amplifique las siguientes fracciones por el número que se indica:

a) $\frac{2}{7}$ por 3

b) $\frac{1}{4}$ por 11

c) $\frac{3}{5}$ por 8

d) $\frac{7}{11}$ por 7

e) $\frac{3}{8}$ por 5

f) $\frac{5}{6}$ por 3

3.4.2 Determine el factor por el cual deben amplificarse las siguientes fracciones para obtener el resultado deseado:

a) $\frac{1}{3} \times \frac{\quad}{\quad} = \frac{5}{15}$

b) $\frac{2}{7} \times \frac{\quad}{\quad} = \frac{12}{42}$

c) $\frac{5}{2} \times \frac{\quad}{\quad} = \frac{15}{6}$

d) $\frac{3}{2} \times \frac{\quad}{\quad} = \frac{15}{10}$

e) $\frac{7}{5} \times \frac{\quad}{\quad} = \frac{14}{10}$

f) $\frac{1}{4} \times \frac{\quad}{\quad} = \frac{4}{16}$

3.4.3 Determine la fracción canónica de las siguientes fracciones:

a) $\frac{21}{7}$

b) $\frac{16}{32}$

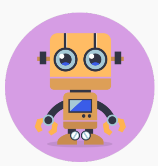
c) $\frac{20}{15}$

d) $\frac{12}{9}$

e) $\frac{3}{6}$

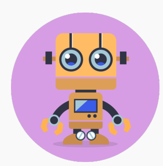
f) $\frac{25}{15}$

Aplicaciones tecnológicas



Autoevaluación:
Accese al siguiente enlace para evaluar su conocimiento sobre simplificación de fracciones:
Aplicación Geogebra

Aplicaciones tecnológicas



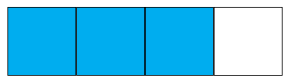
Autoevaluación:
En el siguiente enlace, podrá evaluar su conocimiento sobre amplificación de fracciones.
Aplicación Geogebra

3.5 Multiplicación de fracciones

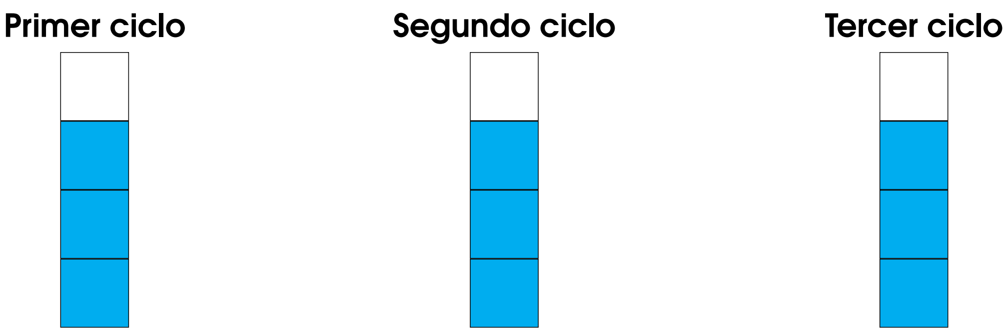
Teorema

Josefa siempre utiliza tres cuartos de la capacidad total de su lavadora en cada ciclo de lavado. Si realiza 3 ciclos para lavar su ropa ¿Qué fracción de la capacidad de su lavadora ha utilizado?

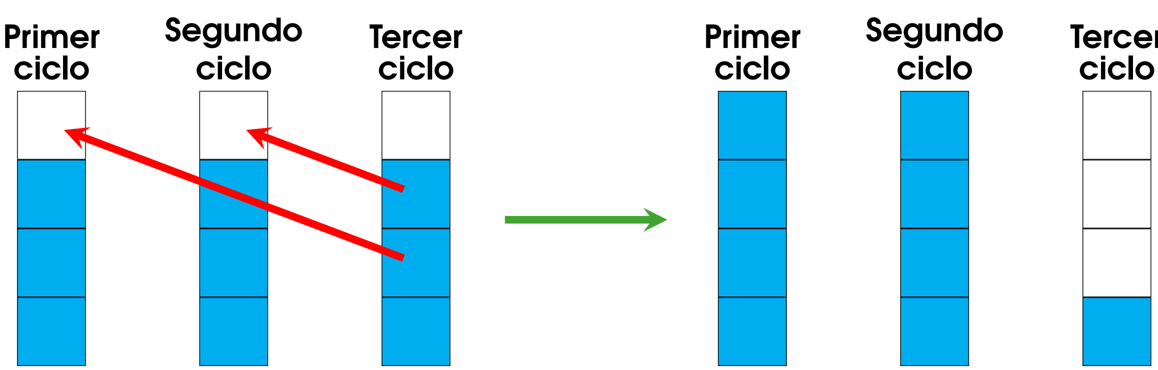
Solución: Josefa utiliza tres cuartos de la capacidad total de su lavadora en cada ciclo. Gráficamente, se representa de la siguiente manera:



Los tres ciclos de lavado se pueden representar como:



Dado que, la capacidad de la lavadora está dividida en una misma cantidad (cuatro partes), se pueden "mover" fracciones para completar unidades, así:



De esta forma, se tienen que en total se utilizaron 2 unidades completas de la capacidad de la lavadora y $\frac{1}{4}$ de la capacidad total. Así, se utilizó:

$$2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

Otra forma de resolver el problema, consiste en notar que si el ciclo con $\frac{3}{4}$ se repite 3 veces, numéricamente se puede escribir como:

$$\frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4}$$

Por lo tanto, se utilizó $\frac{9}{4}$ de la capacidad de la lavadora.

Cuando se multiplica un número entero por una fracción, se espera saber cuántas veces "cabe" esa fracción en ese número entero.

Video 3.2

En este video se mostrará la solución de la situación anterior y una explicación de la multiplicación de fracciones.

Analice otra situación: Si se pide obtener $\frac{2}{5}$ de 25, se sabe que el total es 25 objetos y que se utiliza como fracción unitaria. Luego, se hacen 5 grupos y se revisa a cuánto equivale si se toman dos de esos grupos.

Sin embargo, una forma muy práctica es considerar que la palabra de, es una forma de preguntar "cuántas veces", razón por la cual se puede escribir como un producto:

$$\frac{2}{5} \text{ de } 25 = \frac{2}{5} \times 25$$

Las multiplicaciones de fracciones se pueden resolver simplemente multiplicando los numeradores entre sí y los denominadores entre sí. Podría decirse que la multiplicación se hace "en forma horizontal".

En el ejemplo que se está resolviendo, como 25 es un número entero, se puede reescribir como $\frac{25}{1}$, que es una fracción equivalente y luego, se procede a multiplicar.

$$\frac{2}{5} \times 25 = \frac{2}{5} \times \frac{25}{1} = \frac{2 \times 25}{5 \times 1} = \frac{50}{5}$$

Sin embargo, $\frac{50}{5}$ se puede simplificar, y al final se obtiene:

$$\frac{50}{5} = \frac{10}{1} = 10$$

Entonces, $\frac{2}{5}$ de 25 objetos, representa 10 objetos.

Ahora bien, ¿Qué sucede si se necesita saber a cuánto equivale $\frac{4}{7}$ de $\frac{1}{3}$?

Primero, considere que $\frac{4}{7}$ de $\frac{1}{3}$ equivale a resolver

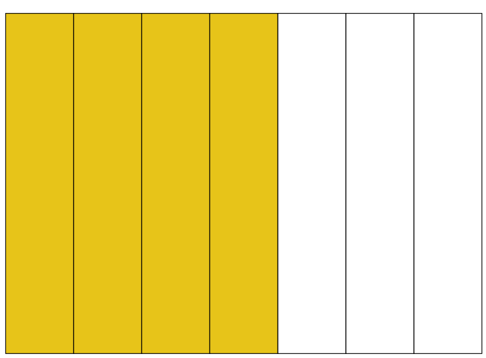
$$\frac{4}{7} \times \frac{1}{3}$$

Luego, las multiplicaciones se resuelven multiplicando de forma "horizontal", por tanto:

$$\frac{4}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{21}$$

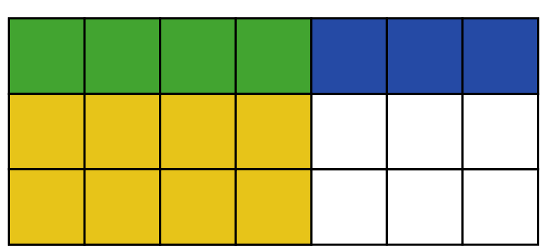
Gráficamente lo que sucede es que se coloca una fracción con franjas en forma horizontal y la otra en forma vertical:

$\frac{4}{7}$

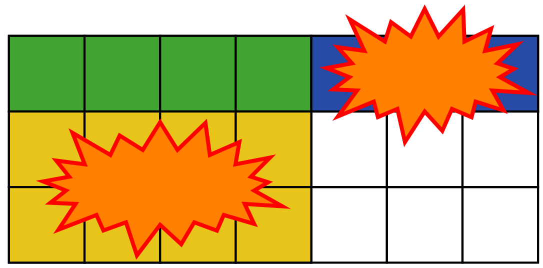


$\frac{1}{3}$

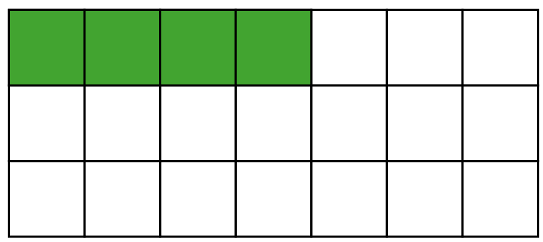
Luego, se sobreponen una fracción sobre la otra (se traslapan) y se verá de la siguiente forma:



Observe que, al fundirse ambos dibujos, hay cuadros que coinciden uno sobre otro. Se eliminan todos los cuadrados, excepto los que se intersecaron (los que coincidieron), como se muestra en el dibujo siguiente:



Así, la fracción resultante corresponde a:



Y numéricamente equivale a $\frac{4}{21}$.

Recuerde que...

La multiplicación es conmutativa, o sea

$$a \times b = b \times a$$

.

Recuerde que...

Si requiere multiplicar fracciones impropias expresadas en notación mixta, se sugiere cambiar a notación impropia y luego aplicar el procedimiento anterior.

Ejemplo 3.4

Resuelva las siguientes multiplicaciones y simplifique al máximo cada resultado:

a) $\frac{1}{8} \times \frac{5}{2}$

b) $\frac{3}{7} \times \frac{2}{6}$

c) $3\frac{1}{5} \times 2\frac{4}{7}$

d) $2\frac{7}{8} \times \frac{2}{3}$

Solución:

a) Al resolver $\frac{1}{8} \times \frac{5}{2}$ se tiene:

$$\frac{1}{8} \times \frac{5}{2} = \frac{1 \times 5}{8 \times 2} = \frac{5}{16}$$

No se simplifica

es una fracción canónica

b) Al resolver $\frac{3}{7} \times \frac{2}{6}$ se tiene:

$$\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{3 \times 2}{7 \times 6} = \frac{6}{42} \underset{\text{divisible por 2}}{=} \frac{3}{21} \overset{\text{divisible por 3}}{=} \frac{1}{7}$$

c) Al resolver $3\frac{1}{5} \times 2\frac{4}{7}$, primero se pasan las fracciones de notación mixta a fracción impropia:

$$3\frac{1}{5} \times 2\frac{4}{7} = \frac{16}{5} \times \frac{18}{7}$$

Luego, se realiza la operación correspondiente:

$$\frac{16}{5} \times \frac{18}{7} = \frac{16 \times 18}{5 \times 7} = \frac{288}{35}$$

No se simplifica

es una fracción canónica

Si requiere la fracción resultado en notación mixta entonces $\frac{288}{35} = 8\frac{8}{35}$

d) Al resolver $2\frac{7}{8} \times \frac{2}{3}$, primero se debe pasar la primera fracción de notación mixta a fracción impropia:

$$2\frac{7}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{23}{8} \times \frac{2}{3}$$

Luego, se realiza la operación correspondiente:

$$\frac{23}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{23 \times 2}{8 \times 3} = \frac{46}{24} \underset{\substack{\text{divisible}\\ \text{por 2}}}{=} \frac{23}{12}$$

3.5.1 Ley de cancelación

¿Cómo se puede resolver una operación como la siguiente?

$$\frac{11}{8} \times \frac{15}{33} \times \frac{14}{4}$$

Según lo visto en la sección anterior, se deben multiplicar todos los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.

$$\frac{11}{8} \times \frac{18}{33} \times \frac{14}{6} = \frac{11 \times 18 \times 14}{8 \times 33 \times 6} = \frac{2\,772}{1\,584}$$

Y ahora se necesita simplificar:

$$\frac{2\,772}{1\,584} \underset{\div 2}{=} \frac{1\,386}{792} \underset{\div 2}{=} \frac{693}{396} \underset{\div 3}{=} \frac{231}{132} \underset{\div 3}{=} \frac{77}{44} \underset{\div 11}{=} \frac{7}{4}$$

Sin embargo, aunque es un proceso válido, es un poco largo. Existe una forma más simple y se llama: **la ley de cancelación**.

La ley de cancelación es una estrategia que permite simplificar, antes de realizar la multiplicación, así se trabaja con números menores y más fáciles de manipular.

Como en toda simplificación, siempre se trabaja con un numerador y un denominador, en este caso, **no tienen que ser de la misma fracción**. Además, como requisito,**solo se va a aplicar ley de cancelación cuando se tienen multiplicaciones de fracciones** (si uno de los factores es un número entero se puede convertir en fracción colocando un 1 en el denominador).

Retomando el ejemplo anterior y aplicando la ley de la cancelación se tiene:

$$\frac{11}{8}\times\frac{18}{33}\times\frac{14}{6}$$

Se puede notar que se puede aplicar ley de cancelación pues todas las fracciones se están multiplicando.

- Identifique una pareja de números (siempre un numerador y un denominador) con algún divisor en común. Si determina varias parejas, puede empezar por la que guste.

  Divida cada número por el divisor seleccionado. Escriba en la parte superior o inferior (según corresponda) el cociente obtenido.

  En este caso, puede considerar como pareja el 8 y 14, pues son divisibles entre 2. Se tacha la pareja de números que ya utilizó.

$$\frac{11}{\underset{4}{\cancel{8}}}\times\frac{18}{33}\times\frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{6}$$

- Se repite el proceso, escogiendo una nueva pareja.

  Los números que ya se tacharon no se pueden volver a usar, pero los que se anotan en la parte superior o inferior, esos sí pueden emplearse.

  Ahora se tomará el 18 y el 6, pues son divisibles entre 2.

$$\frac{11}{\underset{4}{\cancel{8}}}\times\frac{\overset{9}{\cancel{18}}}{33}\times\frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{3}{\cancel{6}}}$$

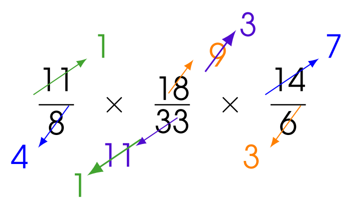
- Se repite el proceso, escogiendo una nueva pareja.

  Ahora se tomará el 9 y el 33, pues son divisibles entre 3.

$$\frac{11}{\underset{4}{\cancel{8}}}\times\frac{\overset{\overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{18}}}{\underset{11}{\cancel{33}}}\times\frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{3}{\cancel{6}}}$$

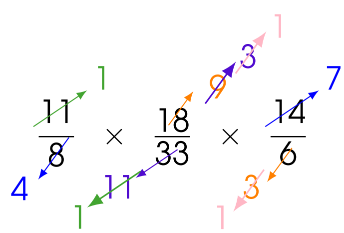
- Se repite el proceso, escogiendo una nueva pareja.

  Ahora se tomará el 11 y el 11, pues son divisibles entre 11.



- Se repite el proceso, escogiendo una nueva pareja.

  Ahora se tomará el 3 y el 3, pues son divisibles entre 3.



- Se puede observar que ya no hay más parejas. Así que se va a volver a escribir la fracción, pero solamente usando los valores que quedaron en la parte superior o inferior de cada número.

$$\frac{11}{8}\times\frac{18}{33}\times\frac{14}{6}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1}\times\frac{7}{1}$$

- Finalmente, se multiplican las fracciones resultantes:

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{1}\times\frac{7}{1}=\frac{1\times 1\times 7}{4\times 1\times 1}=\frac{7}{4}$$

Note que en ambos casos (cuando se simplificó y cuando se utilizó la ley de cancelación), se utilizaron los mismos divisores (quizá en otro orden), es decir, al final se realizó el mismo procedimiento.

Ejemplo 3.5

Haciendo uso de la ley de la cancelación, realice la siguiente operación:

$$\frac{25}{4}\times\frac{10}{15}\times\frac{12}{2}\times\frac{21}{35}$$

Solución: Dado que todas las fracciones se están multiplicando, se puede aplicar ley de cancelación.

- Considere como primera pareja el 25 y 35, pues son divisibles entre 5.

$$\frac{\cancelto{5}{25}}{4}\times\frac{10}{15}\times\frac{12}{2}\times\frac{21}{\cancelto{7}{35}}$$

- Se tomará el 10 y el 15, pues son divisibles entre 5.

$$\frac{\cancelto{5}{25}}{4}\times\frac{\cancelto{2}{10}}{\cancelto{3}{15}}\times\frac{12}{2}\times\frac{21}{\cancelto{7}{35}}$$

- En este caso, se tomará el 12 y el 2, pues son divisibles entre 2.

$$\frac{\cancelto{5}{25}}{4}\times\frac{\cancelto{2}{10}}{\cancelto{3}{15}}\times\frac{\cancelto{6}{12}}{\cancelto{1}{2}}\times\frac{21}{\cancelto{7}{35}}$$

- Se tomará el 6 y el 3, pues son divisibles entre 3.

$$\frac{\cancelto{5}{25}}{4}\times\frac{\cancelto{2}{10}}{\cancelto{\cancelto{1}{3}}{15}}\times\frac{\cancelto{\cancelto{2}{6}}{12}}{\cancelto{1}{2}}\times\frac{21}{\cancelto{7}{35}}$$

- Se tomará un 2 y el 4, pues son divisibles entre 2.

$$\frac{\cancelto{5}{25}}{\cancelto{2}{4}} \times \frac{\cancelto{2}{10}}{\cancelto{1}{\cancelto{3}{15}}} \times \frac{\cancelto{1}{\cancelto{2}{\cancelto{6}{12}}}}{\cancelto{1}{2}} \times \frac{21}{\cancelto{7}{35}}$$

- Se tomará el 2 y el 2, pues son divisibles entre 2.

$$\frac{\cancelto{5}{25}}{\cancelto{1}{\cancelto{2}{4}}} \times \frac{\cancelto{1}{\cancelto{2}{10}}}{\cancelto{1}{\cancelto{3}{15}}} \times \frac{\cancelto{1}{\cancelto{2}{\cancelto{6}{12}}}}{\cancelto{1}{2}} \times \frac{21}{\cancelto{7}{35}}$$

- Se tomará el 21 y el 7, pues son divisibles entre 7.

$$\frac{\cancelto{5}{25}}{\cancelto{1}{\cancelto{2}{4}}} \times \frac{\cancelto{1}{\cancelto{2}{10}}}{\cancelto{1}{\cancelto{3}{15}}} \times \frac{\cancelto{1}{\cancelto{2}{\cancelto{6}{12}}}}{\cancelto{1}{2}} \times \frac{\cancelto{3}{21}}{\cancelto{1}{\cancelto{7}{35}}}$$

- Ya no hay más números con divisores en común, por lo tanto se reescribe al expresión usando solo los números que quedaron sin tachar.

$$\frac{25}{4} \times \frac{10}{15} \times \frac{12}{2} \times \frac{21}{35} = \frac{5}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{3}{1}$$

Finalmente, se multiplican las fracciones resultantes:

$$\frac{5}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{5 \times 1 \times 1 \times 3}{1 \times 1 \times 1 \times 1} = \frac{15}{1} = 15$$

Para saber más...

Una multiplicación de fracciones se puede hacer al factorizar los numeradores y denominadores en factores primos y luego aplicando la ley de cancelación, pero, procurando formar la mayor cantidad de fracciones unitarias.

Si desea conocer más sobre esta técnica, haga clic sobre la imagen

3.5.2 Inverso multiplicativo

Teorema

En cada una de las siguientes operaciones encuentre la fracción que falta, de modo que la igualdad sea verdadera:

a) $5 \times \text{—} = 1$

b) $\frac{1}{8} \times \text{—} = 1$

c) $\frac{9}{5} \times \text{—} = 1$

d) $\frac{2}{3} \times \text{—} = 1$

e) $7 \times \text{—} = 1$

f) $\frac{6}{5} \times \text{—} = 1$

Intente encontrar algún patrón entre la primera y segunda fracción, para cada uno de los casos.

Solución:

a)

$$5 \times \frac{1}{5} = 1$$

b)

$$\frac{1}{8} \times 8 = 1$$

c)

$$\frac{9}{5} \times \frac{5}{9} = 1$$

d)

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$$

e)

$$7 \times \frac{1}{7} = 1$$

f)

$$\frac{6}{5} \times \frac{5}{6} = 1$$

El número que se necesitaba para completar las multiplicaciones, se denomina inverso multiplicativo.

Ejemplo 3.6

Determine el inverso multiplicativo de los siguientes números:

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{2}{7}$

c) 6

d) $\frac{1}{3}$

Solución:

a) El inverso multiplicativo de $\frac{4}{5}$ es $\frac{5}{4}$ porque al multiplicar $\frac{4}{5} \times \frac{5}{4}$ el resultado corresponde a 1.

b) El inverso multiplicativo de $\frac{2}{7}$ es $\frac{7}{2}$ porque al multiplicar $\frac{2}{7} \times \frac{7}{2}$ el resultado corresponde a 1.

c) El inverso multiplicativo de 6 es $\frac{1}{6}$ porque al multiplicar $6 \times \frac{1}{6}$ el resultado corresponde a 1.

d) El inverso multiplicativo de $\frac{1}{3}$ es 3 porque al multiplicar $\frac{1}{3} \times 3$ el resultado corresponde a 1.

En general, se tiene:

Definición 3.2

El inverso multiplicativo de un número es aquel número que al multiplicarse por el primero da como resultado 1.

En el caso de las fracciones se tiene que el inverso multiplicativo de $\frac{a}{b}$ corresponde a $\frac{b}{a}$

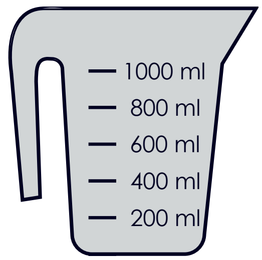
3.6 Práctica: multiplicación de fracciones

3.6.1 En un aula hay 42 alumnos. Si se sabe que dos tercios de la clase son hombres, ¿cuántos estudiantes son mujeres?

3.6.2 Una herencia de 36 millones de colones se reparte entre 3 hermanos. Al mayor le toca la mitad, al hermano del medio le toca la tercera parte y al menor el resto. ¿Cuántos millones recibe cada hermano?

3.6.3 El papá de Fabricio compró una bolsa de 5 kg de arroz. Si utilizó dos quintos de la bolsa de arroz para hacer una comida para su familia ¿Cuántos kilogramos de arroz quedan en la bolsa?

3.6.4 Sonia compró un kit de recetas para preparar postres pequeños. El kit incluía un vaso medidor de un litro, que se encuentra dividido en cinco partes iguales con unas marcas, tal y como se muestra a continuación:



Conteste las siguientes preguntas:

a) Uno de los ingredientes de una receta es la leche. Las instrucciones dicen que cada postre necesita dos de esas cinco partes señaladas en el vaso medidor. Si Sonia desea preparar 30 postres, ¿cuánta cantidad de leche requiere?

b) En esa misma receta se indica que por cada litro de leche que se utilice es necesario utilizar $\frac{1}{3}$ de taza de harina para la preparación de cada postre. Para prepara los 30 postres, ¿cuántas tazas de harina requiere Sonia?

3.6.5 Determine el inverso multiplicativo de cada una de las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{7}{5}$

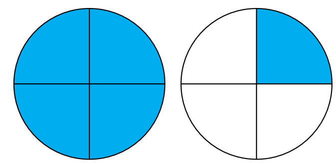
c) $\frac{15}{9}$

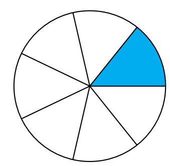
d) $\frac{13}{11}$

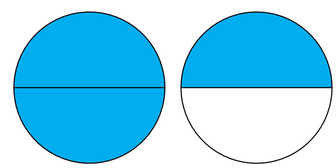
e) $\frac{8}{3}$

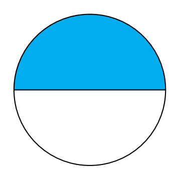
f) $\frac{14}{5}$

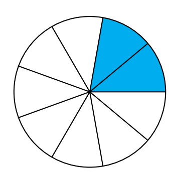
3.6.6 En la columna de la izquierda aparecen cinco multiplicaciones con fracciones; en la derecha representaciones gráficas de **los resultados de esas operaciones simplificadas y expresadas en forma canónica**. Relacione la operación con su resultado gráfico (simplificado), colocando el número que corresponde a cada multiplicación en los paréntesis de la columna de la derecha. **Sugerencia:** utilice la ley de la cancelación.

(a) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ ( ) 

(b) $\frac{6}{5} \times \frac{10}{8}$ ( ) 

(c) $\frac{5}{6} \times \frac{3}{2}$ ( ) 

(d) $\frac{2}{6} \times \frac{2}{3}$ ( ) 

(e) $\frac{3}{14} \times \frac{2}{3}$ ( ) 

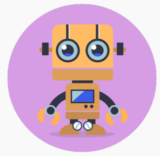
Sabías que...

Un cuadrado mágico es una figura muy especial hecha de números y operaciones matemáticas. En su versión original, si se imagina que los números están en las casillas de un cuadrado, los números están dispuestos de tal manera que la suma de los números en cada fila, columna y diagonal es la misma. Otras versiones de los cuadrados mágicos incluyen otras operaciones matemáticas. Si quiere conocer más sobre este tema, puede visitar el sitio web: **https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/reajuegos-JS/cuadrados_mgicos.html**.

3.6.7 Resuelva el siguiente cuadrado mágico utilizando el concepto de multiplicación de fracciones.

$\frac{3}{5}$	$\times$	$\frac{10}{4}$	$=$	?
$\times$		$\times$		$\times$
$\frac{5}{9}$	$\times$	$\frac{6}{7}$	$=$	?
$=$		$=$		$=$
?	$\times$	?	$=$	?

Aplicaciones tecnológicas



Autoevaluación:
Accese al siguiente enlace para evaluar su conocimiento sobre el inverso multiplicativo:
Aplicación interactiva

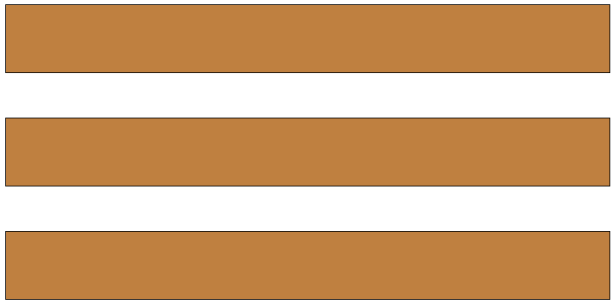
3.7 División de fracciones

Teorema

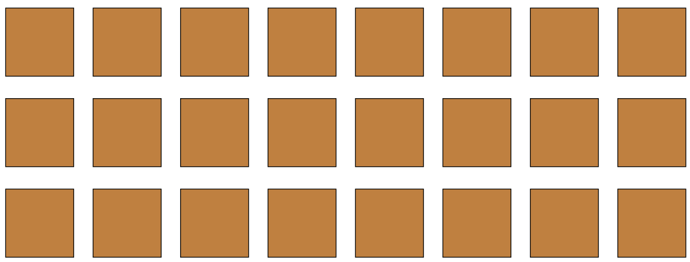
La abuela de Morgan está comenzando un emprendimiento y comenzó a vender refrescos elaborados por ella. Para almacenarlos ella tiene tres picheles cada uno de un litro de capacidad.

La abuela compró vasos cuya capacidad máxima es de $\frac{1}{8}$ de litro. ¿Cuántos vasos completos de fresco puede llenar la abuela de Morgan, con el refresco contenido en los tres picheles?

Solución: Considere el litro de refresco de cada pichel como una unidad completa.



Ahora, cada uno de ellos debe repartirse en vasos de $\frac{1}{8}$ de litro, es decir que cada unidad se divide en ocho partes:



Si se cuenta la cantidad de octavos de litro (vasos) en los que se dividen los tres picheles, se obtiene un total de 24 vasos, que sería la respuesta al problema.
Note que la operación que se debía realizar era:

$$3 \div \frac{1}{8}$$

Sin embargo, para obtener el total de vasos que se pueden llenar, la operación realizada es equivale a resolverla de la siguiente manera:

$$3 \times \frac{8}{1} = \frac{3}{1} \times \frac{8}{1} = \frac{24}{1} = 24$$

Se puede observar que se utilizó la operación inversa de la división, en este caso, la multiplicación. **Note que para convertir la operación de división en una multiplicación, debe hallar el inverso multiplicativo de la segunda fracción**. Así:

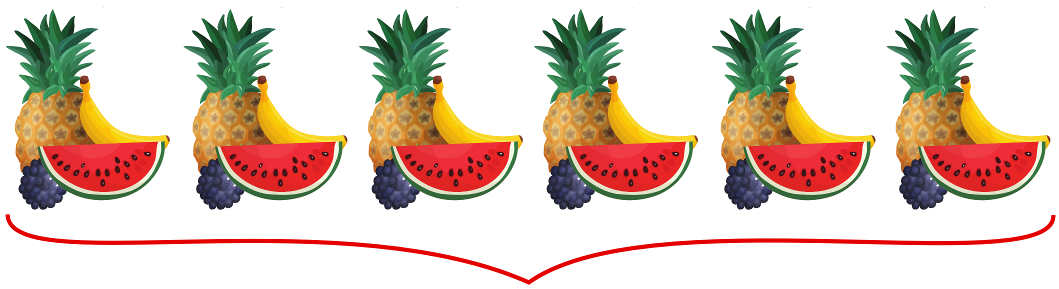
$$3 \div \frac{1}{8} = 3 \times \frac{8}{1}$$

Analice otro ejemplo:

Ejemplo 3.7

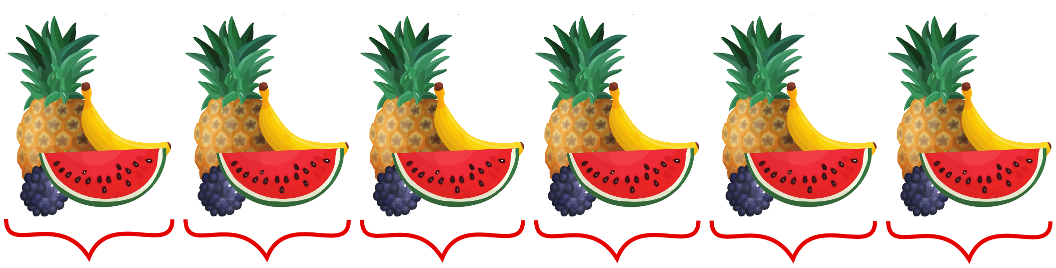
Mi tía Karen tiene 18 kilogramos de frutas mixtas, $\frac{5}{6}$ del total son para vender y para ello, se empacan en bolsas cuya capacidad es $\frac{1}{4}$ de kilogramo. ¿Cuántas bolsas se emplearon para empacar, si cada una tiene la misma cantidad de frutas?

Solución: Se van a considerar los 18 kilogramos de frutas mixtas como una unidad completa:



18 kg = 1 unidad completa

Dado que se quiere vender $\frac{5}{6}$ de las frutas, se debe dividir la unidad (los 18 kg) en seis partes iguales.



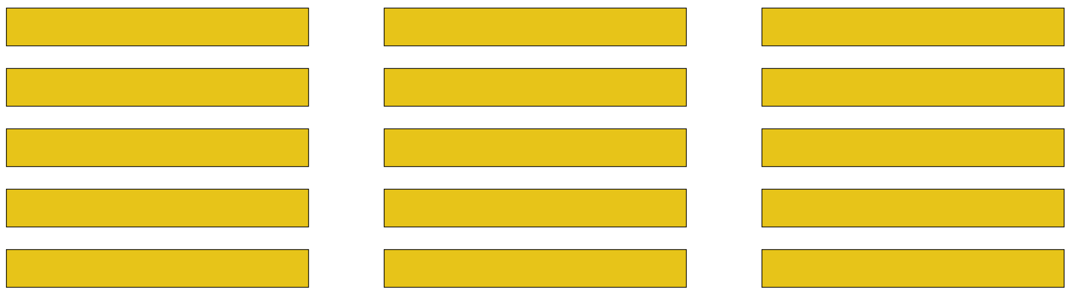
3 kg = $\frac{1}{6}$ unidad	3 kg = $\frac{1}{6}$ unidad	3 kg = $\frac{1}{6}$ unidad	3 kg = $\frac{1}{6}$ unidad	3 kg = $\frac{1}{6}$ unidad	3 kg = $\frac{1}{6}$ unidad

Note que:

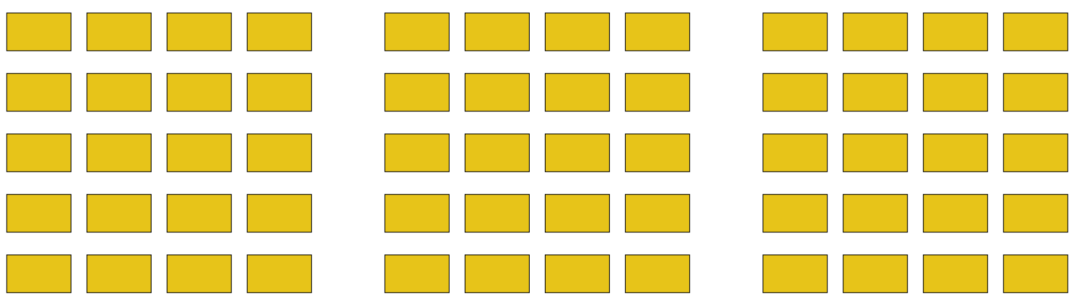
$$\frac{5}{6} \text{ de } 18 = 5 \text{ veces } \frac{1}{6} \text{ de } 18 = 5 \times \frac{1}{6} \times 18 = 5 \times 3 = 15$$

Esto implica que si de 18 kg se toman $\frac{5}{6}$ del total, esto equivale a 15 kg.

Ahora bien, esos 15 kg se reparten en bolsas de $\frac{1}{4}$ kg. Si se supone que cada kilogramo es una unidad completa, se puede representar de la situación anterior de la siguiente manera:



Luego cada una de las unidades se divide en cuartos partes:



Por tanto, el total de bolsas que se necesita es 60.

La operación que se realiza es:

$$15 \div \frac{1}{4}$$

Se puede obtener el total de bolsas que se pueden llenar al realizar la siguiente operación:

$$15 \times \frac{4}{1} = \frac{15}{1} \times \frac{4}{1} = \frac{60}{1} = 60$$

Video 3.3

En este video se mostrarán las soluciones de la dos situaciones anteriores. También encontrará una explicación de la división de fracciones.

En general, para dividir fracciones se puede:

1) Convertir la división en multiplicación.
2) Reescribir la segunda fracción como su inverso multiplicativo.
3) Multiplicar las fracciones y aplicar ley de cancelación si es posible.

Ejemplo 3.8

Realice las siguientes operaciones:

a) $\frac{5}{7} \div \frac{15}{14}$

b) $\frac{9}{4} \div \frac{12}{5}$

c) $\frac{2}{7} \div \frac{3}{11}$

d) $\frac{1}{2} \div \frac{8}{3}$

Solución: Para ilustrar mejor la solución, se hará uso de una tabla:

Ejemplo	Operación original	Inverso multiplicativo de la segunda fracción	Nueva operación	Operación y resultado simplificado
a)	$\frac{5}{7} \div \frac{15}{14}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{5}{7} \times \frac{14}{15}$	$\frac{2}{3}$
b)	$\frac{9}{4} \div \frac{12}{5}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{9}{4} \times \frac{5}{12}$	$\frac{15}{16}$
c)	$\frac{2}{7} \div \frac{3}{11}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{2}{7} \times \frac{11}{3}$	$\frac{22}{21}$
d)	$\frac{1}{2} \div \frac{8}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$

Algunas veces, las divisiones se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\frac{2}{7} \div \frac{3}{11} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{11}}$$

En este caso, se puede reescribir como una multiplicación, donde se sigue el orden:

$$\text{extremos}\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \hline 7 \\ \hline 3 \\ \hline 11 \end{array} \right. \left. \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right\} \text{medios}$$

Así, se coloca en el numerador la multiplicación de los números en los extremos, mientras que en el denominador se coloca el producto de los números medios. De esta manera se tiene:

$$\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{11}} = \frac{2 \times 11}{7 \times 3}$$

3.8 Práctica: división de fracciones

3.8.1 Betún, el perro de Zule, consume $\frac{1}{2}$ kilogramo diario de alimento. Si el saco de alimento contiene 8 kilogramos, ¿por cuántos días le alcanza el alimento?

3.8.2 Diego es un famoso pastelero. Para preparar un brownie tarda $\frac{3}{4}$ de hora. ¿Tiene suficiente tiempo para preparar seis brownies en cuatro horas?

3.8.3 Tatiana tiene tres cuartos de tanque de gasolina llenos. Ella sabe que para desplazarse a su trabajo en carro, gasta un octavo de tanque ¿cuántos viajes puede hacer Tatiana antes que su carro se quede sin gasolina?

3.8.4 Don Enrique es dueño de un vivero que se dedica a la venta de distintas plantas ornamentales. Tiene sembradas las plantas en cajones de madera con tierra. Todos los cajones tienen las mismas dimensiones. Por lo general, es necesario abonar las plantas con un producto líquido. Don Enrique, deposita el abono en una botella de un litro, y con el tiempo se ha dado cuenta que cada cajón requiere dos tercios de litro para ser completamente abonado.

Si Don Enrique compró un envase de abono que contiene 12 litros del producto, ¿cuántos cajones de plantas podrá abonar?

3.8.5 Realice las siguientes operaciones:

a) $\frac{7}{4} \div 14$

b) $\frac{4}{6} \div \frac{3}{4}$

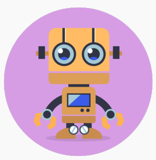
c) $9 \div \dfrac{3}{4}$

d) $\dfrac{12}{5} \div \dfrac{3}{10}$

e) $\dfrac{1}{7} \div \dfrac{3}{14}$

f) $\dfrac{2}{5} \div \dfrac{4}{3}$

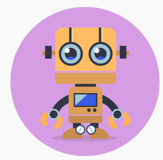
Aplicaciones tecnológicas



En el siguiente enlace, podrá repasar y prácticar el tema de división de fracciones.

Aplicación interactiva

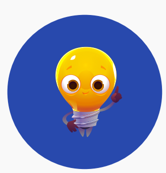
Aplicaciones tecnológicas



Autoevaluación:
Accese al siguiente enlace para evaluar su conocimiento sobre división y multiplicación de fracciones:
Aplicación interactiva

3.9 Operaciones con fracciones homogéneas

Activación de conocimientos



En este capítulo se estudiará el tema de operaciones con fracciones homogéneas. Si quiere repasar este concepto, presione en la imagen.

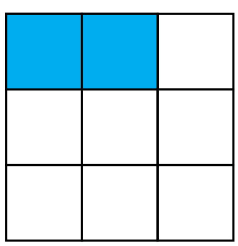
3.9.1 Suma de fracciones homogéneas

Teorema

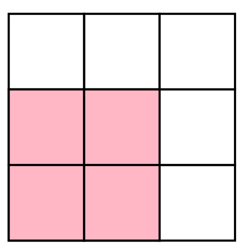
Jorge tiene una finca donde $\frac{2}{9}$ de su extensión está sembrada con árboles de manzanas y $\frac{4}{9}$ está sembrada con árboles de naranja. ¿Cuánta porción de la finca está sembrada con árboles frutales?

Solución: Primero se debe representar gráficamente cada una de las fracciones dadas.

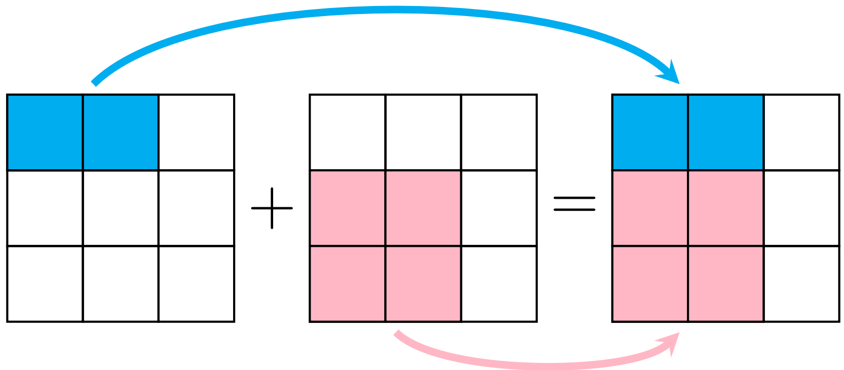
$\frac{2}{9}$



$\frac{4}{9}$



Note que el ejercicio está solicitando conocer la cantidad total de la finca que está sembrada con árboles frutales, por lo que se deben sumar ambas fracciones. Gráficamente se deben unir (sumar) en una sólo fracción la cantidad de "cuadritos" que representan los numeradores de cada fracción:



Numéricamente, se tiene:

$$\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{2+4}{9}=\frac{6}{9}$$

Por lo tanto, Jorge tiene $\frac{6}{9}$ del terreno sembrado con árboles frutales.

Video 3.4

En este video se mostrará la solución de la situación anterior y una explicación de la suma de fracciones homogéneas.

Definición 3.3 Suma de fracciones homogéneas

Para la suma de fracciones homogéneas, se debe sumar los numeradores de cada fracción y se mantiene el mismo denominador común.

Formalmente, se tiene la siguiente definición:

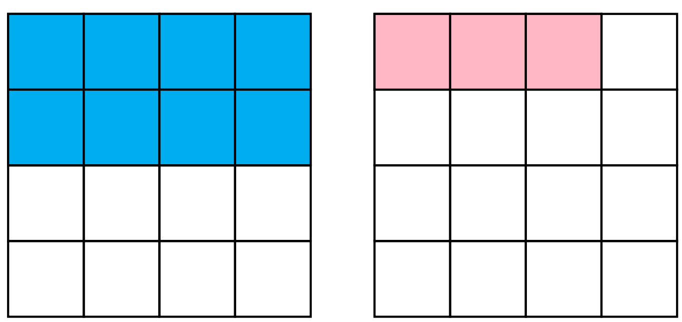
3.9.2 Resta de fracciones homogéneas

Teorema

Catalina dedica $\frac{8}{16}$ de su finca para el cultivo de papa, si ya es época de cosecha y ha recolectado $\frac{3}{16}$ del área cultivada ¿Qué fracción del área cultivada le falta por cosechar?

Solución: Primero se debe representar gráficamente cada una de las fracciones dadas.

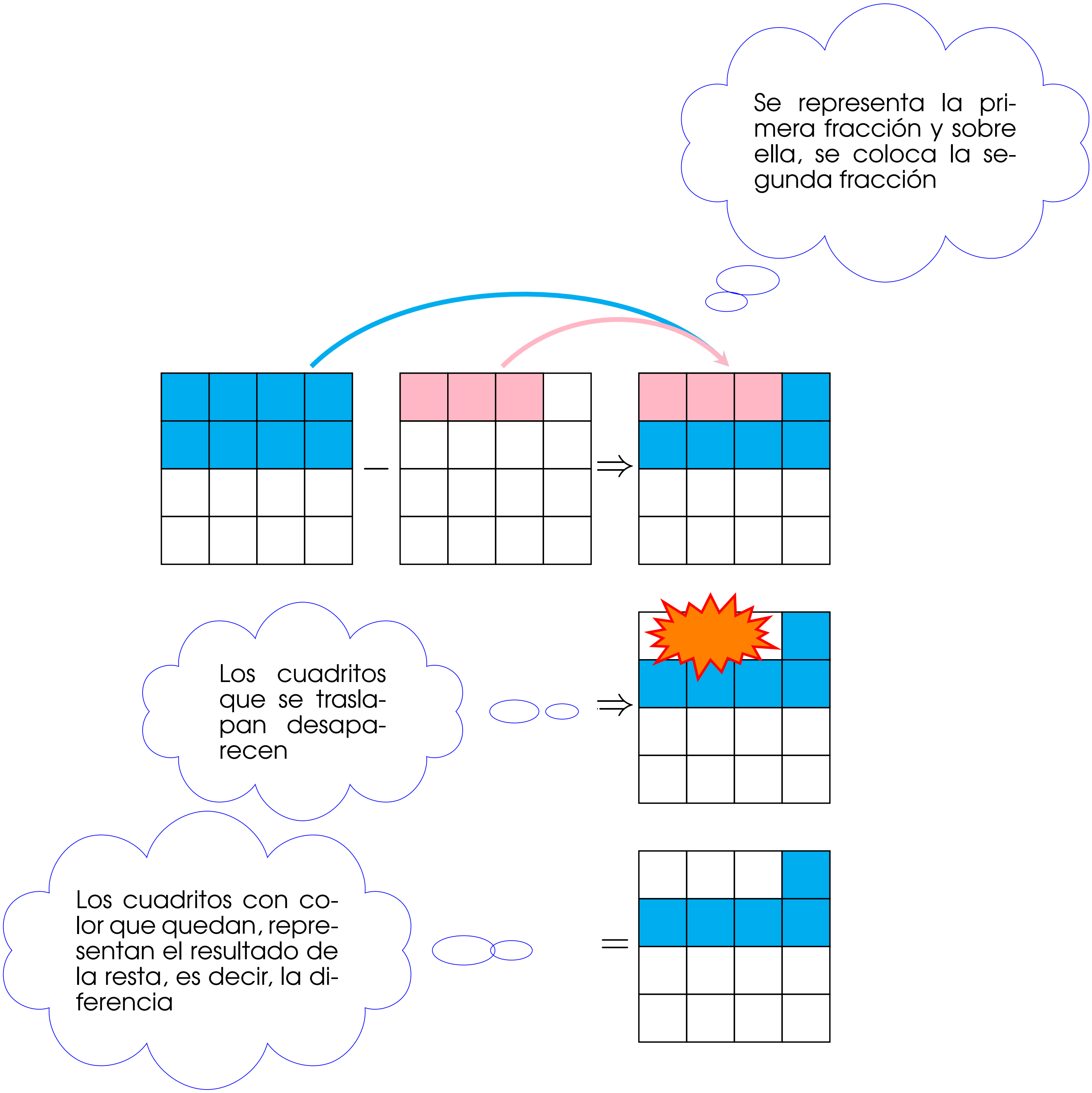
$\frac{8}{16}$ $\qquad$ $\frac{3}{16}$



Note que el ejercicio está solicitando conocer la cantidad total que falta por cosechar, por lo que se deben restar ambas fracciones.

Gráficamente se debe, en un mismo dibujo:

- Representar la primera fracción.
- Representar la segunda fracción, de manera que los "cuadritos" que representan el segundo numerador coincidan con los "cuadritos" que representan la primera fracción.
- Los "cuadritos" que se traslapan (que coinciden uno sobre otro), se eliminan.
- Los "cuadritos" que quedan con color representan la respuesta.


Se representa la primera fracción y sobre ella, se coloca la segunda fracción
Los cuadritos que se traslapan desaparecen
Los cuadritos con color que quedan, representan el resultado de la resta, es decir, la diferencia

Numéricamente, se tiene:

$$\frac{8}{16}-\frac{3}{16}=\frac{8-3}{16}=\frac{5}{16}$$

Por lo tanto, a Catalina le falta por cosechar $\frac{5}{16}$ del área cultivada de su finca.

Video 3.5

En este video se mostrará la solución de la situación anterior y una explicación de la resta de fracciones homogéneas.

Formalmente, se tiene la siguiente definición:

Definición 3.4 Resta de fracciones homogéneas

Para la resta de fracciones homogéneas, se debe restar los numeradores de cada fracción y se mantiene el mismo denominador común.

3.10 Práctica: operaciones con fracciones homogéneas

3.10.1 Manuel es un agricultor que cuentan con una gran finca. De ella siembra $\frac{2}{5}$ con papa y $\frac{1}{5}$ con camote. ¿Que fracción de la finca fue sembrada?

3.10.2 Josefina compró $\frac{3}{4}$ de un queque en una panadería. Si se comió $\frac{1}{4}$, ¿cuánta porción del queque le quedó?

3.10.3 Ana María y Enrique han recibido como herencia de su abuelo parte de un lote rectangular. Ana María ha heredado tres sextos del total y Enrique un sexto. Si ambos deciden unir sus partes del terreno, Represente gráficamente la porción del lote heredada y diga a cuánto equivale.

3.10.4 Realice las siguientes operaciones:

a) $\frac{7}{4} + \frac{2}{4}$

b) $\frac{3}{13} - \frac{3}{13}$

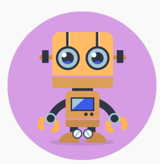
c) $\frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{3}{7}$

d) $\frac{12}{5} + \frac{3}{5}$

e) $\frac{10}{7} - \frac{3}{7}$

f) $\frac{2}{5} + \frac{4}{5}$

Aplicaciones tecnológicas



Autoevaluación:
Accese al siguiente enlace para evaluar su conocimiento sobre suma y resta de fracciones homogéneas:
Aplicación interactiva

3.11 Operaciones con fracciones heterogéneas

Activación de conocimientos

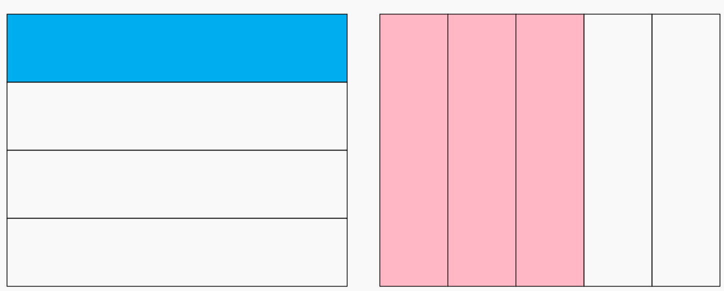
En este capítulo se estudiará el tema de operaciones con fracciones heterogéneas. Si quiere repasar este concepto, presione en la imagen.

3.11.1 Homogenización de fracciones

Teorema

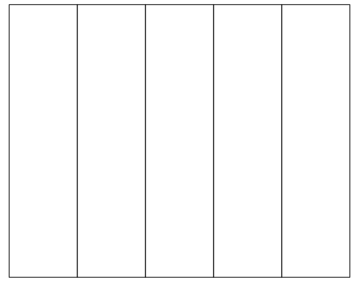
Considere las siguientes fracciones:

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{3}{5}$$

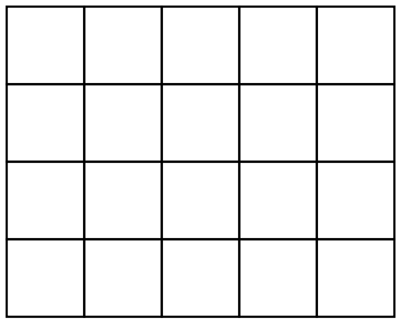


Ambas fracciones son heterogéneas, pero... ¿será posible expresar ambas fracciones de forma que se conviertan en homogéneas?

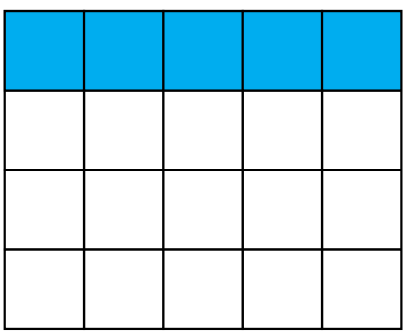
Solución: Primero se debe encontrar un denominador que represente un múltiplo de ambas fracciones (un múltiplo común). Para realizarlo gráficamente, conviene representar los denominadores de cada fracción: uno de ellos con franjas horizontales y el otro con franjas verticales.



Ahora, se traslapan las imágenes hasta obtener una unidad dividida en 25 partes.



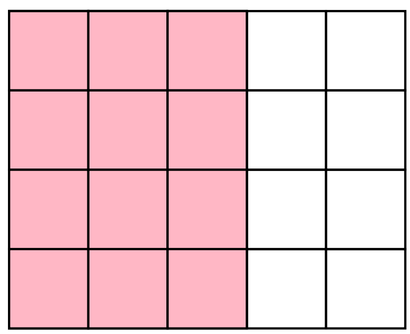
En este caso, 25 representa el menor de los múltiplos en común para los denominadores. Finalmente, se volverá a representar las fracciones originales, pero amplificándolas, de forma que su nuevo denominador corresponda al denominador común.



$$\frac{1}{4}$$

Es equivalente con

$$\frac{5}{20}$$



$$\frac{3}{5}$$

Es equivalente con

$$\frac{12}{20}$$

Note que el procedimiento para obtener estas fracciones es la amplificación.

$$\frac{1}{4} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{20} \qquad \frac{3}{5} \times \frac{4}{4} = \frac{12}{20}$$

Así, las fracciones son equivalentes a las originales, pero además son homogéneas entre sí. De manera formal se tiene:

Definición 3.5 Homogenización

Es el proceso que permite transformar fracciones heterogéneas en fracciones homogéneas, mediante la amplificación de fracciones.

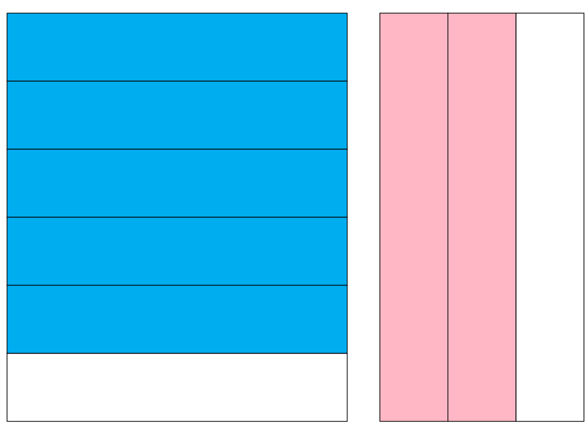
Ejemplo 3.9

Homogenice las siguientes fracciones heterogéneas:

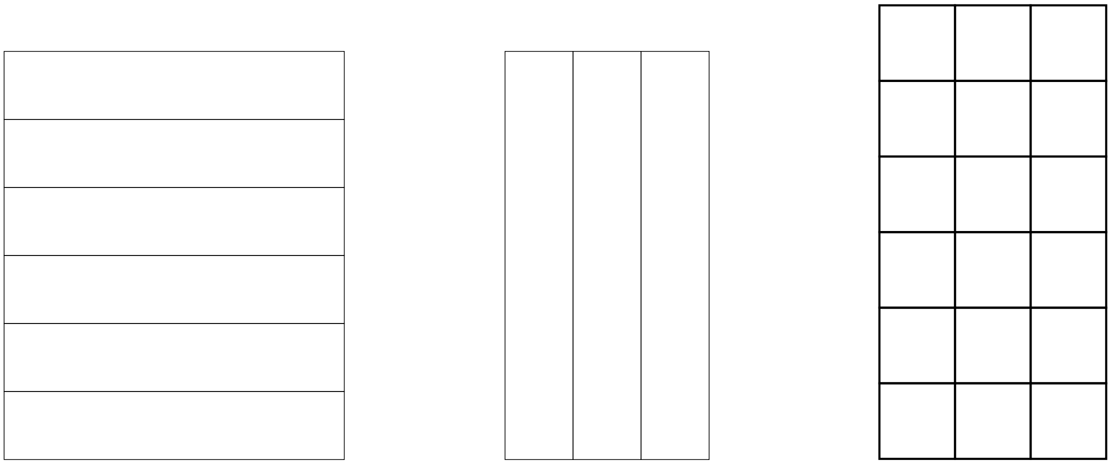
$$\frac{5}{6} \text{ y } \frac{2}{3}$$

Solución: Primero se debe representar gráficamente cada una de las fracciones:

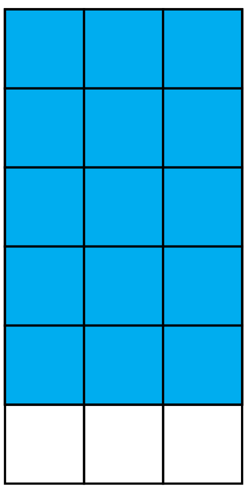
$\frac{5}{6}$ $\frac{2}{3}$



Se debe encontrar un denominador que represente un múltiplo de ambas fracciones (un múltiplo común). Para realizarlo gráficamente, se representan los denominadores de cada fracción: uno de ellos con franjas horizontales y el otro con franjas verticales. Luego se traslapan las imágenes hasta obtener una unidad dividida en 18 partes.



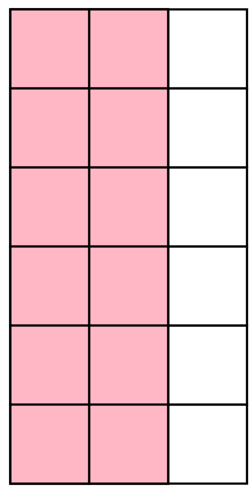
En este caso, 18 representa el menor de los múltiplos en común para los denominadores. Finalmente, se volverá a representar las fracciones originales, pero amplificándolas, de forma que su nuevo denominador corresponda al denominador común.



$\frac{5}{6}$

Es equivalente con

$\frac{15}{18}$



$\frac{2}{3}$

Es equivalente con

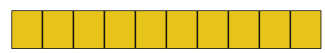
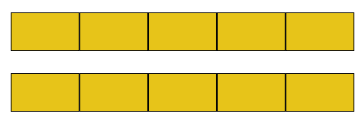
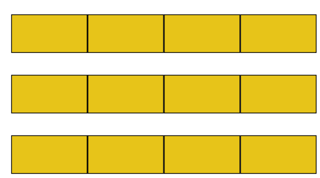
$\frac{12}{18}$

Así, se realizó la siguiente amplificación de fracciones.

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{3} = \frac{15}{18} \qquad \frac{2}{3} \times \frac{6}{6} = \frac{12}{18}$$

Así, las fracciones son equivalentes a las originales, pero además son homogéneas entre sí.

Una situación interesante es cómo transformar números enteros en fracciones amplificadas según el denominador que se necesita, por ejemplo:

Número entero	**Denominador que se espera**	**Amplificación**	**Fracción equivalente**
1 	5	$1 = \frac{1}{1} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{5}$	$\frac{5}{5}$ 
1 	10	$1 = \frac{1}{1} \times \frac{10}{10} = \frac{10}{10}$	$\frac{10}{10}$ 
2 	5	$2 = \frac{2}{1} \times \frac{5}{5} = \frac{10}{5}$	$\frac{10}{5}$ 
3 	4	$3 = \frac{3}{1} \times \frac{4}{4} = \frac{12}{4}$	$\frac{12}{4}$ 

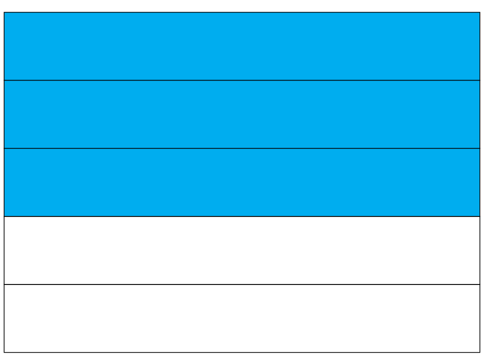
3.11.2 Suma de fracciones heterogéneas

Teorema

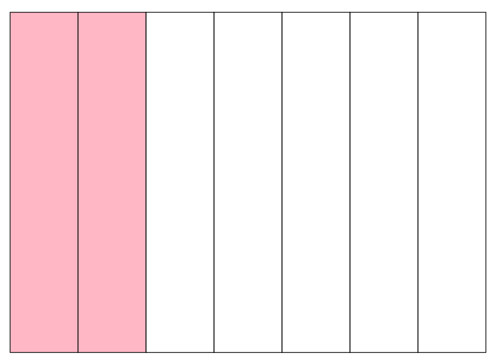
Patricia es una repostera y para hacer un queque de frutas ha usado $\frac{3}{5}$ kg de fresa y $\frac{2}{7}$ kg de moras. ¿Cuánta cantidad de frutas ha usado para su pastel?

Solución: Primero se debe representar gráficamente cada una de las fracciones dadas.

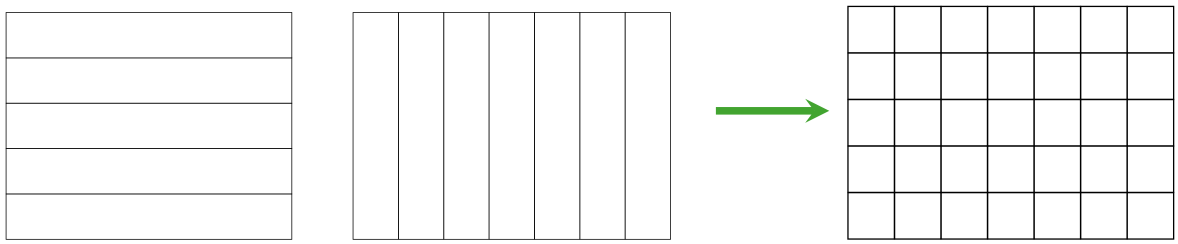
$\frac{3}{5}$



$\frac{2}{7}$

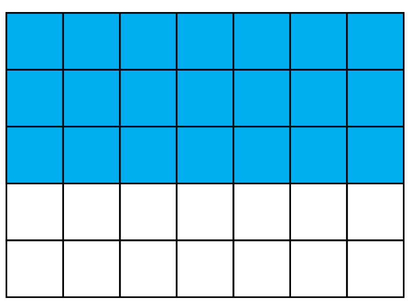


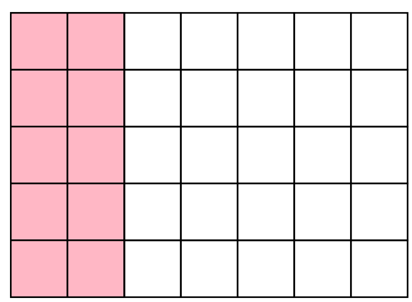
Note que el ejercicio está solicitando conocer la cantidad total de frutas utilizadas para el queque, por lo que se deben sumar ambas fracciones. Dado que las fracciones son heterogéneas (tienen diferente denominador) se deben homogenizar. Gráficamente se procede tal como se hizo en la sección de homogenización.



De esta forma, la nueva fracción estará dividida en 35 partes. Así que se tomará el 35 como el menor de los múltiplos en común para los denominadores.
Ahora, se debe analizar cada una de las fracciones:

$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{7}$
Es equivalente con	Es equivalente con
$\frac{21}{35}$	$\frac{10}{35}$

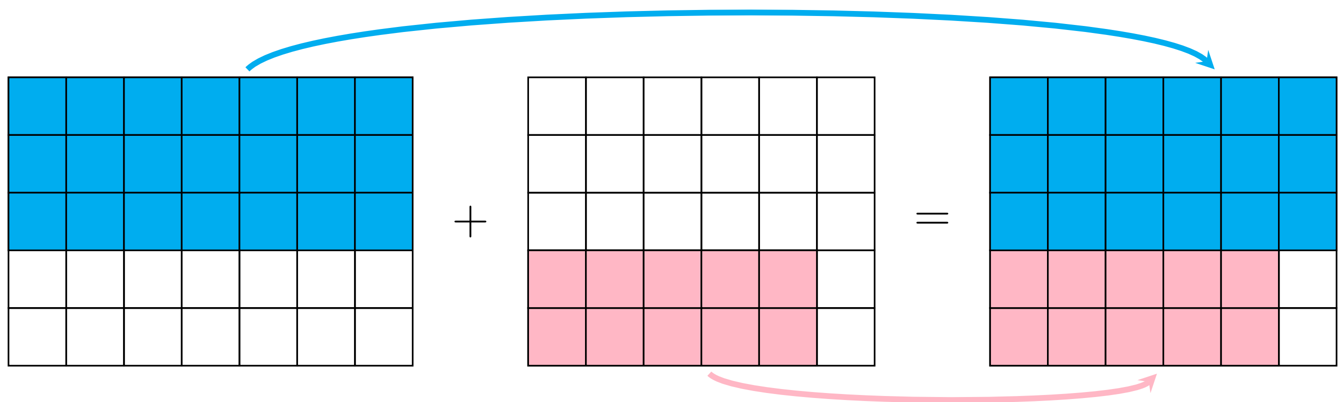




Ahora, como las fracciones son equivalentes a las originales y además son homogéneas, se pueden sumar como fracciones homogéneas. Así, se tiene:

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{21}{35}+\frac{10}{35}=\frac{21+10}{35}=\frac{31}{35}$$

Si se desea realizar gráficamente, se deben re-acomodar algunas partes de una de las fracciones, de modo que a la hora de sumarlas, los cuadros no se intercepten entre sí. A continuación, se muestra una forma de realizarlo:



Por lo tanto, Patricia ha usado $\frac{31}{35}$ kg de frutas.

Formalmente, se tiene la siguiente definición:

Definición 3.6 Suma de fracciones heterogéneas

Para la suma de fracciones heterogéneas, primero se debe homogenizar los denominadores. En este caso, se aconseja buscar siempre el menor múltiplo común entre ambos números (denominadores), para trabajar con las fracciones equivalentes más simples. Luego, se debe sumar los numeradores de cada fracción y se mantiene el denominador común.

Cuando la suma de fracciones involucra un número entero, se puede utilizar la estrategia de sustituirlo por una fracción equivalente y homogénea con el otro sumando. Analice los siguientes casos:

Operación	Denominador que se necesita	Conversión del número entero	Operación y resultado
$1+\frac{3}{4}$	4	$1=\frac{1}{1}\times\frac{4}{4}=\frac{4}{4}$	$\frac{4}{4}+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$
$\frac{7}{3}+1$	3	$1=\frac{1}{1}\times\frac{3}{3}=\frac{3}{3}$	$\frac{7}{3}+\frac{3}{3}=\frac{10}{3}$
$2+\frac{8}{5}$	5	$2=\frac{2}{1}\times\frac{5}{5}=\frac{10}{5}$	$\frac{10}{5}+\frac{8}{5}=\frac{18}{5}$
$\frac{1}{7}+3$	7	$3=\frac{3}{1}\times\frac{7}{7}=\frac{21}{7}$	$\frac{1}{7}+\frac{21}{7}=\frac{22}{7}$

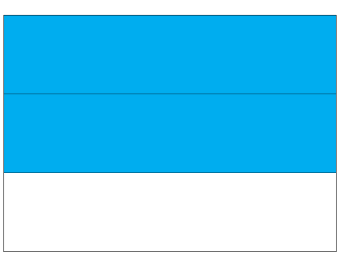
3.11.3 Resta de fracciones heterogéneas

Teorema

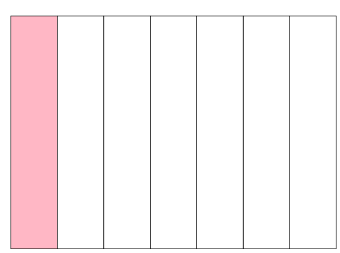
A Carlos le encanta la cocina. Para hacer su postre favorito debe agregar $\frac{2}{3}$ kg de harina. Él debe agregar la harina poco a poco en la mezcla, si ya ha agregado $\frac{1}{7}$ kg de harina ¿Cuántos kilogramos de harina le faltan por agregar?

Solución: Primero se debe representar gráficamente cada una de las fracciones dadas.

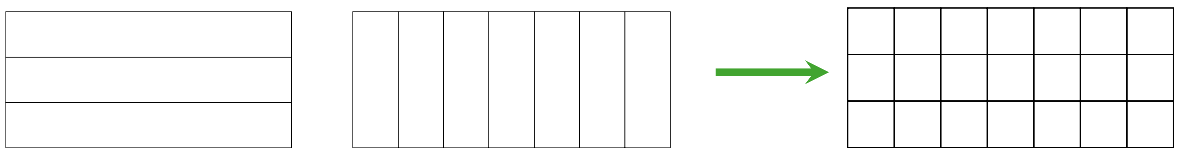
$\frac{2}{3}$



$\frac{1}{7}$



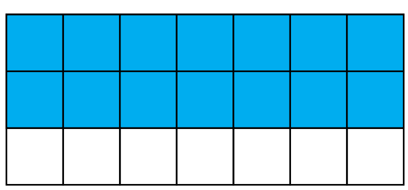
Note que el ejercicio está solicitando conocer la cantidad de kilogramos de harina que hace falta de agregar al postre, por lo que se deben restar ambas fracciones. Dado que las fracciones son heterogéneas (tienen diferente denominador) se deben homogenizar. Gráficamente se procede tal como se hizo en la sección de homogenización.

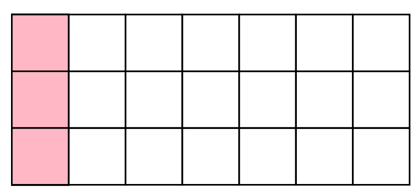


De esta forma, la nueva fracción estará dividida en 21 partes. Así que se tomará el 21 como el menor de los múltiplos en común para los denominadores.

Ahora, se debe analizar cada una de las fracciones:

$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{7}$
Es equivalente con	Es equivalente con
$\frac{14}{21}$	$\frac{3}{21}$

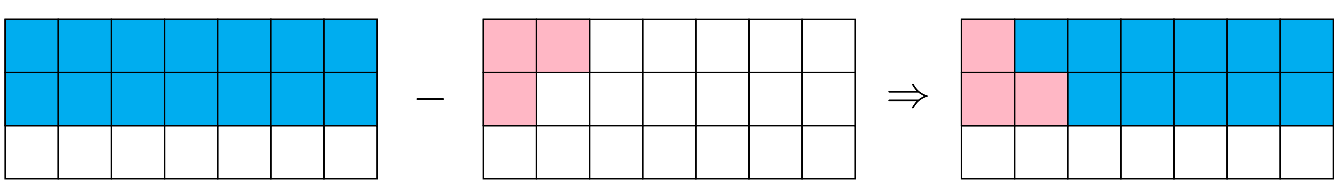




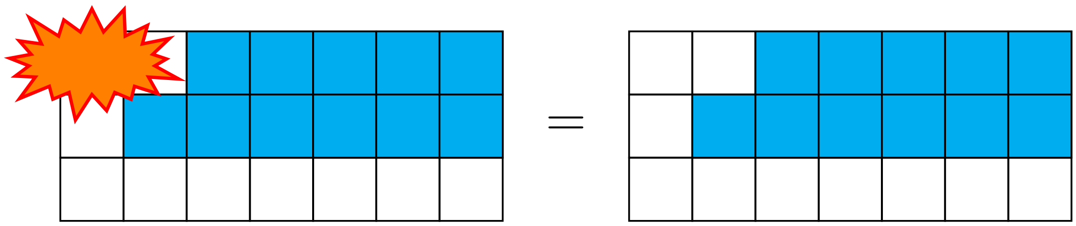
Ahora, como las fracciones son equivalentes a las originales y además son homogéneas, se pueden restar como fracciones homogéneas. Así, se tiene:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{7} = \frac{14}{21} - \frac{3}{21} = \frac{14-3}{21} = \frac{11}{21}$$

Si se desea realizar gráficamente, se deben re-acomodar algunas partes de una de las fracciones, de modo que a la hora de restarlas, los cuadros se intercepten entre sí:



Luego se deben sustraer los cuadros que se intersecan:



Por lo tanto, a Carlos le faltan agregar $\frac{11}{21}$ kg de harina.

Video 3.6

En este video se mostrará la solución de la situación anterior y una explicación de la resta de fracciones heterogéneas.

Formalmente, se tiene la siguiente definición:

Definición 3.7 Resta de fracciones heterogéneas

Para la resta de fracciones heterogéneas, primero se debe homogenizar los denominadores. En este caso, se aconseja buscar siempre el menor múltiplo común entre ambos números (denominadores), para trabajar con las fracciones equivalentes más simples. Luego, se debe restar los numeradores de cada fracción y se mantiene el denominador común.

Cuando la resta de fracciones involucra un número entero, se puede utilizar la estrategia de sustituirlo por una fracción equivalente y homogénea con el otro sumando. Analice los siguientes casos:

Operación	Denominador que se necesita	Conversión del número entero	Operación y resultado
$1 - \frac{1}{4}$	4	$1 = \frac{1}{1} \times \frac{4}{4} = \frac{4}{4}$	$\frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
$\frac{7}{3} - 1$	3	$1 = \frac{1}{1} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{3}$	$\frac{7}{3} - \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$
$2 - \frac{1}{6}$	6	$2 = \frac{2}{1} \times \frac{6}{6} = \frac{12}{6}$	$\frac{12}{6} + \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$
$\frac{31}{9} - 3$	9	$3 = \frac{3}{1} \times \frac{9}{9} = \frac{27}{9}$	$\frac{31}{9} + \frac{27}{9} = \frac{4}{9}$

3.12 Práctica: operaciones con fracciones heterogéneas

3.12.1 La Ley 7 600 (Igualdad de oportunidades para personas con discapacidad) de Costa Rica, indica en su artículo 154 que todo establecimiento público y privado que disponga de estacionamientos para la atención de personas deberá contar con $\frac{1}{20}$ del total de espacios disponibles, destinados a vehículos que transporten personas con discapacidad. Si en un lugar se tiene pensado construir 120 estacionamientos, ¿cuántos de estos espacios deberán destinarse a personas con discapacidad en concordancia con la Ley 7 600?

Sabías que...

El 29 de mayo de 1996 entró en vigor la denominada Ley 7 600: Igualdad de oportunidades para las personas con discapacidad. Consta de 185 artículos que buscan brindar igualdad de condiciones, de calidad, oportunidad, derechos y deberes a la población discapacitada de Costa Rica. Esta ley puede ser consultada en el sitio web **https://www.mtss.go.cr/seguridad-social/discapacidad/Ley_7600.pdf**.

3.12.2 Flor tiene una tienda de artículos de fiesta. Entre los artículos que vende se encuentran dos tipos de bolsitas de dulces: una azul que contiene dos tercios de kilo de confites y otra roja que contiene seis sétimos de kilo de confites. Si Fernando va a la tienda y compra una bolsa azul y otra roja, ¿cuántos kilos de confites compró en total?.

3.12.3 Ariana es una artista plástica que constantemente realiza diversas obras de arte. Ella usualmente compra la pintura en polvo que debe diluir en un químico especial llamado Thinner. En su casa tiene un recipiente que equivale a un litro y se encuentra dividido en seis partes iguales. En ese recipiente echa lo que tiene del químico Thinner como se muestra en la figura:

Según las instrucciones, para preparar el color verde, necesita un sexto de litro de Thinner y para preparar el color violeta requiere un tercio de litro del químico. Ariana desea saber cuánto del Thinner que tiene le sobrará para preparar otros colores.

3.12.4 Daniela se encuentra preparando algunos platillos de cocina para su restaurante. La receta A requiere de $\frac{3}{4}$ de taza de caldo de pollo y la receta B necesita $\frac{1}{2}$ de taza del mismo caldo de pollo. En total para las dos recetas, ¿cuántas tazas de caldo de pollo fueron requeridas?

3.12.5 Realice las siguientes operaciones:

a) $\frac{7}{3}+\frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{2}-\frac{2}{5}$

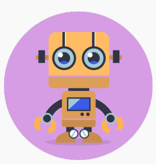
c) $\frac{2}{7}+\frac{11}{3}$

d) $\frac{22}{3}+\frac{4}{5}$

e) $10-\frac{3}{7}$

f) $\frac{2}{8}+6$

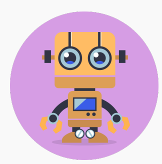
Aplicaciones tecnológicas



En el siguiente enlace encontrará una actividad para repasar el tema de la suma de fracciones heterogéneas.

Aplicación interactiva

Aplicaciones tecnológicas



En el siguiente enlace encontrará una actividad para repasar el tema de la resta de fracciones heterogéneas.

Aplicación interactiva

Capítulo 4

Operaciones

4.1 Operaciones combinadas

Activación de conocimientos

Para repasar las operaciones de números enteros y con expansión decimal, puedes dar clic en alguna de las siguientes opciones:

- Términos de las operaciones
- División
- Suma de números con expansión decimal
- Resta de números con expansión decimal
- Multiplicación de números con expansión decimal
- División de números con expansión decimal

Teorema

La tía de Karen fue a pasear a Europa y cuando volvió, le regaló a su sobrina ocho dólares estadounidenses y cinco Euros con una condición. Para entregárselos, la tía le dijo que se los entregaba si ella era capaz de hacer la conversión a colones con el siguiente tipo de cambio:

- \$1 = ₡595,4.
- 1€= ₡702,57.

¿Cuánto dinero obtendrá Karen, si logra hacer la conversión de forma correcta?

Solución: Para resolver el problema, primero se necesita saber cómo obtener el total de colones, si se sabe el tipo de cambio. Esto lo podemos realizar aplicando la siguiente fórmula:

Total de colones = Cantidad de dinero $\times$ Tipo de cambio

Entonces, para saber la cantidad de colones a la que equivalen 8 dólares, debemos resolver la operación:

$$8 \times 595,4$$

Así tenemos:

$$\begin{array}{rrrrrr} & 5 & 9 & 5 & , & 4 \\ \times & & & 8 & & \\ \hline 4 & 7 & 6 & 3 & , & 2 \end{array}$$

Para saber la cantidad de colones a la que equivalen 5 euros, debemos resolver la operación:

$$5 \times 702,57$$

Así tenemos:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 7 & 0 & 2 & , & 5 & 7 \\ \times & & & 5 & & & \\ \hline 3 & 5 & 1 & 2 & , & 8 & 5 \end{array}$$

Ahora, basta sumar los dos resultados (recuede que los números se alinean según la coma)

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & 4 & 7 & 6 & 3 & , & 2 & \\ + & 3 & 5 & 1 & 2 & , & 8 & 5 \\ \hline & 8 & 2 & 7 & 6 & , & 0 & 5 \end{array}$$

Entonces, si Karen logra realizar el cálculo de forma correcta obtendrá un total de 8 276,05 colones.

Esta operación se resolvió por partes, sin embargo, pudo escribirse como una operación combinada, pues implica resolver más de un tipo de operación, en este caso, multiplicación y suma, así:

$$8 \times 595,4 + 5 \times 702,57 = 8276,05$$

Video 4.1

En este video se mostrará la solución de la situación anterior y una explicación sobre como realizar operaciones combinadas.

Teorema

En una tienda, hay un pantalón en 18000 colones. El cajero indica que el día de hoy, hacen un descuento de 5 colones por cada 100 de compra.

a) Determine la cantidad de dinero que se descuenta, si se compra el pantalón.

b) Escriba el total de dinero que se paga por el pantalón, luego de aplicarse el descuento.

Solución:

a) Primero, es necesario entender la situación: Dice que por cada 100 colones se descuentan (se rebajan) cinco colones.

Entonces, si el precio fuera de 100 colones, se rebajan 5 colones y se pagaría 95 colones. Analicemos otras situaciones:

- **200 colones**

Precio	**200 colones**	
¿Cuántas veces se debe rebajar 5 colones?	100	100
	5	5
Descuento por cada 100	2 veces por 5 $5 + 5 = 2 \times 5 = 10$	
Precio de descuento	$200 - 10 = 190$	

Por lo tanto, en este caso el descuento sería de 10 colones y el precio a pagar 190 colones.

- **300 colones**

Precio	**300 colones**		
¿Cuántas veces se debe rebajar 5 colones?	100	100	100
	5	5	5
Descuento por cada 100	2 veces por 5 $5 + 5 + 5 = 3 \times 5 = 15$		
Precio de descuento	$300 - 15 = 285$		

Por lo tanto, el descuento sería de 15 colones y el precio a pagar 185 colones.

- **1 000 colones**

Precio	**1000 colones**									
¿Cuántas veces se debe rebajar 5 colones?	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Descuento por cada 100	10 veces por 5 $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 10 \times 5 = 50$									
Precio de descuento	$1000 - 50 = 950$									

Por lo tanto, el descuento sería de 50 colones y el precio a pagar 950 colones.

Se puede usar este procedimiento hasta llegar a los 18 000 colones y es válido pero, es muy largo. En particular, cuando se tienen números mayores, lo mejor es plantear una estrategia.

Piense en los pasos realizados anteriormente:

1) El precio se dividió en grupos de 100 colones (esto equivale a cantidad de veces que se aplica el rebajo de 5 colones).
2) Se multiplica esa cantidad de grupos por los 5 colones, para saber el total que se rebaja.
3) Al precio original, se le descuenta (resta) dicho descuento.

Precio	**18 000 colones**
¿cuántas veces se debe rebajar 5 colones?	$18\,000 \div 100 = 180$ Recuerde que esta operación se puede resolver como división abreviada
Descuento por cada 100	180 veces 5 $180 \times 5 = 900$
Precio con descuento	$18\,000 - 900 = 17\,100$

Así, la cantidad de dinero que se rebaja es 900 colones.

b) El dinero total que se paga por el pantalón, después de aplicarse el descuento, corresponde a:

$$18\,000 - 5 \times (18\,000 \div 100) = 17100$$

Teorema

En un supermercado mi mamá compró: 3 piñas a 850 colones cada una, 4 bolsas de arroz a 1 100 colones cada una y 1 kilo de carne a 6 798,53 colones.

a) ¿Cuánto debió pagar mi mamá por la compra?

b) Si mi mamá pagó con tarjeta bancaria y en ella tenía 122 654,9 colones. ¿Cuánto le queda después de que le rebajan la compra que acaba de hacer?

Solución:

a) Para saber lo invertido en las piñas, se multiplica el total, en este caso 2, por el precio, en este caso 850 colones:

$$3 \times 850 = 2\,550$$

Lo que invirtió en arroz, se calcula multiplicando la cantidad de bolsas, por el precio unitario:

$$4 \times 1\,100 = 4\,400$$

Ahora bien, para determinar lo que pagó, se suma el total invertido en las piñas, con el precio total del arroz y la carne:

$$\begin{array}{r} 2\,550{,}00 \\ 4\,400{,}00 \\ +\quad 6\,798{,}53 \\ \hline 13\,748{,}53 \end{array}$$

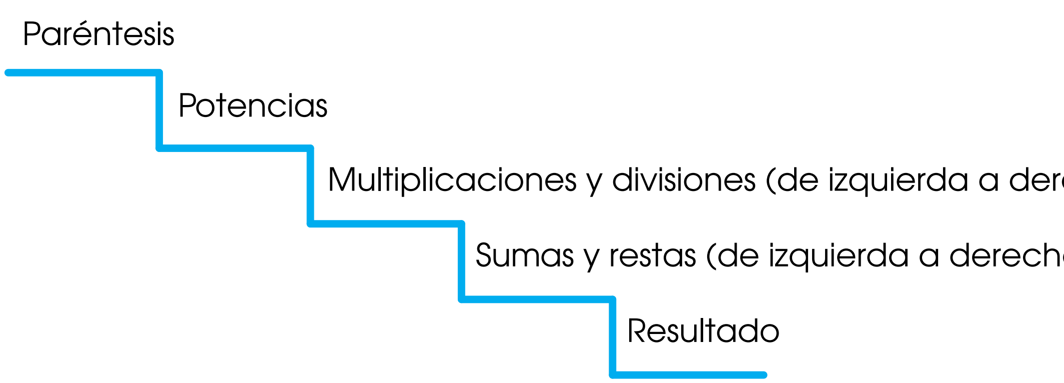
b) Por otro lado, si mi mamá tenía 122 654,9 colones en su tarjeta. La cantidad que le queda al pagar por la compra se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r} 122\,654{,}90 \\ -\quad 13\,748{,}53 \\ \hline 108\,906{,}37 \end{array}$$

Por tanto, en la cuenta le queda un total de 108 906,37 colones.

4.2 Prioridad en las operaciones combinadas

Si se desea resolver correctamente una operación combinada, se debe establecer la prioridad de las operaciones (es decir, cuál se resuelve primero y cuál después). Para efectos de este libro, el orden se presenta como unas gradas, porque al igual que en la vida real, cada escalón se debe bajar uno a uno para evitar tropezar y caer.



Si hay operaciones que incluyen fracciones, enteros y decimales, se sugiere trabajar todos los términos, solo como fracciones o solo como decimales.

Ejemplo 4.1

Resuelva las siguientes operaciones:

a) $32 + 6 \div 2 - 7$

b) $54 - (45 \div 9) + (11 \times 3)$

c) $4 \times 22 \div 11 + (24 \times 9) - 8$

d) $100,48 \div 12,56 - 13,2 \times 0,23$

e) $100\,(260,7 - 4 \times 20,36)$

Solución:

a) $32 + 6 \div 2 - 7$

Operación	Observaciones
$32 + 6 \div 2 - 7 =$ $32 + 3 - 7 =$ $35 - 7 =$ 28	Según la prioridad, primero se resuelve la división. Luego, sólo quedan sumas y restas, así que se resuelven de izquierda a derecha.

b) $54 - (45 \div 9) + (11 \times 3)$

Operación	Observaciones
$54 - (45 \div 9) + (11 \times 3) =$ $54 - 5 + 33 =$ $49 + 33 =$ 82	Según la prioridad, primero se resuelven las operaciones dentro de los paréntesis. Como los paréntesis están separados por una suma, se pueden hacer al mismo tiempo. Cuando se resuelve una operación que está en paréntesis y el resultado es un solamente un término (valor) no es necesario escribir los paréntesis nuevamente. Una vez resueltos los paréntesis, solo quedan sumas y restas, así que se resuelven de izquierda a derecha.

c) $4 \times 22 \div 11 + (24 \times 9) - 8$

Operación	Observaciones
$4 \times 22 \div 11 + (24 \times 9) - 8 =$ $4 \times 22 \div 11 + 216 - 8 =$ $88 \div 11 + 216 - 8 =$ $8 + 216 - 8 =$ $224 - 8 =$ 216	Según la prioridad, primero se resuelven las operaciones dentro de los paréntesis. El resto se copia exactamente igual (no es necesario volver a escribir los paréntesis). Se baja a la prioridad de las multiplicaciones y divisiones. Se resuelven en orden de aparición, de izquierda a derecha. Una vez concluido este proceso, se trabaja con las sumas y restas. Y se resuelven de izquierda a derecha.

d) $100,48 \div 12,56 - 13,2 \times 0,23$

Operación	Observaciones
$100,4812,56 - 13,2 \times 0,23 =$ $8 - 3,036 =$ $4,964$	Según la prioridad de las operaciones, primero se resuelve la división y la multiplicación. Luego, se realiza la resta.

e) $100\,(260,7 - 4 \times 20,36)$

Operación	Observaciones
$100\,(260,7 - 4 \times 20,36) =$ $100\,(260,7 - 81,44) =$ $100\,(179,26) =$ $100 \times 179,26 =$ $17\,926$	Realizamos primero la operación dentro del paréntesis. Según la prioridad, primero se resuelve la multiplicación. Luego, se realiza la resta. Ahora, como no aparece operación entre el número 100 y el paréntesis, se asume siempre que hay una multiplicación.

Video 4.2

En este video se mostrarán un par de ejemplos sobre como realizar operaciones combinadas.

4.3 Práctica: operaciones combinadas

4.3.1 Sofía quiere comprar la última consola de videojuegos, la cual tiene un costo de 615 000 colones. Si ella ya tiene ahorrado 235 000 colones y además, puede ahorrar por mes 76 000 colones. ¿Dentro de cuántos meses tendrá el dinero para comprar la consola?

4.3.2 En una competencia de natación de una escuela se ha indicado que si un estudiante hace el recorrido indicado en 240 segundos gana 2 000 puntos. Si hace menos tiempo que esos 240 segundos, ganará 2,5 puntos por cada segundo que logre reducir del tiempo estipulado, sin embargo, si hace más tiempo, perderá 1,5 puntos por cada segundo de más. Obtenga la puntuación de los siguientes estudiantes en concordancia con los tiempos realizados al competir:

a) Estudiante A: 320 segundos

b) Estudiante B: 227 segundos

4.3.3 El papá y la mamá de Esmeralda van a la feria y compran 1 piña, 2 sandías, 20 limones y 5 pipas. Los precios a pagar por cada producto son ₡950, ₡1 100, ₡20 y ₡300 colones respectivamente. Entonces:

a) Determine la cantidad de dinero que pagaron los papás de Esmeralda.

b) Si los papás de Esmeralda llevaban 6 000 colones, ¿cuánto dinero le sobró?

Sabías que...

Las ferias del agricultor son un mercado minorista donde pequeños y medianos productores llegan a vender sus productos. En Costa Rica el Consejo Nacional de Producción (CNP) es el ente encargado de fortalecer el sistema agroalimentario y la seguridad alimentaria nacional. Pueden encontrar más información en el sitio web **https://www.cnp.go.cr/servicios/FeriasdelAgricultor**.

Figura 4.1: Nota. Farmers Market. Zapote. San José. (Fotografía) por Guillermo A. Durán, 2021. Flickr. **https://www.flickr.com/photos/guillermoduran/50990321128/.** CC BY-NC-ND 2.0

4.3.4 Un terreno de 12 000 metros cuadrados se utiliza para sembrar maíz y cacao. ¿Cuántos metros cuadrados quedan sin sembrar si la tercera parte se siembra de maíz y la quinta parte de cacao?

4.3.5 Inés lee un libro de 960 páginas. El lunes lee la mitad del libro y el martes lee la cuarta parte. ¿Cuántas páginas ha leído Inés en esos dos días?

4.3.6 Realice las siguientes operaciones:

a) $100,76 \div 2 + 115,3 \times 12,2$

b) $224 + 300 \div 6 - 16 \times 2 + 23$

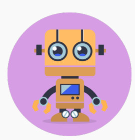
c) $11 + 3 \times 8 - 13$

d) $2 \times 350 + 400 \div 2$

e) $10,35 + 11,2 \times 3,12$

f) $13 \times (12 - 25 \div 5) + 115,2$

Aplicaciones tecnológicas



Autoevaluación:
En el siguiente enlace podrá evaluar su conocimiento sobre operaciones combinadas.
Aplicación interactiva

Capítulo 5

Soluciones a las prácticas

Soluciones del Capítulo 1: Teoría de números

Práctica: divisibilidad, factores y múltiplos

Soluciones del Capítulo 1

1.2.1 Se necesita dividir la cinta, esa palabra "dividir" permite relacionarlo con "divisor". Así, se debe recortar las cintas de modo que en ambas se pueda tener el mayor tamaño posible, entonces se debe determinar los divisores de 64 y 94:

Divisores de 64: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64

Divisores de 94: 1, 2, 47, 94

Se puede observar que el divisor común más grande entre 64 y 94 es 2, por tanto, para ambas cintas, se debe cortarlas en tamaños de 2 cm.

1.2.2

a) $3 : 3, 6, 9, 12, 15, 18$

b) $11 : 0, 11, 22, 33, 44, 55$

c) $7 : 7, 14, 21, 28, 35, 42$

d) $23 : 0, 23, 46, 69, 92, 115$

1.2.3

a) $7 \times 3 = 21$ entonces 21 es múltiplo de 3 y de 7

b) $4 \times 9 = 36$ entonces 36 es múltiplo de 4 y de 9

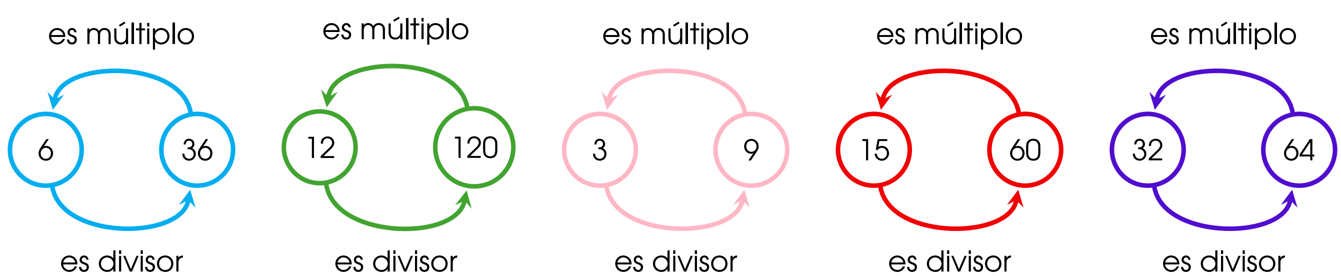
c) $2 \times 28 = 56$ entonces 2 es divisor de 56 (también 28 es divisor de 56)

d) $2 \times 12 = 24$ entonces 2 es divisor de 24 (también 12 es divisor de 24)

1.2.4

Número	Posibles Múltiploshola
8	24, 32, 56, 88
10	101, 220, 50, 44
12	24, 38, 48, 52

1.2.5 Existen muchas respuestas para este ejercicio, a continuación se muestra una posible:



1.2.6

a) 0 es divisor de cualquier número. **Falso**: 0 no es divisor de cualquier número, lo correcto es: 0 es múltiplo de todos los números, debe tener claros los conceptos de múltiplo y divisor de un número.

b) 1 es múltiplo de todos los números. **Falso**:1 no es múltiplo de todos los números, lo correcto es: 1 es divisor de todos los números, debe tener claros los conceptos de múltiplo y divisor de un número.

c) 3 es un divisor de 123. **Verdadero**: pues al aplicar la regla de divisibilidad por 3 se nota que $1+2+3=6$, y 6 es múltiplo de 3.

d) 70 es un múltiplo de 35. **Verdadero:** pues $35 \times 2 = 70$.

Práctica: números primos y compuestos

1.4.1

32=29+3

36=29+7

34=29+5

38=31+7

1.4.2

a) Todos los números primos son impares **F**

b) Todo número primo y compuesto es divisible por uno **V**

c) Entre 20 y 30 hay tres números primos **F**

d) 3 es el primer número primo **F**

1.4.3

37: **Primo**

21: **Compuesto**

40: **Compuesto**

99: **Compuesto**

13: **Primo**

74: **Compuesto**

15: **Compuesto**

31: **Primo**

Soluciones del Capítulo 2: Números naturales

Práctica: números naturales

Soluciones del Capítulo 2

2.3.1

a) El primer día, al cortarle una cabeza, la Hidra tenía 2 cabezas.
El segundo día, al cortarle todas las cabezas, le nacieron el doble: $2 \times 2 = 4$ cabezas.
El tercer día, volvieron a nacer el doble de cabezas: $2 \times 2 \times 2 = 8$ cabezas.
En resumen, para saber cuántas cabezas tenía tras estos 3 días, se ha multiplicado 2 tres veces y se obtuvo: 8 cabezas en total.

b) Para saber cuántas cabezas tendría la Hidra en 10 días, se debe hacer la siguiente operación:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1024$$

Así se tienen 1024 cabezas.

2.3.2

Los números son: 1 y 64.

2.3.3

Se puede notar que al inicio se encuentra una sola bacteria, al minuto siguiente se van a tener el triple de bacterias, osea:

$$1 \times 3 = 3^1 = 3$$

Al transcurrir dos minutos, las tres bacterias que habían se volverán a triplicar, así se tendrán:

$$3 \times 3 = 3^2 = 9$$

Al transcurrir dos minutos, las nueve bacterias que habían se volverán a triplicar, así se tendrán:

$$3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$$

Para saber cuántas bacterias se tendrán luego de ocho minutos, se debe multiplicar ocho veces el número tres, o sea:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^8 = 6\,561$$

Así, al transcurrir ocho minutos habrán 6 561 bacterias.

2.3.4

a) Como se tienen cinco cajas con cinco caramelos cada una, en total se tienen $5^2 = 25$ caramelos.

b) Note que se tienen cuatro bolsas donde cada una contiene cuatro cartucheras y estas a su vez almacenan cuatro lápices, así en total se tienen $4^3 = 64$ lápices.

c) Como la mamá de Paula tiene tres macetas y cada maceta contiene tres flores de tres pétalos cada una, se tienen en total $3^3 = 27$ pétalos.

2.3.5

a) El 81 es un cubo perfecto. Esto es **Falso** ya que no existe un número que elevado a la 3 de como resultado 81.

b) El 64 es un cuadrado perfecto. Esto es **Verdadero**

c) El 144 es un cubo perfecto. Esto es **Falso** ya que no existe un número que elevado a la 3 de como resultado 144.

d) El 32 es un cuadrado perfecto. Esto es **Falso** ya que no existe un número que elevado a la 2 de como resultado 32.

2.3.6

Número	Base	Exponente	Resultado
4^3	4	3	64
5^2	5	2	25
2^5	2	5	32
1^7	1	7	1

2.3.7

Entre el 15 y el 20 solo hay un número feliz, el 19, pues:

$$1^2 + 9^2 = 82$$
$$8^2 + 2^2 = 68$$
$$6^2 + 8^2 = 100$$

Práctica: potencias

2.5.1

a) $3 \times 10^6 + 5 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 2 \times 10^0 = 3\,582\,852$

b) $1 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0 = 129\,743$

c) $6 \times 10^5 + 4 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 0 \times 10^0 = 6\,457\,350$

2.5.2

a) $5 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 2 \times 10^0 = 574\,312$

b) $1 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 3 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8 \times 10^0 = 1\,933\,758$

c) $7 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 1 \times 10^0 = 7\,321\,481$

2.5.3

a) $305\,046 = 3 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 4 \times 10^1 + 6 \times 10^0$

b) $1\,230\,843 = 1 \times 10^6 + 2 \times 10^5 + 3 \times 10^4 + 8 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 2 \times 10^0$

c) $345\,670 = 3 \times 10^5 + 4 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 7 \times 10^1$

2.5.4

a) $2 \times 10^5 + 3 \times 10^4 + 5 \times 10^2 + 8 \times 10^0 = 203\,508$

b) $8 \times 10^6 + 7 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 1 \times 10^1 = 8\,705\,010$

c) $6 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 = 653\,400$

2.5.5

a)

Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
7	1	0	9	0	4

b)

Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
8	0	3	0	1	0	7

c)

Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
7	2	0	6	9	3	5

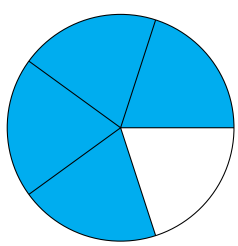
Soluciones del Capítulo 3: Fracciones

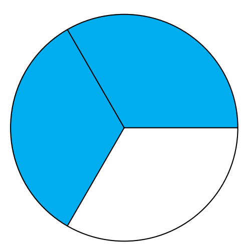
Práctica: fracciones equivalentes

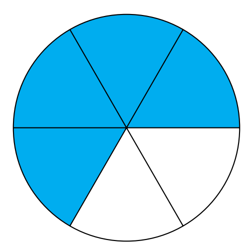
Soluciones del Capítulo 3

3.2.1 Al representar la cantidad que debieron añadir al litro de agua, se tiene:

Jesús: $\frac{4}{5}$ Esteban: $\frac{2}{3}$ Paula: $\frac{4}{6}$





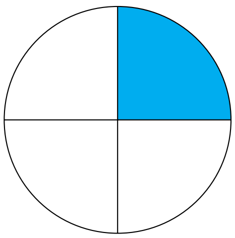


Al comparar las fracciones se tiene que los amigos que gastaron la misma cantidad de agua fueron Esteban y Paula.

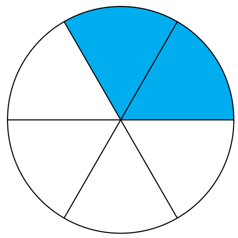
3.2.2

Al representar la porción de chile que se le agrega a cada uno de los frascos, se tiene que:

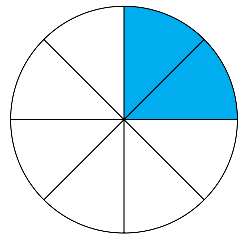
Salsa A: $\frac{1}{4}$



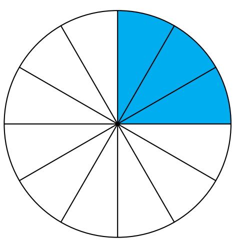
Salsa B: $\frac{2}{6}$



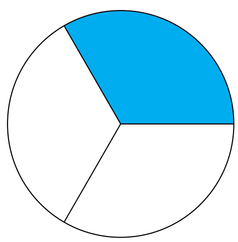
Salsa C: $\frac{2}{8}$



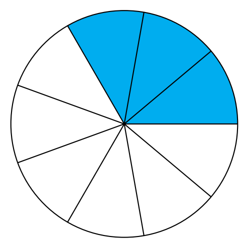
Salsa D: $\frac{3}{12}$



Salsa E: $\frac{1}{3}$



Salsa F: $\frac{3}{9}$



Al comparar las fracciones se tiene que las salsas que tienen la misma porción de chile fueron:

- Salsa A, salsa C y salsa D.
- Salsa B, salsa E y salsa F.

3.2.3

a) **Grupo #1:** $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{3}{15}$ $\frac{3}{10}$

b) **Grupo #2:** $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{4}{15}$ $\frac{3}{12}$

c) **Grupo #3:** $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{12}$ $\frac{4}{12}$

Práctica: amplificación y simplificación de fracciones

3.4.1

a) $\frac{2}{7} \times \frac{3}{3} = \frac{6}{21}$

b) $\frac{1}{4} \times \frac{11}{11} = \frac{11}{44}$

c) $\frac{3}{5} \times \frac{8}{8} = \frac{24}{40}$

d) $\frac{7}{11} \times \frac{7}{7} = \frac{49}{77}$

e) $\frac{3}{8} \times \frac{5}{5} = \frac{15}{40}$

f) $\frac{5}{6} \times \frac{3}{3} = \frac{15}{18}$

3.4.2

a) $\frac{1}{3} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{15}$

b) $\frac{2}{7} \times \frac{6}{6} = \frac{12}{42}$

c) $\frac{5}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{15}{6}$

d) $\frac{3}{2} \times \frac{5}{5} = \frac{15}{10}$

e) $\frac{7}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{14}{10}$

f) $\frac{1}{4} \times \frac{4}{4} = \frac{4}{16}$

3.4.3

a) $\frac{21}{7} \div \frac{7}{7} = 3$

b) $\frac{16}{32} \div \frac{16}{16} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{20}{15} \div \frac{5}{5} = \frac{4}{3}$

d) $\frac{12}{9} \div \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$

e) $\frac{3}{6} \div \frac{3}{3} = \frac{1}{2}$

f) $\frac{25}{15} \div \frac{5}{5} = \frac{5}{3}$

Práctica: multiplicación de fracciones

3.6.1 El problema indica que dos tercios de la clase son hombres, o sea, $\frac{2}{3}$ de 42 son hombres. Aplicando multiplicación de fracciones se tiene:

$$\frac{2}{3} \times 42 = 28$$

Así, hay 28 hombres en la clase, como hay 42 alumnos en total, se tiene que hay $42 - 28 = 14$ mujeres en la clase.

3.6.2 Primero, se calcula la cantidad que le corresponde al hermano mayor, para esto se debe realizar una multiplicación de fracciones:

$$36\,000\,000 \times \frac{1}{2} = 18\,000\,000$$

Así, al hermano mayor le corresponden 18 000 000 millones.

Luego, se calcula la cantidad que le corresponde al hermano del medio, para esto se debe realizar una multiplicación de fracciones:

$$36\,000\,000 \times \frac{1}{3} = 12\,000\,000$$

Así, al hermano del medio le corresponden 12 000 000 millones.

Finalmente, se calcula la cantidad que le corresponde al hermano menor, para esto se realiza una resta:

$$36\,000\,000 - 18\,000\,000 - 12\,000\,000 = 6\,000$$

Así, al hermano menor le corresponden 6 000 000 millones.

3.6.3 El problema indica que se necesitan dos quintos de la bolsa de 5 kg de arroz, para hacer la comida. Esto se puede expresar como $\frac{2}{5}$ de 5 kg de arroz, aplicando multiplicación de fracciones se debe:

$$\frac{2}{5} \times 5 = 2$$

Así, se necesitan 2 kg de arroz para hacer la comida. Dado que la bolsa tenía 5 kg quedan $5 - 2 = 3$ kilogramos de arroz.

3.6.4

a) Note que el vaso medidor equivale a un litro y está dividido en cinco partes por lo que cada parte representa $\frac{1}{5}$ de litro. Para preparar cada postre se necesitan dos de esas partes, es decir $\frac{2}{5}$ de litro. Si Sonia desea preparar 30 postres entonces para determinar cuánta leche necesita utilizar, se debe multiplicar la cantidad de postres a preparar por la cantidad de leche necesaria para preparar cada postre, es decir:

$$30 \times \frac{2}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

Por tanto, deberá utilizar 12 litros de leche.

b) Por cada litro de leche se requiere $\frac{1}{3}$ de taza de harina, en el inciso anterior se obtuvo que son necesarios 12 litros de leche. Por tanto, para determinar la cantidad necesaria de tazas de harina, se debe multiplicar la cantidad de litros de leche necesarios por la cantidad de tazas de harina utilizadas por litro, es decir:

$$12 \times \frac{1}{3} = 4$$

Por tanto, se requieren 4 tazas de harina para preparar los 30 postres.

3.6.5

a) $\frac{1}{3} \times \frac{3}{1} = 1$

b) $\frac{7}{5} \times \frac{5}{7} = 1$

c) $\frac{15}{9} \times \frac{9}{15} = 1$

d) $\frac{13}{11} \times \frac{11}{13} = 1$

e) $\frac{8}{3} \times \frac{3}{8} = 1$

f) $\frac{14}{5} \times \frac{5}{14} = 1$

3.6.6

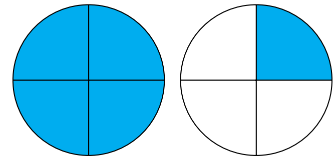
(a) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

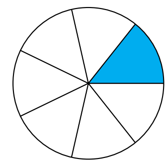
(b) $\frac{6}{5} \times \frac{10}{8}$

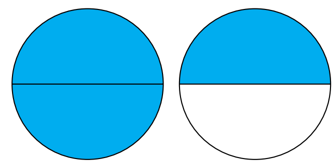
(c) $\frac{5}{6} \times \frac{3}{2}$

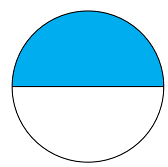
(d) $\frac{2}{6} \times \frac{2}{3}$

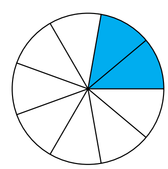
(e) $\frac{3}{14} \times \frac{2}{3}$

(c) 

(e) 

(b) 

(a) 

(d) 

Práctica: división de fracciones

3.6.7 Al completar el cuadrado mágico se obtiene:

$\frac{3}{5}$	$\times$	$\frac{10}{4}$	$=$	$\frac{3}{2}$
$\times$		$\times$		$\times$
$\frac{5}{9}$	$\times$	$\frac{6}{7}$	$=$	$\frac{10}{21}$
$=$		$=$		$=$
$\frac{1}{3}$	$\times$	$\frac{15}{7}$	$=$	$\frac{5}{7}$

3.8.1 Como Betún consume medio kilogramo de alimento, para saber por cuántos días le alcanza el saco que contiene 8 kg de debe realizar una división. Así, se tiene:

$$8 \div \frac{1}{2} = \frac{8}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{8 \times 2}{1 \times 1} = \frac{16}{1} = 16$$

Por lo tanto, a Betún le alcanza la comida por 16 días.

3.8.2 Si para preparar cada brownie se tarda tres cuartos de hora. En cuatro horas se pueden preparar:

$$4 \div \frac{3}{4} = \frac{4}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{4 \times 4}{1 \times 3} = \frac{16}{3} \approx 5,33 \times s$$

Así, en cuatro horas no le alcanza el tiempo para preparar los 6 brownies

3.8.3 En este caso, se tiene que analizar cuantas veces "cabe" un octavo en tres cuartos, por lo que se debe realizar una división:

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{1} = \frac{3 \times 8}{4 \times 1} = \frac{24}{4} = 6$$

Así, Tatiana puede hacer 6 viajes antes que su carro se quede sin gasolina.

3.8.4 Note que cada cajón requiere de $\frac{2}{3}$ de litro de abono. Si Don Enrique compró 12 litros del producto entonces para obtener cuántos cajones podrá abonar, se debe dividir el total de litros de abono entre la cantidad de litros que requiere cada cajón, es decir:

$$12 \div \frac{2}{3} = \frac{12}{1} \div \frac{2}{3} = \frac{12}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{12 \times 3}{1 \times 2} = \frac{36}{2} = 18$$

Por tanto, podrá abonar 18 cajones de plantas con esa cantidad.

3.8.5

a) $\frac{7}{4} \div 14 = \frac{7}{4} \times \frac{1}{14} = \frac{7 \times 1}{4 \times 14} = \frac{7}{56} = \frac{1}{8}$

b) $\frac{4}{6} \div \frac{3}{4} = \frac{4}{6} \times \frac{4}{3} = \frac{4 \times 4}{6 \times 3} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$

c) $9 \div \frac{3}{4} = \frac{9}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{9 \times 4}{1 \times 3} = \frac{36}{3} = 12$

d) $\frac{12}{5} \div \frac{3}{10} = \frac{12}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{12 \times 10}{5 \times 3} = \frac{120}{15} = 8$

e) $\frac{1}{7} \div \frac{3}{14} = \frac{1}{7} \times \frac{14}{3} = \frac{1 \times 14}{7 \times 3} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

f) $\frac{2}{5} \div \frac{4}{3} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Práctica: operaciones con fracciones homogéneas

3.10.1 Manuel ha sembrado dos porciones de su finca con papa y camote, si se desea saber cuanta es la fracción total que ha sido sembrada, se debe realizar una suma de fracciones. Así:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$$

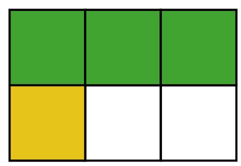
Por lo tanto, Manuel ha sembrado $\frac{3}{5}$ de su finca.

3.10.2 Josefina ha comprado un queque y se ha comido una parte, si se desea saber la cantidad que le ha quedado, debe realizar una resta de fracciones. Así:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, a Josefina le queda $\frac{1}{2}$ del queque original.

3.10.3 Para representar gráficamente la porción del lote heredada, se debe dibujar el terreno rectangular y luego dividirlo en seis partes. Así se tiene:



Donde en verde se representa la porción del terreno heredado por Ana María y en amarillo la heredada por Enrique. Para saber la cantidad total heredada, se deben sumar ambas partes. Así, se tiene:

$$\frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, en total Ana María y Enrique han heredado dos tercios del terreno.

3.10.4

a) $\frac{7}{4} + \frac{2}{4} = \frac{7+2}{4} = \frac{9}{4}$

b) $\frac{3}{13} - \frac{3}{13} = \frac{3-3}{13} = \frac{0}{13} = 0$

c) $\frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+1+3}{7} = \frac{6}{7}$

d) $\frac{12}{5} + \frac{3}{5} = \frac{12+3}{5} = \frac{15}{5}$

e) $\dfrac{10}{7} - \dfrac{3}{7} = \dfrac{10-3}{7} = \dfrac{7}{7} = 1$

f) $\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{2+4}{5} = \dfrac{6}{5}$

Práctica: operaciones con fracciones heterogéneas

3.12.1 Se sabe que $\frac{1}{20}$ de los 120 estacionamientos deben dedicarse a personas con discapacidad. Para saber la cantidad exacta de parqueos de este tipo que se deben construir se debe realizar la siguiente multiplicación:

$$\frac{1}{20} \times 120 = \frac{1}{20} \times \frac{120}{1} = \frac{1 \times 120}{20 \times 1} = \frac{120}{20} = 6$$

Por tanto, 6 estacionamientos deberán reservarse para personas con discapacidad según la Ley 7 600.

3.12.2 Dado que Fernando compró una bolsa azul y otra roja de confites, para saber cuantos kilos de confites compró en total, debe realizar una suma de fracciones. Así:

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{7} = \frac{14}{21} + \frac{18}{21} = \frac{14+18}{21} = \frac{32}{21}$$

Por lo tanto, Fernando compró $\frac{32}{21}$ kilos de confites.

3.12.3 El recipiente que equivale a un litro está dividido en seis partes iguales, por tanto, cada parte equivale a un sexto de litro. En la imagen se observa que Ariana tiene cuatro de esas partes del recipiente con Thinner:

Por lo tanto, ella tiene cuatro sextos de litro de este químico.
Para preparar el color verde necesita un sexto de litro. Entonces de lo que tiene de Thinner $\left(\frac{4}{6}\text{ de litro}\right)$ se necesita restar esa cantidad:

$$\frac{4}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4-1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Para preparar el color violeta necesita un tercio de litro. Entonces de lo que tiene de Thinner (medio litro) se necesita restar esa cantidad:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$$

Por tanto, le queda un sexto de litro de Thinner.

3.12.4 Para resolver el ejercicio se debe realizar la suma de la cantidad de tazas de caldo de pollo necesarias para la receta A y la receta B. Así, se tiene:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3+2}{4}=\frac{5}{4}$$

Por tanto, se requieren $\frac{5}{4}$ de tazas de caldo de pollo para preparar entre las dos recetas. Note que $\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$, o sea, se necesita una taza completa de caldo y un cuarto de otra taza.

3.12.5

a) $\frac{7}{3}+\frac{1}{2}=\frac{14}{6}+\frac{3}{6}=\frac{14+3}{6}=\frac{17}{6}$

b) $\frac{3}{2}-\frac{2}{5}=\frac{15}{10}-\frac{4}{10}=\frac{15-4}{10}=\frac{11}{10}$

c) $\frac{2}{7}+\frac{11}{3}=\frac{6}{21}+\frac{77}{21}=\frac{6+77}{21}=\frac{83}{21}$

d) $\frac{22}{3}+\frac{4}{5}=\frac{110}{15}+\frac{12}{15}=\frac{110+12}{15}=\frac{122}{15}$

e) $10-\frac{3}{7}=\frac{70}{7}-\frac{3}{7}=\frac{70-3}{7}=\frac{67}{7}$

f) $\frac{2}{8}+6=\frac{2}{8}+\frac{48}{8}=\frac{2+48}{8}=\frac{50}{8}=\frac{25}{4}$

Soluciones del Capítulo 4: Operaciones

Práctica: operaciones combinadas

Soluciones del Capítulo 4

4.3.1 Note que Sofía quiere comprar la consola que cuesta 615 000 colones, si ya tiene 235 000 colones ahorrados entonces, para calcular cuanto dinero le hace falta, se debe realizar una resta:

$$615\,000 - 235\,000 = 380\,000$$

Así, a Sofía le hacen falta 380 000 colones. Si cada mes puede ahorrar 76 000 colones, para saber cuántos meses deben pasar para poder comprar la consola, entonces se debe realizar una división:

$$380\,000 \div 76\,000 = 5$$

Por lo tanto, Sofía debe esperar 5 meses para poder comprar la consola.

Otra forma para expresar las operaciones anteriores son:

$$\begin{gathered}(615\,000 - 235\,000) \div 76\,000 = \\ (380\,000) \div 76\,000 = \\ 5\end{gathered}$$

4.3.2

a) El estudiante A realizó el recorrido en 320 segundos, hizo más del tiempo límite que son 240 segundos. Se debe determinar la cantidad de segundos que se pasó del tiempo límite, para ello se recurre a una resta:

$$320 - 240 = 80$$

Es decir, hizo 80 segundos de más y por tanto perderá puntos. Las instrucciones dicen que pierde 1,5 puntos por cada segundo extra. Entonces la cantidad de puntos que perderá son:

$$80 \times 1,5 = 120$$

Entonces del puntaje límite que son 2 000 puntos debe restarse lo anterior:

$$2\,000 - 120 = 1\,880$$

Por tanto, el estudiante A ha obtenido 1 880 puntos.

b) El estudiante B realizó el recorrido en 227 segundos, hizo menos del tiempo límite que son 240 segundos. Se debe determinar la cantidad de segundos menos del tiempo límite, para ello se recurre a una resta:

$$240 - 227 = 13$$

Es decir, hizo 13 segundos de menos y por tanto ganará puntos. Las instrucciones dicen que gana 2,5 puntos por cada segundo menos que demoró. Entonces la cantidad de puntos que ganará son:

$$13 \times 2,5 = 32,5$$

Entonces del puntaje límite que son 2 000 puntos debe sumarle lo anterior:

$$2\,000 + 32,5 = 2\,032,5$$

Por tanto, el estudiante B ha obtenido 2 032,5 puntos.

4.3.3

a) Se debe realizar la operación combinada:

$$1 \times 950 + 2 \times 1\,100 + 20 \times 20 + 5 \times 300$$

Al resolverla se obtiene:

$$\begin{gathered} 1 \times 950 + 2 \times 1100 + 20 \times 20 + 5 \times 300 = \\ 950 + 2\,200 + 400 + 1\,500 = \\ 5\,050 \end{gathered}$$

Por lo tanto, los papás de Esmeralda pagaron 5 050 colones.

b) Se debe realizar la operación combinada:

$$6\,000 - (1 \times 950 + 2 \times 1100 + 20 \times 20 + 5 \times 300)$$

Tomando como base el resultado del punto anterior se tiene:

$$\begin{gathered} 6\,000 - 5\,050 = \\ 950 \end{gathered}$$

4.3.4 Se debe realizar la operación combinada:

$$12\,000 - 12\,000 \times \frac{1}{3} - 12\,000 \times \frac{1}{5}$$

Al resolverla se obtiene:

$$\begin{gathered} 12\,000 - 12\,000 \times \frac{1}{3} - 12\,000 \times \frac{1}{5} = \\ 12\,000 - 4\,000 - 2\,400 = \\ 8\,000 - 2\,400 = \\ 5\,600 \end{gathered}$$

Por lo tanto, faltan 5 600 metros cuadrados sin sembrar.

4.3.5 Se debe realizar la operación combinada:

$$960 \times \frac{1}{2} + 960 \times \frac{1}{4}$$

Al resolverla se obtiene:

$$\begin{gathered} 960 \times \frac{1}{2} + 960 \times \frac{1}{4} = \\ 480 + 240 = \\ 720 \end{gathered}$$

Por lo tanto, Inés ha leído 720 páginas en esos dos días.

4.3.6

a) $100,76 \div 2 + 115,3 \times 12,2$

$$\begin{gathered} 100,76 \div 2 + 115,3 \times 12,2 = \\ 50,38 + 1\,406,66 \\ 1\,457,04 \end{gathered}$$

b) $224 + 300 \div 6 - 16 \times 2 + 23$

$$\begin{gathered} 100,76 \div 2 + 115,3 \times 12,2 = \\ 50,38 + 1\,406,66 \\ 1\,457,04 \end{gathered}$$

c) $11 + 3 \times 8 - 13$

$$\begin{gathered} 11 + 3 \times 8 - 13 = \\ 11 + 24 - 13 = \\ 35 - 13 = \\ 22 \end{gathered}$$

d) $2 \times 350 + 400 \div 2$

$$\begin{gathered} 2 \times 350 + 400 \div 2 = \\ 700 + 200 \\ 900 \end{gathered}$$

e) $10,35 + 11,2 \times 3,12$

$$\begin{gathered} 10,35 + 11,2 \times 3,12 = \\ 10,35 + 34,944 = \\ 45,294 \end{gathered}$$

f) $13 \times (12 - 25 \div 5) + 115,2$

$$\begin{gathered} 13 \times (12 - 25 \div 5) + 115,2 = \\ 13 \times (12 - 5) + 115,2 = \\ 13 \times 7 + 115,2 = \\ 91 + 115,2 = \\ 206,2 \end{gathered}$$

Capítulo 6

Activando conocimientos

En esta sección se repasarán algunos conceptos importantes que se deben recordar.

6.1 Múltiplos

Si se multiplican 6 y 9, el resultado es 54, entonces se dice que 54 es múltiplo de 6 y al mismo tiempo 54 es múltiplo de 9, pues es el resultado de mutiplicar 6 con otro número (en este caso 9) y viceversa.

De esta manera, se podría establecer los múltiplos del 9, si se comienza a multiplicar ese 9, por números cualesquiera. Usualmente, como se hace en orden se podría obtener:

$$\begin{aligned} 9 \times 0 &= 0 \\ 9 \times 1 &= 9 \\ 9 \times 2 &= 18 \\ 9 \times 3 &= 27 \\ 9 \times 4 &= 36 \\ 9 \times 5 &= 45 \\ 9 \times 6 &= 54 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 9 \times 7 &= 63 \\ 9 \times 8 &= 72 \\ 9 \times 9 &= 81 \\ 9 \times 10 &= 90 \\ 9 \times 11 &= 99 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos en cada una de las multiplicaciones son los múltiplos del 9. A esto se le conoce como: tabla de multiplicar.

Video 6.1

Si desea aprender o repasar algunas formas divertidas para conocer las tablas de multiplicar del 6 al 10, haga clic en el enlace respectivo:

- Tablas del 6, 7, 8, 9 y 10.
- Tabla del 9 (multiplicando con las manos)

Si se quiere generalizar este concepto, y pensar en cualquier producto de dos números y su resultado podría plantearse así:

Definición 6.1

Piense en dos números cualesquiera multiplicados a y b, y el resultado es c, entonces se dice que c es el múltiplo de a y al mismo tiempo c es el múltiplo de b, pues c es el resultado de mutiplicar a con otro número (en este caso b) y viceversa.

Volver a la sección principal

6.2 Reglas de divisibilidad

Cuando requiera expresar un número como el producto de otros o simplemente se necesitan los divisores de un número, se hace más sencillo si conoce algunas reglas de divisibilidad.

6.2.1 Divisibilidad por 2

Definición 6.2

Un número es divisible por 2, si el dígito de las unidades es par, o sea, si termina en 0, 2, 4, 6, 8.

Ejemplo 6.1

Determine si los siguientes números son divisibles por 2:

a) 11114

b) 221

Solución:

a) 11 114

El dígito de las unidades del número 11 114 corresponde a 4 y éste es un número par. Por lo tanto, 11 114 es divisible por 2. Además, si se realiza la división se obtiene:

$$11\,114 \div 2 = 5\,557$$

Dado que el cociente es un número entero, se tiene que el residuo es igual a 0.

b) 221

El dígito de las unidades del número 221 corresponde a 1 y éste es un número impar. Por lo tanto, 221 NO es divisible por 2. Además, si se realiza la división se obtiene:

$$221 \div 2 = 110,5$$

Dado que el cociente es un número decimal, se tiene que el residuo es diferente a 0.

6.2.2 Divisibilidad por 3

Definición 6.3
Un número es divisible por 3 si la suma de sus dígitos representa un número múltiplo de 3.

Ejemplo 6.2

Determine si los siguientes números son divisibles por 3:

a) 21 351

b) 332

Solución:

a) 21 351

Primero se debe realizar la suma de sus dígitos:

$$21\ 351$$

$$2+1+3+5+1=12$$

Dado que 12 es un múltiplo de 3, se dice que 21 351 es divisible por 3. Además, si se realiza la división se obtiene:

$$21\ 351 \div 3 = 7\ 117$$

Dado que el cociente es un número entero, se tiene que el residuo es igual a 0.

b) 332

Primero se debe realizar la suma de sus dígitos:

$$332$$

$$3+3+2=8$$

Dado que 8 NO es un múltiplo de 3, se dice que 332 NO es divisible por 3. Además, si se realiza la división se obtiene:

$$332 \div 3 \approx 110,67$$

Dado que el cociente es un número decimal, se tiene que el residuo es diferente a 0.

6.2.3 Divisibilidad por 5

Definición 6.4
Un número es divisible por 5 si el dígito de las unidades es 0 o 5, o sea, debe terminar en 0 o en 5.

Ejemplo 6.3

Determine si los siguientes números son divisibles por 5:

a) 245

b) 446

Solución:

a) 245

El dígito de las unidades del número 245 corresponde a 5, por lo tanto 245 es divisible por 5. Además, si se realiza la división se obtiene:

$$245 \div 5 = 49$$

Dado que el cociente es un número entero, se tiene que el residuo es igual a 0.

b) 446

El dígito de las unidades del número 446 corresponde a 6, por lo tanto 446 NO es divisible por 5. Además, si se realiza la división se obtiene:

$$446 \div 5 = 89,2$$

Dado que el cociente es un número decimal, se tiene que el residuo es diferente a 0.

6.2.4 Divisibilidad por 10

Definición 6.5
Un número es divisible por 10 si el dígito de las unidades es 0, o sea, debe terminar en 0.

Ejemplo 6.4

Determine si los siguientes números son divisibles por 10:

a) 180

b) 107

Solución:

a) 180

El dígito de las unidades del número 180 corresponde a 0, por lo tanto 180 es divisible por 10. Además, si se realiza la división se obtiene:

$$180 \div 10 = 18$$

Dado que el cociente es un número entero, se tiene que el residuo es igual a 0.

b) 107

El dígito de las unidades del número 107 corresponde a 7, por lo tanto 107 NO es divisible por 10. Además, si se realiza la división se obtiene:

$$107 \div 10 = 10,7$$

Dado que el cociente es un número decimal, se tiene que el residuo es diferente a 0.

Para saber más...

Existen otras reglas de divisibilidad, si desea conocerlas haga clic sobre la imagen.

A manera de resumen analice el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.5

Encuentre el número que corresponde según las pistas que se muestran. Recuerde que debe cerciorarse de que cumpla con la regla de divisibilidad determinada.

a) Es un número de tres cifras, menor que 140, divisible por 3 y por 10.

b) Es un número entre 110 y 120, divisible por 5.

c) Es un número entre 130 y 140, divisible por 2 y por 3 a la vez.

Solución:

a) El número es 120. Al ser divisible por 10, menor que 140, solo se deben probar cuál de estos números: 100, 110, 120 y 130 cumplen la regla de divisibilidad del 3.

b) El número es 115.

c) El número es 138.

Volver a la sección principal

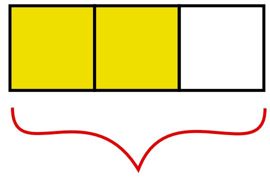
6.3 Fracciones

Si una unidad (entiéndase por unidad cualquier objeto o conjunto de objetos que se pueda considerar como tal) se divide en partes iguales, cada una de ellas se denomina fracción.

Para escribir una fracción se utilizan dos números y una línea fraccionaria. El número debajo de la línea fraccionaria se llama denominador y representa la cantidad de partes en que se dividió la unidad. El número sobre la línea fraccionaria se llama numerador y representa la cantidad de partes que se emplearon del total que se tenía.

Así por ejemplo:

$$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{numerador}{denominador} \rightarrow \frac{indica\ cuntas\ partes\ se\ toman}{indica\ cuntas\ partes\ se\ divide\ la\ unida}$$



Una unidad (un objeto) dividido en tres partes y de éstas se toman o colorean dos.

Teorema

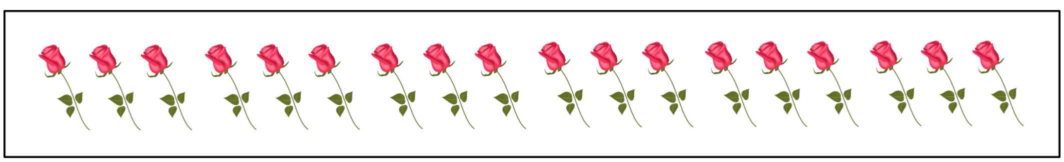
En una floristería hay 18 rosas y se deben hacer 6 grupos que contengan la misma cantidad de flores. Cinco de esos grupos se llevarán a vender a un supermercado. Con base a esta información, responda:

a) ¿Cuántas rosas habrá en cada grupo?

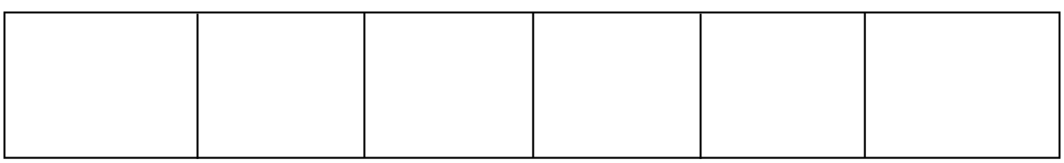
b) ¿Cuántas rosas se llevarán a vender al supermercado?

Solución:

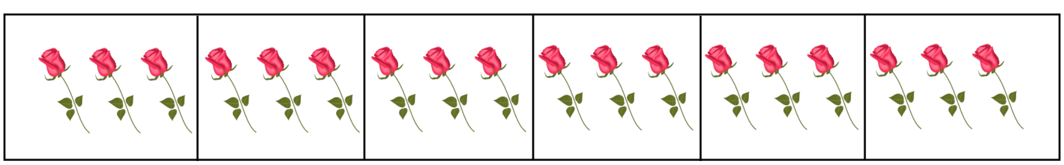
a) Suponga que el total de rosas, son una unidad.



Ahora, la unidad se divide en seis partes iguales



Y se distribuye una rosa en cada sección, hasta que no haya más rosas. Al final queda así:



Como se puede apreciar, cada grupo contiene 3 rosas.

En otras palabras, **la sexta parte de 18** (porque se dividió en 6 partes iguales) **corresponde a 3**.

Quiere decir que $\frac{1}{6}$ de $18 = 3$

b) Así, si se escogen 5 grupos para llevar al supermercado, el total de rosas que se llevarán es de $3 \times 5 = 15$.

Recuerde

La palabra veces, está asociada con el producto (multiplicación)

De esta manera, se pueden establecer otro tipo de relaciones, por ejemplo, si se quiere saber cuántas flores hay en dos de los grupos basta con pensar en

$$2 \text{ veces } \frac{1}{6} \text{ de}$$
$$18 = 2 \times \left(\frac{1}{6} \text{ de } 18\right) = 2 \times 3 = 6 \text{ rosas.}$$

De forma similar...

- 3 veces $\frac{1}{6}$ de $18 = 3 \times \left(\frac{1}{6} \text{ de } 18\right) = 3 \times 3 = 9$ rosas (si se toman 3 grupos)
- 4 veces $\frac{1}{6}$ de $18 = 4 \times \left(\frac{1}{6} \text{ de } 18\right) = 4 \times 3 = 12$ rosas (si se toman 4 grupos)
- 5 veces $\frac{1}{6}$ de $18 = 5 \times \left(\frac{1}{6} \text{ de } 18\right) = 5 \times 3 = 15$ rosas (si se toman 5 grupos)
- 6 veces $\frac{1}{6}$ de $18 = 6 \times \left(\frac{1}{6} \text{ de } 18\right) = 6 \times 3 = 18$ rosas (si se toman 6 grupos es decir la unidad completa)

Teorema

La directora de una escuela encargó 32 pasteles para celebrar el día del niño. En la pastelería los distribuyen en 8 paquetes, para poder trasladarlos a la escuela. Con base a esta información, responda:

a) ¿Cuántos pasteles habrá en cada paquete?

b) ¿Si a los sextos grados les corresponden 3 de esos paquetes, cuántos pasteles serían en total?

Solución:

a) Suponga que el total de pasteles , es una unidad.

Ahora, la unidad se divide en ocho partes iguales

Como se puede apreciar, cada paquete contiene 4 pasteles.

En otras palabras, **la octava parte de 32** (porque se dividió en 8 partes iguales) **corresponde a 4**.

Quiere decir que $\frac{1}{8}\ de\ 32 = 4$.

b) Así, si se escogen 3 de esos paquetes, a los sextos les corresponden $3 \times 4 = 12$.

De esta manera, se pueden establecer otro tipo de relaciones, por ejemplo, si se quiere saber la cantidad de pasteles en dos paquetes

$2\ veces \frac{1}{8}\ de\ 32 = 2 \times \left(\frac{1}{8}\ de\ 32\right) = 2 \times 4 = 8$ pasteles

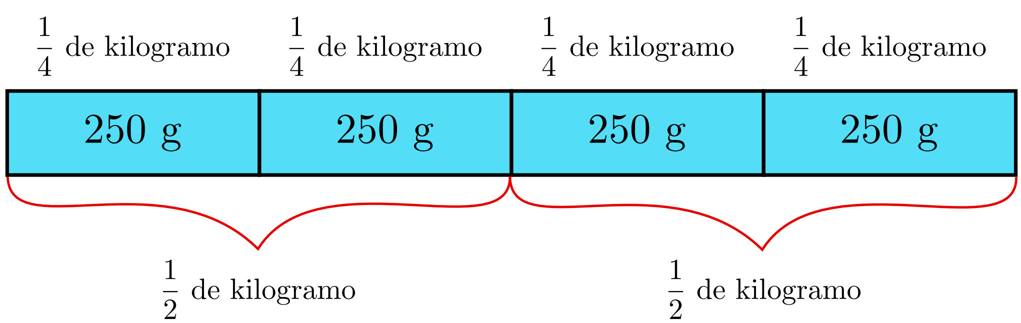
De forma similar...

- 3 veces $\frac{1}{8}$ de $32 = 3 \times \left(\frac{1}{8}\ \text{de}\ 32\right) = 3 \times 4 = 12$ pasteles (si se toman 3 paquetes)
- 4 veces $\frac{1}{8}$ de $32 = 4 \times \left(\frac{1}{8}\ \text{de}\ 32\right) = 3 \times 4 = 16$ pasteles (si se toman 4 paquetes)
- 5 veces $\frac{1}{8}$ de $32 = 5 \times \left(\frac{1}{8}\ \text{de}\ 32\right) = 5 \times 4 = 20$ pasteles (si se toman 5 paquetes)
- 6 veces $\frac{1}{8}$ de $32 = 6 \times \left(\frac{1}{8}\ \text{de}\ 32\right) = 6 \times 4 = 24$ pasteles (si se toman 6 paquetes)
- 7 veces $\frac{1}{8}$ de $32 = 7 \times \left(\frac{1}{8}\ \text{de}\ 32\right) = 7 \times 4 = 28$ pasteles (si se toman 7 paquetes)
- 8 veces $\frac{1}{8}$ de $32 = 8 \times \left(\frac{1}{8}\ \text{de}\ 32\right) = 8 \times 4 = 32$ pasteles (si se toman 8 paquetes, es decir la unidad completa)

Analice un ejemplo más:
Un kilogramo, puede entenderse como una unidad completa, por lo que:

$$1\,kg = 1\ 000\,g$$

Entonces, si se divide la unidad en cuatro partes iguales, se obtiene



De esta manera, se puede decir que $\frac{1}{4}$ de kilogramo=14 de 1000 gramos=250 gramos.
De forma similar:

- $\frac{2}{4}$ de kilogramo =2 veces $\frac{1}{4}$ de 1 000 gramos = 2×250 gramos = 500 gramos (si se toman 2 de las 4 partes). Note que $\frac{2}{4}$ de kilogramo = $\frac{1}{2}$ de kilogramo.

- $\frac{3}{4}$ de kilogramo =3 veces $\frac{1}{4}$ de 1 000 gramos = 3×250 gramos = 750 gramos (si se toman 3 de las 4 partes).

- $\frac{4}{4}$ de kilogramo =4 veces $\frac{1}{4}$ de 1 000 gramos = 4×250 gramos = 100 gramos (si se toman 4 de las 4 partes, es decir, la unidad completa).

6.3.1 Clasificación de fracciones con respecto a la unidad

Fracciones propias

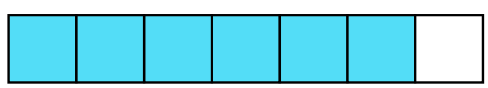
Una fracción cuyo denominador es mayor que el numerador se llama fracción propia. En estas fracciones, su valor numérico es menor que una unidad.

Ejemplo:

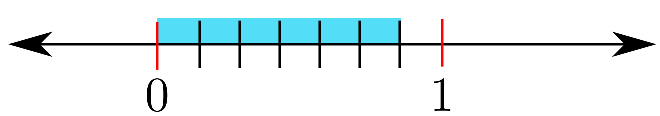
- **Representación numérica:**

$$\frac{6}{7} \approx 0,8571$$

- **Representación gráfica:**



- **Representación en la recta numérica:**



Fracciones unitarias

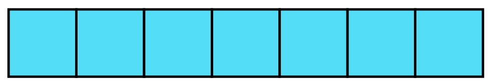
Una fracción cuyo numerador es igual al denominador se llama fracción unitaria. En estas fracciones, su valor numérico es justamente una unidad.

Ejemplo:

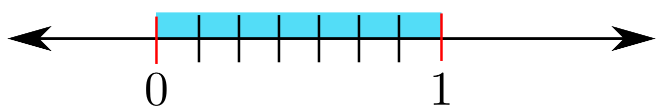
- **Representación numérica:**

$$\frac{7}{7} = 1$$

- **Representación gráfica:**



- **Representación en la recta numérica:**



Fracciones impropias

Teorema

Doña Clara tiene una panadería y puso una oferta, donde a cada cliente que compre más de 2 000 colones en productos, le regalará medio queque de zanahoria. Si:

- A las 6 de la mañana partió en dos partes iguales, el queque de zanahoria.
- A las 7 de la mañana llegó el primer cliente que aprovechó la oferta y doña Clara, le entregó la primera mitad del queque.
- A las 8 de la mañana llegó el segundo cliente que hizo una compra de 2 400 colones y le entregaron la otra mitad.
- A las 8:35 de la mañana llegó un tercer cliente e hizo una compra de 3 000 colones.

Ya no hay más medio queque de zanahoria para entregar y doña Clara debe cumplir con la oferta para no perder clientes. Piense en una posible alternativa para ayudar a doña Clara.

Solución:

Una posible solución es que traiga otro queque de zanahoria (del mismo tamaño que el primero), lo divida a la mitad y que entregue al tercer cliente, la oferta.

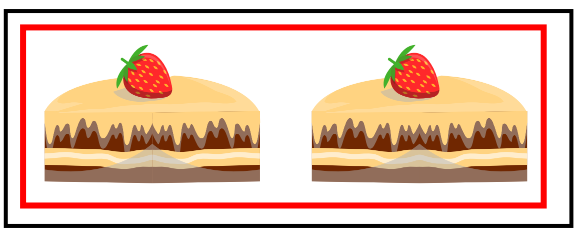
Eso quiere decir que ha tomado 2 queques y ha entregado 3 mitades: cada unidad (cada queque) se dividió en dos y se tomaron tres partes $\frac{3}{2}$

Note que el primer queque se tomó completo y del segundo, solamente la mitad.

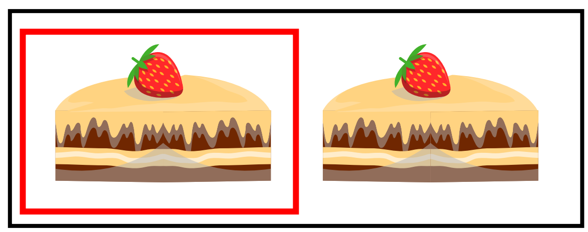
Gráficamente se tiene:

Sabías que...

La fracción mixta es una representación de la fracción impropia, pero no es una forma de clasificación.



Pirmer queque



Segundo queque

Así del primer queque se toma una unidad completa y del segundo se toma media unidad, o sea:

$$1\frac{1}{2}$$

Así, se tiene un caso de una fracción impropia, donde:

$$1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

En el ejemplo anterior, se puede ver que el valor numérico de las fracciones es mayor a una unidad (se necesita más de una unidad dividida en la misma cantidad de partes). Estas fracciones se distinguen porque el numerados es mayor que el denominador.

Solamente las fracciones impropias se pueden representar como **fracciones mixtas**.

Ejemplo:

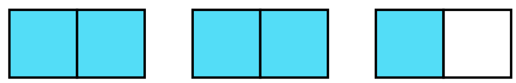
- **Representación numérica:**

$$\frac{5}{2} = 2,5 = 2\frac{1}{2}$$

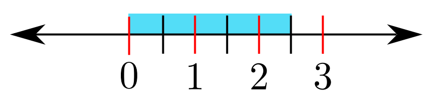
Notación mixta

Dos unidades completas y media de otra

- **Representación gráfica:**



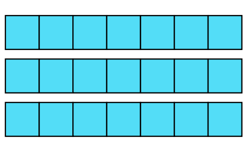
- **Representación en la recta numérica:** (note que en esta representación no se dejan espacios entre las unidades. Además, cada unidad está dividida en la cantidad de partes que indica el denominador).



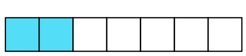
¿Cómo convertir una fracción mixta en impropia?

Suponga la siguiente fracción $3\frac{2}{7}$

Esto quiere decir que hay 3 unidades completas que han sido divididas en 7 partes iguales, entonces es como si hubiera 21 partes (si se multiplica 3×7).



El 2 representa las partes que se tomaron de la siguiente unidad, así que en total hay 23 partes (21+2).



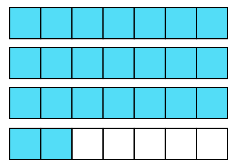
Como todas las unidades fueron divididas en sétimos (7 partes iguales), quiere decir que en total hay 23 sétimos: $\frac{23}{7}$

En resumen:

$$3\frac{2}{7}$$

$$3 \cdot 7 = 21 \qquad 21 + 2 = 23$$

$$3\frac{2}{7} = \frac{23}{7}$$



¿Cómo convertir una fracción impropia en mixta?

Suponga la siguiente fracción $\frac{\mathbf{17}}{3}$

Se quiere saber cuántas unidades se completan al tomar las **17** partes si se hacen grupos de 3. En este caso basta con resolver la división **17** $\div$ 3, sin realizar el cálculo de decimales.

$$\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \cline{2-2} -\ 15 & 5 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Denominador

Cantidad de partes en que se divide la unidad

Numerador de la fracción propia

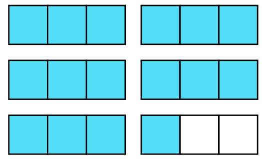
cantidad de partes que no se pueden agrupar en una unidad completa (las partes que sobran)

Parte entera

Corresponde a la cantidad de unidades completas que se necesitan para representar la fracción

Por tanto:

$$\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$$



Volver a la sección principal

6.3.2 Clasificación de fracciones según su denominador

Fracciones homogéneas
Son aquellas fracciones que tienen denominadores equivalentes.

Por ejemplo, las siguientes fracciones:

$$\frac{1}{9}, \frac{25}{9}, \frac{10}{9}, \frac{2}{9}$$

Son fracciones homogéneas entre sí.

Volver a la sección principal

Fracciones heterogéneas
Son aquellas fracciones que tienen denominadores diferentes.

Por ejemplo, las siguientes fracciones:

$$\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{9}, \frac{4}{7}$$

Son fracciones heterogéneas entre sí.

Volver a la sección principal

6.4 Términos de las operaciones

A continuación se muestran el nombre de cada uno de los términos de las operaciones básicas suma, resta, multiplicación y división.

Suma

3 1 5 →	Sumando
6 3 1 →	Sumando
+ 3 2 →	Sumando
9 7 8 →	Total

Resta

1 7 6 →	Minuendo
− 4 1 →	Sustraendo
1 3 5 →	Diferencia

Multiplicación

4 2 1 →	Factor
× 2 →	Factor
8 4 2 →	Producto

División

Dividendo →	13	4 →	Divisor
	− 12	3 →	Cociente
Residuo →	1		

Volver a la sección principal

6.5 División

Recuerde el significado de dividir dos números, para esto analice la siguiente situación:

"En una pulpería, el dueño requiere atraer clientes vendiendo el arroz a un precio especial. Él aplicará un precio especial si el cliente compra un paquete que contiene cuatro bolsas de arroz de la misma marca y cantidad. De esta manera, tiene que distribuir las 13 bolsas de arroz que tiene en la pulpería en paquetes que contengan solamente cuatro bolsas. Necesita saber cuántos paquetes puede formar y además, determinar si le sobran bolsas de arroz que no pueda ubicar en algún paquete."

Una forma para resolver el problema anterior es haciendo paquetes de cuatro bolsas. Luego, a la cantidad total de bolsas, se le restan las bolsas que ya se usaron. Si el pulpero tiene 13 bolsas de arroz, primero se hará un paquete con 4 bolsas.

Así, habrá 1 paquete y a las 13 bolsas se le quitan 4, para un total de 9 bolsas sin empacar. Luego, se hará un segundo paquete con 4 bolsas.

En este momento se tienen 2 paquetes y de las 9 bolsas que quedaban se le quitan 4, para un total de 5 bolsas sin empacar. Repetimos el proceso así, para crear el tercer paquete, se toman otras 4 bolsas.

De esta forma, se tendrán 3 paquetes y de las 5 bolsas que quedaban se le quitan 4, para un total de 1 bolsa sin empacar. Note que esa bolsa que sobró ya no se puede ubicar en paquetes de 4. En total, quedaron 3 paquetes con 4 bolsas (es decir, en total se pudo ubicar en paquetes, 12 de las 13 bolsas y 12 es un múltiplo de 4). También se puede notar que la resta de paquetes, se logró hacer 3 veces.

Video 6.2

En este video podrá observar un ejemplo donde se repasa el concepto de división y los nombres de cada uno de sus términos.

En este caso, el problema se resolvió haciendo restas sucesivas; sin embargo, en ocasiones resulta más sencillo aplicar la división. A continuación, se explica como aplicarlo:

Primero, piense que se requiere hacer grupos de 4 bolsas, así que se necesita un múltiplo de 4 que se "acerque suficiente a 13 sin pasarse", para saber cuántos paquetes de 4 bolsas se pueden ubicar.

$$\begin{array}{r|l} 13 & \underline{\;4\;} \\ & \end{array}$$

Total de bolsas

Bolsas por paquete

Para ello, se puede usar la tabla de multiplicar del 4 (recuerde que las tablas de multiplicar, dan los múltiplos de un número, en forma ordenada). Realizando esto, se nota que $4 \times 3 = 12$, lo que quiere decir que por el momento se podrían ubicar 12 bolsas (de un total de 13 que había originalmente) en 3 paquetes de 4 bolsas.

$$\begin{array}{r|l} 13 & \underline{\;4\;} \\ -\;12 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Múltiplo de 4 que más nos acerca a 13 sin pasarse

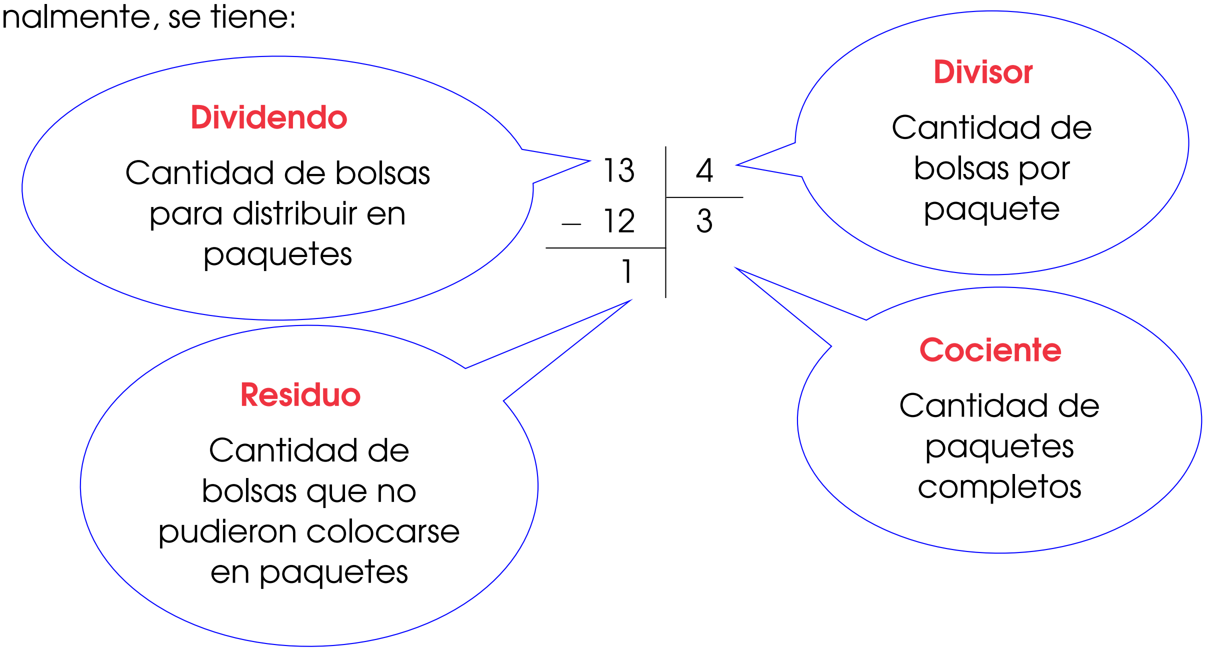
Igualmente como cuando se hicieron las restas al inicio del ejemplo, se va a quitar (restar) al total de bolsas que había originalmente, la cantidad total de bolsas que se lograron ubicar en paquetes, en este caso 12.

$$\begin{array}{r|l} 13 & \underline{\;4\;} \\ -\;12 & 3 \\ \hline & \end{array}$$

De esta manera, al realizar la resta, se obtiene que, del total de bolsas que había originalmente, sobró 1 que no pudo ubicarse en los paquetes de la promoción.

$$\begin{array}{r|l} 13 & \underline{\;4\;} \\ -\;12 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Finalmente, se tiene:



Analice el siguiente ejemplo:

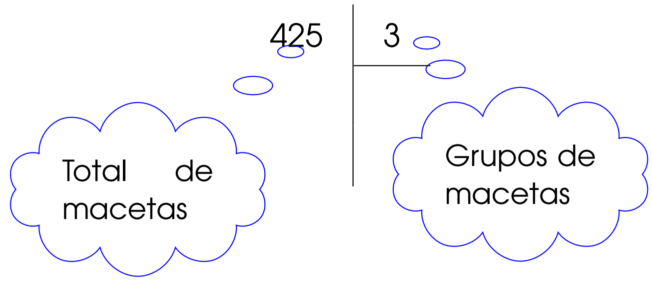
Ejemplo 6.6

En un vivero se quiere colocar 425 macetas en grupos de 3. ¿Todas las macetas se pueden agrupar? ¿Cuántos grupos se obtienen?

Solución:

En este caso, se pueden hacer restas sucesivas nuevamente, pero eso sería un trabajo muy largo (pues habría que restar muchas veces el 3 a 425) y, aunque es un proceso válido, es poco práctico. Por este motivo, se resolverá el problema realizando el algoritmo de la división.

Primero, se va a pensar que se requieren hacer grupos de 3 macetas, así que se necesita un múltiplo de 3 que se "acerque suficiente a 425 sin pasarse", con el fin de saber cuántos grupos de 3 macetas se puede colocar en el vivero.



Puede ser que al inicio sea un poco complejo determinar el múltiplo que se requiere, así que se trabaja con la primera cifra (de izquierda a derecha), en este caso, el **4**.
Una vez que se divide ese **4** entre **3**, el resultado que se obtiene indica las veces que "cabe" el **3** en **4**, es decir, **1** vez. Luego, se hace la resta correspondiente.

$$\begin{array}{r|l} 425 & 3 \\ \cline{2-2} -\ 3 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Después, se "baja" el número que corresponde a las decenas y a las unidades que no se han divido aún. Se debe repetir el procedimiento pero esta vez, considerando que el nuevo divisor es 125

$$\begin{array}{r|l} 425 & 3 \\ \cline{2-2} -\ 3 & 1 \\ \hline 125 & \end{array}$$

Ahora, se debe tomar la primera cifra (de izquierda a derecha), en este caso el 1, sin embargo, el 3 no "cabe" en 1, por lo que, se hace necesario considerar también la siguiente cifra, que en este caso es el 2.

$$\begin{array}{r|l} 425 & 3 \\ \cline{2-2} -\ 3 & 1 \\ \hline 125 & \end{array}$$

La cantidad de veces que puedo dividir el 12 entre 3, es 4. Se realiza la resta correspondiente y se bajan las unidades que aún no han sido agrupadas.

$$\begin{array}{r|l} 425 & 3 \\ \cline{2-2} -\ 3 & 14 \\ \hline 125 & \\ -\ 12 & \\ \hline 05 & \end{array}$$

Se repite el procedimiento una vez más, considerando que el nuevo divisor es **5** unidades. El **3** "cabe" **1** vez en **5**. Luego de hacer la resta correspondiente, se observa que ya no se puede dividir más (a menos que se saquen decimales, pero recuerde que está agrupando macetas, así que se ha terminado el ejercicio). Por lo tanto, la respuesta al ejercicio es: si repartimos 425 macetas en grupos de 3, se obtiene 141 grupos y hay 2 macetas que no se pueden ubicar en dichos grupos.

$$\begin{array}{r|l} 425 & 3 \\ \cline{2-2} -\ 3 & 141 \\ \cline{1-1} 125 & \\ -\ 12 & \\ \cline{1-1} 5 & \\ -\ 3 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

En los siguientes enlaces, podrá observar tres ejemplos más sobre como resolver divisiones con 2 y 3 dígitos en el dividendo.

Video 6.3

En se repasará el tema de la división haciendo uso de bloques multibase.

Video 6.4

En se repasará el tema de la división haciendo uso del algoritmo de la división.

Volver a la sección principal

6.6 Operaciones con decimales

Antes de repasar las operaciones fundamentales que se pueden realizar con números decimales, conviene recordar su ubicación en la tabla de valores:

centenas de millar	decenas de millar	unidades de millar	centenas	decenas	unidades	coma	décimos	céntesimos
1	2	5	2	3	9	,	6	4

6.6.1 Suma y resta de números con expansión decimal

Analice, mediante un ejemplo, la forma correcta de sumar números con expansión decimal. Suponga la siguiente operación:

$$4763,2 + 3512,85$$

Lo primero que se debe hacer es colocar ambos números en una tabla de valores, alineándolos según la coma.

$$\begin{array}{cccccccc} & 4 & 7 & 6 & 3 & , & 2 & \\ + & 3 & 5 & 1 & 2 & , & 8 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Para que sea más fácil hacer las operaciones, puede agregar ceros en las posiciones decimales, según lo requiera.

$$\begin{array}{cccccccc} & 4 & 7 & 6 & 3 & , & 2 & 0 \\ + & 3 & 5 & 1 & 2 & , & 8 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Luego, debe sumar uno a uno los números de cada "columna", iniciando por los centésimos hasta las unidades de millar. Recuerde que la posición de la coma se mantiene:

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & \overset{1}{4} & 7 & 6 & \overset{1}{3} & , & 2 & \\
+ & 3 & 5 & 1 & 2 & , & 8 & 5 \\
\hline
 & 8 & 2 & 7 & 6 & , & 0 & 5
\end{array}
$$

Recuerde que...

En caso que la suma entre cada par de dígitos sea 10 o más, debe colocarse en el resultado el dígito que corresponde a las unidades y "llevar" el dígito de las decenas a la siguiente unidad que corresponda.

Volver a la sección principal

6.6.2 Resta de números con expansión decimal

Analice, mediante un ejemplo, la forma correcta de sumar números con expansión decimal. Suponga la siguiente operación:

$$122\,654,9 - 13\,748,53$$

Lo primero que se debe hacer es colocar ambos números en una tabla de valores, alineándolos según la coma. Al igual que en la suma, se pueden agregar ceros en las posiciones decimales, según se requiera.

$$
\begin{array}{rccccccc}
 & 1 & 2 & 2 & 6 & 5 & 4, & 9 & 0 \\
+ & & 1 & 3 & 7 & 4 & 8, & 5 & 3 \\
\hline
\end{array}
$$

A continuación se explican los pasos a seguir para realizar la resta.

Operación	Observaciones
$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 2 & 2 & 6 & 5 & 4, & \overset{8}{\cancel{9}} & \overset{1}{0} \\ + & & 1 & 3 & 7 & 4 & 8, & 5 & 3 \\ \hline & & & & & & & & 7 \end{array}$	Se comienza a restar desde el dígito de los centésimos. Como, en este caso, a 0 no se le puede quitar 3, se descompone la siguiente posición y “se le pide prestado” 1 unidad. Cuando se haya realizado este procedimiento, se realiza la resta usual entre este par de números.
$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 2 & 2 & 6 & 5 & 4, & \overset{8}{\cancel{9}} & \overset{1}{0} \\ + & & 1 & 3 & 7 & 4 & 8, & 5 & 3 \\ \hline & & & & & & & 3 & 7 \end{array}$	Se pasa a la casilla de los décimos, en este caso se realiza la resta 9 – 5 y se coloca el resultado.
$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 2 & 2 & 6 & \overset{4}{\cancel{5}} & \overset{1}{4}, & \overset{8}{\cancel{9}} & \overset{1}{0} \\ + & & 1 & 3 & 7 & 4 & 8, & 5 & 3 \\ \hline & & & & 0 & 6, & 3 & 7 & \end{array}$	Se coloca la coma y se sigue con la operación entre los dígitos de las unidades. Como no se puede restar 8 unidades a 4, se descompone la decena que está al lado del 8, en este caso se tiene 5. Se representan las 5 decenas en 4 y 1 decena, esta última decena se convierte en 10 unidades y se pasa a las unidades. Como ya había 4 unidades, entonces se tienen 14 unidades. Así que a 14 unidades se le restan 8. Y a 4 decenas se le restan 4 decenas.
$\begin{array}{ccccccccc} & \overset{0}{\cancel{1}} & \overset{12}{\cancel{2}} & \overset{12}{\cancel{2}} & \overset{1}{6} & \overset{4}{\cancel{5}} & \overset{1}{4}, & \overset{8}{\cancel{9}} & \overset{1}{0} \\ + & & 1 & 3 & 7 & 4 & 8, & 5 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 8 & 9 & 0 & 6, & 3 & 7 & \end{array}$	Se continúa con este mismo proceso hasta obtener el resultado.

6.6.3 Multiplicación de números con expansión decimal

Para efectuar este tipo de operaciones, se procede a resolver de manera similar a cualquier multiplicación, pero se considera (se suma) la cantidad de decimales que tiene cada factor. Así, el resultado tendrá dicha cantidad.

Ejemplo 6.7

Realice las siguientes multiplicaciones:

a) $498,6 \times 7,2$

b) $1\,407,92 \times 245,8$

Solución:

a) $498,6 \times 7,2$

$$
\begin{array}{cccccccl}
 & & 4 & 9 & 8 & , & 6 & \quad \text{Una posición decimal} \\
\times & & & & 7 & , & 2 & \quad \text{Una posición decimal} \\
\hline
 & & & 9 & 9 & 7 & 2 & \\
+ & 3 & 4 & 9 & 0 & 2 & & \\
\hline
 & 3 & 5 & 8 & 9, & 9 & 2 & \quad \text{Dos posiciones decimales}
\end{array}
$$

Así $498,6 \times 7,2 = 3\,589,92$

b) $1\,407,92 \times 245,8$

$$
\begin{array}{cccccccccc@{\qquad}l}
 & & & & 1 & 4 & 0 & 7, & 9 & 2 & \text{Una posición decimal} \\
\times & & & & & & 2 & 4 & 5, & 8 & \text{Una posición decimal} \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 2 & 6 & 3 & 3 & 6 & \\
 & & & 7 & 0 & 3 & 9 & 6 & 0 & & \\
 & & 5 & 6 & 3 & 1 & 6 & 8 & & & \\
+ & 2 & 8 & 1 & 5 & 8 & 4 & & & & \\
\hline
 & 3 & 4 & 6 & 0 & 6 & 6, & 7 & 3 & 6 & \text{Tres posiciones decimales}
\end{array}
$$

Así $1\,407,92 \times 245,8 = 346\,066,736$

Volver a la sección principal

6.6.4 División de números con expansión decimal

Dividendo con expansión decimal

Cuando el dividendo tiene expasión decimal, se divide de forma normal. Pero, cuando se quiere "bajar" el número que se encuentra en la posición de los décimos, entonces la coma del dividendo, se escribe en el cociente y se sigue de manera normal.

Para analizar el proceso, se resolverá la siguiente operación $9\,782,9 \div 32$

<table>
<tr><th>Operación</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>$$\begin{array}{r|l} 9\ 7\ 8\ 2,\ 9 & 3\ 2 \\ \cline{2-2} -\ 9\ 6 & 3 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$</td><td>Se inicia tomando los dos primeros dígitos para dividir entre 32. Se puede ver que el 32 cabe 3 veces en 97 y sobra 1.</td></tr>
<tr><td>$$\begin{array}{r|l} 9\ 7\ 8\ 2,\ 9 & 3\ 2 \\ \cline{2-2} -\ 9\ 6\ \downarrow\ \downarrow & 3\ 0\ 5 \\ \cline{1-1} 1\ 8\ 2 & \\ -\ 1\ 6\ 0 & \\ \cline{1-1} 2\ 2 & \end{array}$$</td><td>Se baja el 8 y como 32 no cabe en 18, en el cociente, se coloca un cero y esto permite poder bajar el siguiente dígito del dividendo.

Luego, el 32 cabe 5 veces en 182 y sobra 22.</td></tr>
<tr><td>$$\begin{array}{r|l} 9\ 7\ 8\ 2,\ 9 & 3\ 2 \\ \cline{2-2} -\ 9\ 6 & 3\ 0\ 5,\ 7 \\ \cline{1-1} 1\ 8\ 2 & \\ -\ 1\ 6\ 0 & \\ \cline{1-1} 2\ 2\ 9 & \\ -\ 2\ 2\ 4 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$</td><td>Dado que se debe bajar el 9, pero la coma se encuentra antes de este número, se debe escribir la coma en el cociente. Luego se baja el 9 y se continúa con el proceso normal.</td></tr>
</table>

Así el cociente de realizar $9\,782,9 \div 32$ corresponde a $305,7$ y el residuo es 5.

Divisor con expansión decimal

En este caso, conviene eliminar la coma del divisor completamente. Para ello, se puede amplificar tanto el dividendo como el divisor, por un múltiplo de 10 que permita desaparecer la coma y que la expresión resultante sea equivalente a la original.

Ejemplo 6.8

Resuelva las siguientes divisiones:

a) $2\,184 \div 0,24$

b) $2,9294 \div 3,02$

Solución:

a) $2\,184 \div 0,24$

Como el divisor tiene dos posiciones decimales, se debe multiplicar por un múltiplo de 10, que permita eliminar esas dos posiciones; es decir, multiplicar por 100. Pero se debe multiplicar tanto el dividendo como el divisor, para que la expresión original no cambie. Así:

$$2\,184 \times 100 = 218\,400 \qquad\qquad 0,24 \times 100 = 24$$

Por lo que la nueva operación corresponde a:

$$218\,400 \div 24$$

Se realiza la división usual y se tiene:

$$\begin{array}{rcccccc|cccc}
 & 2 & 1 & 8 & 4 & 0 & 0 & 2 & 4 & & \\ \cline{8-11}
- & 2 & 1 & 6 & 6 & & & 9 & 1 & 0 & 0 \\ \cline{1-7}
 & & & 2 & 4 & & & & & & \\
- & & & 2 & 4 & & & & & & \\ \cline{1-7}
 & & & & 0 & 0 & 0 & & & &
\end{array}$$

b) $2,9294 \div 3,02$

Como el divisor tiene dos posiciones decimales, se debe multiplicar por un múltiplo de 10, que permita eliminar esas dos posiciones; es decir, multiplicar por 100. Pero se debe multiplicar tanto el dividendo como el divisor, para que la expresión original no cambie. Así:

$$2,9294 \times 100 = 292,94 \qquad\qquad 3,02 \times 100 = 302$$

Por lo que la nueva operación corresponde a:

$$292,94 \div 302$$

En este caso, como el dividendo tiene posiciones decimales, entonces se aplica el procedimiento estudiado en la sección anterior. Así se tiene:

$$\begin{array}{cccccc|ccc}
 & & 2 & 9 & 2, & 9 & 4 & 3 & 0 & 2 \\
\cline{7-9}
- & & 2 & 7 & 1 & 8 & & 0, & 9 & 7 \\
\cline{1-6}
 & & & 2 & 1 & 1 & 4 & & & \\
- & & & 2 & 1 & 1 & 4 & & & \\
\cline{1-6}
 & & & & & & 0 & & &
\end{array}$$

Volver a la sección principal

Capítulo 7

Para saber más

En esta sección se estudiarán algunos conceptos más avanzados relacionados con los temas vistos anteriormente.

7.1 Reglas de divisibilidad

Volver a la sección principal

7.1.1 Divisibilidad por 6

Definición 7.1
Un número es divisible por 6 si es divisible entre 2 y entre 3 a la vez.

Ejemplo 7.1

Determine si los siguientes números son divisibles por 6:

- 1 932
- 446

Solución:

1 932

El dígito de las unidades de 1 932 corresponde a 2 (número par), por lo tanto 1932 es divisible por 2.
Ahora, analice la suma de sus dígitos:

$$1\,932$$

$$1+9+3+2=15$$

Dado que 15 es un múltiplo de 3, se dice que 1 932 es divisible por 3.
Como 1932 es divisible por 2 y 3, se dice que es divisible por 6. Además, si se realiza la división se obtiene:

$$1\,932 \div 6 = 322$$

Dado que el cociente es un número entero, se tiene que el residuo es igual a 0.

446

El dígito de las unidades de 446 corresponde a 2 (número par), por lo tanto 446 es divisible por 2.
Ahora, analice la suma de sus dígitos:

$$446$$

$$4+4+6=14$$

Dado que 14 NO es un múltiplo de 3, se dice que 446 NO es divisible por 3.
Como 446 es divisible por 2 pero NO es divisible por 3, se dice que NO es divisible por 6. Además, si se realiza la división se obtiene:

$$446 \div 6 = 74,34$$

Dado que el cociente es un número decimal, se tiene que el residuo es diferente a 0.

7.1.2 Divisibilidad por 7

Para comprobar si un número es divisible por 7, sin tener que efectuar la división, se puede seguir un procedimiento sencillo:

1) Se separa el dígito de las unidades y se multiplica por 2.
2) Al resto de dígitos se le resta el resultado anterior.
3) Si el resultado es múltiplo de 7, el número original es divisible por 7. Puede ser que el número obtenido tenga aún muchos dígitos y no pueda determinar fácilmente si es divisible por 7, en ese caso, vuelva a repetir los pasos.

Para mayor claridad, puede observar los ejemplos.

Video 7.1

En este video podrá observar la explicación de la regla de divisibilidad por 7.

Ejemplo 7.2

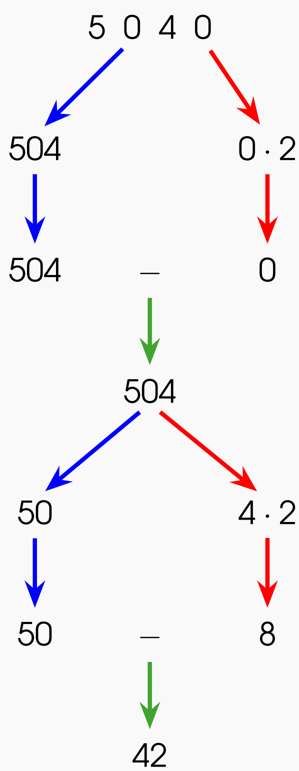
Determine si los siguientes números son divisibles por 7:

- 5 040
- 421

Solución:

5040

Se realizará el proceso descrito anteriormente, así:



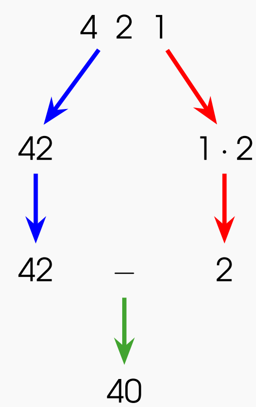
Como 42 es múltiplo de 7, entonces 5 040 es divisible por 7. Además, si se realiza la división se obtiene:

$$5\,040 \div 7 = 720$$

Dado que el cociente es un número entero, se tiene que el residuo es igual a 0.

421

Se realizará el proceso descrito anteriormente, así:



Como 40 NO es múltiplo de 7, entonces 421 NO es divisible por 7. Además, si se realiza la división se obtiene:

$$421 \div 7 = 60,143$$

Dado que el cociente es un número decimal, se tiene que el residuo es diferente a 0.

7.1.3 Divisibilidad por 11

Para comprobar si un número es divisible por 11, sin tener que efectuar la división, se puede seguir un procedimiento sencillo:

1) Se separan (y se suman entre sí) los dígitos que se ubican en las posiciones pares

2) De igual forma se hace con los dígitos que se ubican en las posiciones impares (estos también se suman entre sí).

3) Se restan esos dos totales y si dicha diferencia es múltiplo de 11, entonces el número original es divisible por 11.

Para mayor claridad, puede observar los ejemplos

Video 7.2

En este video podrá observar la explicación de la regla de divisibilidad por 11.

Ejemplo 7.3

Determine si los siguientes números son divisibles por 11:

- 41 580
- 8 225 010

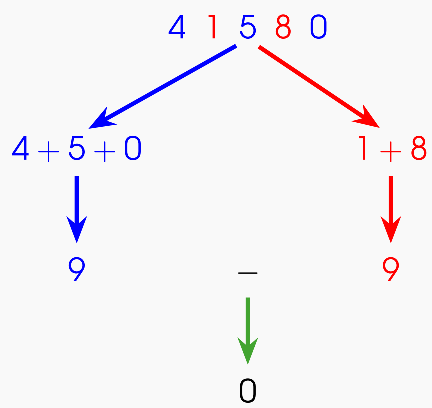
Recuerde que...

El 0 es múltiplo de cualquier número.

Solución:

41 580

Se realizará el proceso descrito anteriormente, así:



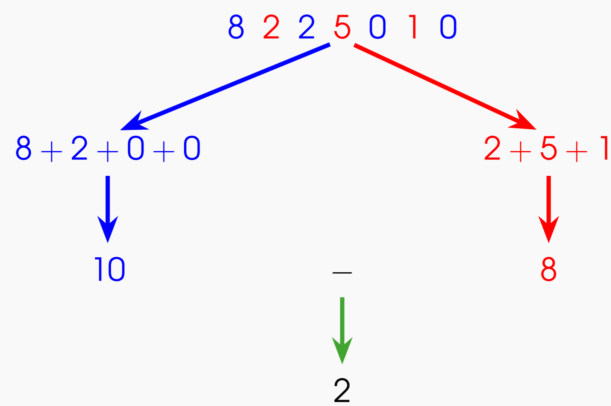
Recuerde que 0 es múltiplo de cualquier número, por lo tanto, es múltiplo de 11, entonces 41 580 es divisible por 11. Además, si se realiza la división se obtiene:

$$41\,580 \div 11 = 3\,780$$

Dado que el cociente es un número entero, se tiene que el residuo es igual a 0.

8 225 010

Se realizará el proceso descrito anteriormente, así:



Como 2 NO es múltiplo de 11, entonces 8 225 010 NO es divisible por 11. Además, si se realiza la división se obtiene:

$$8\,225\,010 \div 11 = 747\,728,18$$

Dado que el cociente es un número decimal, se tiene que el residuo es diferente a 0.

7.2 Divisores de un número

Si se desea conocer **todos** los divisores de un número, se debe emplear un método que permita calcularlos de forma ordenada, de lo contrario puede resultar muy complejo su cálculo.

En esta sección, se enseñará un método que se ha apodado popularmente como "arcoiris", esto con el fin de hacerlo más visual y sencillo. Se explicará este método por medio de un ejemplo.

Video 7.3

En este video se explicará como encontrar los divisores del número 42.

En general, se denota como D_a al conjunto de divisores de un número a.

Ejemplo 7.4

Encuentre todos los divisores del número 48.

Solución:
Recuerde que todo número tiene dos divisores: el 1 y el mismo número, en este caso 48. Se va a colocar estos números en los extremos de nuestro conjunto y se unirán con una línea:

$$D_{48} = \{1 \qquad\qquad 48\}$$

Ahora bien, como ya se conocen algunas reglas de divisibilidad (o se conocen las tablas de multiplicar), entonces, se pueden ir buscando número divisores del 48, que vayan en orden después del 1 y se van uniendo con líneas.

Se tiene que el 48 es divisible por 2, pues $48 \div 2 = 24$. Así que se incorpora ambos números a nuestro conjunto:

$$D_{48} = \{1, \quad 2 \qquad\qquad 24, \quad 48\}$$

Se tiene que el 48 es divisible por 3, pues $48 \div 3 = 16$. Así que se incorpora ambos números a nuestro conjunto:

$$D_{48} = \{1,\quad 2,\quad 3 \qquad\qquad 16,\quad 24,\quad 48\}$$

Se tiene que el 48 es divisible por 4, pues $48 \div 4 = 12$. Así que se incorpora ambos números a nuestro conjunto:

$$D_{48} = \{1,\quad 2,\quad 3,\quad 4 \qquad\qquad 12,\quad 16,\quad 24,\quad 48\}$$

Se tiene que el 48 es divisible por 6, pues $48 \div 6 = 8$. Así que se incorpora ambos números a nuestro conjunto:

$$D_{48} = \{1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 6, \qquad 8,\quad 12,\quad 16,\quad 24,\quad 48\}$$

El número que sigue que se debería probar es 7, pero 48 no es divisible por 7. Además, como se puede observar, el siguiente número para probar es 8, pero ya aparece en el "arcoiris". Así que ya se ha concluido el proceso.
Por lo tanto los divisores de 48 corresponden a:

$$D_{48} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 48\}$$

Ejemplo 7.5

Encuentre todos los divisores del número 36.

Solución: Se inicia colocando 1 y 36 como divisores:

$$D_{36} = \{1 \qquad\qquad 36\}$$

Se tiene que el 36 es divisible por 2, pues $36 \div 2 = 18$. Así que se incorpora ambos números a nuestro conjunto:

$$D_{36} = \{1, \quad 2 \qquad\qquad\qquad 18, \quad 36\}$$

Se tiene que el 36 es divisible por 3, pues $36 \div 3 = 12$. Así que se incorpora ambos números a nuestro conjunto:

$$D_{36} = \{1, \quad 2, \quad 3 \qquad\qquad 12, \quad 18, \quad 36\}$$

Se tiene que el 36 es divisible por 4, pues $36 \div 4 = 9$. Así que se incorpora ambos números a nuestro conjunto:

$$D_{36} = \{1, \quad 2, \quad 3, \quad 4 \qquad 9, \quad 12, \quad 18, \quad 36\}$$

Se tiene que el 36 es divisible por 6, pues $36 \div 6 = 6$. Así que se incorpora este número a nuestro conjunto:

$$D_{36} = \{1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 6, \quad 9, \quad 12, \quad 18, \quad 36\}$$

El número que sigue que se debería probar es 7, pero 36 no es divisible por 7. Luego, se debería probar 8, pero 36 no es divisible por 8. Después, se debería probar 9, pero ya aparece en el "arcoiris". Así que ya se ha concluido el proceso.

Por lo tanto los divisores de 36 corresponden a:

$$D_{36} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36\}$$

Volver a la sección principal

7.3 Factorización prima de números

Definición 7.2
Factorizar consiste en expresar un número compuesto como el producto de divisores que cuando se multiplican dan como resultado el número original.

A continuación se explican dos métodos para obtener la factorización prima de un número.

7.3.1 Método del árbol

Consiste en reescribir un número como el producto de dos números, así sucesivamente hasta llegar a que los factores sean números primos.

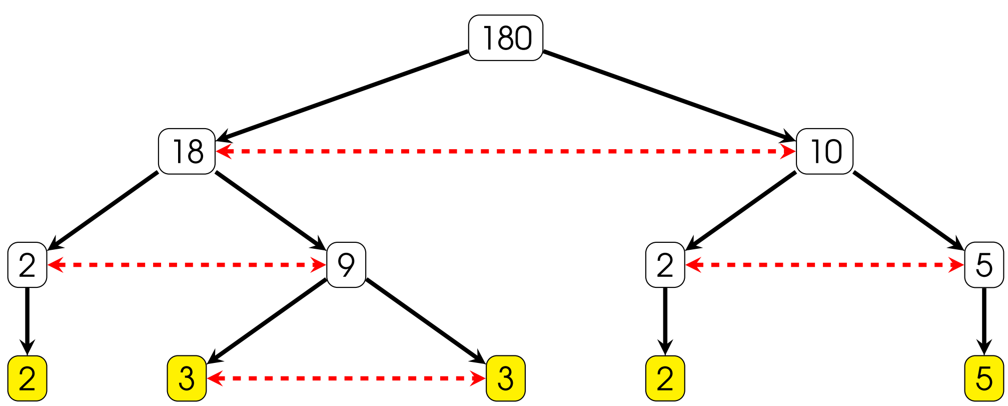
Ejemplo 7.6

Utilice el método del árbol para factorizar los siguientes números:

- 180
- 144

Solución:

- Para factorizar el número 180, se tiene:



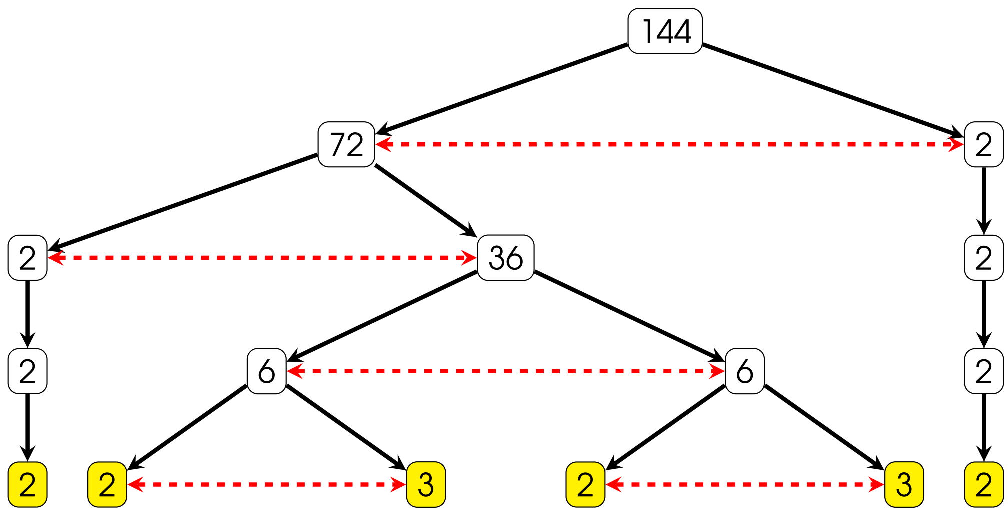
Los valores coloreados, corresponden a la factorización en números primos del número 180, así:

$$180 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Si se representa en términos de potencia, se podrá escribir de la siguiente forma:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

- Para factorizar el número 144 se tiene:



Los valores coloreados, corresponden a la factorización en números primos del número 144.

$$144 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Si se representa en términos de potencia, se podrá escribir de la siguiente forma:

$$144 = 2^4 \cdot 3^2$$

Este proceso es útil cuando se tienen números de varias cifras, en particular, si son múltiplo de 10.

Video 7.4

En este video se explica el "método del árbol" para la factorización prima de un número.

Recuerde

La propiedad conmutativa de la multiplicación, indica que el orden de los factores no altera el producto.

7.3.2 Método de primos consecutivos

En este caso, se procede a dividir el número dado sucesivamente entre números primos que sean divisores del mismo. No es necesario que los divisores primos vayan en orden, pero se recomienda para que no se deje por fuera algún divisor. Del lado derecho se escriben los divisores primos y del lado izquierdo, los cocientes de cada división.

Video 7.5

En este video se explica el "método de primos consecutivos" para la factorización prima de un número

Ejemplo 7.7

Utilice el método de primos consecutivos para factorizar los siguientes números:

- 84
- 660

Solución:

84

Se tiene:

$$\text{Cocientes}\left\{\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 1 \\ 7 & \end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\text{Divisores}$$

Por tanto:

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

660

Se tiene:

$$\text{Cocientes}\left\{\begin{array}{c|c} 660 & 2 \\ 330 & 2 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}\right\}\text{Divisores}$$

Por tanto:

$$660 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

Volver a la sección principal

7.4 Multiplicación de fracciones y la ley de cancelación

Una multiplicación de fracciones se puede hacer al factorizar los numeradores y denominadores en factores primos y luego aplicando la ley de cancelación, pero, procurando formar la mayor cantidad de fracciones unitarias.

Ejemplo 7.8

Realice la siguiente operación y simplifique al máximo.

$$\frac{30}{18} \cdot \frac{28}{10} \cdot \frac{6}{22}$$

Solución:
Para aplicar este método primero se debe realizar la factorización prima de cada número, así se tiene:

- $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
- $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$
- $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$
- $10 = 2 \cdot 5$
- $6 = 3 \cdot 2$
- $22 = 2 \cdot 11$

Así, se tiene que:

$$\frac{30}{18} \cdot \frac{28}{10} \cdot \frac{6}{22} = \frac{30 \cdot 28 \cdot 6}{18 \cdot 10 \cdot 22}$$

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 11}$$

Como la multiplicación es conmutativa se pueden reordenar los factores de la multiplicación anterior:

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}$$

Todas las fracciones con igual numerador que denominador se pueden cambiar por un 1, pues son fracciones unitarias, así:

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}$$
$$= \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{7 \cdot 2}{11}$$
$$= \frac{14}{11}$$

Volver a la sección principal