Escuela de Matemática

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Práctica del curso

Cálculo Superior

Selección de ejercicios con respuestas

I Semestre, 2022

Compartir

https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/no_revisado

Revista digital

Matemática, Educación e Internet. (https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/no_revisado/).

Créditos

Esta práctica: “Práctica del curso Cálculo Superior. Selección de ejercicios” es el resultado de la selección de ejercicios de las prácticas consignadas en la bibliografía que aparece al final de este documento. En la elaboración de este material participaron los siguientes profesores:

Walter Mora	Coordinador
Alex Borbón	Coordinador
Angie Solís	Coordinadora
Juan José Fallas	
Jeffry Chavarría	
Jorge Monge	
José Luis Espinoza	
Gilberto Vargas	
Alcides Astorga	
Alejandra Jiménez	
Edgar Ávila	

Citar como:
W. Mora et al. “Práctica del curso Cálculo Superior. Selección de ejercicios.” Revista digital, Matemática, Educación e Internet.
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/practicas/

Capítulo 1

1.1 Parábolas

1.1.1 Determine las características (vértices, foco, lado recto, directriz) de las parábolas cuyas ecuaciones son:

a.) $2x^2 - 12x + 14 - 14y = 0$

b.) $y^2 + 6y - 2x + 5 = 0$

c.) $3x^2 + 6x + 6y = -27$

1.1.2 Determine la ecuación canónica de la parábola con foco $(1, -1)$ y cuya directriz $x = -3$

1.1.3 Determine la ecuación canónica de la circunferencia con centro en el vértice de la parábola del punto a.) y radio 5

1.1.4 Determine en cada caso la ecuación canónica de la parábola que satisface las condiciones dadas. Haga el dibujo correspondiente.

a.) Foco en $(3, -1)$. Ecuación de la directriz: $y = 1$

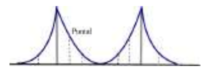
b.) Vértice en $(-4, 3)$. Foco en $(-4, 1)$.

c.) Vértice en $(0, -6)$. Contiene el punto $(6, -3)$. Eje paralelo al eje y.

d.) Eje paralelo al eje x. Vértice en $(1, 3)$ y contiene al punto $(-1, -1)$.

1.1.5 Una nave espacial en el espacio exterior es avistada desde la Tierra moviéndose en una ruta parabólica, cuyo foco es nuestro planeta. Cuando la recta que va de la Tierra a la nave espacial forma un ángulo de 90° con el eje de simetría de la parábola, la nave se encuentra a 40 millones de millas. ¿Qué tan cerca pasará de la Tierra la nave espacial?.

1.1.6 Los cables del tramo de un puente suspendido tienen la forma de una parábola. Si las torres tienen una separación de 800 metros y los cables están atados a ellas a una altura de 400 metros con respecto al piso del puente, determine la longitud de un puntal del puente que está ubicado a 100 metros de una de las torres. Suponga que el cable toca el piso en el punto medio del puente como se muestra en la figura (1).]]



1.1.7 Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos Q del plano XY tales que equidistan del punto $(2,3)$ y de la recta de ecuación $x = 4$.

1.1.8 Determine la ecuación de la parábola con foco en $(2,\ 0)$ **y** vértice en $(0,0)$.

1.1.9 Determine la ecuación de la parábola con foco en $(1,\ 2)$ **y** vértice en $(3,\ 2)$.

1.1.10 Determine la ecuación de la parábola con vértice en $(0,\ -6)$ y que contiene el punto $(6,\ -3)$ **y** su eje es paralelo al eje de las ordenadas.

1.2 Elipses

1.2.1 Determine, en cada caso, la ecuación canónica de la elipse que satisface las condiciones dadas. Haga el dibujo correspondiente.

a.) Focos en $(-2,3)$ **y** $(4,3)$. Longitud del eje mayor: 10

b.) Centro en $(5,\ 1)$. Un vértice está en $(5,\ 4)$. Extremo del eje menor $(3,\ 1)$.

c.) Los ejes de la elipse están en los ejes coordenados. Los puntos $(4,\ 3)$ **y** $(-1,4)$ pertenecen a la elipse.

1.2.2 Determine las coordenadas del centro, los focos, vértices **y** extremos del eje menor, para cada una de las elipses, cuyas ecuaciones se dan a continuación:

a.) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y + 4 = 0$

b.) $25y^2 + 16x^2 + 50y - 64x - 311 = 0$

c.) $9x^2 + 25y^2 - 36x - 189 = 0$

1.2.3 Determine la ecuación canónica de la circunferencia de radio 5 y con centro en el vértice de la **parábola** elipse de ecuación $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y + 4 = 0$

Ⓡ **1.2.4** Determine la ecuación de la elipse cuyos focos están en $(0,\ -5)$ y $(0,5)$. Además el eje mayor tiene una longitud de 14 unidades lineales.

Ⓡ **1.2.5** Determine la ecuación de la elipse que tiene un foco en $(2,\ 0)$, centro en $(0,0)$. Además el eje menor tiene una longitud de 3 unidades lineales.

Ⓡ **1.2.6** Sea $P = (x,\ y)$ un punto de una elipse. Determine la ecuación para la cual *la suma de las distancias* de P al punto $(2,2)$ y de P al punto $(10,2)$, es 10. Realice el dibujo de la elipse.

1.3 Hipérbolas

Ⓡ **1.3.1** Sean $P = (x,\ y)$, $A = (-3,0)$, $B = (-3,3)$.Determine la ecuación de la hipérbola que contiene los puntos P, para los cuales $|d(P,\ A) - d(P,\ B)| = 2$

Ⓡ **1.3.2** Determine, en cada caso, la ecuación canónica de la hipérbola que satisface las condiciones dadas. Haga el dibujo correspondiente.

a.) Asíntotas con ecuación $y = 3x, y = -3x$ y vértices $(4,\ 0)$ y $(-4,0)$.

b.) Vértices en $(-3,1)$ y $(5,1)$. Contiene el punto $(-5,3)$.

c.) Vértices en $(2,\ -5)$ y $(2,7)$. Focos en $(2,\ -6)$ y $(2,8)$

Ⓡ **1.3.3** Determine las coordenadas de los vértices, focos y las ecuaciones de las asíntotas de las hipérbolas cuyas ecuaciones son:

a.) $9x^2 - 4y^2 - 16y - 52 = 0$

b.) $3x^2 - 2y^2 + 6x - 8y - 17 = 0$

c.) $y^2 - 2y - 16x^2 - 32x = 31$

Ⓡ **1.3.4** Determine la ecuación de la hipérbola cuyos focos están en $(0,\ -5)$ y $(0,5)$, además sus vértices están localizados en $(0,\ -2)$ y $(0,2)$.

Ⓡ **1.3.5** Determine la ecuación de la hipérbola cuyo centro está en $(0,0)$, un vértice en $(3,\ 0)$ y uno de sus focos en $(5,\ 0)$.

1.4 Ecuación general de segundo grado

Ⓡ **1.4.1** Para cada una de las siguientes ecuaciones de segundo grado, determine si la ecuación corresponde a la ecuación de una cónica propia y, en caso afirmativo, determine la ecuación canónica de la cónica, indique todas sus características y haga la representación gráfica.

a.) $18y - 16x + 4x^2 - 9y^2 + 43 = 0$

b.) $9x^2 + 36x - 4y^2 - 24y - 36 = 0$

c.) $2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y - 1 = 0$

d.) $y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$

e.) $y^2 + 4x^2 - 6y - 16x - 11 = 0$

f.) $9x^2 - y^2 + 54x + 10y + 55 = 0$

g.) $36x^2 + 9y^2 + 48x - 36y + 43 = 0$

h.) $4x - y^2 - 2y - 33 = 0$

i.) $x^2 + 4x + 8y - 12 = 0$

j.) $3x^2 - 2y^2 + 6x - 8y - 17 = 0$

k.) $9x^2 - 4y^2 - 16y = 52$

l.) $x^2 - 8x + 4y + y^2 = 5$

1.5 Lugares geométricos

Ⓡ **1.5.1** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x,\ y)$ del plano, que equidistan de los puntos $A(3,\ -5)$ **y** $B(-6, 2)$

Ⓡ **1.5.2** Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x,\ y)$ del plano, tales que su distancia al punto $Q(2, 4)$ sea igual a 3. De qué curva se trata?

Ⓡ **1.5.3** ¿Cuál es el lugar geométrico cuya suma de distancias a los puntos $A(0,1)$ y $B(0,\ -1)$ es 4?. Hallar su ecuación.

Ⓡ **1.5.4** ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos $P(x,\ y)$ del plano cuyo cociente de distancias a los puntos $A(6,0)$ y $B(-2,0)$ es 3 (esto es $\dfrac{d(P,A)}{d(P,B)} = 3$)?

Ⓡ **1.5.5** (*) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x,\ y)$ del plano, que equidistan de los puntos $A(3,\ -5)$ y $B(-6,2)$

Ⓡ **1.5.6** (*) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x,\ y)$, del plano tales que su distancia al punto $A(1,0)$ es el triple de su distancia a la recta $x = 2$. Identifique la figura que se obtiene.

Capítulo 2

2.1 Curvas en el espacio

2.1.1 Grafique cada una de las siguientes curvas en el espacio tridimensional.

a.) $y = 4-(x-1)^2$ en el plano $z = 2$

b.) $(z-2)^2 = 4(x-2)$ en el plano $y = 2$

c.) $y^2 = 4+z^2-2z$ en el plano $x = 2$

d.) $x^2-x = 4-z^2-2z$ en el plano $y = 4$

e.) $z-x = 1-x^2$ en el plano $y = -1$

f.) $x^2 = y$ en el plano $z = 0$

g.) $z = 3x$ en el plano $y = 0$

h.) $(z-1)^2+y^2 = 4$ en el plano $x = 0$

i.) $2-z = y^2-4y+4$ en el plano $x = 0$

2.2 Planos, Cilindros y Superficies Cuádricas

2.2.1 Para cada una de las ecuaciones que se dan a continuación, represente la correspondiente superficie en un sistema de coordenadas rectangular tridimensional.

a.) $x+2y-3z = 1$

b.) $x^2-2x = y^2$

c.) $2x+y-z = 0$

d.) $x-2y = 4$

e.) $2x-2y+z = 0$

f.) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{9}+z^2 = 1$

g.) $x^2 - 2y + z - 1 = -y^2$

h.) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{9} - z^2 = 1$

i.) $2x^2 - 2y = 6x$

j.) $x - 2 = y$

k.) $z^2 + y^2 = 4$

l.) $z^2 - z = 5 - y$

m.) $4z - x^2 - y^2 = 0$

n.) $2z + x^2 + y^2 = 16$

ñ.) $3x + 2z = 12$

o.) $-\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = -1$

p.) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$

q.) $x^2 + (z-2)^2 = 2 - y$

r.) $\dfrac{x^2}{4} + (y-2)^2 = 4 - z$

s.) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{5} = 1$

t.) $z - 2x + y = 0$

u.) $z^2 + 4y^2 - x = 0$

v.) $z - y^2 + (x-1)^2 = 2$

w.) $(z-2)^2 + \dfrac{(x-2)^2}{4} - y^2 = 4$

x.) $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{4} - z^2 = 1$

Ⓡ **2.2.2** Considere la superficie cuádrica S de ecuación

$$4 - y = x^2 + (z-1)^2$$

Cálcule y dibuje las trazas que se obtienen con los planos $y = 0, y = 3, z = 1, x = 0$ e indique que tipo de curva es, en cada caso y realice la gráfica S

2.2.3 Considere la superficie cuádrica S de ecuación

$$(y-1)^2 - x^2 - 4(z+1)^2 = 1$$

a.) Cálcule y dibuje las trazas que se obtienen con los planos $x = 0, z = -1, y = 5, y = -3$ indique que tipo de curva es en cada caso.

b.) Realice la gráfica de S

2.3 Sólidos Simples

2.3.1 En cada uno de los casos siguientes, dibuje cada sólido Q limitado por las superficies cuyas ecuaciones se dan a continuación.

a) $\begin{cases} x^2 = -(z-3) \\ z = 2 \\ y + z = 3 \\ Q \text{ está en el primer octante.} \end{cases}$

b) $\begin{cases} z = 3 \\ y + z = 5 \\ z = 4 - x^2 \\ Q \text{ está en el primer octante.} \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 \\ 4z + 3y = 12 \\ y = 4 \\ z = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} z = 1 - x^2 \\ y + z = 1 \\ Q \text{ está en el primer octante.} \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + 2z = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \\ Q \text{ está en el primer octante.} \end{cases}$

f) $\begin{cases} y^2 = 4 - z \\ x - y = 2 \\ z = 0, \ x = 0, \ y = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x + 3z = 6 \\ (y-2)^2 = 2x - 2 \\ y = 2, \ y = 4 \\ x = 0, \ z = 0 \end{cases}$

h) . $\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ x - y = 0 \\ x + y = 2 \\ x = 0, z = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ y - x^2 = 0 \\ x + z = 1 \\ z = 0, x = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} z = 9 - x^2 \\ 5y - 5x + 2z = 0 \\ y = 3 \\ x = 0, \ y = 0, \ z = 0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ y = 2, \ x = 2 \\ x = 0, \ y = 0, \ z = 0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} z = 6 - y \\ y - 3 = (x-1)^2 \\ x = 0, \ y = 0, \ z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x^2 = 16 - 4z^2 \\ 4x - 4y + z = 4 \\ x = y = z = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

n) $\begin{cases} (y-2)^2 = (x-2) \\ x + z = 6 \\ y = 1 \text{ y } y = 4 \\ x = 0 \text{ y } z = 0. \end{cases}$

ñ) $\begin{cases} y = x^2 \\ y + z = 4 \\ Q \text{ está en el primer octante.} \end{cases}$

o) $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 \\ 4x - 4y + z = 4 \\ y = 3 \\ Q \text{ está en el primer octante.} \end{cases}$

p) $\begin{cases} z = 4 - x^2 \\ z = 3x \\ y = 4 \\ x = 0, y = 0 \end{cases}$

Introducción.

a.) **"Una función de clase C^1"** es una función diferenciable (una función con derivadas parciales continuas).

b.) **"Una función de clase C^2"** es una función cuyas derivadas parciales de segundo orden, son continuas.

c.) En esta lista de ejercicios se usa indistintamente $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ **o** z_u.

d.) Si f es de clase C^2, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_u(u,\, v)) = f_{u\ \ u} \cdot u_x + f_{uv} \cdot v_x$$

e.) Recordemos que si f_{uv} y f_{vu} son continuas en un conjunto abierto D, entonces $f_{uv} = f_{vu}$ en D.

3.1 Dominios

Ⓡ **3.1.1** Para cada una de las siguientes funciones determine su dominio y si es posible represéntelo gráficamente en el plano XY :

a.) $f(x,\, y) = \sqrt{4 - (x-1)^2 - y^2}$

b.) $f(x,\, y) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - y + 4}$

c.) $f(x,\, y) = \sqrt{y^2 - x}$

d.) $f(x,\, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2 + 4}$

e.) $f(x,\, y) = \sqrt{(x-4)^2 + y^2 - 1}$

f.) (*) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{yx}{x - y^2 + 2y + 4}}$ (Sugerencia: El subradical debe ser ≥ 0, esto lo puede desglozar en casos: $\dfrac{+}{+}$ y $\dfrac{-}{-}$. Y no debe olvidar que el denominador no se debe anular.)

3.2 Derivadas Parciales

Ⓡ **3.2.1** Considere la función $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$. Determine $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_P$ y $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_P$ con $P(1,1)$.

Ⓡ **3.2.2** Considere la función $f(x,y) = 4 + (x-1)^2 + y^2$ y $P(1,0)$

a.) Determine $f(P)$

b.) Determine, si es posible, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_P$ y $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_P$

dominio de f?

Ⓡ **3.2.3** Considere la función $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ y $P(-1,1)$

a.) Determine $f(P)$

b.) Determine, si es posible, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_P$ y $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_P$

dominio de f?

Ⓡ **3.2.4** Considere la función $f(x,y) = (x-1)^2 - y^2$, y $P(1,0)$.

a.) Determine $f(P)$

b.) Determine, si es posible, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_P$ y $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_P$

de f?

Ⓡ **3.2.5** Determine en cada caso las derivadas indicadas.

a.) $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ si $f(x,y,z) = e^{xyz} + x \operatorname{sen} y$

b.) z_x **y** z_y si $z = 1 + \arctan(x^2 + y^2)$

c.) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P=(\frac{\pi}{4},1)}$ **y** $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{P=(\frac{\pi}{4},1)}$ si $f(x,\,y) = \tan\left(\dfrac{x}{y}\right) - 3x\ln(2-y)$

Ⓡ **3.2.6** Si $w = x^2y + y^2z + z^2x$, verifique la identidad

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (x+y+z)^2$$

Ⓡ **3.2.7** Sea $z = \sqrt{xy + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$. Demuestre que $zy\dfrac{\partial z}{\partial y} + zx\dfrac{\partial z}{\partial x} = xy$

Ⓡ **3.2.8** Demuestre que $u = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ satisface la ecuación $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u$

Ⓡ **3.2.9** Determine $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ **y** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ en cada caso.

a.) $z = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$

b.) $z = e^x \ln(xy) + \cos(2+\sqrt{x})$

Ⓡ **3.2.10** Verifique que cada una de las funciones que se dan a continuación, satisfacen la ecuación

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

a.) $v = x^2 + y^2 - 2z^2$

b.) $v = e^{-2y}\cos(2x)$

c.) $v = e^{3x+4y}\cos(5z)$

Ⓡ **3.2.11** Determine:

a.) $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial v}$ si $w = \dfrac{x}{v} + v^3x^2 - ve^x$

b.) $\dfrac{\partial^s z}{\partial x \partial y^2}$ si $z = \ln(x^2+y^2)$

c.) $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$ si $w = x^a y^b z^c$ con a, b, c constantes reales.

Ⓡ **3.2.12** Sea $w = \sqrt{x+y-z}$, tal que $x = \sqrt{t} + e^u$, $y = \dfrac{-1}{u} + t$, $z = ut - 3$. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial t}$

Ⓡ **3.2.13** Sea $f(x, y) = x^y$ con $x > 0$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

Ⓡ **3.2.14** La resistencia total R producida por tres conductores con resistencia $R_1, R_2,$ y R_3 conectadas en un circuito en paralelo está dada por la fórmula:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Calcule $\dfrac{\partial R}{\partial R_1}$

Ⓡ **3.2.15** La concentración molecular $C(x, t)$ está dada por $C(x, t) = t^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-x^2}{kt}}$. Verifique que esta función satisface la siguiente ecuación, llamada "Ecuación de Difusión".

$$\frac{k}{4}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

Ⓡ **3.2.16** Sea $w = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, donde $x = \cos(st)$; $y = \operatorname{sen}(st)$; $z = s^2 t$. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial t}$

Ⓡ **3.2.17** Sean f y g de clase C^2 y $z = xf\left(\dfrac{y}{x}\right) + g\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Verifique que

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Ⓡ **3.2.18** Si $w = f(x, y, z)$, la expresión $\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ recibe el nombre de "Laplaciano de f Demuestre que si $r(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, entonces se cumple que:

a.) $\nabla^2(r) = \dfrac{2}{r}$

b.) $\nabla^2\left(\dfrac{1}{r}\right) = 0$

c.) $\nabla^2(\ln r) = \dfrac{1}{r^2}$

Ⓡ **3.2.19** Sea f de clase C^2 y $z = f(u,\ v)$, con $u = x^2y^2,\ v = 5x+1$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy\frac{\partial f}{\partial u} + 4x^3y^3\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 10x^2y\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$$

Ⓡ **3.2.20** Sea $z = x \cdot f(x^2+y^2)$, con f una función de clase C^2. Verifique las siguientes identidades:

a.) $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{x}$

b.) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Ⓡ **3.2.21** Sean $y = f(x), y = g(t)$ dos funciones tales que f satisface la ecuación $\dfrac{d^2f}{dx^2}+\lambda^2 f(x) = 0$ **y** g satisface la ecuación $\dfrac{d^2g}{dt} + k^2\lambda^2 g(t) = 0$, con k **y** λ constantes. Sea $u(x,\ t) = f(x)\cdot \mathbf{g}(\mathbf{t})$, demuestre que u satisface la ecuación: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Ⓡ **3.2.22** Sea f de clase C^2. Sea $z = f(u,\ v)$ tal que $u = x+y,\ v = x^2y^2$. Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ **y** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

Ⓡ **3.2.23** Sea f de clase C^2. Sea $z = f(x,\ y)$, donde $x(r,\ \alpha) = r\cos\alpha,\ \ y(r,\ \alpha) = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$. Demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2$$

Ⓡ **3.2.24** Si $w = x^2y + z^2$; donde $x = \rho\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\phi$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\phi$, $z = \rho\cos\phi$. Determine $\dfrac{\partial w}{\partial \alpha}$ si $\rho = 2,\ \alpha = \pi,\ \phi = \dfrac{\pi}{2}$.

Ⓡ **3.2.25** Sea $z = f(x^2y)$ con f diferenciable. Demostrar que z satisface la ecuación $x\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2y\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Ⓡ **3.2.26** Sea $f(x,\ y) = x^2y^2\,\mathrm{arc\,sen}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

a.) Determine p de tal forma que $f(\lambda x,\ \lambda y) = \lambda^p \cdot f(x,\ y)$ donde λ es una constante real b.) Verifique que $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = pf(x,\ y)$

Ⓡ **3.2.27** Sea $y = f(x + at) + g(x - at)$, tal que f **y** g son funciones de clase C^2. Verifique que y satisface la ecuación $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial^2 x^2}$

Ⓡ **3.2.28** Sea $z = f(u,\ v)$, con f de clase C^2 y $u = x^2 + y^2,\ v = xy$. Verifique que:

a.) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f_u(u,\ v) + 4x^2 f_{uu}(u,\ v) + 4xyf_{uv}(u,\ v) + y^2 f_{vv}(u,\ v)$

b.) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_v(u,\ v) + 4xyf_{uu}(u,\ v) + 2(x^2 + y^2)f_{uv}(u,\ v) + xyf_{vv}(u,\ v)$

c.) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f_u(u,\ v) + 4y^2 f_{uu}(u,\ v) + 4xyf_{uv}(u,\ v) + x^2 f_{vv}(u,\ v)$

Ⓡ **3.2.29** Sea f de clase C^2 y $w = y \cdot f\left(\dfrac{x}{y},\ \dfrac{z}{x}\right)$. Calcule $\dfrac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}$

Ⓡ **3.2.30** Si la ecuación $x^2yz + xy^2z + xyz^2 = 1$ define a z como función implícita de x, y, es decir, $z = z(x,\ y)$; calcule $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ **y** $\dfrac{\partial y}{\partial z}$

Ⓡ **3.2.31** Sea f de clase C^2. Si la ecuación $e^x \operatorname{sen}(z) = f(e^y \cos(z))$ define a z como función implícita de x, y, verifique que

$$-\frac{\partial z}{\partial x}\cos^2(z) + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}^2(z) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2z)$$

Ⓡ **3.2.32** Sea g de clase C^2 y supongamos que la ecuación $g\left(\dfrac{xy}{z},\ x^2 + y^2\right) = 0$ define a z como función de x, y; verifique que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z(x^2 - y^2)}{xy}$$

Ⓡ **3.2.33** Sea f y g de clase C^2 y $z = x^2 f(x + g(y))$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$

Ⓡ **3.2.34** Sea f de clase C^2 y $z = f(x + y,\ x^2y^2)$, calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

Ⓡ **3.2.35** Sea F de clase C^1 y $F(u,\ v) = -u - v$, donde u y v vienen definidas por $u^2 = x - y, v^2 = x + y$. Verifique que

a.) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{-(u+v)}{2uv}$

b.) $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{v-u}{2uv}$

Ⓡ **3.2.36** Sea f de clase C^1. Si la ecuación $\dfrac{z}{x} = f\left(\dfrac{y}{z}\right)$ define a z como función implícita de x, y, demuestre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

Ⓡ **3.2.37** Sean f y g de clase C^2 y $z = f(x^2 + y,\ x) + g(3x^2 - yx)$; calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

Ⓡ **3.2.38** Si la ecuación $z^4 + x^2 z + y^2 = 0$ define a z como función implícita de x, y; verifique que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{4x^3 y - 32xz^3 y}{(4z^3 + x^2)^3}$$

Ⓡ **3.2.39** Sea F de clase C^1. Mostrar que $F(xy,\ z - 2x) = 0$ satisface la ecuación: $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x$

Ⓡ **3.2.40** Supongamos que $F(x,\ y,\ z) = 0$ define de manera implícita a x como función de y, z, también a y como función de x, z y también a z como función de x, y. Demuestre que

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

Ⓡ **3.2.41** Sean $f,\ g$ funciones de clase C^2 y $w = \dfrac{1}{y}[f(ax + y) + g(ax - y)]$ con a constante. Demuestre que:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{a^2}{y^2}$$

Ⓡ **3.2.42** Sea $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Demuestre que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{2}{u}$

Ⓡ **3.2.43** (*) Sean u y v funciones de x, y de clase C^1. Si $u^2 - v = 3x + y$ y $u - 2v^2 = x - 2y$, verifique que:

a.) $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{2u - 3}{1 - 8uv}$

b.) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1 - 12v}{1 - 8uv}$

c.) $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{-4u - 1}{1 - 8uv}$

d.) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-2 - 4v}{1 - 8uv}$

Ⓡ **3.2.44** (*) Se dice que una función f es homogénea de grado n si satisface la ecuación $f(tx,\ ty) = t^n f(x,\ y)$. Verifique que si f de clase C^2 y también es homogénea de grado n, entonces:

a.) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = nf(x,\ y)$

b.) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n\ - 1)f(x,\ y)$

c.) $\dfrac{\partial}{\partial x}(f(tx,\ ty)) = t^{n-1} f_x(x,\ y)$

3.3 Rectas normales, rectas tangentes, plano tangente.

Ⓡ **3.3.1** Determine la ecuación del plano tangente y de la recta normal para cada una de las superficies cuyas ecuaciones se dan a continuación y en los puntos P dados.

a.) $z = 2x^2 - 4y^2,\ \ P = (2, 1, 4)$

b.) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy,\ \ P = (3, 4,\ -7)$

c.) $x^3 + y^3 + z^3 = 6 - xyz,\ \ P = (1, 2, 1)$

d.) $4+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x+y+z,\quad P=(2,3,6)$

e.) $z=9-x^2-y^2,\quad P=(1,2,4)$

Ⓡ **3.3.2** Considere la superficie S de ecuación $e^{xy}+xz=yz^3$.

(a.) Calcule la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}z(1,0)$ con $\mathbf{u}=(-2,2)$.

(b.) Calcule una ecuación del plano tangente a S en $P=(-1,0,1)$

Ⓡ **3.3.3** Considere la función $f(x,\,y)=9-y^2-(x-2)^2$ **y** , $P(2,0)$

a.) Determine la ecuación de la recta tangente l_1 en P en la dirección del eje X.

b.) Determine la ecuación de la recta tangente l_2 en P en la dirección del eje Y.

c.) Determine la ecuación del plano π que contiene a las rectas l_1 **y** l_2.

Ⓡ **3.3.4** Sea S una superficie de ecuación $z=\ln(x^2+y^2)+x(y+3)$ y $Q=(1,0,3)\in S$.

a.) Determine una ecuación de la recta tangente en la dirección del eje X, es decir, en la dirección de $\mathbf{u}=(1,0)$.

b.) Determine una ecuación de la recta tangente en la dirección $\mathbf{u}=(-1,3)$.

c.) Determine una ecuación cartesiana del plano tangente a S en Q

Ⓡ **3.3.5** Determine la ecuación de la recta tangente a la curva **C**, en el punto P dado, sabiendo que **C** se obtiene al intersecar la superficie S con el plano π indicado, en cada uno de los siguientes casos,

a.) $S: x^3+y^3+xyz-6=0,\quad \pi:\; y=2,\quad P=(1,2,1)$

b.) $S: 36x^2-9y^2+4z^2-36=0,\quad \pi:\; z=-3,\quad P=(1,2,\,-3)$

3.4 Gradiente y Derivada direccional

Ⓡ **3.4.1** Para cada una de las superficies que siguen, determine:

a.) La razón de cambio de z en el punto P dado y en la dirección $\vec{u}$ o en la dirección α indicada.

b.) El valor de la máxima y de la mínima razón de cambio de z en el punto P.

c.) La dirección de esa máxima o mínima razón de cambio

i.) $z = x^2 + 2xy, \quad P = (3,1), \quad \vec{u} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

ii.) $z = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2), \quad P = (2,1), \ \vec{u} = (2,1)$

iii.) $x^2y^2 + xz = 10 + 2y^3 \quad P = (2,1), \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$

iv.) $z - y^2 = -4 \quad P = (-1,2), \quad \alpha = 0$

v.) $z = x^3y - x^2 - 3y \quad P = (1,3), \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$

Ⓡ **3.4.2** Considere la superficie S definida por la ecuación $3x^2y^2 - 6yz = z^2\ln x$, también esta ecuación define a z como función de x, y. Sea $P = (1, -2, -1) \in S$.

a.) Calcule el valor de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ en P.

b.) Determine la derivada direccional de z en P, en la dirección del vector $\vec{u}$, donde $\vec{u} = (2, -2)$.

Ⓡ **3.4.3** Determine la derivada direccional de z en el punto $Q = (2,1,z_0)$ con $z_0 \neq 0$, en la dirección del vector $\vec{u}$ que va desde el punto $A = (2,3)$ hasta $B = (1,2)$, donde z es una función en las variables x, y, definida en forma implícita por la ecuación $z^2 + zx - (y-1)^2 + yx = 2$.

Ⓡ **3.4.4** Hallar los vectores unitarios $\vec{u}$ para los cuales la derivada direccional de $z = x^2 + 3y + 1$ se anula en el punto $P = (1,1)$ siguiendo la dirección de $\vec{u}$.

Ⓡ **3.4.5** Sea S una superficie de ecuación $3z^2 + 2x + 3y = 24$, con $z > 0$. Determine $D_u z(P)$ donde $P = (3,2)$; además $\vec{u}$ es cualquier vector perpendicular a $\nabla z(P)$.

Ⓡ **3.4.6** Sea f una función definida por $f(x,y) = x^3 + 2x^2 - xy - x + 2y^2 + 8y$. Determine el punto o los puntos P, de tal manera que la derivada direccional de f en P sea igual a $9/5$ en la dirección del vector $\vec{u} = (4,3)$ y la derivada direccional de f en el punto P es igual a 4 en la dirección del vector $v = (0, 5)$.

Ⓡ **3.4.7** Considere la superficie S de ecuación $3x^2 - y^2 + z - 12 = 0$ y $P = (-2, -1, 1)$ un punto de S. Sean A y B dos puntos tales que $A = (1,3)$ y $B = (-4,5)$. Determine:

a.) La derivada direccional de z en $(-2, -1)$ en la dirección del vector que va desde A hasta B.

b.) Los vectores unitarios $\vec{u} = (a,\ b)$ tales que la derivada direccional de z en $(-2,\ -1)$ **y** siguiendo la dirección de $\vec{u}$, sea igual a 2.

c.) Los vectores unitarios $\vec{u} = (a,\ b)$ tales que la derivada direccional de z en $(-2,\ -1)$ **y** siguiendo la dirección de $\vec{u}$, sea máxima.

R **3.4.8** Suponga que sobre una cierta región del espacio, el potencial eléctrico V está dado por

$$V(x,y,z) = 5x^2 - 3y + xyz$$

a.) Determine la razón de cambio del potencial eléctrico en el punto $P = (3,4,5)$; siguiendo la dirección del vector cuyo punto inicial es $A = (1,3,0)$ **y** el punto final es $B = (2,1,1)$.

b.) ¿En qué dirección se da la máxima razón de cambio a partir de P? y ¿Cuál es la magnitud de esta mayor razón de cambio?

R **3.4.9** La ecuación $\dfrac{x^2y}{2} - yz - e^{xyz} = 0$ define a z como función implícita de x, y. Considere el punto $P = (1,2,0)$ de la superficie definida por la ecuación anterior.

a.) Calcule la derivada direccional de z en $(1,\ 2)$ **y** en la dirección de un vector normal a la superficie de ecuación $x^2 + 2y^2 = 4$ en el punto $Q = (2,0)$ de esta superficie.

b.) Determine la dirección en que la derivada direccional de z en $(1,\ 2)$ es máxima, determine este valor máximo.

c.) Verifique que el punto P pertenece también a la superficie de ecuación $32z - 8x^2 - y^2 + 12 = 0$. ¿Tienen ambas superficies el mismo plano tangente? Justifique.

R **3.4.10** En cierta montaña, la altura z sobre el nivel del mar en la que se encuentra un alpinista, viene dada por $z = 2000 - 2x^2 - 4y^2$ (en metros). Un alpinista se encuentra en un punto de referencia A, donde $A = (-20, 5, 1100)$. Sean $P = (1,2)$ **y** $Q = (1,-1)$ dos puntos en el plano xy.

a.) Determine la razón de cambio de z (derivada direccional) si el alpinista se mueve desde el punto A, siguiendo la trayectoria del vector que va del punto P al punto Q.

b.) Qué dirección debe seguir el alpinista para que la razón de cambio sea máxima y de cuánto es esta razón?

R **3.4.11** Demostrar que la derivada direccional de la función cuya ecuación es $z = \dfrac{y^2}{x}$, calculada en cualquier punto de la elipse $2x^2 + y^2 = C^2$ a lo largo de la normal de la misma, es igual a cero.

R **3.4.12** Considere la ecuación $z = 1 + zy + y$ la cual describe a z en forma implícita como función de x, y. Sea $P = (0,2)$ **y** $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, a.) Calcule la derivada direccional de z en el punto P y en la dirección del ángulo φ.

b.) Calcule el máximo valor de la derivada direccional de z, a partir de P.

R **3.4.13** Sea S la superficie de ecuación $e^{xz+z+y} = z - 1$.

a.) Calcule la derivada direccional de z, cuando $x = -1, y = 0$, en la dirección de un vector normal a la curva $x^2 + 2xy + y^2 = x + 3$ en el punto $Q = (1, 1)$.

b.) ¿En qué dirección es mínima la derivada direccional y cuál es su valor?

R **3.4.14** Considere la función $f(x,\ y) = 6 - (y - 2)^2 - x^2$ **y** , $P(1, 1)$

a.) Determine la ecuación de la recta tangente l_1 en P en la dirección del eje X.

b.) Determine la ecuación de la recta tangente l_2 en P en la dirección del eje Y.

R **3.4.15** (*) Sea $z = f(x,\ y)$ una función definida en $\mathbb{R}^2$ con derivadas parciales continuas. Sea $B = (x_0, y_0)$ un punto en $\mathbb{R}^2$ tal que $D_u f(B) = \dfrac{3}{5}$ **y** $D_v f(B) = 1$, donde $\vec{u} = (3, 4)$ **y** $v = (5, 12)$. Determine $\nabla f(B)$.

Capítulo 4

4.1 Máximo y mínimos locales. Multiplicadores de Lagrange.

4.1.1 Para cada una de las funciones que se dan a continuación determine, si hubiera, los puntos donde f alcanza máximos locales, mínimo locales y los puntos de silla.

a.) $f(x,\ y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

b.) $f(x,\ y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

c.) $f(x,\ y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

d.) $f(x,\ y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$

e.) $f(x,\ y) = e^{(x-y)}(x^2 - 2y^2)$

f.) $f(x,\ y) = 9xy - x^3 - y^3$

g.) $z = xy + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y}$

h.) $f(x,\ y) = 4x^3 - 2x^2y + y^2$

i.) $f(x,\ y) = x^3y^2(a - x - y)$ con a constante

j.) $f(x,\ y) = x^2 - 5y^2 - 6x - 10y + 15$

4.1.2 Verifique que el polinomio $P(x,y) = x^2 + (xy-1)^2$ no tiene ni máximos ni mínimos.

4.1.3 Para cada una de las funciones y las condiciones que se dan a continuación, use el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los puntos críticos.

a.) $f(x,\ y) = xy$ con la condición $x + y = 10$

b.) $f(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2$ con la condición $x + y + z = 1$

c.) $f(x,\ y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$ con la condición $x + y - 2 = 0$

4.1.4 Hallar los extremos locales de $f(x,\ y) = 16 - x^2 - y^2$ bajo la condición $x^2 - y^2 - 4y = 8$

Ⓡ **4.1.5** Determine el punto del plano de ecuación $x + 2y - z = 4$ que está más cerca del punto $(1,\ 1,\ 2)$.

Ⓡ **4.1.6** Determine los extremos locales de la función $f(x,\ y) = 6 - 4x - 3y$ con la condición de que (x, y) pertenezcan a la curva de ecuación $x^2 + y^2 = 1$

Ⓡ **4.1.7** Encontrar tres números positivos cuya suma sea P **y** cuyo producto sea el mayor posible.

Ⓡ **4.1.8** Determinar la distancia mínima del origen al plano de ecuación $3x + 4y + 2z = 6$.

Ⓡ **4.1.9** Encontrar la distancia mínima entre el plano de ecuación $x + 3y - 2z = 8$ **y** el punto $(-1, 3, 2)$.

Ⓡ **4.1.10** Hallar tres números positivos tales que su suma sea la menor posible y su producto sea igual a 27.

Ⓡ **4.1.11** La base de una caja rectangular cuesta tres veces más por metro cuadrado que el material de las paredes y la tapa. Determinar las dimensiones de la caja de volumen dado V que sea más barata.

Ⓡ **4.1.12** Un tanque sin tapa, de forma de caja rectangular, debe tener un volumen de 8000 cm^3. Los costos anuales de calefacción se calculan de la siguiente manera: \$ 2 por cm^2 para el fondo y dos caras laterales (opuestas) y \$ 4 por cm^2 para las restantes dos caras laterales. Hallar las dimensiones del tanque que minimizan el costo.

Ⓡ **4.1.13** Un tanque sin tapa, de forma de caja rectangular, debe tener un volumen de 8000 cm^3. Los costos anuales de calefacción se calculan de la siguiente manera: \$ 2 por cm^2 para el fondo y dos caras laterales opuestas y \$ 4 por cm^2 para las restantes dos caras laterales. Hallar las dimensiones del tanque que minimizan el costo.

Ⓡ **4.1.14** Se dispone de $500\pi m^2$ de lámina metálica para construir un depósito cerrado formado por un cilindro circular recto coronado por un cono. Si se requiere que el radio de la base mida $5m$, hallar las dimensiones que dan el depósito de mayor volumen.

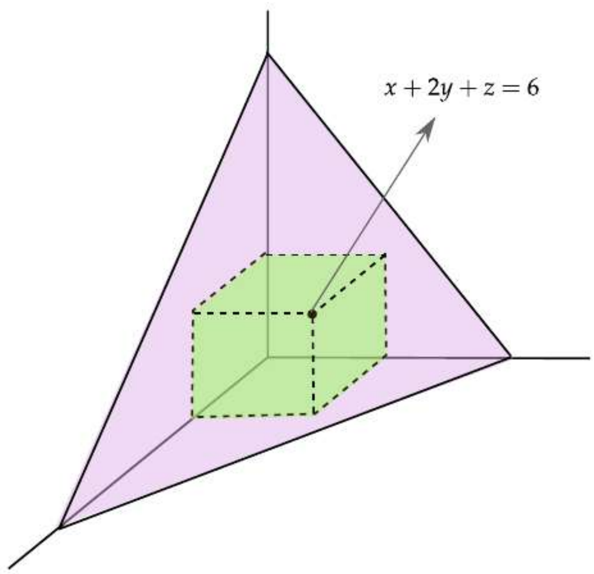
Ⓡ **4.1.15** La temperatura en cada punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ está dada por $T(x,\ y,\ z) = x - 2y + 2z$ Hallar el punto de la esfera que está más frío y el punto que está más caliente.

Ⓡ **4.1.16** Se desea construir un recipiente en forma de cono circular recto de 2 pies de radio, coronado por un cilindro circular recto. El volumen del recipiente tiene que ser de 100π pies cúbicos. Determine las alturas H del cilindro **y** h del cono de manera que el área superficial del recipiente sea mínima.

Ⓡ **4.1.17** El material para construir la base de una caja abierta (sin tapa) cuesta 1.5 más que elcosto del material para construir los lados. Para una cantidad K fija de dinero, Hallar las dimensiones de la caja de volumen máximo que puede construirse.

Ⓡ **4.1.18** Un depósito en forma de cilindro recto está coronado por una tapa en forma de cono. El radio del depósito es de 3 metros y su área total es de $81\pi m^2$. Calcule la altura del cilindro recto y la del cono de manera que el volumen del depósito sea máximo.

Ⓡ **4.1.19** Considere una caja rectangular en el primer octante, limitada por los planos coordenados y que tiene uno de sus vértices en el plano $x + 2y + z = 6$ (ver figura). Determine las dimensiones de esta caja de tal manera que su volumen sea máximo.



Ⓡ **4.1.20** Un disco circular tiene la forma de la región limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ Si la temperatura en cualquier punto (x, y) del disco viene dada por $T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$, encuentre los puntos más calientes y los más fríos en el disco.

Ⓡ **4.1.21** (*) Demostrar que $\dfrac{8abc}{3\sqrt{3}}$ es el volumen máximo de los paralelepípedos rectangulares que pueden inscribirse en el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y}{b^2}2 + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

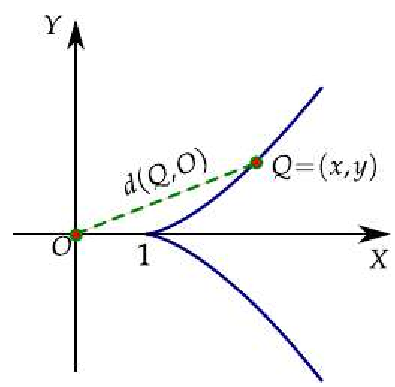
Ⓡ **4.1.22** (*) Hallar los triángulos en que es máximo el producto de los senos de los ángulos internos. Sugerencia: $2\operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)$ y $2\cos x \operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)$

Ⓡ **4.1.23** (*) Determine la distancia más corta desde el origen hasta el plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$.

Ⓡ **4.1.24** (*) Demuestre que $\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$, con $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Sugerencia: Busque el máximo de la función $w = xyz$ con la condición $x+y+z = S$ con S una constante. Luego evalúe f ...

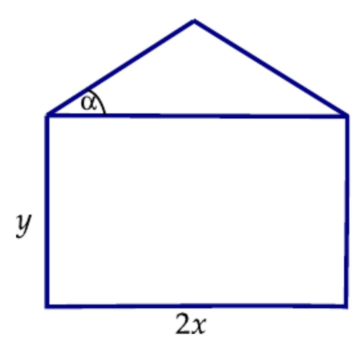
Ⓡ **4.1.25** (*) Demuestre que el paralelepípedo rectangular de mayor volumen que se puede inscribir en el elipsoide $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{36} = 1$ es $64\sqrt{3}$ (u.l.)

Ⓡ **4.1.26** (*) Considere el problema de mínimizar la distancia de la curva $(x-1)^3 - y^2 = 0$ al origen. La curva se representa en la figura a la derecha. De acuerdo a la figura de la derecha, el mínimo se alcanza en $(1,0)$. Verfique que usando el método de Multiplicadores de Lagrange, *no se logra obtener este punto.* (La razón es que $\nabla g(1,0) = 0$ y este método requiere que $\nabla g(1,0) \neq 0$). Observe que las derivadas parciales no se indefinen en este punto $(1,0)$.)



Ⓡ **4.1.27** (*) Sea $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2 + z^2$ la temperatura en cada punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 50$. Determine la temperatura máxima en la curva formada por la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ y el plano $x - z = 0$.

Ⓡ **4.1.28** (*) Un pentágono está formado por un rectángulo coronado de un triángulo isósceles como se muestra en la figura. Si el perímetro del pentágono tiene un valor P, hallar los valores de x, y y α para que el área del pentágono sea máxima.



Ⓡ **4.1.29** (*) Hallar los valores extremos locales de $f(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2$ si (x, y, z) es un punto en la intersección de los planos $x + y + z = 1$ y $2x - y - 3z = 4$.

Ⓡ **4.1.30** (*) Calcular los máximos y mínimos locales de $f(x,\ y) = xy$ sujetos a que (x, y) pertenezcan a la elipse $4x^2 + y^2 = 4$. Para la clasificación, usar un gráfico.

Capítulo 5

5.1 Integral doble.

5.1.1 Determine los límites que debe tener la integral doble $\displaystyle\iint_R f(x,\ y)dA$ en cada una de las siguientes regiones:

a.) R es la región limitada inferiormente por la parabola $4x^2 = 9y$ y superiormente por la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$

b.) R es la región limitada por la parabola $x = y^2$ y la recta $x + y = 2$

5.1.2 Calcule:

a.) $\displaystyle\iint_R (x^2 + y^2)dA$, donde R es la región limitada por $x = -2, x = 3, y = x + 2, y = -2$

b.) $\displaystyle\iint_R \frac{x}{\sqrt{1-y^2}}dA$, donde $R = \left\{(x,\ y)/0 \leq x \leq \frac{1}{2},\ x \leq y \leq \frac{1}{2}\right\}$

c.) $\displaystyle\iint_R \cos(x)\operatorname{sen}(y)dA$, donde $R = \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

d.) $\displaystyle\iint_R (x - y)dA$, donde R es la región del primer cuadrante limitada por las rectas con ecuación $x + y - 3 = 0, y = 3,$ y las curvas de ecuación $y^2 = 4x, x^2 = 4y$

5.1.3 Considere la integral I, donde: $I = \displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,\ y)dxdy$

a.) Dibuje la región de integración.

b.) Con respecto a la integral dada, invierta el orden de integración.

5.1.4 Dibuje y sombree la región R cuya área está dada por: $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt[8]{x}} dydx + \int_1^2 \int_0^{2-x} dydx$

a.) Plantee la(s) integrales dobles necesarias para calcular el área de R, usando el orden de integración $dxdy$.

b.) Calcule el área de la región R.

Ⓡ **5.1.5** El área de una región R del plano XY está dada por: $A_R = \displaystyle\int_{-3}^{1}\int_{-\frac{x}{3}+1}^{2} dy\,dx + \int_{1}^{9}\int_{-\frac{x}{3}+1}^{-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}} dy\,dx.$

a.) Dibuje la región R.

b.) Plantee las integrales dobles correspondientes al área de la región R, inviertiendo el orden de integración respecto a las integrales dadas.

c.) Calcule el área de la región R.

Ⓡ **5.1.6** El área de una región R del plano XY está dada por: $A_R = \displaystyle\int_{0}^{1}\int_{-x^3}^{\sqrt{x}} dy\,dx + \int_{1}^{4}\int_{x-2}^{\sqrt{x}} dy\,dx$

a.) Dibuje la región R.

b.) Plantee las integrales dobles correspondientes al área de la región R, inviertiendo el orden de integración respecto a las integrales dadas.

c.) Calcule el área de la región R.

Ⓡ **5.1.7** El área de una región R del plano XY está dada por $A = \displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{y+1} dx\,dy + \int_{1}^{5}\int_{0}^{\sqrt{5-y}} dx\,dy$

a.) Dibuje la región R.

b.) Plantee las integrales dobles correspondientes al área de la región R, invirtiendo el orden de integración respecto a las integrales dadas.

Ⓡ **5.1.8** El área de una región R del plano XY está dada por

$$A_R = \int_{0}^{1}\int_{-y-1}^{-\sqrt{y+1}} dx\,dy + \int_{1}^{3}\int_{-2}^{-\sqrt{y+1}} dx\,dy$$

a.) Dibuje la región R.

b.) Plantee las integrales dobles correspondientes al área de la región R, invirtiendo el orden de integración respecto a las integrales dadas.

c.) Calcule el área de R.

5.1.9 El área de una región R del plano XY está dada por

$$A_R = \int_{-2}^{0}\int_{-\sqrt{2(y+2)}-2}^{\sqrt{2(y+2)}-2} dx\,dy + \int_{0}^{2}\int_{2y-4}^{0} dx\,dy$$

a.) Dibuje la región R.

b.) Plantee las integrales dobles correspondientes al área de la región R, invirtiendo el orden de integración respecto a las integrales dadas

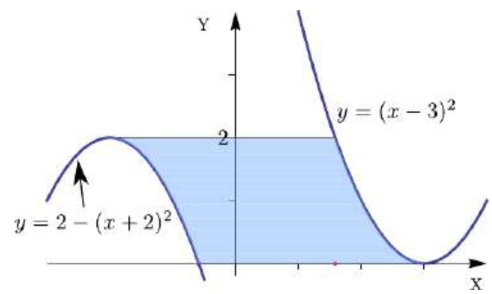
5.1.10 Considere la integral I, donde $I = \iint_R (x+y)\,dA$, y R es la región limitada por las curvas de ecuación $y^2 = 2x, x+y=4, x+y=12$.

a.) Dibuje la región R.

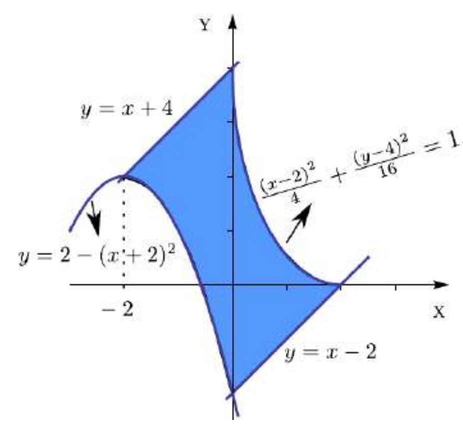
b.) Plantee I en dos formas, en primer caso usando el orden de integración $dx\,dy$, en el segundo caso usando el orden $dy\,dx$.

c.) Calcule I.

5.1.11 Considere la región R a la derecha. Esta región está limitada por las curvas $y=0$; $y=2$; $y = 2-(x+2)^2$ y $y=(x-3)^2$. Plantear la integral $\iint_R f(x,y)\,dA$ en el orden "$dx\,dy$" y en el orden "$dy\,dx$"



5.1.12 Considere la región R (figura a la derecha). Esta región está limitada por las curvas $y=x+4$; $y=x-2$; $y=2-(x+2)^2$ y $(x-2)^2/4+(y-4)^2/16=1$. Plantear la integral $\iint_R f(x,y)\,dA$ en el orden "$dx\,dy$" y en el orden "$dy\,dx$"



5.2 Cambio de Variable. Coordenadas Polares.

Ⓡ **5.2.1** Usando coordenadas polares, calcule la siguiente integral: $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dy\,dx$

Ⓡ **5.2.2** Para cada una de las siguientes integrales, dibuje la región de integración y calcule la integral correspondiente utilizando coordenadas polares:

a.) $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$

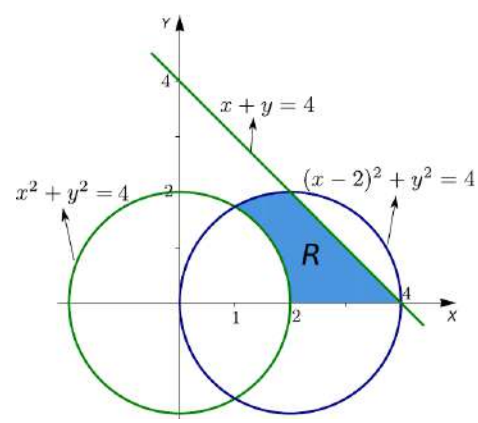
b.) $\displaystyle\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$

Ⓡ **5.2.3** Considere la integral $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-2y+\sqrt{2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx\,dy$

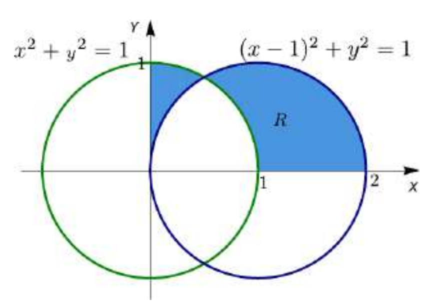
a.) Dibuje la región de integración.

b.) Plantee la integral anterior utilizando coordenadas polares.

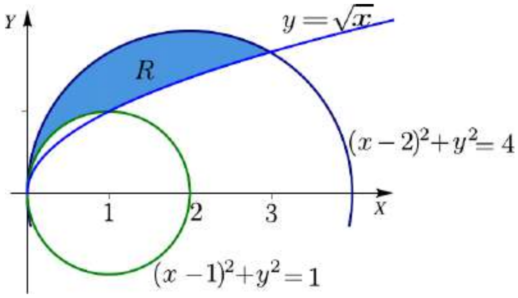
Ⓡ **5.2.4** Plantear la o las integrales necesarias para calcular $\displaystyle\iint_R \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dA$. La región R es la región limitada por los círculos $x^2+y^2=4$, $(x-2)^2+y^2=4$ y las rectas $x+y=4$, $y=0$, como se muestra en la figura.



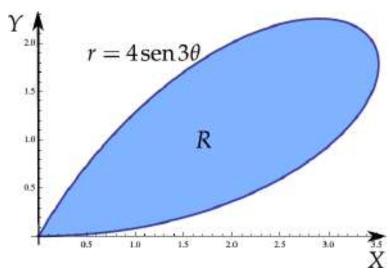
Ⓡ **5.2.5** Plantear la o las integrales necesarias para calcular el área de la región R limitada por las circunferencias $x^2+y^2=1$ y $(x-1)^2+y^2=1$.



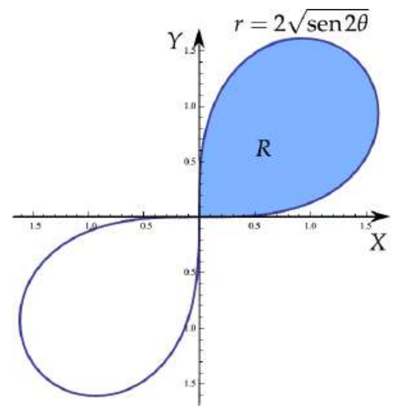
Ⓡ **5.2.6** Utilizando coordenadas polares, plantear la o las integrales que permiten calcular el área de la región R (región sombreada) mostrada en la figura.



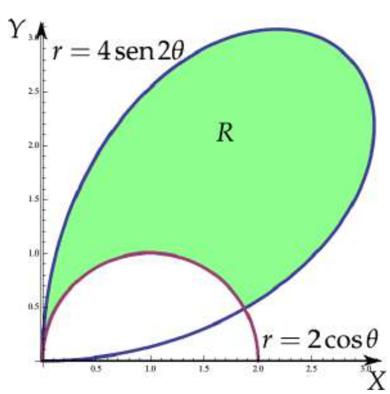
Ⓡ **5.2.7** Calcular el área de las regiones sombreadas.



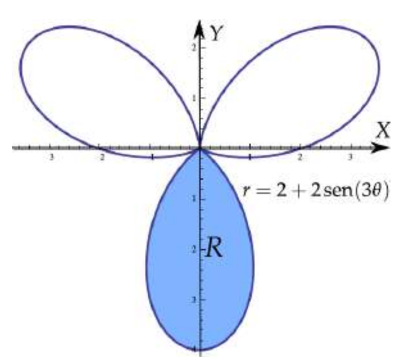
a)



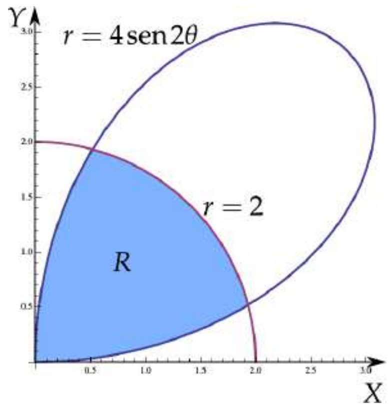
b)



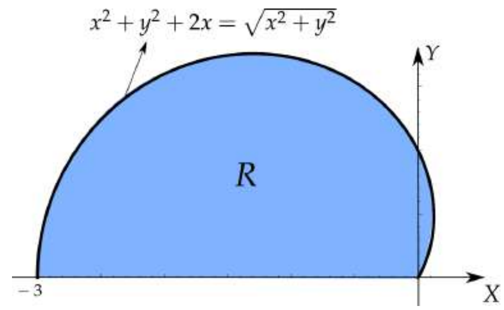
c)



d)

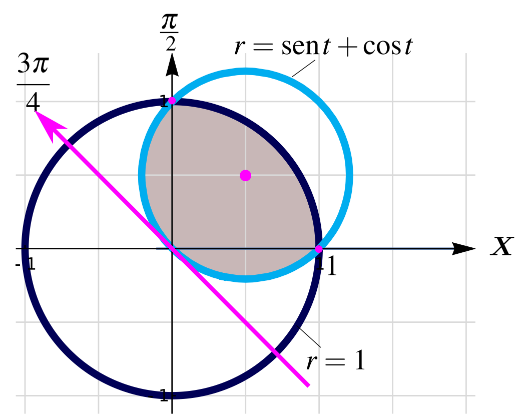


e)

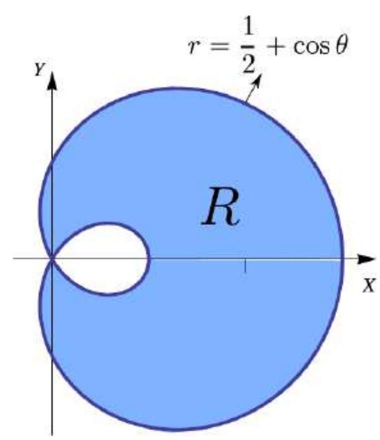


f)

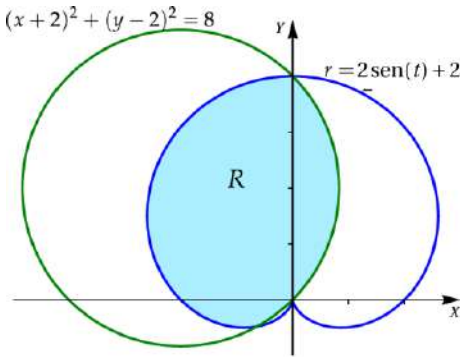
5.2.8 (*) Verifique, usando coordenadas polares, que el área de la región R (región sombreada mostrada en la figura) es $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}$



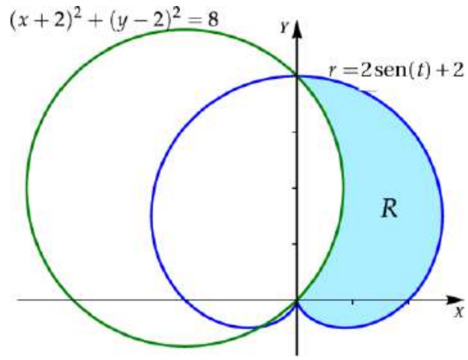
5.2.9 (*) Calcular el área de la región R limitada por el lazo de la curva $r = 1/2 + \cos\theta$, tal y como se muestra en la figura



5.2.10 Calcular el área de cada una de las siguientes regiones.



a)



b)

5.2.11 Hallar el *centro de masa*[1] de la región limitada por las curvas $y = x^3$ y $y = \sqrt{x}$ si la densidad en cada punto (x, y) de la región está dada por $\rho(x, y) = 3x$

5.2.12 Demuestre que el volumen de un cilindro circular recto de altura h
y de radio R en la base es $\pi R^2 h$

5.2.13 En cada uno de los siguientes casos hallar el *centro de masa*, donde $\rho(x, y)$ representa la función densidad en el punto (x, y) .

a.) La región limitada por $y = x^2$ y $y^2 = x$, $\rho(x, y) = ky$, k es una constante.

b.) La región limitada por $y = x^2$ y $y = x + 2$, $\rho(x, y) = k$, k es una constante.

c.) La región limitada por la cardioide $r = 2(1 + \cos\theta)$, $\rho(x, y) = k$, k es una constante.

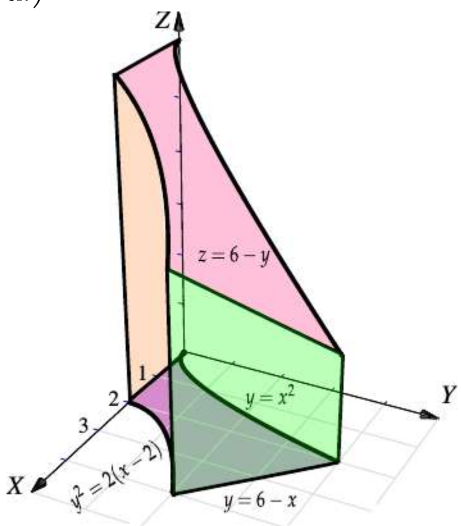
d.) La región limitada por una rama cerrada de la curva $r = 2\cos(2\theta)$, $\rho(x, y) = k$, k es una constante.

5.3 Volumen

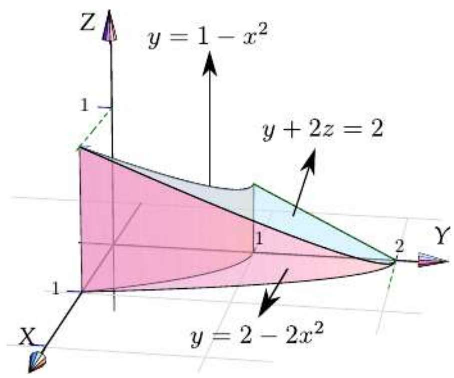
5.3.1 Calcule el volumen de los siguientes sólidos (debe hacer la representación gráfica de la proyección que va a utilizar).

[1] Una región R, con función de densidad $\rho(x, y)$, tiene masa $M = \iint_R \rho(x, y)\, dA$. El centro de masa de la región es punto R con coordenadas $\left(\dfrac{M_y}{M}, \dfrac{M_x}{M}\right)$ donde $M_y = \iint_R x\rho(x, y)\, dA$ y $M_x = \iint_R y\rho(x, y)\, dA$

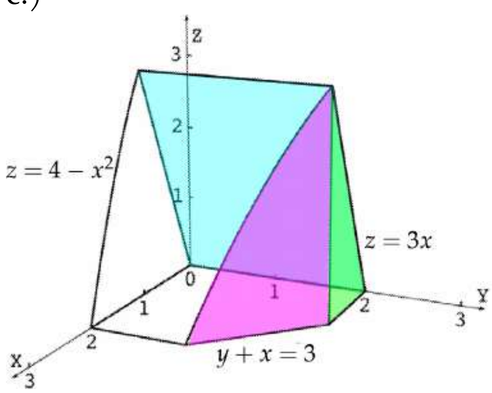
a.)


Z
$z = 6 - y$
$y = x^2$
Y
X
$y^2 = 2(x-2)$
$y = 6 - x$
1
2
3

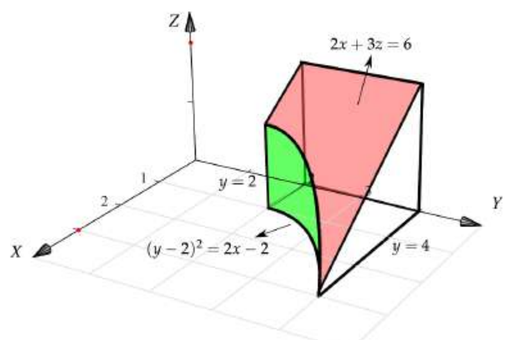
b.)


Z
$y = 1 - x^2$
1
$y + 2z = 2$
1
2
Y
1
X
$y = 2 - 2x^2$

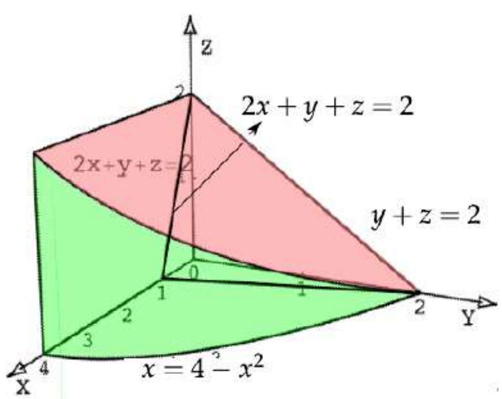
c.)


z
3
2
1
$z = 4 - x^2$
$z = 3x$
0
1
1
2
2
3
Y
X
3
$y + x = 3$

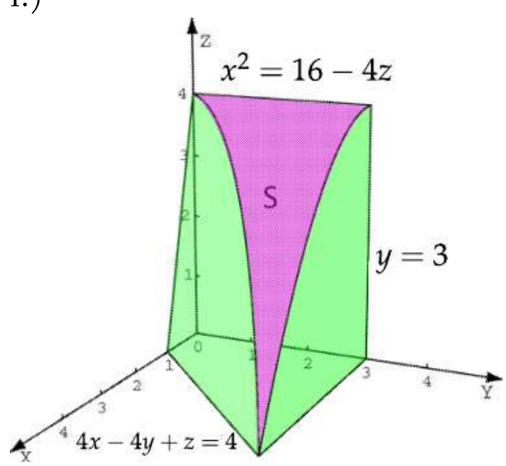
d.)


Z
$2x + 3z = 6$
$y = 2$
1
2
Y
X
$(y-2)^2 = 2x - 2$
$y = 4$

e.)


Z
$2x + y + z = 2$
2x+y+z=2
$y + z = 2$
0
1
1
2
3
4
2
Y
X
$x = 4 - x^2$

f.)


Z
$x^2 = 16 - 4z$
4
S
$y = 3$
0
1
2
3
4
Y
X
$4x - 4y + z = 4$

5.3.2 Expresar (no calcular) la integral doble $\iint_R f(x,\ y)dA$ como una integral iterada en coordenadas polares con:

a.) $R = \{(x,\ y)/x^2 + y^2 \leq 2x\}$

b.) $R = \{(x,\ y)/0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq x \leq 1\}$

c.) $R = \{(x,\ y)/x^2 \leq y \leq 1,\ -1 \leq x \leq 1\}$

d.) $R = \{(x,\ y)/x^2 + y^2 \leq a^2,\ a \neq 0\}$

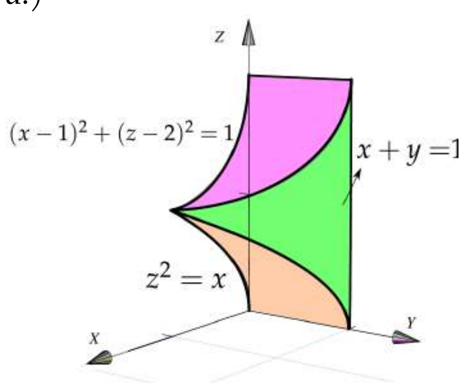
5.4 Integrales Triples

5.4.1 Calcular $\iiint_B \dfrac{dV}{(x+y+z+1)^3}$ en el recinto limitado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$

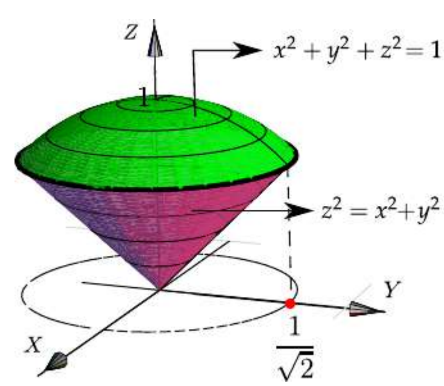
5.4.2 Calcular $\iiint_B x^2 dV$ en el recinto limitado por los planos coordenadas y la esfera de radio a y centro en el origen, primer octante.

5.4.3 Plantee las integrales triples que se requieren para calcular el volumen de cada uno de los sólidos que se representan en las siguiente figuras

a.)



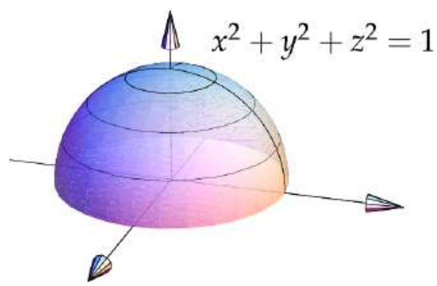
b.)



5.4.4 Demuestre que el volumen limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, a constante, es $\dfrac{4}{3}\pi a^3$

5.4.5 (*) Demuestre que el volumen de un cono circular recto de altura h y de radio R en la base es $\dfrac{\pi R^2 h}{3}$

5.4.6 (*) Calcule $\displaystyle\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dV$ haciendo uso de coordenadas esféricas, donde D es la región (semiesfera) que se representa en el siguiente dibujo:

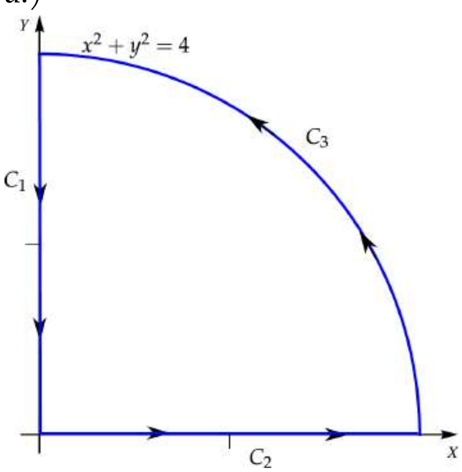


5.4.7 Verifique que $\displaystyle\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\pi \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ si D es la región limitada por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, donde $a > b > 0$.

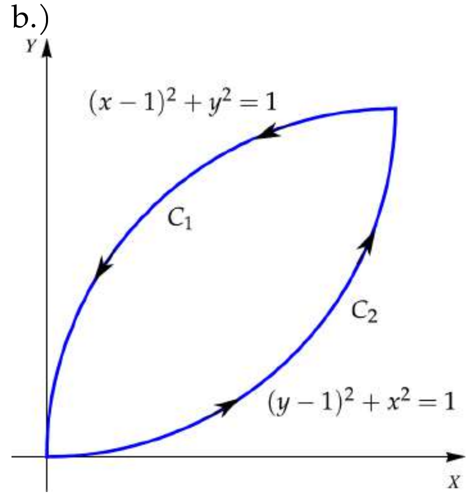
6.1 Parametrización de una curva

6.1.1 Determine una parametrización para cada una de las siguientes curvas.

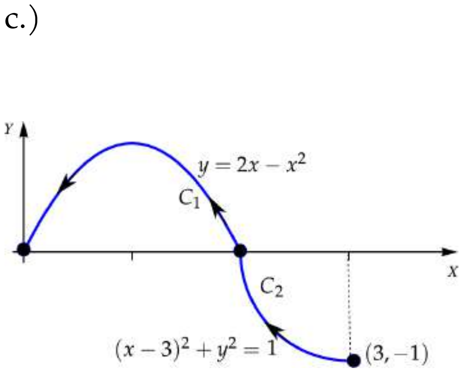
a.)



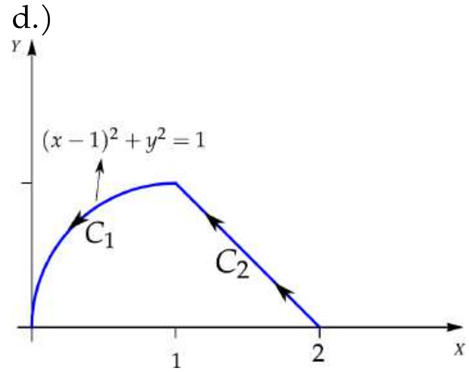
b.)



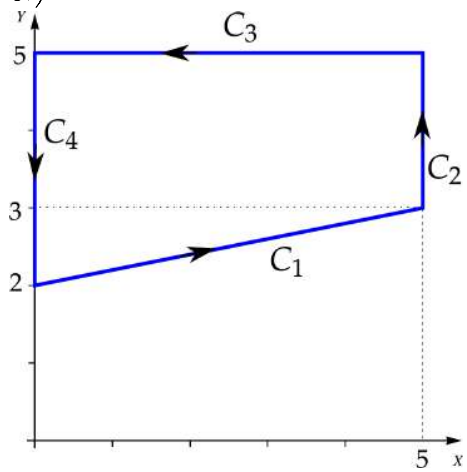
c.)



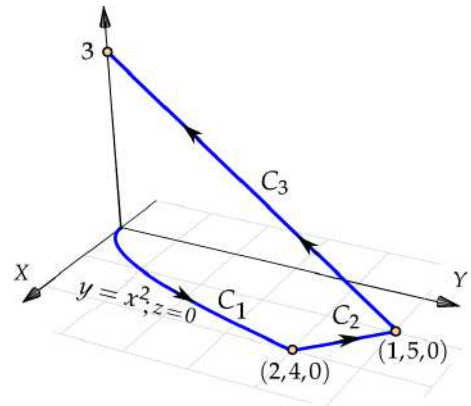
d.)



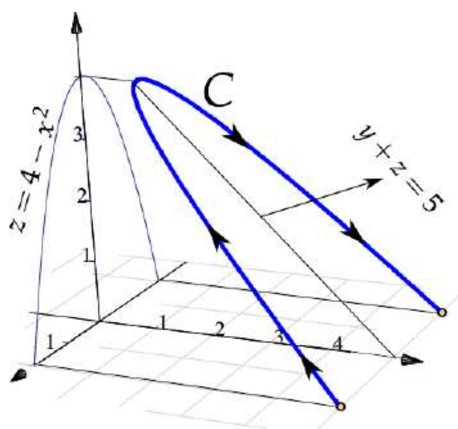
e.)



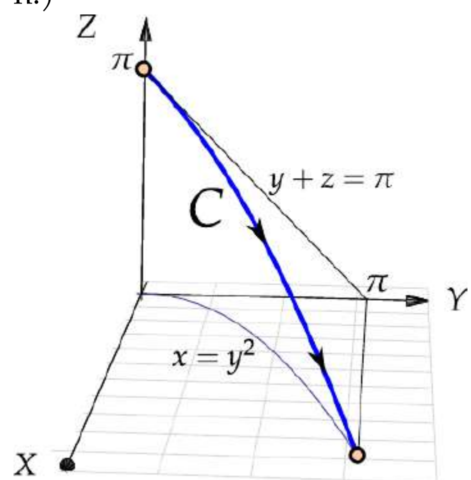
f.)



g.)



h.)

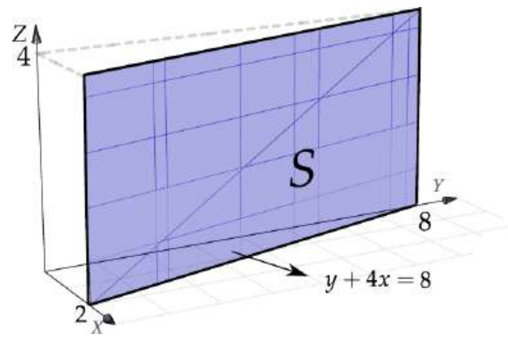


——

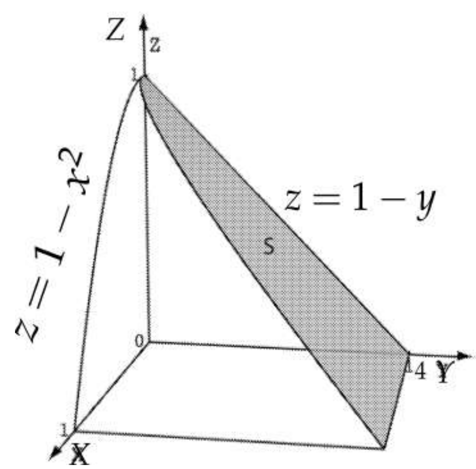
6.2 Integral de Superficie. Integral de Flujo

R **6.2.1** Encuentre el área de la superficie $3x - 2y + 6z = 12$, que está limitada por los planos $x = y = 0,\ 3x + 12y = 12$.

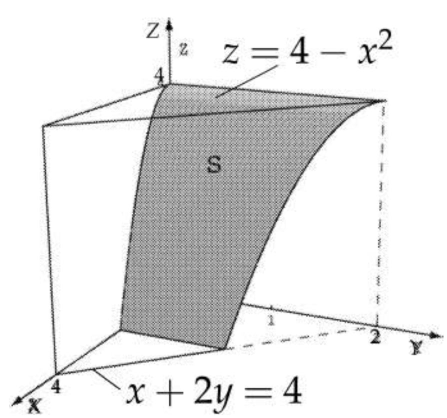
Ⓡ **6.2.2** Calcule $\iint_S (x^2-2y+z)\,dS$ donde S es la superficie sobreada en la figura a la derecha.



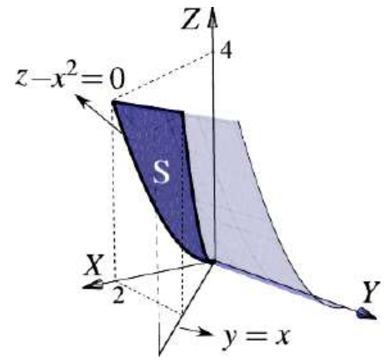
Ⓡ **6.2.3** Calcule la integral de superficie $\iint_S y\,dS$ donde S es la parte sombreada en la figura a la derecha.



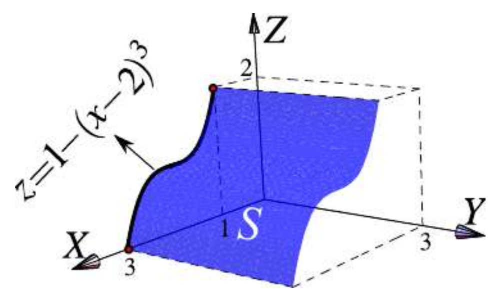
Ⓡ **6.2.4** Calcule $\iint_S \frac{z+x^2}{\sqrt{1+4x^2}}dS$ donde S es la superficie que se muestra en la figura a la derecha, utilizando la proyección sobre el plano **XY**



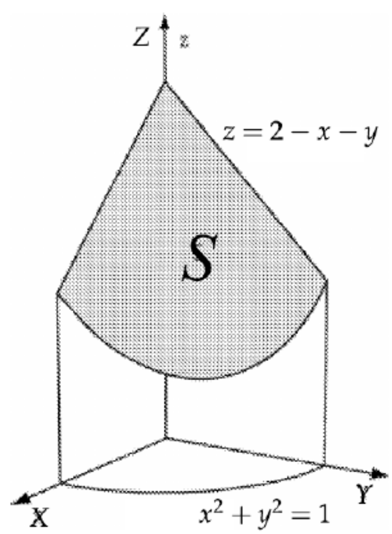
Ⓡ **6.2.5** La superficie S es el trozo del cilindro $z - x^2 = 0$ que está limitado por los planos $y = 0$, $y = x$ y $z = 4$, en el primer octante. La Superficie S se muestra en la figura a la derecha. Calcule el área de S.



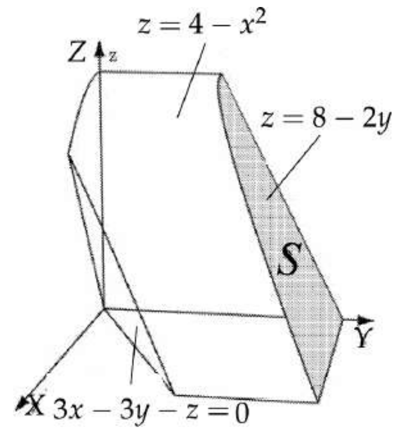
Ⓡ **6.2.6** Considere el campo de fuerzas $F(x,y,z) = (0, \ x+y, \ z)$. Calcule la integral de superficie $\iint_S F \cdot N \, dS$, donde S es el trozo de cilindro de ecuación $z = 1-(x-2)^3$ que está limitado por los planos $y = 0$, $y = 3$, $z = 1$ y $z = 2$ tal y como se muestra en la figura a la derecha.



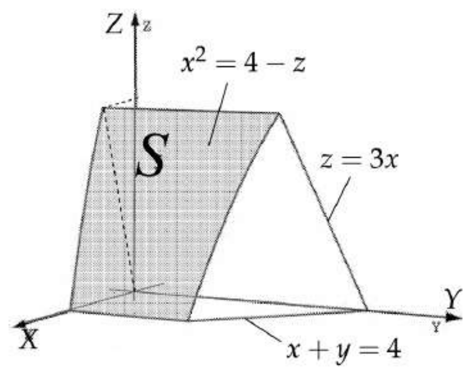
Ⓡ **6.2.7** Calcule el área de S utilizando integrales de línea, donde S es la parte sombreada en la figura a la derecha.



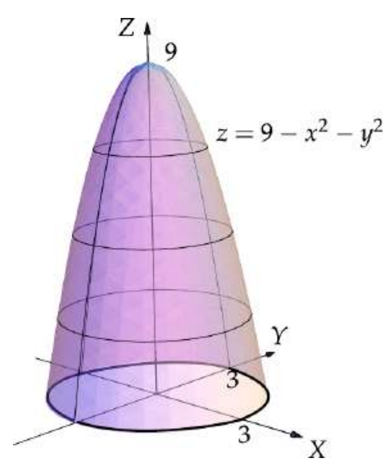
Ⓡ **6.2.8** Calcule el área de S utilizando integrales de superficie, donde S es la parte sombreada en la figura a la derecha.

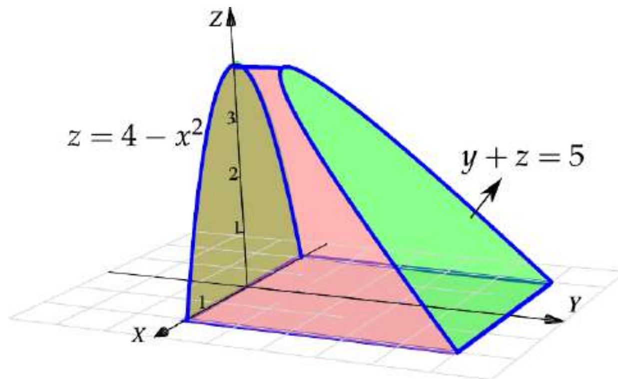


Ⓡ **6.2.9** Calcule la integral de superficie $\iint_S (x + z)dS$ donde S es la parte sombreada en la figura a la derecha.



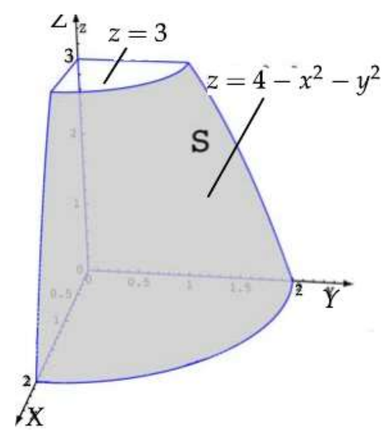
Ⓡ **6.2.10** Calcule la integral de superficie $\iint_S (x^2 + y^2 + z)\, dS$ donde S es la superficie de ecuación $z = 9 - x^2 - y^2$, limitada por el plano $z = 0$ tal y como se muestra en la figura a la derecha.



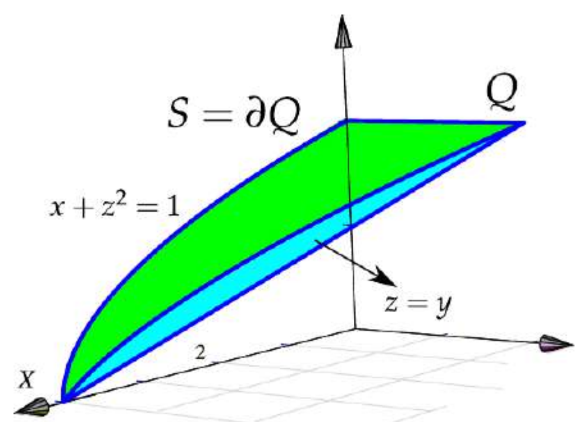


Ⓡ **6.2.11** Sea Q el sólido que se muestra en la figura a la derecha y sea S la frontera de Q, es decir, $S = \partial Q$. Calcule $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot \mathbf{N}\,dS$ donde $F(x,y,z) = (x^3+\operatorname{sen} z,\ x^2y+\cos z, \tan(x^2+y^2))$

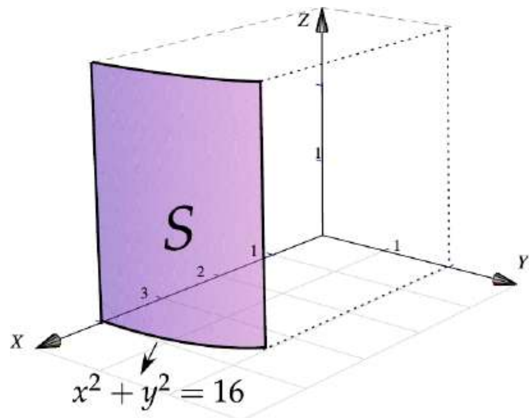
Ⓡ **6.2.12** Calcule la integral de superficie $\iint\limits_S F\cdot N\ dS$ donde $F(x,\ y,\ z) = 2x^2\,\hat{\imath}\ - y^2z\ \hat{\jmath}\ + 4xz^2\ \hat{\mathbf{k}}$ y además se cumple que S es el conjunto de superficies de ecuaciones $y^2+z^2=9,\ x=2,\ y=0,\ yz=0,$ en el primer octante.



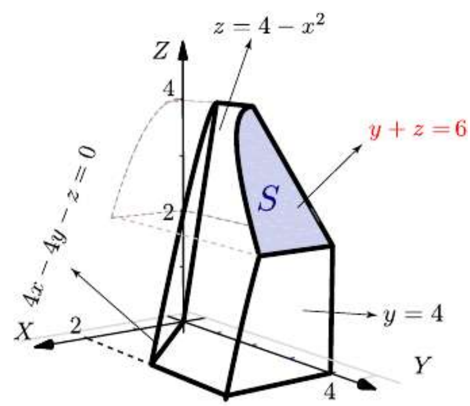
Ⓡ **6.2.13** Calcule la integral de superficie $\iint\limits_S F\cdot N\ dS$ donde $F(x,\ y,\ z) = -y^2\,\hat{\imath}\ + x\ \hat{\jmath}\ +\ \hat{\mathbf{k}}$ y S es la parte sombreada en la figura a la derecha.



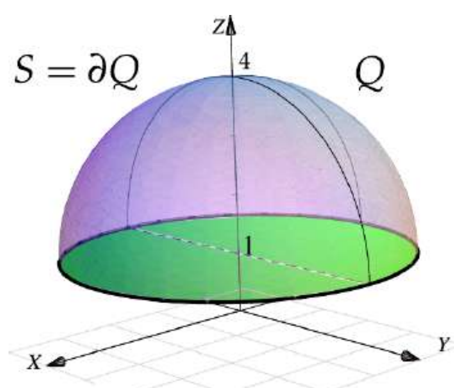
Ⓡ **6.2.14** Calcule el área de la superficie cilíndrica S que limita al sólido Q de la figura que se muestra a a la derecha.



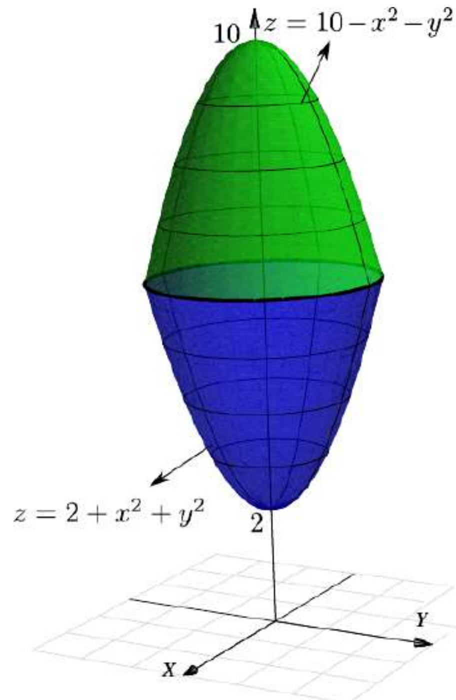
Ⓡ **6.2.15** Calcule el área de la superficie S tal y como se muestra en la figura a la derecha.



Ⓡ **6.2.16** Calcule el área de la superficie S tal y como se muestra en la figura a la derecha.



Ⓡ **6.2.17** Sea $F(x,\,y,\,z)=x\,\hat{\imath}+y\,\hat{\jmath}+(z-1)\,\hat{k}$. Considere el sólido Q limitado por las superficies $(z-1)^2+x^2+y^2=9$ y el plano $z-1=0$. Sea $S=\partial Q$, es decir, S es la frontera del sólido Q. Calcular $\displaystyle\iint_S F\cdot N\,dS$ donde N es un vector normal exterior al sólido Q.



Ⓡ **6.2.18** Calcule $\iint_S F \cdot N dS$, donde $F(x, y, z) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$, S es la frontera del sólido Q que se muestra en la figura a la derecha y N es un vector normal exterior a Q.

Ⓡ **6.2.19** Sea $F(x, y, z) = (z^2 + 2)\,\hat{k}$, S es superficie frontera del sólido Q que está limitado por las superficies $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$, $x = 1$, en el primer octante, y N es un vector normal exterior a Q.

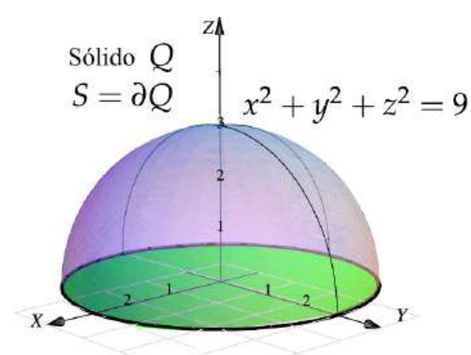
a.) Calcule $\iint_S F \cdot N\, dS$ sin usar el Teorema de la Divergencia.

b.) Calcule $\iint_S F \cdot N\, dS$ usando el teorema de la Divergencia.

Ⓡ **6.2.20** Sea Q el sólido que se muestra a la derecha y sea $F(x, y, z) = (z^2 + 2)\,\hat{k}$, y sea $S = \partial Q$, es decir, S es la frontera de Q y N es un vector normal exterior a Q.

a.) Calcule $\iint_S F \cdot N\, dS$ sin usar el Teorema de la Divergencia

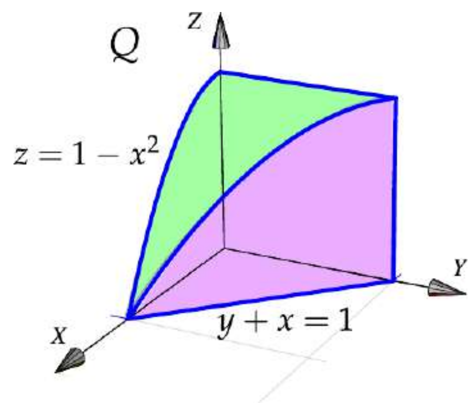
b.) Calcule $\iint_S F \cdot N\, dS$ usando el Teorema de la Divergencia.



Ⓡ **6.2.21** Sea $F(x, y, z) = 3y\,\hat{\imath} - xz\,\hat{\jmath} + yz\,\hat{k}$, S es la frontera del sólido Q, el cual se muestra a la derecha, y N es un vector normal exterior a Q.

a.) calcule $\iint_S F \cdot N\, dS$ sin usar el Teorema de la Divergencia.

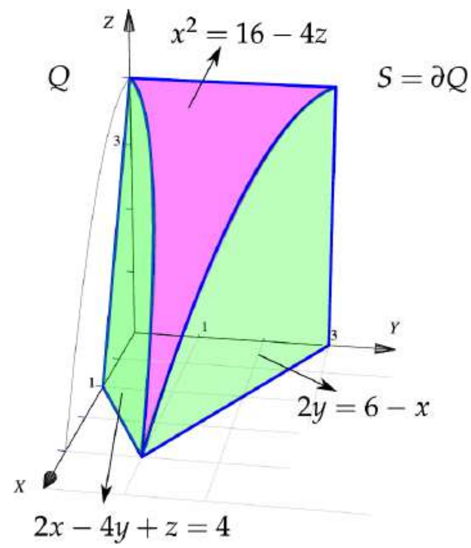
b.) calcule $\iint_S F \cdot N\, dS$ usando el teorema de la Divergencia.



Ⓡ **6.2.22** Sea $F(x, y, z) = (z^2 + 2)\,\hat{k}$, S es la frontera del sólido Q, el cual se muestra a la derecha, y N es un vector normal exterior a Q.

a.) Calcule $\iint_S F \cdot N\, dS$ sin usar el Teorema de la Divergencia.

b.) Calcule $\iint_S F \cdot N\, dS$ usando el teorema de la Divergencia.



6.3 Integral de Línea de una función escalar

Ⓡ **6.3.1** Calcular la longitud de la curva $C: \ y = \sqrt{x^3}, \ x \in [0, 44]$

Ⓡ **6.3.2** Calcular la longitud de la curva $C: \ x = \frac{2}{3}(y-1)^{3/2}, \ y \in [1, 4]$.

6.3.3 Calcular la longitud de la curva $C: \ y^2 = (2x-1)^3, \ \ x \in [1/2, \ 4]$ (Ayuda: La curva tiene dos ramas).

6.3.4 Calcular la longitud de la curva $C: \ y = \log(\sec x), \ \ x \in [0, \ \pi/4]$

6.3.5 Calcular la longitud de la curva $C: \ y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}, \ \ x \in [1, \ 2]$

6.3.6 Calcular $\displaystyle\int_C xy^2 \, ds$ donde C es la mitad superior de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$

6.3.7 Calcular $\displaystyle\int_C x \, ds$ donde C es el arco de parábola $C: \ y = x^2$ con $x \in [-1, 1]$.

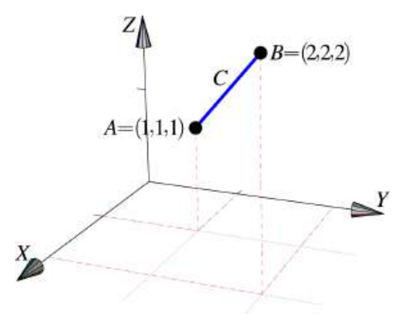
6.3.8 Calcular $\displaystyle\int_C \frac{xy+z}{2x-y} \, ds$ donde C es el segmento de recta que va de $(0,0,0)$ a $(1,1,0)$.

6.3.9 Plantear la integral que nos da la longitud de la elipse $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$

6.3.10 Calcule la integral de línea

$$\int_C \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2} \, ds$$

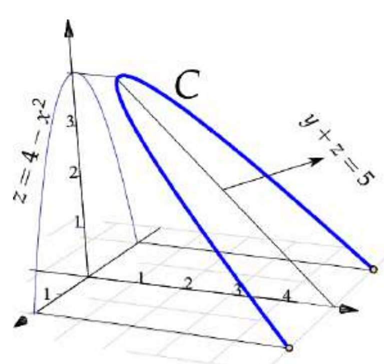
donde C es el segmento de recta que va desde $A = (1,1,1)$ hasta el punto $B = (2,2,2)$, tal y como se muestra en la figura a la derecha



6.3.11 Calcule la integral de línea

$$\int_C \frac{x^2+2y}{\sqrt{33-8z}} \, ds$$

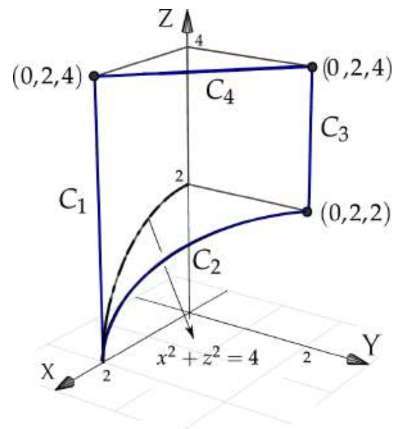
donde C es la curva que se muestra en la figura a la derecha



6.3.12 Calcule la integral de línea

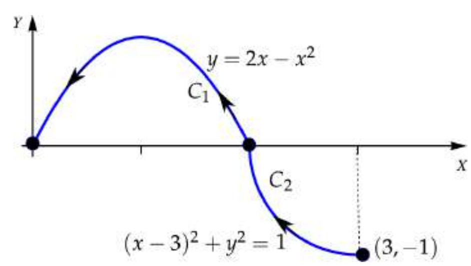
$$\int_C x + y + z - 2 \, ds$$

donde $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ es la curva que se muestra en la figura a la derecha

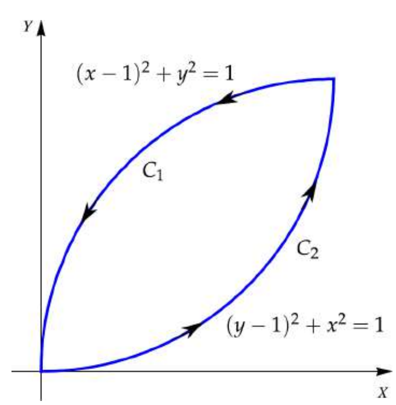


6.4 Integral de Línea de un campo vectorial

6.4.1 Calcular $\int_C F \cdot dr$, $F(x,y) = x\,\hat{\imath} - y\,\hat{\jmath}$, $C_2 :$ $(x-3)^2 + y^3 = 1$ donde $C = C_1 \cup C_2$.



6.4.2 Calcule $\int_C x\,dy - y\,dx$ donde $C = C_1 \cup C_2$

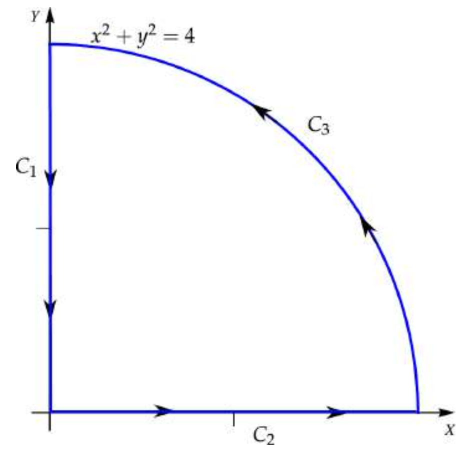


Ⓡ **6.4.3** Calcule la integral $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

y además

$$F(x,\ y) = (2y + \sqrt{9+x^3})\,\hat{\imath} + (5x + e^{\arctan y})\,\hat{\jmath}$$



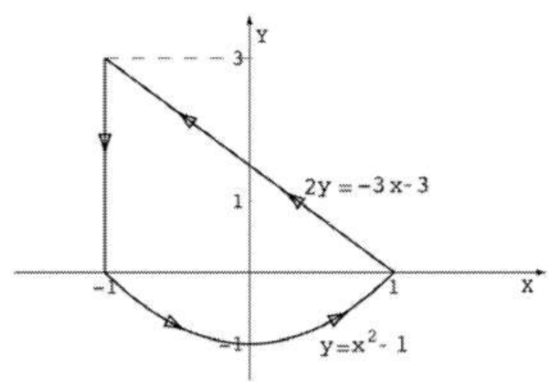
Ⓡ **6.4.4** Sea F un campo de fuerzas tal que $F(x,\ y,\ z) = (2xy+z^3)\,\hat{\imath} + x^2\ \hat{\jmath} + 3xz^2\ \hat{\mathbf{k}}$.

a.) Demostrar que F es un campo de fuerzas conservativo.

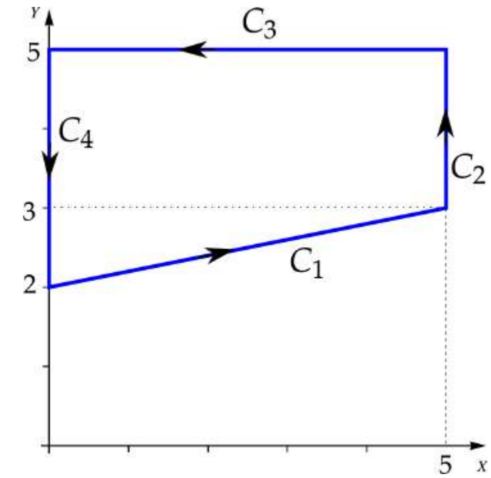
b.) Hallar una función potencial de F.

c.) Determinar el trabajo realizado para desplazar un cuerpo en este campo desde la posición $(1,\ -2,1)$ hasta $(3,\ 1,\ 4)$.

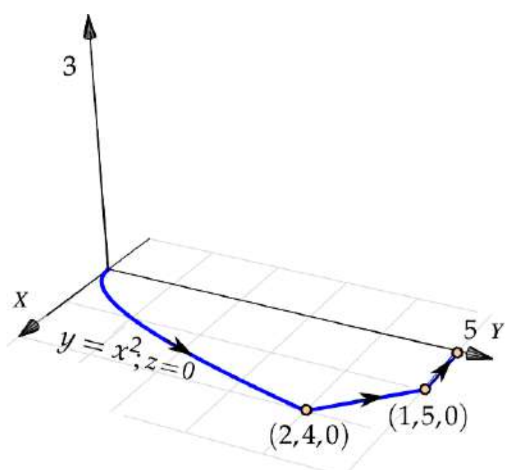
Ⓡ **6.4.5** Calcular $\oint_C (x+y)\,dx + (3x+\arctan y)\,dy$ donde C, es la curva que se muestra en la figura a la derecha.



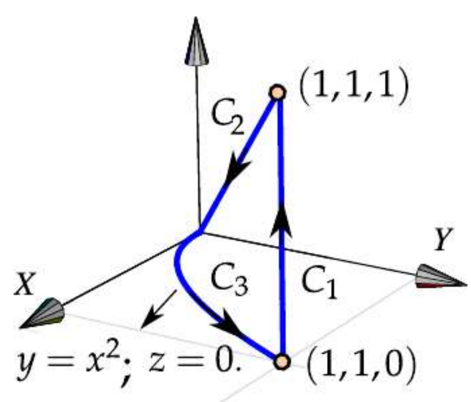
Ⓡ **6.4.6** Calcule $\int_C (4y + \operatorname{arc\,sen} x)\,dx + (3x + \ln(y^2 - 3))\,dy$ donde C es el camino representado en la figura a la derecha.

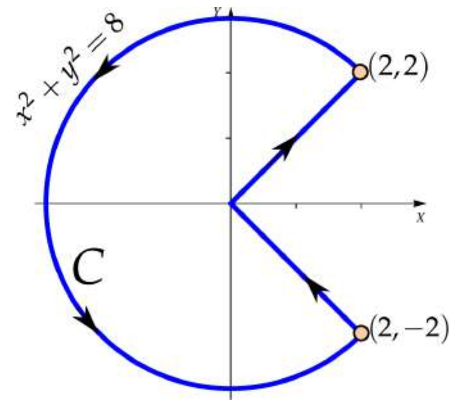


Ⓡ **6.4.7** Calcule $\int_C x^2z\,dx - yx^2\,dy + 3xz\,dz$, sabiendo que C es el camino que se representa en la figura a la derecha.

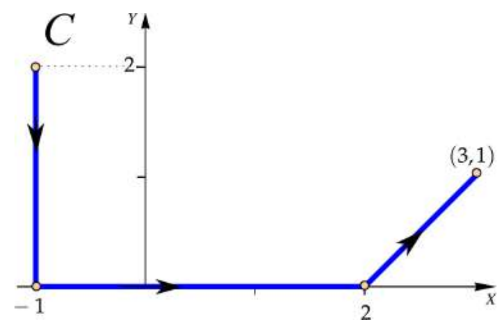


Ⓡ **6.4.8** Calcule $\int_C x^2z\,dx - yx^2\,dy + 3xz\,dz$ donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$





Ⓡ **6.4.9** Calcule $\int_C (x^2e^x+y^2)\,dx+(y^2e^y+x^2)\,dy$ donde C es el camino que se representa en la figura a la derecha:



Ⓡ **6.4.10** Calcule $\int_C (2x+y)\,dx+xy\,dy$ donde C es el camino que se representa en la figura a la derecha.

Ⓡ **6.4.11** Sea $F(x,\ y,\ z) = (3x^2 + \operatorname{sen} z\ + yz)\,\mathbf{i}\ + xz\ \hat{\mathbf{j}}\ + (x\cos z + xy)\ \hat{\mathbf{k}}$.

a.) Demostrar que F es un campo de fuerzas conservativo.

b.) Determine el trabajo realizado para desplazar un objeto en este campo desde el punto $(0,0,0)$ hasta el punto $(0,2,4)$.

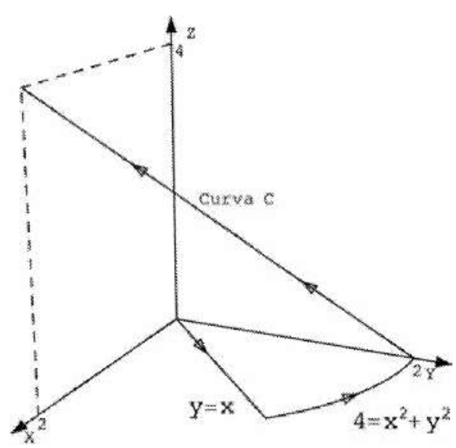
Ⓡ **6.4.12** Considere el campo

$$F(x,\ y,\ z) = 4xe^z\,\mathbf{i}\ + \cos(y)\ \hat{\mathbf{j}}\ + (2x^2e^z)\ \hat{\mathbf{k}}$$

a.) Verifique que F es conservativo

b.) Encuentre una función potencial para el campo vectorial F.

c.) Calcule $\int_C F\cdot dr$ con C la curva que se muestra a la derecha.



6.4.13 Dado el campo vectorial $F(x,\ y,\ z) = 4xe^z\ \hat{\imath} + \cos(y)\ \hat{\jmath}\ + 2x^2e^z\ \hat{k}$.

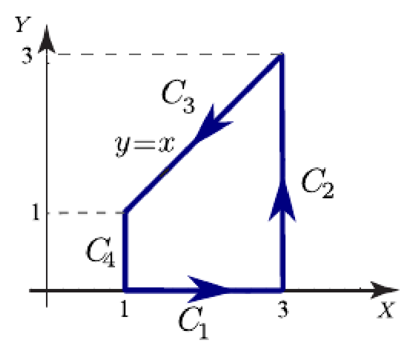
a.) Verifique que es conservativo

b.) Encuentre una función potencial para el campo vectorial F.

c.) Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas F para mover una partícula desde el punto $P = (1,0,0)$ hasta el punto $Q = (3,\ \pi/2,0)$.

d.) Evalue la integral de línea $\int_\Gamma F \cdot dr$, donde Γ es la curva cuyas ecuaciones paramétricas son: $x(t) = \cos(t),\ y(t) = \operatorname{sen}(t),\ z(t) = 3$, donde $0 \leq t \leq 2\pi$.

6.4.14 Sea $F(x,y) = (x+y)\ \hat{\imath} - (x^2+y^2)\ \hat{\jmath}$. La curva C es la frontera del trapecio limitado por las curvas $y=0,\ x=1,\ x=3$ y $y=x$ como se muestra en la figura.



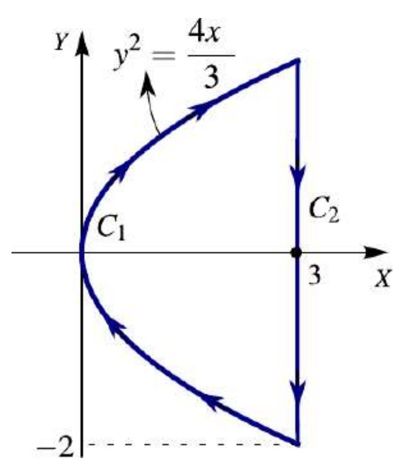
a.) Calcular la integral $\int_C F \cdot dr$ usando el teorema de Green.

b.) Calcular la integral $\int_C F \cdot dr$ **sin utilizar** el teorema de Green.

6.4.15 Considere el campo vectorial

$$F(x,y) = x\ \hat{\imath} + (x+y^2)\,\hat{\jmath}.$$

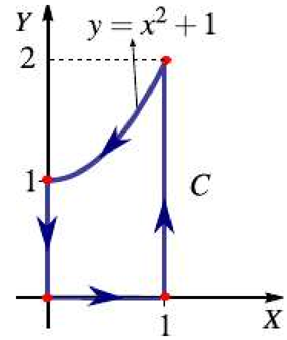
Calcular $\int_C F \cdot\ dr$ donde $C = C_1 + C_2$ tal y como se muestra en la figura a la derecha.



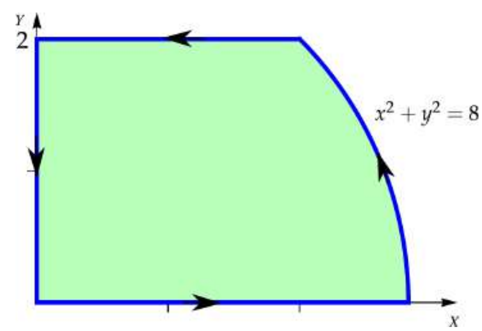
Ⓡ **6.4.16** Considere el campo vectorial

$$F(x,y,z) = y\,\hat{\imath} + x^2\,\hat{\jmath}$$

. Calcule la integral de línea $\int_C F\cdot\, dr$ donde C es la curva que se muestra en la figura a la derecha

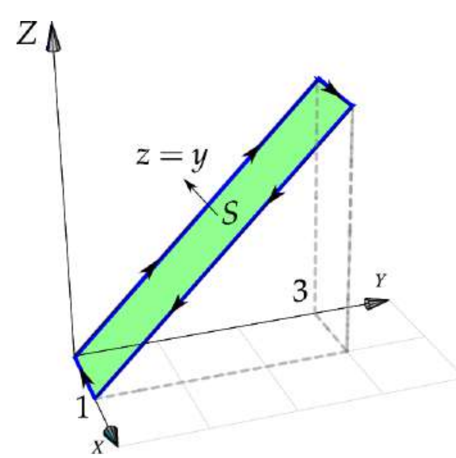


Ⓡ **6.4.17** Use el Teorema de Green para calcular el área de la región sombreada usando una integral de línea



Ⓡ **6.4.18** Calcule $\int_C F\cdot dr$ donde C es el camino que se representa en la figura a la derecha y además F es el campo de fuerzas:

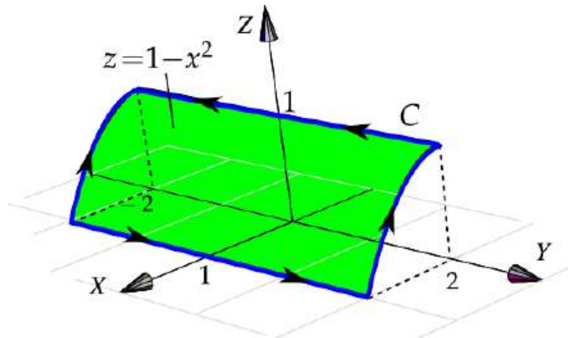
$$F(x,\ y,\ z) = x^2\,\mathbf{i} + 4xy^3\ \hat{\jmath} + xy^2\ \hat{\mathbf{k}}$$



Ⓡ **6.4.19** Usando el Teorema de Stokes calcule la integral $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde

$$F(x,\, y,\, z) = xy\,\hat{\imath} + yz\,\hat{\jmath} + xz\,\hat{k}$$

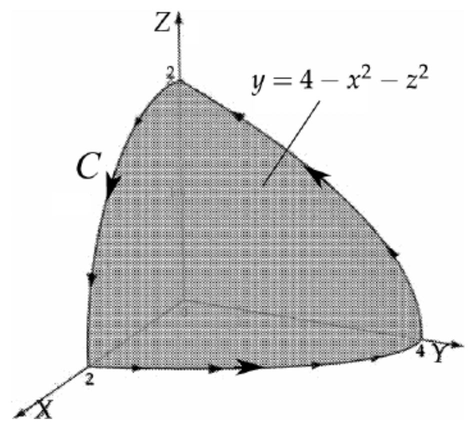
y C es el camino indicado en la figura a la derecha.



Ⓡ **6.4.20** Sea $F(x,y,z) = xy\hat{\imath} + z\,\hat{\jmath} + y\,\hat{k}$ y C es la curva que se muestra en la figura a la derecha.

a.) Calcule $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, sin utilizar el teorema de Stokes

b.) Calcule $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, utilizando el teorema de Stokes



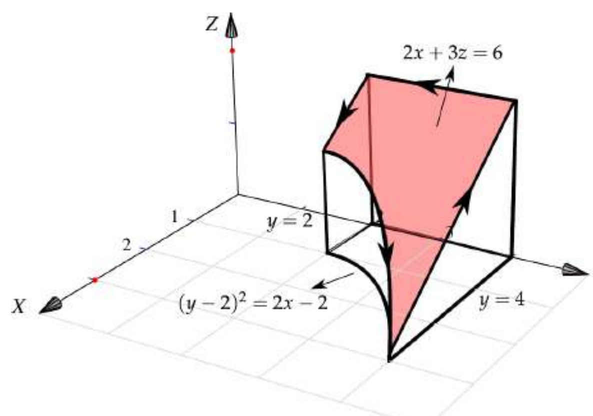
Ⓡ **6.4.21** Considere

$$F(x,\, y,\, z) = (y-x)\,\hat{\imath} + (x-z)\,\hat{\jmath} + (x-y)\,\hat{k}$$

y S es la parte sombreada en la figura a la derecha y C la curva frontera de S.

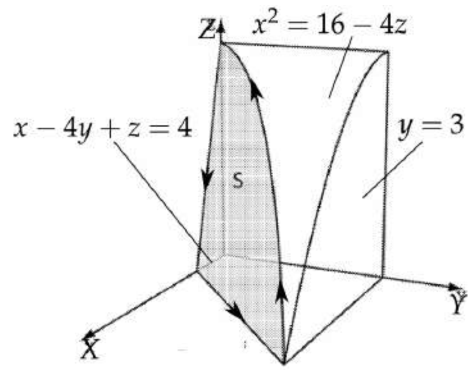
a.) Calule $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ sin usar el Teorema de Stokes.

b.) Calule $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ usando el Teorema de Stokes.



Ⓡ **6.4.22** Sea $F(x,\, y,\, z) = (y-x)\,\hat{\imath} + (x-z)\,\hat{\jmath} + (x-y)\,\hat{k}$. Use el Teorema de Stokes para evaluar la integral $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, siendo C la curva frontera de la porción del frontera de la porción del plano de ecuación $x + 2y + z = 2$ en el primer octante. **Nota:** Considere el plano orientado con un vector normal superior (Exterior).

Ⓡ **6.4.23** Sea $F(x, y, z) = -y^2\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath} + z^2\,\hat{k}$, S es la parte sombreada en la figura a la derecha y C la curva frontera de S.

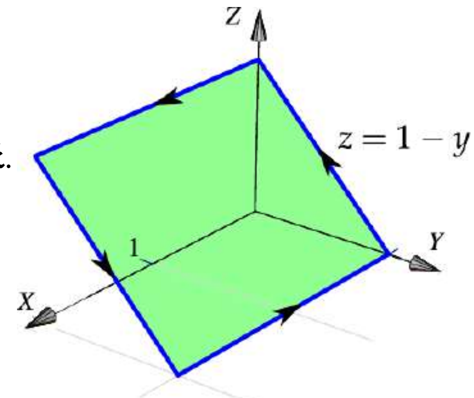


a.) Calule $\int_C F\cdot dr$ sin usar el Teorema de Stokes.

b.) Calule $\int_C F\cdot dr$ usando el Teorema de Stokes.

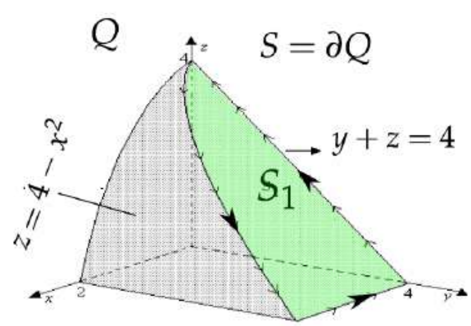
Ⓡ **6.4.24** Considere el campo de fuerzas

$F(x, y, z) = z^2 y\cos(xy)\,\hat{\imath} + z^2 x(1+\cos(xy))\,\hat{\jmath} + 2\,\mathrm{sen}(xy)\,\hat{k}$.



Calcule $\int_C F\cdot dr$ si C es el camino que se indica en la figura a la derecha.

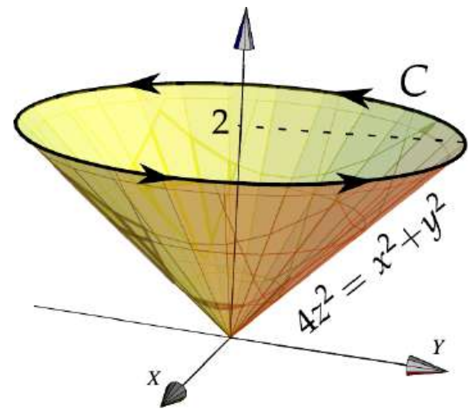
Ⓡ **6.4.25** Sea $F(x, y, z) = -y^2\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath} + z^2\,\hat{k}$ un campo vectorial y Q el sólido de la figura a la derecha.



a.) Use el Teorema de Stokes para calcular la integral de línea $\int_\Gamma F\cdot dr$, donde Γ es la frontera de la superficie sombreada S_1 de la figura a la derecha.

b.) Use el Teorema de la Divergencia para evaluar la integral de superficie $\iint_S F\cdot N\,dS$ donde N es una normal unitaria exterior a Q y S es la frontera del sólido Q.

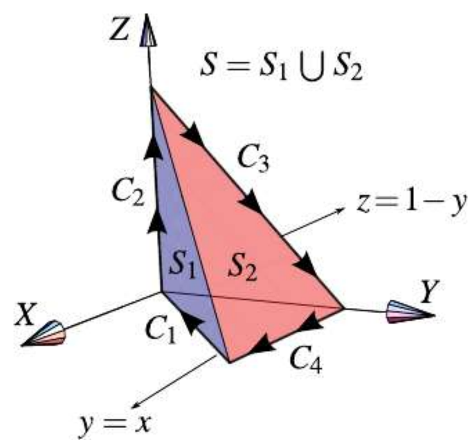
Ⓡ **6.4.26** Plantee las integrales necesarias para calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ si $F(x,\, y,\, z) = 3y\,\mathbf{i} - xz\,\hat{\jmath} + yz^2\,\hat{\mathbf{k}}$ y C es el camino indicado en la figura a la derecha.

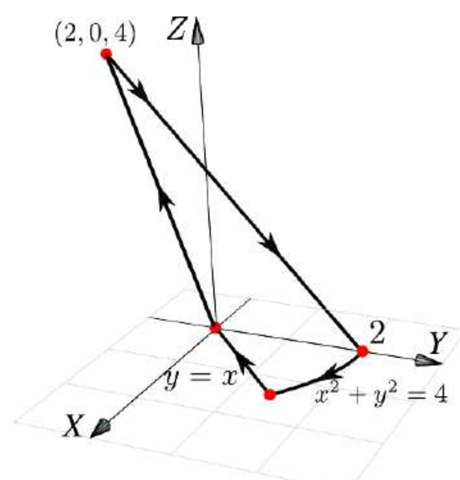


Ⓡ **6.4.27** Sea $F(x,y,z) = -y^2\ \hat{\imath} + z\ \hat{\jmath} + x\ \hat{\mathbf{k}}$. Considere la superficie $S = S_1 \bigcup S_2$, tal y como se muestra en la figura a la derecha, y la curva $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ que es el borde de la superficie S.

a.) Calcular $\int_C F\cdot dr$ usando la definición de integral de línea.

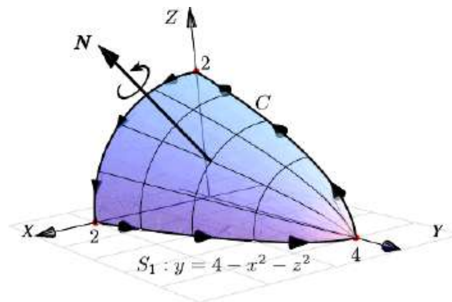
b.) Calcular la integral de superficie $\int_C F\cdot dr$ usando el Teorema de Stokes





Ⓡ **6.4.28** Sea $F(x,y,z) = -y\ \hat{\imath} + z\ \hat{\jmath} + (x+z)\ \hat{\mathbf{k}}$. Use el teorema de Stokes para calcular $\int_C F\cdot dr$ donde C es la curva de la figura a la derecha.

6.4.29 Use el teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\ \hat{\imath} + xy\ \hat{\jmath} + z^2\ \hat{\mathbf{k}}$ y C es la frontera de la porción del paraboloide $y = 4 - x^2 - z^2$ que se encuentra en el primer octante, como se muestra en la figura a la derecha.



6.4.30 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = 2yz\ \hat{\imath} - 4x\ \hat{\jmath} - 3z^2\ \hat{\mathbf{k}}$, y sea C la curva que se obtiene al intersecar la superficie $z = 4 - x^2$ con el plano $y + z = 6$, tal y como se muestra en la figura a la derecha. Calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

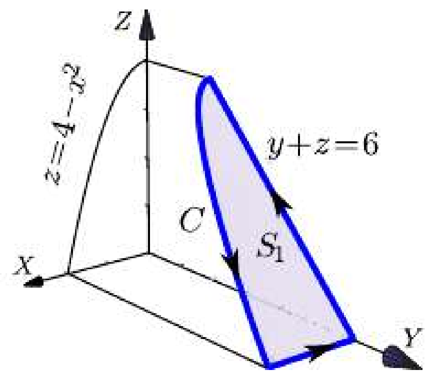
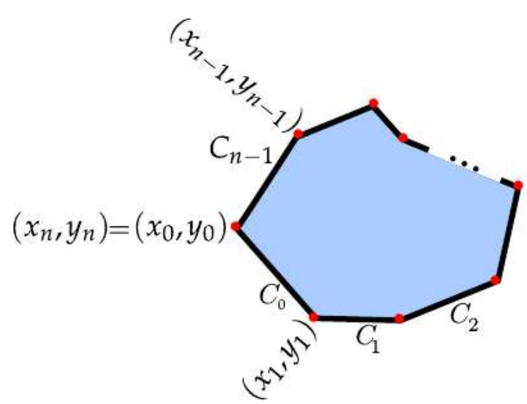


Figura 6.1: Curva C.

6.4.31 (**) **Área de un polígono simple.**
Use la fórmula del área como una integral de línea para verificar que el área de un polígono simple de n vértices $\{(x_0,y_0),\ldots,(x_{n-1},y_{n-1})\}$ es

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1}+x_k)(y_{k+1}-y_k)}{2}$$

Asumimos que $(x_0,y_0) = (x_n,y_n)$.



Capítulo 7

7.1 Solución de los ejercicios

1.1. Parábolas

1.1.1 images/goback.pdf

a.) vértice: $\left(3, -\frac{2}{7}\right)$

Foco: $\left(3, \frac{41}{28}\right)$

Lado recto: 7

Directriz: $y = \frac{-57}{28}$

b.) vértice: $(-2, -3)$

Foco: $\left(\frac{-3}{2}, -3\right)$

Lado recto: 2

Directriz: $x = \frac{-5}{2}$

c.) vértice: $(-1, -4)$

Foco: $\left(-1, \frac{-9}{2}\right)$

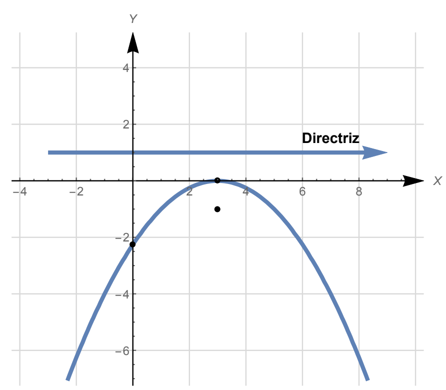
Lado recto: 2

Directriz: $y = \frac{-7}{2}$

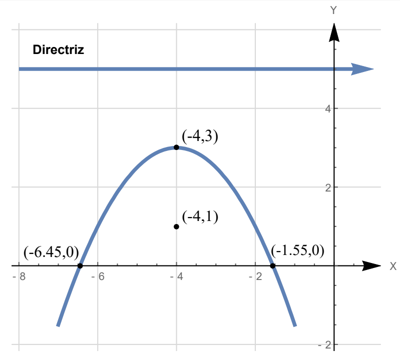
1.1.2 images/goback.pdf $(y + 1)^2 = 8(x + 1)$

1.1.3 images/goback.pdf $(x - 3)^2 + \left(y - \frac{2}{7}\right)^2 = 25$

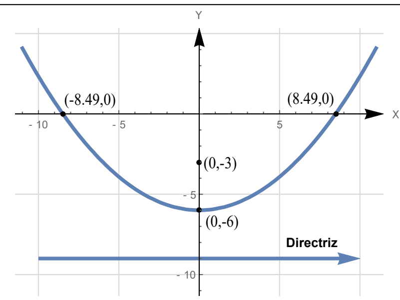
1.1.4 images/goback.pdf a.) $(x - 3)^2 = -4y$



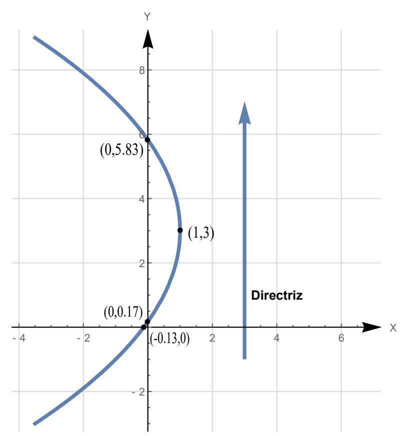
b.) $(x+4)^2 = -2\,(y-3)$



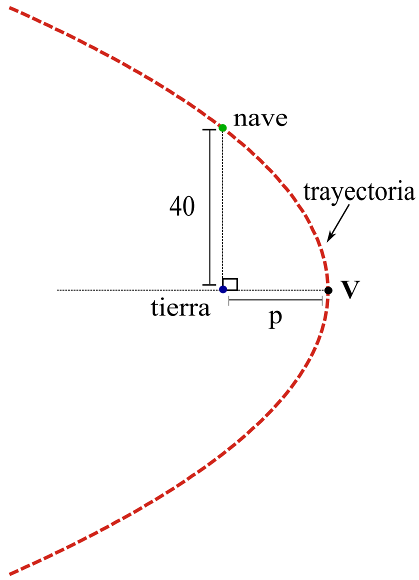
c.) $x^2 = 12(y+6)$



d.) $(y-3)^2 = -8(x-1)$



1.1.5 images/goback.pdf Según la información, el problema se puede representar de la siguiente forma:



La trayectoria de la nave representa la parábola, se desea averiguar la distancia de la tierra (foco) a la nave cuando se encuentre en el punto más cercano, en este caso representado por V (vértice).

Note que el lado recto mide 80 millas, entonces:

$$\begin{aligned} 4p &= 80 \\ p &= \frac{80}{4} \\ p &= 20 \end{aligned}$$

Por lo tanto, lo más cerca que pasa de la tierra es: 20 millas.

1.1.6 images/goback.pdf 225 metros

1.1.7 images/goback.pdf $(y-3)^2 = -4(x-3)$

1.1.8 images/goback.pdf $y^2 = 8x$

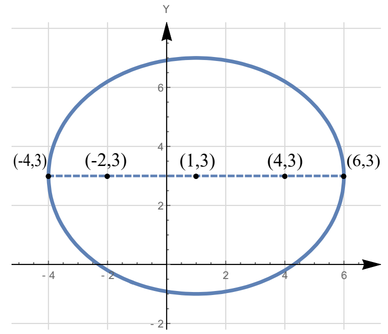
1.1.9 images/goback.pdf $(y-2)^2 = -8(x-3)$

1.1.10 images/goback.pdf $x^2 = 12(y+6)$

1.2. Elipses

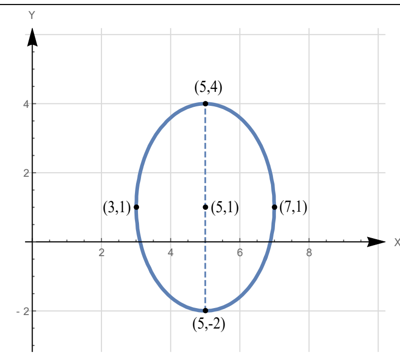
1.2.1 images/goback.pdf

a.) $\dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$



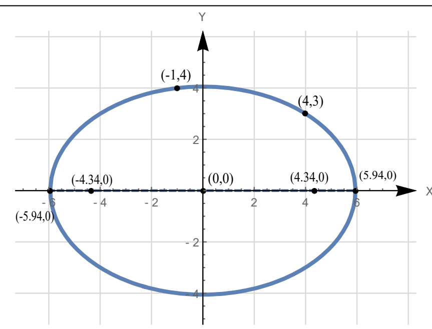
---

b.) $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{(y-4)^2}{4} = 1$



---

c.) $\dfrac{x^2}{\frac{247}{7}} + \dfrac{y^2}{\frac{247}{15}} = 1$



1.2.2 images/goback.pdf

a.) Centro: $(1,-1)$

Focos: $F_1 = \left(1, \dfrac{-2-\sqrt{5}}{2}\right)$, $F_2 = \left(1, \dfrac{-2+\sqrt{5}}{2}\right)$

Vértices: $V_1 = (1,-2)$, $V_2 = (1,0)$

Extremos del eje menor: $(0,-1)$ y $(2,-1)$

b.) Centro: $(2,-1)$

Focos: $F_1 = (5,-1)$ $\qquad$ $F_2 = (-1,-1)$

Vértices: $V_1 = (7,-1)$ $\quad V_2 = (-3,-1)$

Extremos del eje menor: $(2,3)$ y $(2,-5)$

c.) Centro: $(2,0)$

Focos: $F_1 = (6,0)$ $\quad F_2 = (-2,0)$

Vértices: $V_1 = (7,0)$ $\quad V_2 = (-3,0)$

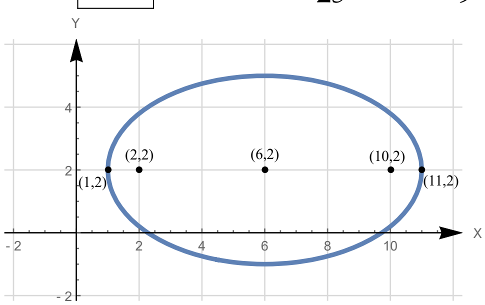
Extremos del eje menor: $(2,3)$ y $(2,-3)$

1.2.3 images/goback.pdf $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$

1.2.4 images/goback.pdf $\dfrac{x^2}{24} + \dfrac{y^2}{49} = 1$

1.2.5 images/goback.pdf $\dfrac{x^2}{13} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

1.2.6 images/goback.pdf $\dfrac{(x-6)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

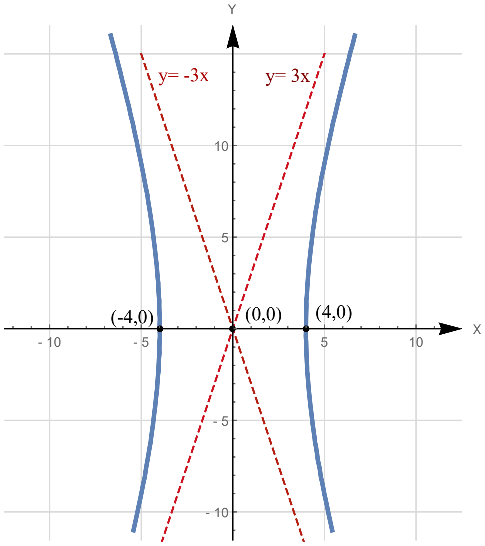


1.3. Hipérbolas

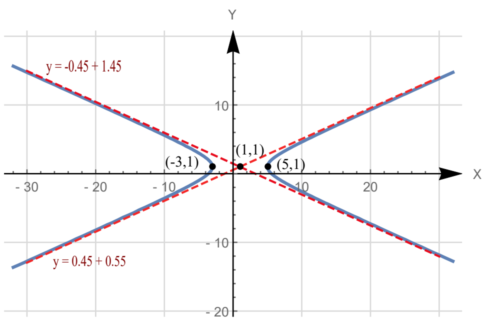
1.3.1 images/goback.pdf $\left(y - \dfrac{3}{2}\right) - \dfrac{(x+3)^2}{\frac{5}{4}} = 1$

1.3.2 images/goback.pdf

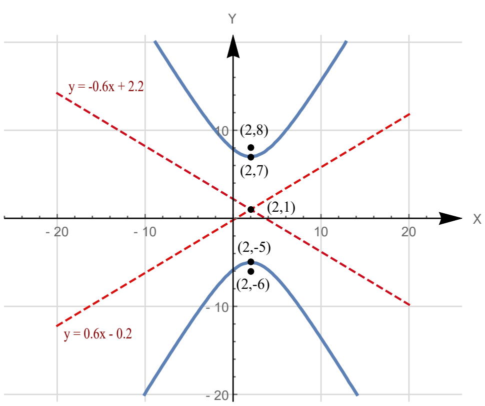
a.) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{144} = 1$



b.) $\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{(y-1)^2}{\frac{16}{5}} = 1$



c.) $\dfrac{(y-1)^2}{36} - \dfrac{(x-2)^2}{13} = 1$



1.3.3 images/goback.pdf

a.) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$

Centro: $(0,-2)$

Vértices: $(2,-2)$ y $(-2,-2)$

Focos: $(\pm\sqrt{13},-2)$

Asíntotas: $y = -2 \pm \dfrac{3}{4}x$

b.) $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{6} = 1$

Centro: $(-1,-2)$

Vértices: $(-3,-2)$, $(1,-2)$

Focos: $\left(-1-\sqrt{10},-2\right)$, $\left(-1+\sqrt{10},-2\right)$

Asíntotas: $y = -2 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}(x+1)$, $y = -2 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}(x+1)$

c.) $\dfrac{(y-1)^2}{16} - (x-1)^2 = 1$

Centro: $(1,1)$

Vértices: $(1,-3)$, $(1,5)$

Focos: $\left(1, 1-\sqrt{17}\right)$, $\left(1, 1+\sqrt{17}\right)$

Asíntotas: $y = 1 + 4(x-1)$, $y = 1 - 4(x-1)$

1.3.4 images/goback.pdf $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{21} = 1$

1.3.5 images/goback.pdf $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

1.4. Ecuación general de segundo grado

1.4.1 images/goback.pdf

a.) Hipérbola $\dfrac{(y-1)^2}{4} - \dfrac{(x-2)^2}{9} = 1$

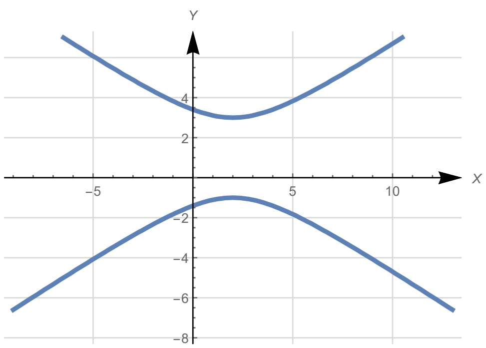
Centro: $(2, 1)$

Vértices: $V_1 = (2, 3)$, $V_2 = (2, -1)$

Focos: $(2, 1 + \sqrt{13})$, $(2, 1 - \sqrt{13})$

Excentricidad: $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Asíntotas: $y = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{1}{3}$, $y = -\dfrac{2x}{3} + \dfrac{7}{3}$



b.) Hipérbola $\dfrac{(x+2)^2}{4} - \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1$

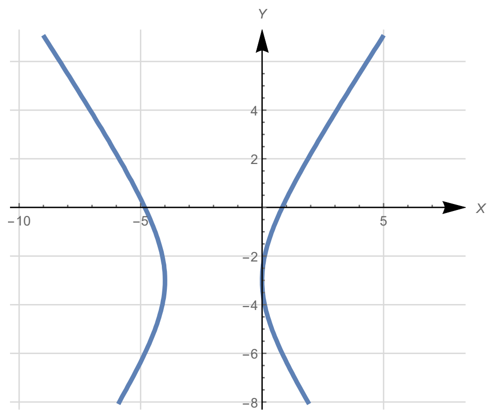
Centro: $(-2, -3)$

Vértices: $V_1 = (0, -3)$, $V_2 = (-4, -3)$

Focos: $\left(-2 + \sqrt{13}, -3\right)$, $\left(-2 - \sqrt{13}, -3\right)$

Excentricidad: $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

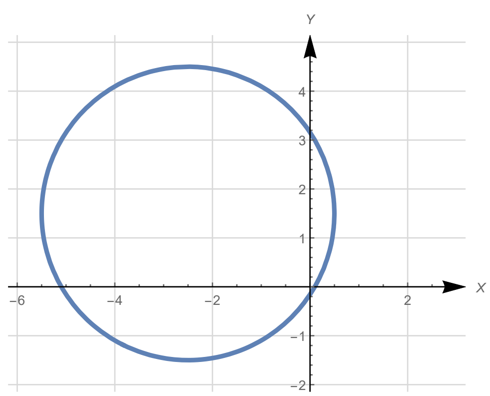
Asíntotas: $y = \dfrac{3x}{2}$, $y = -\dfrac{2x}{2} - 6$



c.) Círculo $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9$

Centro: $\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$

Radio: 3

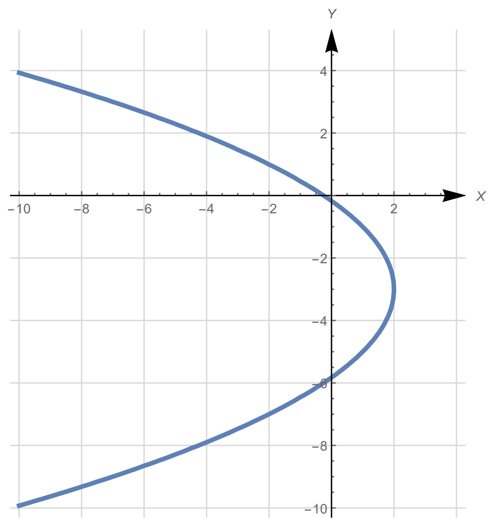


d.) Parábola $(y+3)^2=-4(x-2)$

Vértice: $V=(2,-3)$

Foco: $(1,-3)$

Directriz: $x=3$

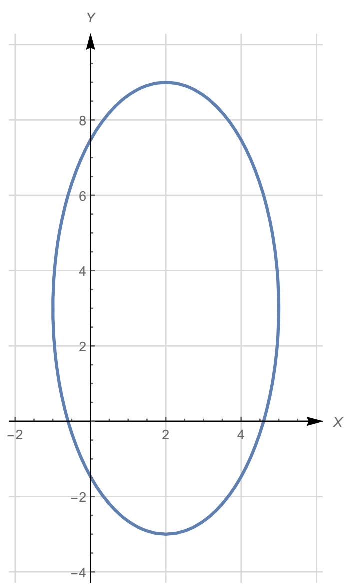


e.) Elipse $\dfrac{(y-3)^2}{36}+\dfrac{(x-2)^2}{9}=1$

Centro: $(2,3)$

Vértices: $V_1=(2,9)$, $V_2=(2,-3)$

Focos: $\left(2,3+3\sqrt{3}\right)$, $\left(2,3-3\sqrt{3}\right)$



f.) Hipérbola $\dfrac{(x+3)^2}{\frac{1}{9}}-(y-5)^2=1$

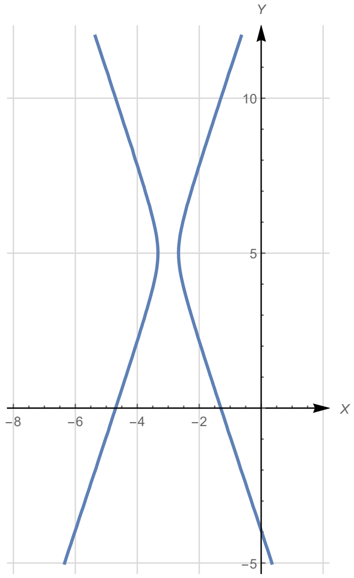
Centro: $(-3,5)$

Vértices: $V_1=\left(-\dfrac{8}{3},5\right)$, $V_2=\left(-\dfrac{10}{3},5\right)$

Focos: $\left(-3+\dfrac{\sqrt{10}}{3},5\right)$, $\left(-3-\dfrac{\sqrt{10}}{3},5\right)$

Excentricidad: $\sqrt{10}$

Asíntotas: $y = 3x + 14$, $y = -3x - 4$

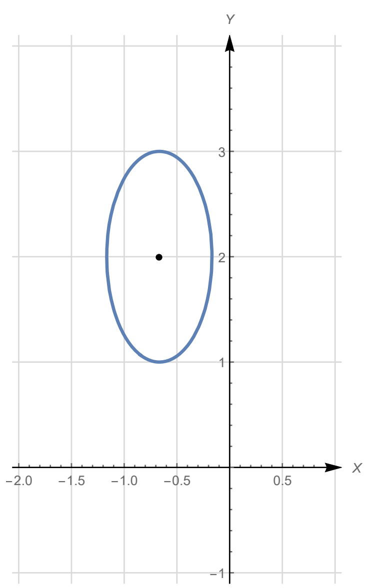


g.) Elipse $\dfrac{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{4}} + (y-2)^2 = 1$

Centro: $\left(-\dfrac{2}{3}, 2\right)$

Vértices: $V_1 = \left(-\dfrac{2}{3}, 3\right)$, $V_2 = \left(-\dfrac{2}{3}, 1\right)$

Focos: $\left(-\dfrac{2}{3}, 2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{2}{3}, 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

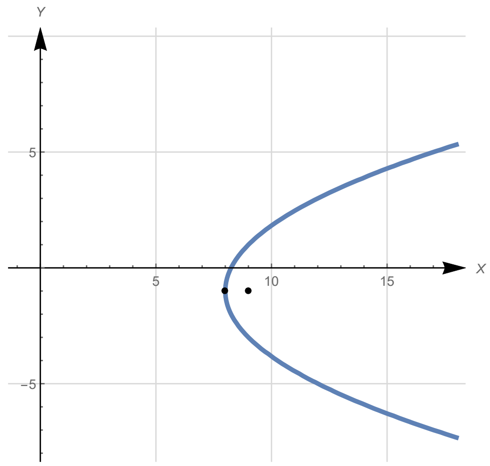


h.) Parábola $(y+1)^2 = 4(x-8)$

Vértice: $V = (8, -11)$

Foco: $(9, -1)$

Directriz: $x = 7$

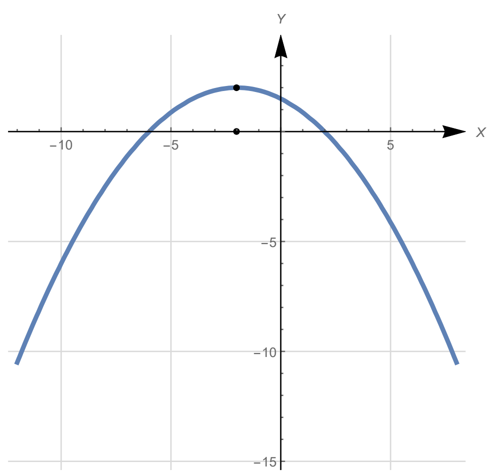


i.) Parábola $(x+2)^2 = -8(y-2)$

Vértice: $V = (-2, 2)$

Foco: $(-2, 0)$

Directriz: $y = 4$



j.) Hipérbola $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{6} = 1$

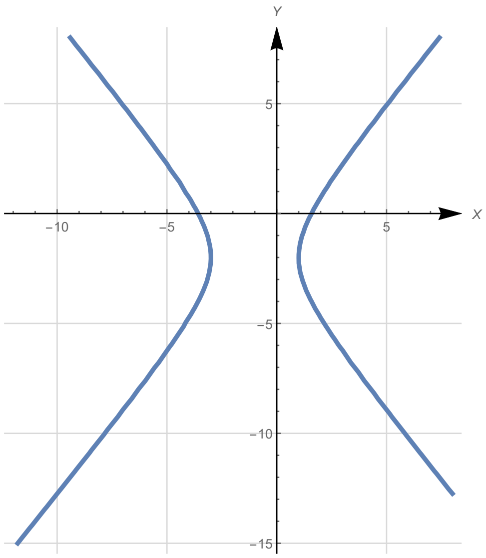
Centro: $(-1, -2)$

Vértices: $V_1 = (1, -2)$, $V_2 = (-3, -2)$

Focos: $\left(-1+\sqrt{10}, -2\right)$, $\left(-1-\sqrt{10}, -2\right)$

Excentricidad: $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Asíntotas: $y = \frac{x\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} - 2$, $y = -\frac{x\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} - 2$



k.) Hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

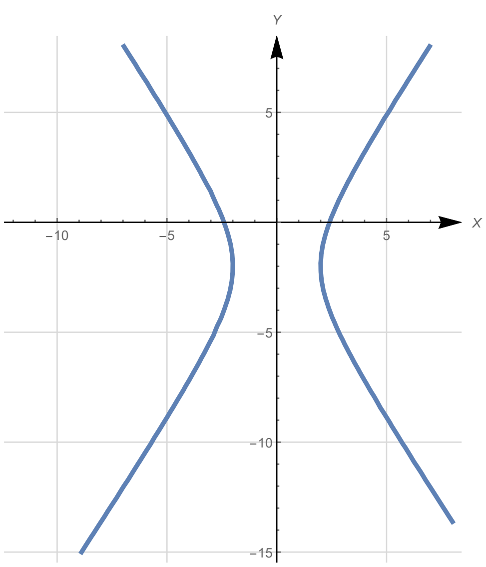
Centro: $(0, -2)$

Vértices: $V_1 = (2, -2)$, $V_2 = (-2, -2)$

Focos: $\left(\sqrt{13}, -2\right)$, $\left(-\sqrt{13}, -2\right)$

Excentricidad: $\frac{\sqrt{13}}{2}$

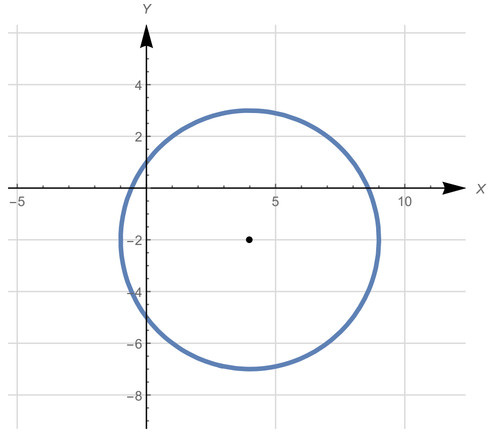
Asíntotas: $y = \frac{3x}{2} - 2$, $y = -\frac{3x}{2} - 2$



l.) Círculo $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$

Centro: $(4,-2)$

Radio: 5



1.5. Lugares geométricos

1.5.1 images/goback.pdf $y = \frac{6}{14}x - \frac{37}{7}$

1.5.2 images/goback.pdf Es un círculo de ecuación $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$

1.5.3 images/goback.pdf Es una eplise de ecuación $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$

1.5.4 images/goback.pdf $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$

1.5.5 images/goback.pdf $y = \frac{9}{7}x + \frac{3}{7}$

1.5.6 images/goback.pdf $\frac{(x-\frac{17}{8})^2}{\frac{9}{64}} - \frac{y^2}{\frac{9}{8}} = 1$

7.2 Solución de los ejercicios

2.1. Curvas en el espacio

2.1.1 images/goback.pdf

2.2.1 images/goback.pdf

2.2.2 images/goback.pdf

2.2.3 images/goback.pdf

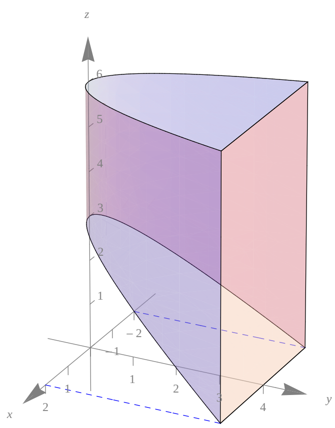
2.3. Sólidos Simples

2.3.1 images/goback.pdf

a)

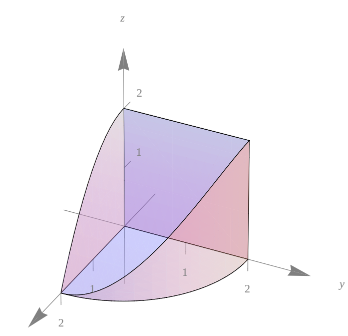
b)

c)



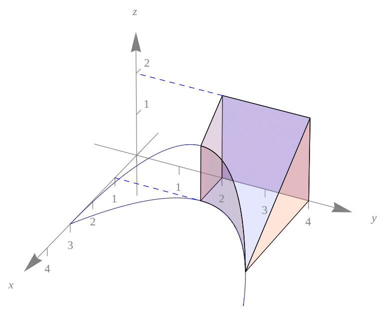
d)

e)

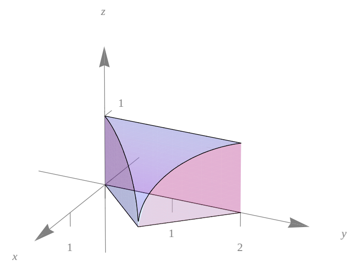


f)

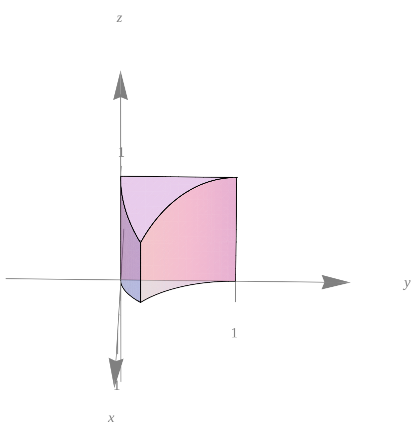
g)



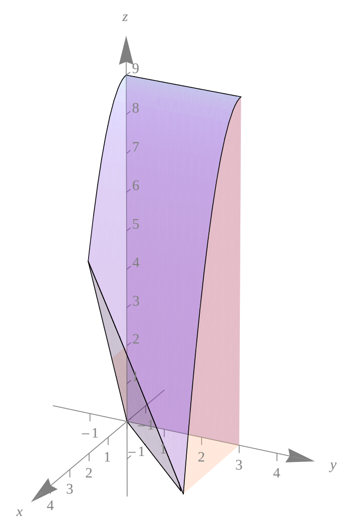
h)



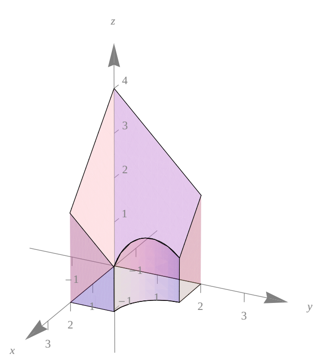
i)



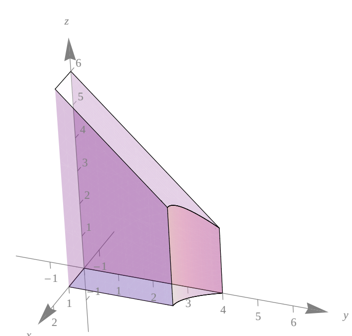
j)

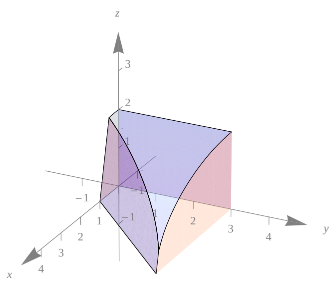


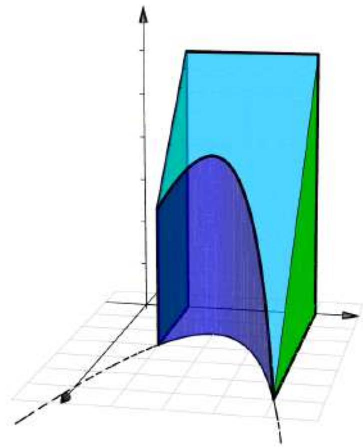
k)

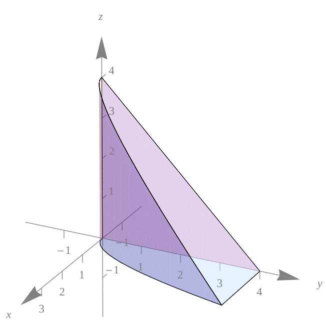


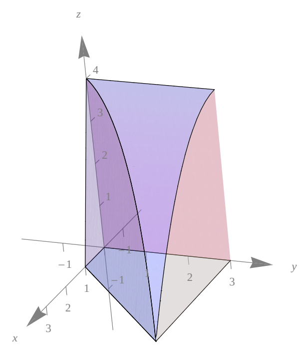
l)

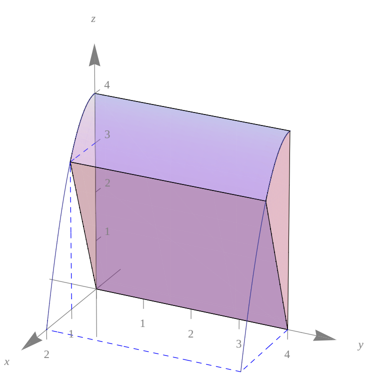


m) 

n) 

ñ) 

o) 

p) 

7.3 Solución de los ejercicios

3.1. Dominios

3.1.1 images/goback.pdf

a.)
b.)
c.)
d.)
e.)
f.)

3.2. Derivadas Parciales

3.2.1 images/goback.pdf

3.2.2 images/goback.pdf

3.2.3 images/goback.pdf

3.2.4 images/goback.pdf

3.2.5 images/goback.pdf

3.2.6 images/goback.pdf

3.2.7 images/goback.pdf

3.2.8 images/goback.pdf

3.2.9 images/goback.pdf

3.2.10 images/goback.pdf

3.2.11 images/goback.pdf

3.2.12 images/goback.pdf

3.2.13 images/goback.pdf

3.2.14 images/goback.pdf

3.2.15 images/goback.pdf

3.2.16 images/goback.pdf

3.2.17 images/goback.pdf

3.2.18 images/goback.pdf

3.2.19 images/goback.pdf

3.2.20 images/goback.pdf

3.2.21 images/goback.pdf

3.2.22 images/goback.pdf

3.2.23 images/goback.pdf

3.2.24 images/goback.pdf

3.2.25 images/goback.pdf

3.2.26 images/goback.pdf

3.2.27 images/goback.pdf

3.2.28 images/goback.pdf

3.2.29 images/goback.pdf

3.2.30 images/goback.pdf

3.2.31 images/goback.pdf

3.2.32 images/goback.pdf

3.2.33 images/goback.pdf

3.2.34 images/goback.pdf

3.2.35 images/goback.pdf

3.2.36 images/goback.pdf

3.2.37 images/goback.pdf

3.2.38 images/goback.pdf

3.2.39 images/goback.pdf

3.2.40 images/goback.pdf

3.2.41 images/goback.pdf

3.2.42 images/goback.pdf

3.2.43 images/goback.pdf

3.2.44 images/goback.pdf

a.) Como $t^{-n}f(tx,ty)=f(x,y)$ entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{-n}f(tx,ty)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left(f(x,y)\right)=0 \quad \text{pues } x,y \text{ no dependen de } t$$

Poniendo $u=xt$ y $v=yt$ entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{-n}f(u,v)\right]=-nt^{-n-1}f(u,v)+t^{-n}\left(xf_u\ +\ yf_v\right)=0$$

Entonces

$$t^{-n}\left(xf_u\ +\ yf_v\right)=nt^{-n-1}f(u,v)$$

por lo que, multiplicando a ambos lados por t^{n+1},

$$tx\,f_u\ +\ ty\,f_v=nf(u,v) \quad (*)$$

Ahora, $\begin{cases} f_x=\dfrac{\partial}{\partial x}(f(x,y)) & = & \dfrac{\partial}{\partial x}(t^{-n}f(u,v))=t^{1-n}f_u \implies f_u=\dfrac{f_x}{t^{n-1}} \\ \\ f_y=\dfrac{\partial}{\partial x}(f(x,y)) & = & \dfrac{\partial}{\partial y}(t^{-n}f(u,v))=t^{1-n}f_v \implies f_v=\dfrac{f_y}{t^{n-1}} \end{cases}$

Sustituyendo en f_u y f_v en (*) obtenemos

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nt^nf(u,\ v)=nf(x,y)$$

3.3. Plano tangente.Rectas normales, rectas tangentes

3.3.1 images/goback.pdf

3.3.2 images/goback.pdf $P = (1,0,-1)$. $\nabla z = \left(-\dfrac{ye^{xy}+z}{x-3yz^2}, -\dfrac{xe^{xy}-z^3}{x-3yz^2}\right)$. $\nabla z(1,0,-1) = (1,-2)$. $D_{\mathbf{u}}z(1,0) = -6/\sqrt{8}$.

Plano tangente: $x - 2y - z = -2$.

3.3.3 images/goback.pdf

$z_x = -2(x-2) \implies z_x(2,0) = 0$ y $z_y = -2y \implies z_y(2,0) = 0$ (P es un punto crítico). una ecuación paramétrica de las rectas tangentes a P en la dirección del eje X y del eje Y, serían (respectivamente),

$$\mathbf{L}_X(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\cdot(1,\ 0,\ f_x(x_0,\ y_0)) \ \text{ o } \ \mathbf{L}_X(x) = (x, y_0, z_0 + (x-x_0)f_x(x_0,\ y_0))$$

$$\mathbf{L}_Y(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\cdot(0,\ 1,\ f_y(x_0,\ y_0)) \ \text{ o } \ \mathbf{L}_y(x) = (x_0, y, z_0 + (y-y_0)f_y(x_0,\ y_0))$$

- La recta tangente en P, en dirección de $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ es $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}(t) = P + t\cdot(u_0,\ u_1,\ D_{\mathbf{u}}z(x_0,\ y_0))$ si $\mathbf{u}$ es *unitario*.

a.) $\mathbf{L}_X(t) = (2,0,9) + t\cdot(1,\ 0,\ 0)$

b.) $\mathbf{L}_Y(t) = (2,0,9) + t\cdot(0,\ 1,\ 0)$

c.) Este plano sería el plano tangente en P

3.3.4 images/goback.pdf

a.) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2} + y + 3$ y $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_Q = 5$. Entonces una ecuación de la recta tangente en la dirección del eje X es

$$\mathbf{L}_X(t) = Q + t\cdot(1,\ 0,\ 5)$$

b.) Como $\nabla z = \left(\dfrac{2x}{x^2+y^2} + y + 3,\ \dfrac{2y}{x^2+y^2} + x\right)$, entonces

$$D_{\mathbf{u}}z(Q) = \nabla z(Q)\cdot\frac{(-1,3)}{\sqrt{10}} = (5,1)\cdot\frac{(-1,3)}{\sqrt{10}} = \frac{-2}{\sqrt{10}}$$

Una ecuación de la recta tangente en la dirección $\mathbf{u} = (-1,3)$ es

$$\mathbf{L_u}(t) = Q + t \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{10}\right)$$

c.) Si $G(x,y,z) = z - \ln(x^2+y^2) - x(y+3)$ entonces $\nabla G = \left(-\frac{2x}{x^2+y^2} + y + 3,\ -\frac{2y}{x^2+y^2} + x,\ 1\right)$. Un vector normal es $\mathbf{N} = (-5,-1,1)$. Una ecuación cartesiana del plano tangente a S en Q es

$$-5x - y + z = (-5,-1,1)\cdot(1,0,3) = -2$$

3.3.5 images/goback.pdf

3.4. Gradiente y Derivada direccional

3.4.1 images/goback.pdf

3.4.2 images/goback.pdf

3.4.3 images/goback.pdf

3.4.4 images/goback.pdf

3.4.5 images/goback.pdf

3.4.6 images/goback.pdf

3.4.7 images/goback.pdf

3.4.8 images/goback.pdf

a.) La dirección es $\mathbf{u} = B - A = (1,-2,1)$ y $\nabla V = (10x + yz, xz - 3, xy)$.

$$D_{\mathbf{u}}V(P) = \nabla V(P) \cdot \frac{\mathbf{u}}{||\mathbf{u}||} = (50,12,12)\cdot\frac{(1,-2,1)}{\sqrt{6}} = 19\sqrt{2/3}$$

3.4.9 images/goback.pdf

3.4.10 images/goback.pdf

3.4.11 images/goback.pdf

3.4.12 images/goback.pdf

3.4.13 images/goback.pdf

3.4.14 images/goback.pdf

3.4.15 images/goback.pdf

7.4 Solución de los ejercicios

4.1. Máximo y mínimos locales. Multiplicadores de Lagrange.

4.1.1 images/goback.pdf

4.1.2 images/goback.pdf

4.1.3 images/goback.pdf

4.1.4 images/goback.pdf

4.1.5 images/goback.pdf

4.1.6 images/goback.pdf

4.1.7 images/goback.pdf

4.1.8 images/goback.pdf

4.1.9 images/goback.pdf

4.1.10 images/goback.pdf

4.1.11 images/goback.pdf

4.1.12 images/goback.pdf Si las dimensiones son $x,\ y$ para la base y z para la altura, el problema consiste en minimizar $C(x,y,z) = 2xy + 2\cdot 2xz + 4\cdot 2yz$ sujeto a la restricción $V = xyz = 8000$ (entonces $x,\ y,\ z > 0$). Aquí suponemos que las caras de \$4cm^2 eran las de lados y y z.

Si lo resolvemos por Lagrange,

$L(x,y,z,\lambda) = 2xy + 4xz + 8yz - \lambda(xyz - 8000)$

$$\text{Resolvemos}\left\{\begin{array}{rcl} L_x & = & 0\\ L_y & = & 0\\ L_z & = & 0\\ L_\lambda & = & 0\end{array}\right. \implies x = 40,\ y = 20,\ z = 10 \quad (\text{y } \lambda = 2/5)$$

4.1.13 images/goback.pdf Si las dimensiones son $x,\ y$ para la base y z para la altura, el problema consiste en minimizar $C(x,y,z) = 2xy + 2\cdot 2xz + 4\cdot 2yz$ sujeto a la restricción $V = xyz = 8000$ (entonces $x,\ y,\ z > 0$). Aquí suponemos que las caras de \$4cm^2 eran las de lados y y z.

Si lo resolvemos por Lagrange,

$L(x,y,z,\lambda) = 2xy + 4xz + 8yz - \lambda(xyz - 8000)$

$$\text{Resolvemos}\left\{\begin{array}{rcl} L_x & = & 0\\ L_y & = & 0\\ L_z & = & 0\\ L_\lambda & = & 0\end{array}\right. \implies x = 40,\ y = 20,\ z = 10 \quad (\text{y } \lambda = 2/5)$$

4.1.14 images/goback.pdf

4.1.15 images/goback.pdf

4.1.16 images/goback.pdf

4.1.17 images/goback.pdf

4.1.18 images/goback.pdf

4.1.19 images/goback.pdf

4.1.20 images/goback.pdf

4.1.21 images/goback.pdf

4.1.22 images/goback.pdf

4.1.23 images/goback.pdf

4.1.24 images/goback.pdf

4.1.25 images/goback.pdf

4.1.26 images/goback.pdf

4.1.27 images/goback.pdf

4.1.28 images/goback.pdf

4.1.29 images/goback.pdf

4.1.30 images/goback.pdf

7.5 Solución de los ejercicios

5.1. Integral doble.

5.1.1 images/goback.pdf

5.1.2 images/goback.pdf

5.1.3 images/goback.pdf

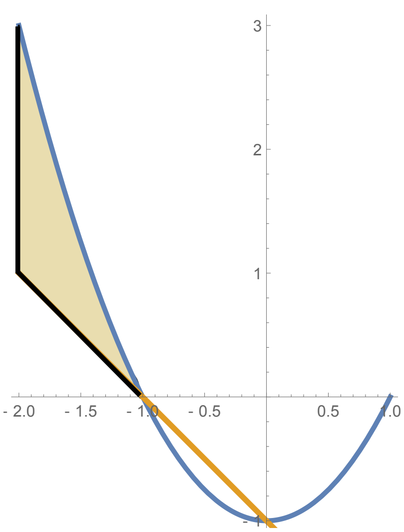
5.1.4 images/goback.pdf

5.1.5 images/goback.pdf

5.1.6 images/goback.pdf

5.1.7 images/goback.pdf

5.1.8 images/goback.pdf Son dos regiones, la primera está entre $y = 0$ y $y = 1$ y entre las curvas $x = -y - 1$ y $x = -\sqrt{y+1}$, es decir $y = x^2 - 1$. La segunda región está entre $y = 1$ y $y = 3$ y entre las curvas $x = -2$ y $y = x^2 - 1$.



$$A_R = \int_{-2}^{-1} \int_{-x-1}^{x^2-1} 1 \cdot dy\, dx \ = \ 5/6$$

5.1.9 images/goback.pdf

5.1.10 images/goback.pdf

5.1.11 images/goback.pdf Cuidado, debe escoger la rama correcta en cada parábola.

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^2 \int_{-2+\sqrt{2-y}}^{3-\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-2}^{-2+\sqrt{2}} \int_{2-(x+2)^2}^{2} f(x,y)\,dy\,dx \;+\; \int_{-2+\sqrt{2}}^{3-\sqrt{2}} \int_0^2 f(x,y)\,dy\,dx \;+\; \int_{3-\sqrt{2}}^{3} \int_0^{(x-3)^2} f(x,y)\,dy\,dx$$

5.1.12 images/goback.pdf Cuidado, debe tener el cuidado de escoger la rama correcta en la parábola y el signo correcto en la elipse.

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-2}^{0} \int_{2-(x+2)^2}^{x+4} f(x,y)\,dy\,dx + \int_0^2 \int_{x-2}^{4-2\sqrt{4-(x-2)^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-2}^{0} \int_{-2+\sqrt{2-y}}^{y+2} f(x,y)dxdy + \int_0^2 \int_{-2+\sqrt{2-y}}^{\frac{1}{2}\left(4-\sqrt{8y-y^2}\right)} f(x,y)dxdy \int_2^4 \int_{y-4}^{\frac{1}{2}\left(4-\sqrt{8y-y^2}\right)} f(x,y)dxdy$$

5.2. Cambio de Variable

5.2.1 images/goback.pdf

5.2.2 images/goback.pdf

5.2.3 images/goback.pdf

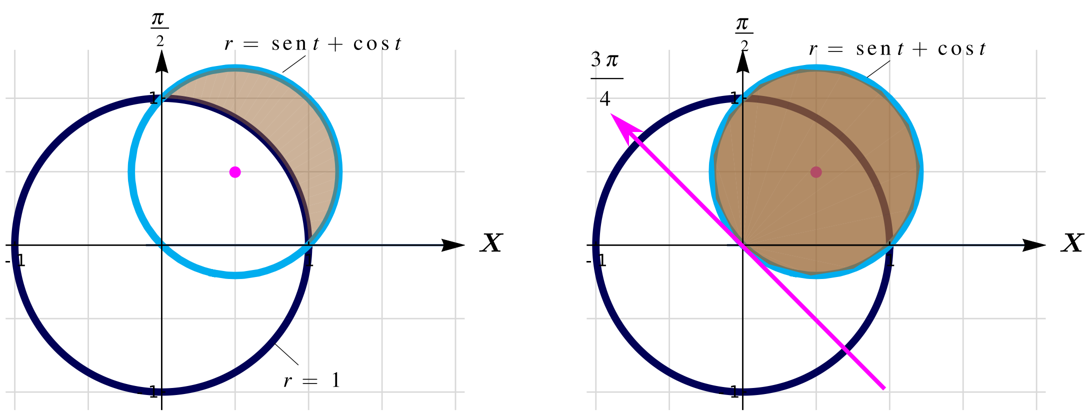
5.2.4 images/goback.pdf

5.2.5 images/goback.pdf

5.2.6 images/goback.pdf

5.2.7 images/goback.pdf

5.2.8 images/goback.pdf Note que la curva celeste tiene ecuación $r = \operatorname{sen} t + \cos t$ con $t \in [-\pi/4,\ 3\pi/4]$. La región sombreada requiere diferentes intervalos para cada curva. Mejor es calcular el área del círculo con circunferencia celeste y restar el área de la región que va de la circunferencia azul a la circunferencia celeste, esa regón si está entre 0 y $\pi/2$ para ambas curvas.



$$A_R = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\sin(t)+\cos(t)} 1\, r\, dr\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sin(t)+\cos(t)} 1\, r\, dr\, dt = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

5.2.9 images/goback.pdf

5.2.10 images/goback.pdf En el caso b) se puede obtener primero el área de la región del cardioide en $[-\pi/2,\ \pi/2]$ y restar el área de la región entre el eje Y y la circunferencia. Luego puede utlizar este cálculo para responder la pregunta a.)

5.2.11 images/goback.pdf

5.2.12 images/goback.pdf

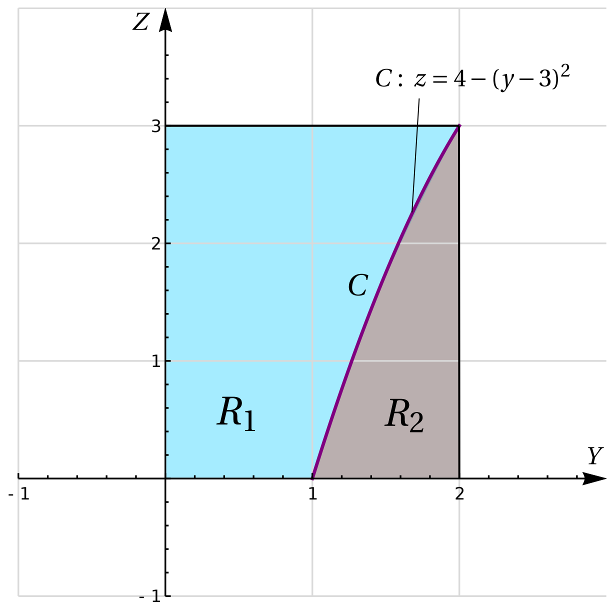
5.2.13 images/goback.pdf

5.3. Volumen

5.3.1 images/goback.pdf **Solución:**

c.) Proyectando sobre YZ.

$C: z = 4 - x^2 \bigcap y + x = 3 \implies C: \; z = 4 - (y-3)^2.$



$$
\begin{aligned}
V_Q &= \int_0^3 \int_0^{3-\sqrt{4-z}} (\sqrt{4-z} - \frac{z}{3}) \, dy\, dz + \int_1^2 \int_0^{4-(y-3)^2} (3 - y - \frac{z}{3}) \, dz\, dy \\
&= \int_0^3 \left(3 - \sqrt{4-z}\right)\left(\sqrt{4-z} - \frac{z}{3}\right) dz + \int_1^2 -\frac{y^4}{6} + 3y^3 - \frac{50y^2}{3} + 33y - \frac{115}{6} dy \\
&= \frac{23}{4}
\end{aligned}
$$

5.3.2 images/goback.pdf

5.4. Integrales Triples

5.4.1 images/goback.pdf

5.4.2 images/goback.pdf

5.4.3 images/goback.pdf

5.4.4 images/goback.pdf

5.4.5 images/goback.pdf

5.4.6 images/goback.pdf

5.4.7 images/goback.pdf

7.6 Solución de los ejercicios

6.1. Parametrización de una curva

6.1.1 images/goback.pdf

6.2.1 images/goback.pdf

6.2.2 images/goback.pdf

6.2.3 images/goback.pdf

6.2.4 images/goback.pdf

6.2.5 images/goback.pdf

$$
\begin{aligned}
A = \iint_S dS &= \int_0^2 \int_0^x \sqrt{4x^2+1}\,dy\,dx \\
&= \int_0^2 x\sqrt{4x^2+1}\,dx \\
&= \int_1^{17} \sqrt{u}\,\frac{du}{8} = \left.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{12}\right|_1^{17} = 5{,}7577
\end{aligned}
$$

6.2.6 images/goback.pdf

$$
\begin{aligned}
\iint_S F\cdot N\, dS &= \int_1^3\int_0^3 (0, x+y, 1-(x-2)^3)\cdot(-3(x-2)^2, 0, 1)\, dy\, dx \\
&= \int_1^3\int_0^3 (1-(x-2)^3)\, dy\, dx \\
&= \int_1^3\int_0^3 (-x^3+6x^2-12x+9)\, dy\, dx \\
&= 3\int_1^3 (-x^3+6x^2-12x+9)\, dx \;=\; 3\left(-\frac{x^4}{4}+2x^3-6x^2+9x\right)\Big|_0^3 \;=\; 6
\end{aligned}
$$

6.2.7 images/goback.pdf

6.2.8 images/goback.pdf

6.2.9 images/goback.pdf

6.2.10 images/goback.pdf

6.2.11 images/goback.pdf

6.2.12 images/goback.pdf

6.2.13 images/goback.pdf

6.2.14 images/goback.pdf

6.2.15 images/goback.pdf

6.2.16 images/goback.pdf

6.2.17 images/goback.pdf

6.2.18 images/goback.pdf

6.2.19 images/goback.pdf

6.2.20 images/goback.pdf

6.2.21 images/goback.pdf

6.2.22 images/goback.pdf

6.3. Integral de Línea de una función escalar

6.3.1 images/goback.pdf $s = \int_0^{44} \sqrt{1+9/4t}\,dt \;=\; 296$

6.3.2 images/goback.pdf $s = 2\int_1^{4} \sqrt{t}\,dt \;=\; 14/3$

6.3.3 images/goback.pdf $s = 2\int_{1/2}^{4} \sqrt{1+9(2t-1)}\,dt \;=\; 1022/27$

6.3.4 images/goback.pdf Recuerde que $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x|$.

$$s = \int_0^{\pi/4} \sec t\,dt \;=\; \ln(\sqrt{2}+1)$$

6.3.5 images/goback.pdf

6.3.6 images/goback.pdf La circunferencia se parametriza como $r(t) = (4\cos t,\ 4\operatorname{sen} t)$ con $t \in [0,\pi]$.

$$\int_C xy^2\,ds \;=\; 64\int_0^{\pi} \cos t\,\operatorname{sen}^2 t\,dt \;=\; 0$$

6.3.7 images/goback.pdf $\int_C x\,ds \;=\; \int_{-1}^{1} t\sqrt{1+4t^2}\,dt \;=\; 0$

6.3.8 images/goback.pdf $C:\ r(t) = (t,t,0)$ con $t \in [0,1]$.

$$\int_C \frac{xy+z}{2x-y}\,ds \;=\; \int_0^1 t\sqrt{2}\,dt$$

6.3.9 images/goback.pdf

6.3.10 images/goback.pdf $t \in [1,2]$. Luego, $r'(t) = (1,1,1)$ y entonces

$$\begin{aligned}\int_C \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}\,ds &= \int_1^2 \frac{t+t+t}{t^2+t^2+t^2}\,\sqrt{1^2+1^2+1^2}\,dt\\ &= \int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{t}\,dt \;=\; \sqrt{3}\,\ln|t|\Big|_1^2 \;=\; \sqrt{3}\ln 2\end{aligned}$$

6.3.11 images/goback.pdf $\displaystyle\int_C \frac{x^2+2y}{\sqrt{33-8z}}\,ds = \int_{-1}^1 8-t^2\,dt$

6.3.12 images/goback.pdf

6.4. Integral de Línea de un campo vectorial

6.4.1 images/goback.pdf

6.4.2 images/goback.pdf

6.4.3 images/goback.pdf

6.4.4 images/goback.pdf

6.4.5 images/goback.pdf

6.4.6 images/goback.pdf

6.4.7 images/goback.pdf

6.4.8 images/goback.pdf

6.4.9 images/goback.pdf

6.4.10 images/goback.pdf

6.4.11 images/goback.pdf

6.4.12 images/goback.pdf

6.4.13 images/goback.pdf

6.4.14 images/goback.pdf

a.) $-\dfrac{64}{3}$

b.) $\displaystyle\int_{C_1} F\cdot dr + \int_{C_2} F\cdot dr + \int_{C_3} F\cdot dr + \int_{C_4} F\cdot dr = 4 - 36 + 28/3 + 4/3 = -\frac{64}{3}$

6.4.15 images/goback.pdf

Como se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de Green en el plano, excepto la orientación de la curva, entonces

$$\int_C F\cdot\, dr \;=\; -\int_{-2}^{2}\int_{3y^2/4}^{3} 1 \;-\; 0\; dx\, dy \;=\; -8.$$

6.4.16 images/goback.pdf Por el teorema de Green:

$$\begin{aligned}\int_C F\cdot\, dr &= \int_0^1\int_0^{x^2+1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy\, dx\\ &= \int_0^1\int_0^{x^2+1} (2x-1)\, dy\, dx\\ &= \int_0^1 (2x-1)\,(x^2+1) dx \;=\; \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

6.4.17 images/goback.pdf

6.4.18 images/goback.pdf

6.4.19 images/goback.pdf

6.4.20 images/goback.pdf

6.4.21 images/goback.pdf

6.4.22 images/goback.pdf

6.4.23 images/goback.pdf

6.4.24 images/goback.pdf

6.4.25 images/goback.pdf

6.4.26 images/goback.pdf

6.4.27 images/goback.pdf

1. $\displaystyle\int_C F\cdot\, dr = \int_{C_1} F\cdot\, dr + \int_{C_2} F\cdot\, dr + \int_{C_3} F\cdot\, dr + \int_{C_4} F\cdot\, dr$

   a) $-C_1:\ r_1(t) = (t,t,0)\ t\ \in\ [0,1] \implies \displaystyle\int_{C_1} F\cdot\, dr = -\int_0^1 -t^2\, dt = \frac{1}{3}$

   b) $C_2:\ r_2(t) = (0,0,t)\ t\ \in\ [0,1] \implies \displaystyle\int_{C_2} F\cdot\, dr = \int_0^1 0\, dt = 0$

   c) $C_3:\ r_3(t) = (0,t,1-t)\ t\ \in\ [0,1] \implies \displaystyle\int_{C_3} F\cdot\, dr = \int_0^1 1-t\ dt = \frac{1}{2}$

d) $C_4: \; r_4(t) = (t, 1, 0) \; t \in [0, 1] \implies \displaystyle\int_{C_1} F \cdot \, dr = \int_0^1 -1^2 \, dt = -1$

$$\int_C F \cdot \, dr = 1/3 + 1/2 - 1$$

2. $\displaystyle\iint\limits_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS \; = \; \iint\limits_{S_1} \operatorname{rot} F \cdot N \, dS \; + \; \iint\limits_{S_2} \operatorname{rot} F \cdot N \, dS.$

   $\operatorname{rot} = (-1, -1, 2y)$

   Para S_1 un vector normal es $N_1 = (1, -1, 0)$ (acorde con la orientación de C).

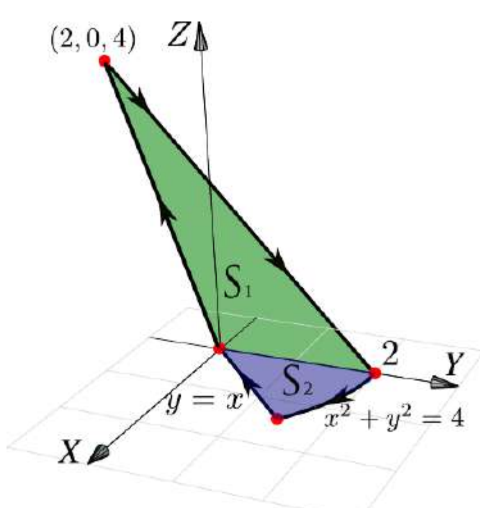
   $\displaystyle\iint\limits_{S_1} \operatorname{rot} F \cdot N_1 \, dS \; = \; \iint\limits_{S_1} 0 \;\, dS \; = \; 0$

   Para S_2 un vector normal es $N_2 = (0, -1, -1)$ (acorde con la orientación de C).

   $\displaystyle\iint\limits_{S_2} \operatorname{rot} F \cdot N_2 \, dS \; = \; \int_0^1 \int_x^1 1 - 2y \, dy \, dx \; = \; -1/2 + 1/3.$

   Finalmente, $\displaystyle\iint\limits_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS \; = \; 0 + -1/2 + 1/3.$

6.4.28 images/goback.pdf Aplique el teorema de Stokes con las superficies de la figura a la derecha.



6.4.29 images/goback.pdf $\int_C F\cdot dr = -\dfrac{128}{15}$. Note que el vector normal adecuado, es $N = (-2x,-1,-2z)/||(-2x,-1,-2z)||$.

6.4.30 images/goback.pdf

6.4.31 images/goback.pdf

Capítulo 8

8.1 Exámenes 2015

8.2 Primer parcial–I–2015

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
CÁLCULO SUPERIOR
SABADO 28 DE MARZO 2015

TIEMPO MÁXIMO: 2 HORAS 30 MINUTOS
PUNTAJE TOTAL: 31
I SEMESTRE 2015
3:30 P. M.

Primer Examen Parcial- I semestre, 2015

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración. No se permite el uso de hojas sueltas, calculadoras programables ni teléfonos celulares.

1. Considere la sección cónica de ecuación $x^2 - 4x + 12y = 20$.

   (a.) [**3 puntos**]. Realice el dibujo de la sección cónica anterior dando las características más importantes de la misma.

   (b.) [**3 puntos**]. Determine la ecuación canónica de la elipse cuyo eje menor mide 10 y uno de sus vértices y uno de sus focos coinciden con el vértice y foco de la cónica anterior.

2. Considere la superficie S de ecuación: $\dfrac{4x^2}{9} - \dfrac{3(y-2)^2}{4} + \dfrac{4z^2}{25} = 1.$

   (a.) [**3 puntos**]. Dibuje por aparte *las trazas* $x = 0$, $y = 2$ y $y = 0$.

   (b.) [**3 puntos**]. Dibuje la superficie S.

3. Considere las superficies $\mathbf{S_1}: \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, $\mathbf{S_2}: x + z = 4$, $\mathbf{S_3}: x = 2$, $\mathbf{S_4}: y = 0$ y $\mathbf{S_5}: z = 0$.

   (a.) [**2 puntos**] Dibuje por separado y en el primer octante, *las superficies* $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$

   (b.) [**3 puntos**]. Dibuje en el primer octante el sólido limitado por las superficies de $\mathbf{S_1}, \mathbf{S_2}, \mathbf{S_3}, \mathbf{S_4}$ y $\mathbf{S_5}$

4. [**5 puntos**]. Sea g derivable y f una función con derivadas parciales de segundo orden continuas. Determine $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ si $z = f\big(x\,sen(y),\ g(x)\big)$

5. [**5 puntos**]. Sea z definido implícitamente por medio de la relación $z = x \cdot f\left(\dfrac{y}{z}\right)$ con f una función con derivada continua. Verifique que se satisface la ecuación dada por:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

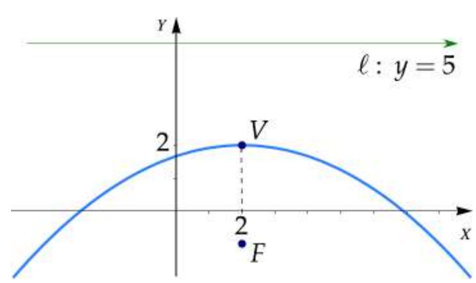
6. [**4 puntos**]. Sea $z = x^2 + 2y^2 - y$. Determine la derivada direccional de z en el punto $A = (1, 2)$ en dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ para $B = (3, 7)$.

8.3 Solución resumida: I parcial, I–2015

1. Considere la sección cónica de ecuación $x^2 - 4x + 12y = 20$.

   (a.) [**3 puntos**]. Realice el dibujo de la sección cónica anterior dando las características más importantes de la misma.

   Solución: Ec. Canónica: $(x-2)^2 = -12(y-2)$; $F = (2, -1)$; $p = -3$.



   (b.) [**3 puntos**]. Determine la ecuación canónica de la elipse cuyo eje menor mide 10 y uno de sus vértices y uno de sus focos coinciden con el vértice y foco de la cónica anterior.

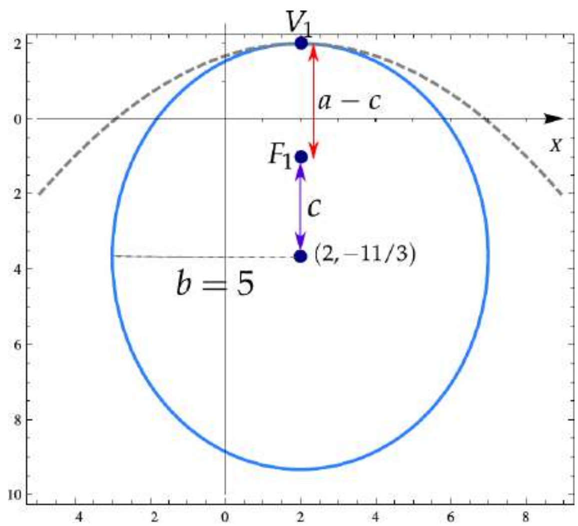
Solución:

Solución: La elipse tiene un vértice $V_1 = (2, 2)$ y un foco $F_1 = (2, -1)$. Como su eje menor mide 10, entonces $b = 5$. Entonces

$$\begin{cases} a - c &= 3 \\ c^2 &= a^2 - 25 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a &= \dfrac{17}{3} \\ c &= \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

$\therefore$ Centro $= (2,\ -11/3)$,

$\therefore$ Ec. Canónica $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y+11/3)^2}{(17/3)^2} = 1$



2. Considere la superficie S de ecuación: $\dfrac{4x^2}{9} - \dfrac{3(y-2)^2}{4} + \dfrac{4z^2}{25} = 1$.

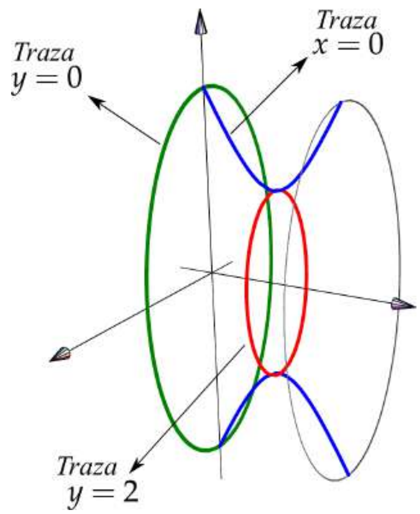
(a.) [**3 puntos**]. Dibuje por aparte *las trazas* $x = 0$, $y = 2$ y $y = 0$.

1) Traza $x = 0$ corresponde a la curva $\dfrac{z^2}{25/4} - \dfrac{(y-2)^2}{4/3} = 1\,;\ x = 0.$

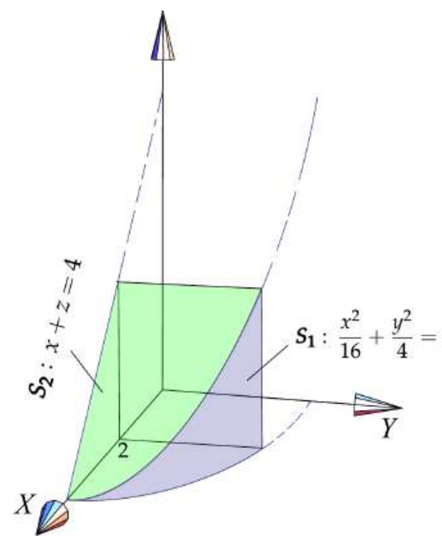
2) Traza $y = 2$ corresponde a la curva $\dfrac{x^2}{9/4} + \dfrac{z^2}{25/4} = 1\,;\ y = 2.$

3) Traza $y = 0$ corresponde a la curva $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{25} = 1\,;\ y = 0.$

(b.) [**3 puntos**]. Dibuje la superficie S.



3. Considere las superficies $\mathbf{S_1}:\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$, $\mathbf{S_2}:\ x+z=4$, $\mathbf{S_3}:\ x=2$, $\mathbf{S_4}:\ y=0$ y $\mathbf{S_5}:\ z=0$.
   - (a.) [**2 puntos**] Dibuje por separado y en el primer octante, *las superficies* $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$
   - (b.) [**3 puntos**]. Dibuje en el primer octante el sólido limitado por las superficies de $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$, $\mathbf{S_3}$, $\mathbf{S_4}$ y $\mathbf{S_5}$



4. [**5 puntos**]. Sea g derivable y f una función con derivadas parciales de segundo orden continuas. Determine $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ si $z=f(x\,sen(y),\,g(x))$

Solución: Primero hacemos un cambio de variable: $z=f(u,\,v)$ con $u=x\,sen(y)$ $v=g(x)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial U}\cdot U_y + \frac{\partial f}{\partial V}\cdot V_y\\ &= \frac{\partial f}{\partial U}\cdot x\cos y + \frac{\partial f}{\partial V}\cdot 0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(U,V)}{\partial U}\cdot x\cos y\right)\\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial U^2}\cdot U_x + \frac{\partial^2 f}{\partial V\partial U}\cdot V_x\right)x\cos y \;+\; \cos y\,\frac{\partial f}{\partial U}\\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial U^2}\cdot \operatorname{sen} y + \frac{\partial^2 f}{\partial V\partial U}\cdot g'(x)\right)x\cos y \;+\; \cos y\,\frac{\partial f}{\partial U}\end{aligned}$$

5. [**5 puntos**]. Sea z definido implícitamente por medio de la relación $z = x\cdot f\left(\frac{y}{z}\right)$ con f una función con derivada continua. Verifique que se satisface la ecuación dada por:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

Solución: Sea $F(x,y,z) = z - x\cdot f\left(\frac{y}{z}\right)$. Como debemos aplicar la regla de la cadena, hacemos un cambio de variable,

$F(x,y,z) = z - x\cdot f(U)$ con $U = \dfrac{y}{z}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-1\cdot f(U) \;-\; xf'(U)\cdot 0}{1 - x\cdot f'(U)\cdot\frac{-y}{z^2}} = \frac{f(U)}{1+\frac{xyf'(U)}{z^2}} = \frac{z^2 f(U)}{z^2 + xyf'(U)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{zxf'(U)}{z^2+xyf'(U)}$$

Sustituimos:

$$x\cdot\frac{z^2 f(U)}{z^2+xyf'(U)} \;+\; y\cdot\frac{zxf'(U)}{z^2+xyf'(U)} = \frac{x\cdot z^2 f(U) \;+\; y\cdot zxf'(U)}{z^2+xyf'(U)} = \frac{z\cdot\left[\overbrace{xzf(U)}^{z^2}+xyf'(U)\right]}{z^2+xyf'(U)} = z \checkmark$$

6. [**4 puntos**]. Sea $z = x^2 + 2y^2 - y$. Determine la derivada direccional de z en el punto $A = (1,2)$ en dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ para $B = (3,7)$.

Solución: Sea $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||} = \dfrac{(2,5)}{\sqrt{29}}$ y $\nabla z = (2x,\ 4y-1)$.

$$D_{\vec{u}}z(1,2) = (2,7)\cdot\frac{(2,5)}{\sqrt{29}} = \frac{39}{\sqrt{29}}$$

8.4 Primer parcial extraordinario–I–2015

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
CÁLCULO SUPERIOR
SABADO 13 DE ABRIL 2015

TIEMPO MÁXIMO: 2:30 HORAS
PUNTAJE TOTAL: 30
I SEMESTRE 2015
9:A.M

Primer Examen Parcial
Extraordinario

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración. No se permite el uso de hojas sueltas, calculadoras programables ni teléfonos celulares.

1. $4x^2 - 8x - y^2 - 6y - 9 = 0$

2. Considere la sección cónica C que tiene asíntotas oblicuas cuyas ecuaciones son $y = 2x-3$ y $y+2x = 5$ y uno de los focos es $(2,4)$

   (a.) **[3 puntos]** Determine la euación canónica de la cónica C

   (b.) **[3 puntos]** Realice el dibujo de la sección cónica C, dando las características más importantes de la misma.

3. **[4 puntos]** Determine y dibuje el dominio máximo de la función f de ecuación:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{6y+9x-y^2-18}}{\sqrt{y}}.$$

4. Considere la superficie S de ecuación: $(z-4)^2 - 9x^2 - \dfrac{9y^2}{4} = 0$.

   (a.) **[3 puntos]** Dibuje las trazas $y = 0$, $z = 0$ y $x = 0$

   (b.) **[2 puntos]** Dibuje la superficie S

5. Considere el sólido Q limitado por las superficies $S_1 :\ z = 4y - y^2$, $S_2 :\ y = 2x$, $S_3 : y = 2$, $S_4 : x = 0$ y $S_5 : z = 0$.

   (a.) **[2 puntos]** Dibuje por separado las supericies S_1 y S_2.

   (b.) **[3 puntos]** Dibuje el sólido Q

6. **[4 puntos]** Sea $u = \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$. Verifique que se satisface la ecuación dada por:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

7. **[5 puntos]** Sea g una función con segunda derivada continua y f una función con derivadas parciales de segundo orden continuas y sea $z = f^2\,(3x + 2y, 2y) + g(x - y)$. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

8. Considere una función z definida implícitamente en términos de x y y por medio de la relación: $x^2y + z^2xy + y = 4$.

   (a.) **[2 puntos]** Determine la máxima derivada direccional de z en el punto $A(1,1)$ cuando $z = -\sqrt{2}$

   (b.) **[3 puntos]** Determine si existe una dirección en la que la derivada direccional de z en A (cuando $z = -\sqrt{2}$) sea igual a 4.

Solución resumida: No está editada.

8.5 Segundo parcial–I–2015

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
CÁLCULO SUPERIOR
MAYO 2015

TIEMPO MÁXIMO: 2 HORAS 30 MINUTOS
PUNTAJE TOTAL: 32 PUNTOS
II SEMESTRE 2015
12:30 P. M.

II Examen Parcial Ordinario

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que debe presentar todos los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada. No se acogerán reclamos en exámenes resueltos con lápiz 0 que presenten algún tipo de alteración. Solo se permite el uso de calculadora que realice operaciones elementales 0 calculadora científica no programable. No se permite el uso de celular durante el desarrollo de la prueba, manténgalo apagado 0 en silencio.

1. Considere la función g de criterio $g(x,\ y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)}$.

   (a.) [**2 puntos**]. Verifique que el punto $(0, 0)$ es un punto crítico de g.

   (b.) [**2 puntos**]. Justifique que cualquier punto $(x,\ y)$ sobre la curva de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, también es punto crítico de g.

2. [**4 puntos**] Considere el problema de optimización de maximizar la función $P(x,\ y) = x^2y$, sujeto a la restricción $x^2 + 8y^2 = 24$, el cual posee en total seis puntos críticos. Determine dichos puntos críticos ***e*** indique cuál o cuáles maximizan la función P.

3. Considere el sólido E delimitado por las superficies de ecuación $S_1 : z = 3x$, $S_2 : y = 2$, $S_3 : z = \dfrac{-3}{2}(x-3)$, $S_4 : y^2 = 2(x-1)$, $S_5 : y = 0$ y $S_6 : z = 0$, que se muestra en la figura 8.1.

   (a.) [**4 puntos**] Dibuje las proyecciones del sólido E en los planos XY **y** YZ.

   (b.) [**3 puntos**] Plantee mediante una o varias integrales múltiples el volumen del sólido E, empleando la proyección en el plano YZ. Debe determinar explícitamente los límites de integración.

   (c.) [**2 puntos**] Determine una ecuación del plano tangente a la superficie S_4 en el punto $P(\frac{3}{2}, 1, 1)$.

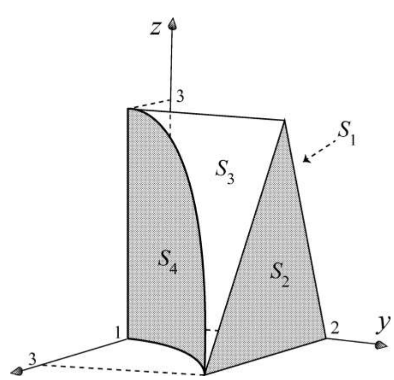


Figura 8.1: Sólido E.

4. Sea f una función integrable en $\mathbb{R}^2$ y considere la integral doble planteada sobre una región $R \subset \mathbb{R}^2$:

$$I = \iint_R f(x,\, y)dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,\, y)dxdy.$$

   (a.) **[2 puntos]**. Dibuje la región de integración R asociada a la integral anterior.

   (b.) **[2 puntos]**. Plantee la integral I en términos de integrales iteradas en el orden $dydx$.

5. **[5 puntos]** Plantee $\iint_D x dA$ como suma de integrales iteradas en coordenadas polares, donde D es la región del plano limitada por la parabola $4x^2 - 9y = 0$, la recta $3y + 4x = 0$ y el círculo $x^2 + y^2 = 25$ (ver Figura 8.5). Debe determinar explícitamente los límites de integración.

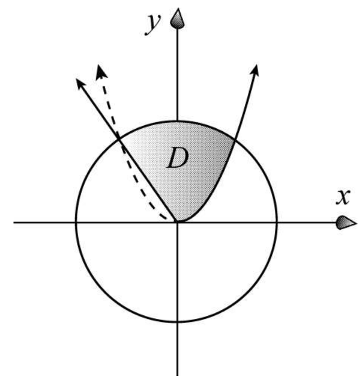


Figura 8.2: Región D del ejercicio 5.

6. **[5 puntos]** La figura 8.6 muestra el sólido W delimitado en el primer octante por las superficies de ecuación $y+z = 3,\ x^2+z^2 = 1$ y $x^2+z^2 = \alpha^2$, con $1 < \alpha < 3$. Calcule el volumen de W en términos de $(y$. Para ello utilice la proyección en el plano XZy coordenadas cilíndricas.

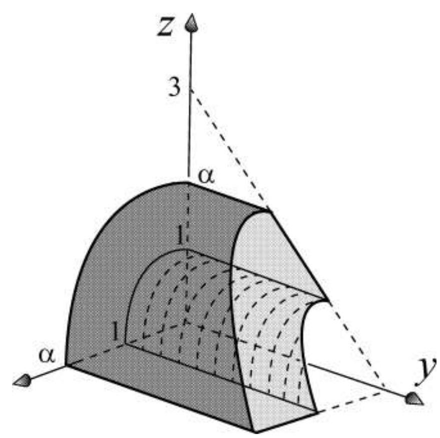


Figura 8.3: Sólido W.

8.6 Solución resumida: II parcial, I−2015

1. Considere la función g de criterio $g(x,\, y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)}$.

   (a.) **[2 puntos]**. Verifique que el punto $(0, 0)$ es un punto crítico de g.

(b.) [**2 puntos**]. Justifique que cualquier punto $(x,\ y)$ sobre la curva de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, también es punto crítico de g.

Solución:

$$
\begin{aligned}
g_x &= \underbrace{2x}_{(*)}\ e^{-(x^2+y^2)} \cdot \underbrace{(1 - x^2 - y^2)}_{(**)} \\
g_y &= \underbrace{2y}_{(*)}\ e^{-(x^2+y^2)} \cdot \underbrace{(1 - x^2 - y^2)}_{(**)}
\end{aligned}
$$

Un punto P es punto crítico de g si $\nabla g(P) = 0$.

a.) $\nabla g(0, 0) = 0$ pues los factores $(*)$ se anulan si $x = 0$ y $y = 0$.

b.) $\nabla g = (0, 0)$ si $x^2 + y^2 = 1$ porque entonces los factores $(**)$ se anulan.

2. [**4 puntos**] Considere el problema de optimización de maximizar la función $P(x,\ y) = x^2 y$, sujeto a la restricción $x^2 + 8y^2 = 24$, el cual posee en total seis puntos críticos. Determine dichos puntos críticos ***e*** indique cuál o cuáles maximizan la función P.

Solución: La función objetivo es $P(x,\ y) = x^2 y$ y la restricción es $x^2 + 8y^2 = 24$.

$$
L(x, y, \lambda) = x^2 y - \lambda(x^2 + 8y^2 - 24) \implies \left\{
\begin{aligned}
L_x &= 2xy - 2\lambda y = 0 \implies \text{I: } x = 0 \text{ o, II: } y = 0 \\
L_y &= x^2 - 16y\lambda = 0 \\
L_\lambda &= x^2 + 8y^2 - 24 = 0
\end{aligned}
\right.
$$

I: Si $x = 0$ sustituimos en (E3) $\implies y = \pm\sqrt{3}$. Dos puntos críticos: $(0, \pm\sqrt{3})$

II: Si $\lambda = x$ sustituimos en (E2) $\implies x^2 = 16y^2$ sustituimos en (E3) $\implies y = \pm 1$. Cuatro puntos críticos: $(\pm 4, \pm$

Comparando: $P(0, \pm\sqrt{3}) = 0$, $P(-4, -1) = P(4, -1) = -16$, $P(-4, 1) = P(4, 1) = 16$

P es máximo en $(-4, 1)$, $(4, 1)$.

3. Considere el sólido E delimitado por las superficies de ecuación $S_1 : z = 3x$, $S_2 : y = 2$, $S_3 : z = \dfrac{-3}{2}(x-3)$, $S_4 : y^2 = 2(x-1)$, $S_5 : y = 0$ y $S_6 : z = 0$, que se muestra en la figura 8.1

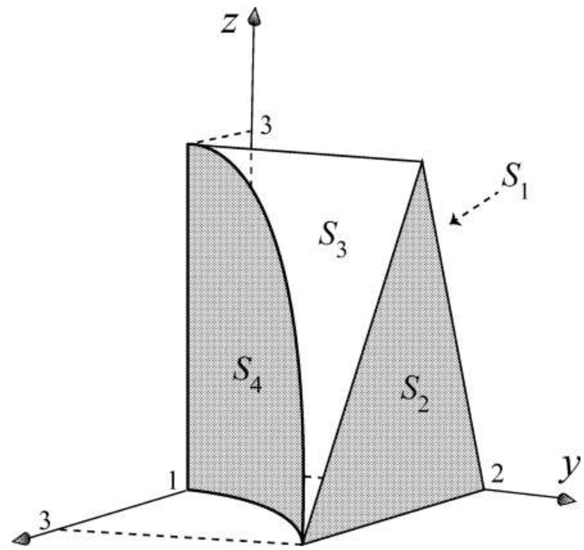
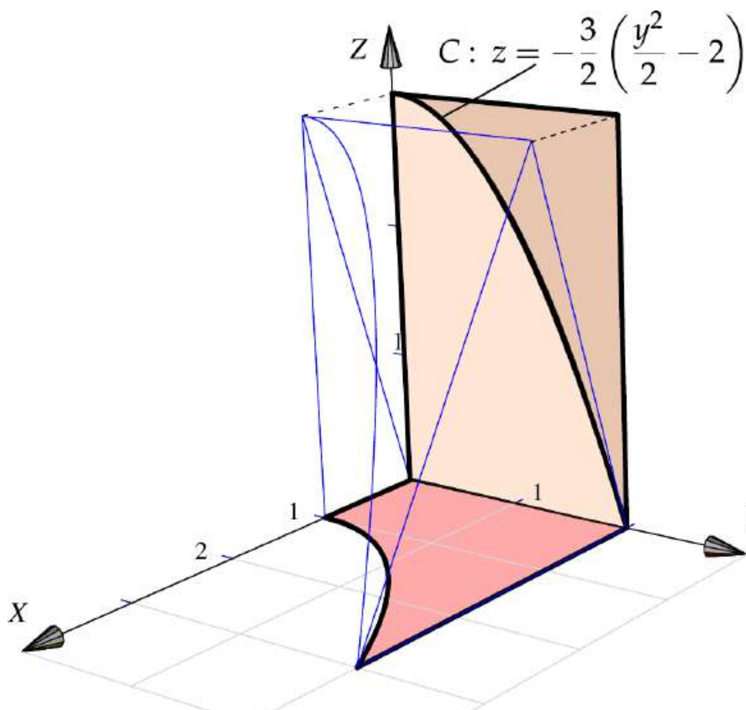


Figura 8.4: Sólido E.

(a.) **[4 puntos]** Dibuje las proyecciones del sólido E en los planos XY y YZ.

Solución: $C: \ z = -\dfrac{3}{2}(x-3) \ \bigcap \ y^2 = 2(x-1) \implies z = -\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y^2}{2} - 2\right)$



(b.) **[3 puntos]** Plantee mediante una o varias integrales múltiples el volumen del sólido E, empleando la proyección en el plano YZ. Debe determinar explícitamente los límites de integra- ción.

Solución:

$$V = \int_0^2 \int_0^{\frac{-3}{2}\left(\frac{y^2}{2}-2\right)} \frac{y^2}{2} + 1 - \frac{z}{3}\, dzdy + \int_0^2 \int_{\frac{-3}{2}\left(\frac{y^2}{2}-2\right)}^{3} \frac{-2}{3}z + 3 - \frac{z}{3}\, dzdy$$

(c.) [**2 puntos**] Determine una ecuación del plano tangente a la superficie S_4 en el punto $P\left(\frac{3}{2}, 1, 1\right)$.

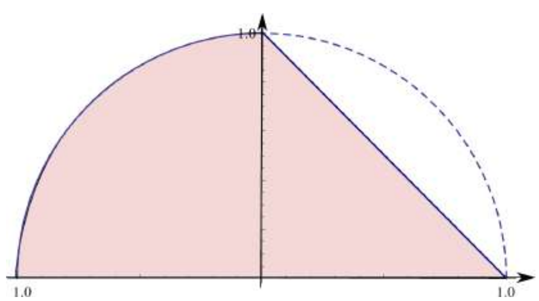
Solución: $S: \; G(x,y,z) = y^2 - 2x + 1 \implies \nabla G(2, 2y, 0) \implies \nabla G(p) = (-2, 2, 0)$

R/ Ec. cartesiana plano tangente: $-2x + 2y = -1$

4. Sea f una función integrable en $\mathbb{R}$ y considere la integral doble planteada sobre una región $R \subset \mathbb{R}$:

$$I = \iint_R f(x,\, y)dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,\, y)dxdy.$$

(a.) [**2 puntos**]. Dibuje la región de integración R asociada a la integral anterior.



(b.) [**2 puntos**]. Plantee la integral I en términos de integrales iteradas en el orden $dydx$.

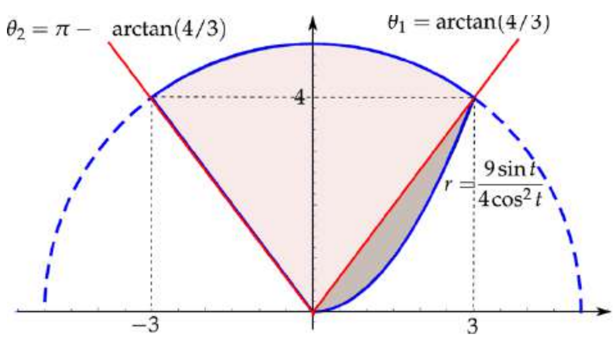
Solución:

$$I = \int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dydx + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\, dydx$$

5. **[5 puntos]** Plantee $\iint_D x\,dA$ como suma de integrales iteradas en coordenadas polares, donde D es la región del plano limitada por la paraábola $4x^2 - 9y = 0$, la recta $3y + 4x = 0$ y el círculo $x^2 + y^2 = 25$ (ver figura 8.5). Debe determinar explícitamente los límites de integración.

Solución:

$$A = \int_0^{\theta_1}\int_0^{\frac{9\,\text{sen}\,\theta}{4\cos^2\theta}} r\cos\theta \quad r\,dr d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^5 r\cos\theta \;\; r dr d\theta$$



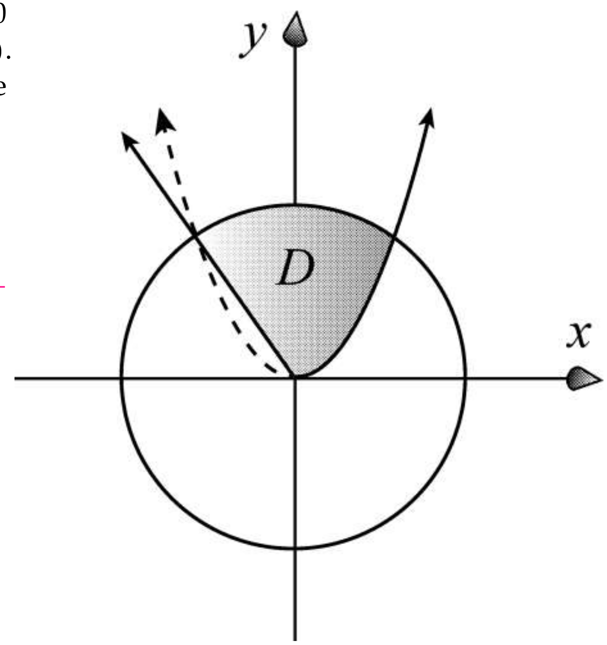


Figura 8.5: Región D del ejercicio 5.

6. **[5 puntos]** La figura 8.6 muestra el sólido W delimitado en el primer octante por las superficies de ecuación $y + z = 3, x^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = \alpha^2$, con $1 < \alpha < 3$. Calcule el volumen de W en términos de (y. Para ello utilice la proyección en el plano XZ y coordenadas cilíndricas.

Solución:

$$V_Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\alpha}\left[\int_0^{3-z} dz\right] r\,dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\alpha}(3 - r\sin\theta)r \;\; dr d\theta$$

$$= \tfrac{1}{12}(4 - 4\alpha^3 - 9\pi + 9\alpha^2\pi)$$

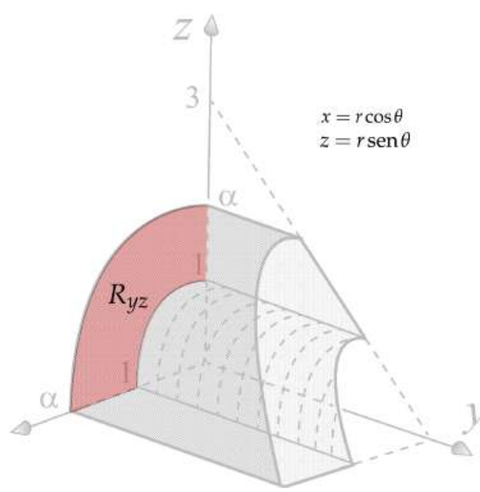


Figura 8.6

8.7 Segundo parcial extraordinario−I−2015

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
CÁLCULO SUPERIOR
MAYO 2015

TIEMPO MÁXIMO: 2 HORAS 30 MINUTOS
PUNTAJE TOTAL:
II SEMESTRE 2015
12:30 P. M.

II Examen Parcial Extraordinario

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Las preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones pintadas con témpera (corrector) no podrán apelarse. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas. No utilizar teléfono, ni calculadora programable.

1. **[3 puntos]** Considere la superficie S de ecuación $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$. Determine una ecuación del plano tangente a S en el punto $P(0, 2, 2)$.

2. **[5 puntos]** Considere la función $f(x, y) = 3xy - x^3y + y^2 + 2y$. Determine y clasifique todos los puntos críticos de f.

3. **[5 puntos]** Una empresa gasta semanalmente x miles de dólares en mano de obra y y miles de dólares en equipo. Además se sabe que el nivel de producción semanal de la empresa viene dado por $P(x, y) = 60x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ (unidades). Determine cómo deben distribuirse 120 mil dólares entre la mano de obra y equipo para obtener la mayor producción posible y de cuánto es esa producción. Utilice multiplicadores de Lagrange.

4. **[6 puntos]** Utilice integrales dobles en coordenadas polares para plantear el área de la región sombreada K, la cual se muestra en la Figura 1.

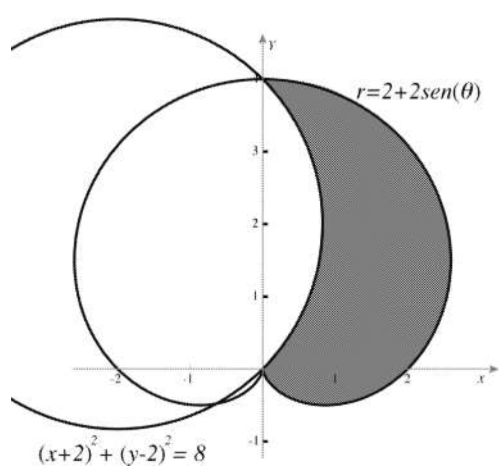


Figura 8.7: Región **K**

5. Considere el área A_R de la región R del plano dada por:

$$A_R = \int_{-6}^{0}\int_{-y}^{2+\sqrt{-2(y-2)}} dx\,dy + \int_{0}^{2}\int_{2-\sqrt{-2(y-2)}}^{2+\sqrt{-2(y-2)}} dx\,dy$$

   (a.) [**4 puntos**]. Dibuje la región R.

   (b.) [**2 puntos**]. Plantee el área de R utilizando el orden de integración $dy\,dx$.

   (c.) [**2 puntos**]. Calcule el área de la región R.

6. [**5 puntos**] Plantee las integrales múltiples necesarias para calcular el volumen del sólido E limitado por las superficies $S_1 : x = 4 - y^2, S_2 : 2x+y+z = 2, S_3 : y+z = 2, S_4 : z = 0$ y $S_5 : y = 0$ que se muestra en la Figura 2. Debe dibujar la proyección que utiliza para dicho planteamiento, y determinar explícitamente los límites de integración.

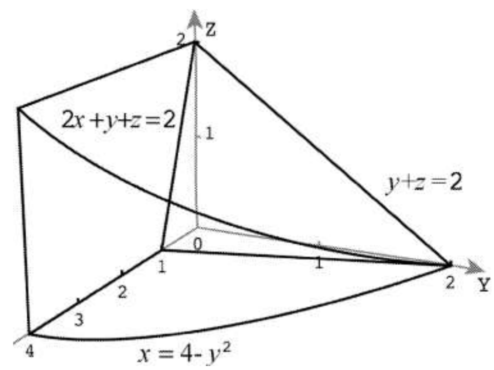


Figura 8.8: Sólido E

Solución resumida: No está editada.

8.8 Tercel parcial–I–2015

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Cálculo Superior

Tiempo máximo: 2 horas 30 minutos
puntaje total:
I semestre 2015

Tercer Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración. No se permite el uso de hojas sueltas, calculadoras programables ni teléfonos celulares. *En el cálculo de integrales, debe indicar la región de integración.*

1. **[5 puntos]** Calcule la integral $\int_C x^2 + y^2 \, d\mathbf{s}$ donde C es la curva que se muestra en la figura 8.14

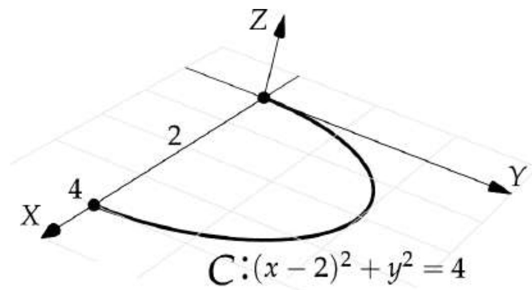


Figura 8.9

2. **[5 puntos]** Calcule la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F} = (xy^2, \; yx^2 - xy)$ y C es la curva orientada que se muestra en la figura 8.15

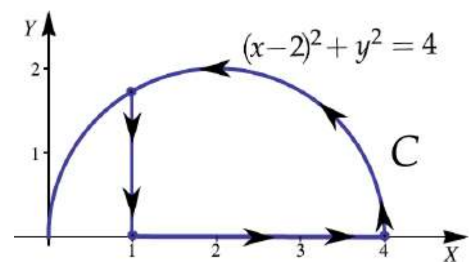
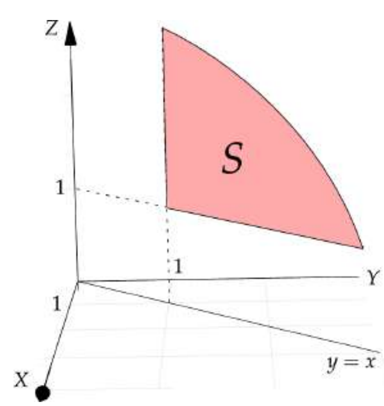


Figura 8.10

3. **[5 puntos]** Calcule la integral $\iint_S x - y + 2z \, d\mathbf{S}$. La superficie $S: \; y = x$ se muestra en la figura 8.16. La superficie S esta limitada los planos $z = 1$, $y = 1$ y el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 18$.



4. **[5 puntos]** Sea el sólido Q limitado por las superficies $z = 4$ y el cono $x^2+y^2 = (z-1)^2$, tal y como se muestra en la figura 8.17. Calcule la integral $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\mathbf{S}$ donde $\mathbf{F} = (xy^2,\ 1,\ z)$ y $\mathbf{N}$ es un vector normal unitario, exterior al sólido Q, y la superficie S es la frontera de Q, es decir, $S = \partial Q$.

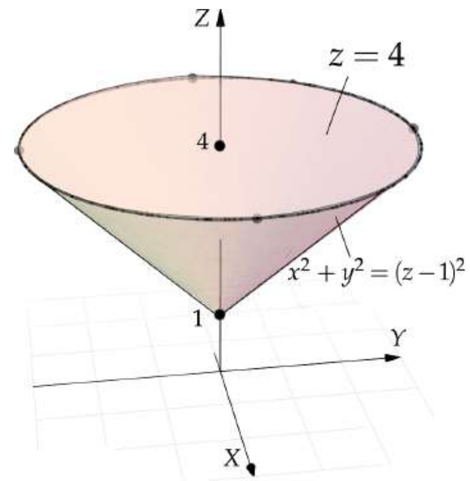


Figura 8.11: Sólido Q.

5. **[5 puntos]** Calcule la integral $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F} = (zx,\ zy,\ x)$ y además $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ es la curva que se muestra en la figura 8.18

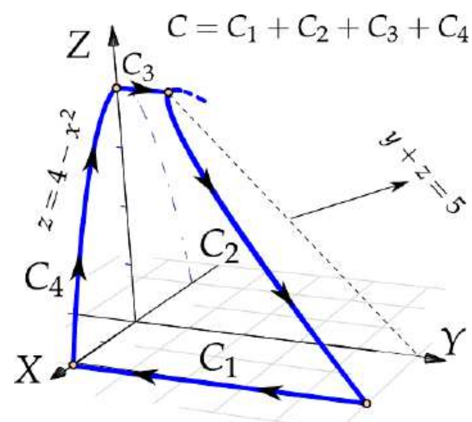


Figura 8.12

6. **[5 puntos]** Considere el campo $\mathbf{F} = (y, x, z)$.
   a.) **[1 puntos]** Verifique que el campo $\mathbf{F}$ es conservativo
   b.) **[3 puntos]** Calcule la integral $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde C es la curva orientada que se muestra en la figura 8.19.

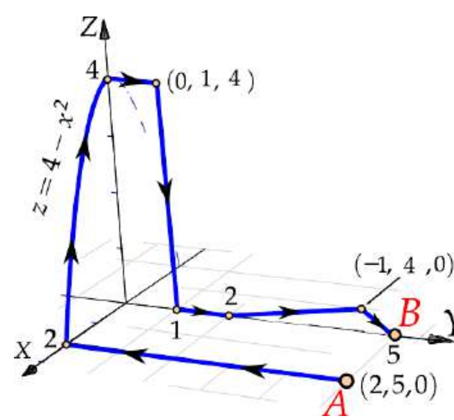


Figura 8.13

8.9 Solución resumida: III parcial, I−2015

1. **[5 puntos]** Calcule la integral $\int_C x^2+y^2\,d\mathbf{s}$ donde C es la curva que se muestra en la figura 8.14

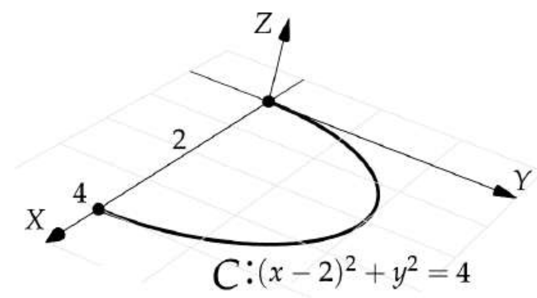


Figura 8.14

Solución: Parametrización: $C: \; r(t) = (2+2\cos t,\; 2\operatorname{sen} t,\; 0) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [0,\pi]$.
$r'(t) = (-2\operatorname{sen} t,\; 2\cos t, 0)$.

$$\begin{aligned}
\int_C x^2+y^2\,ds &= \int_C [x(t)^2+y(t)^2]\,||r'(t)||\,dt \\
&= \int_0^{\pi} [(2+2\cos t)^2+(2\operatorname{sen} t)^2]\sqrt{4}\,dt \\
&= \int_0^{\pi} 16(\cos t+1)\,dt \;=\; 16\pi
\end{aligned}$$

2. **[5 puntos]** Calcule la integral $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F} = (xy^2,\; yx^2-xy)$ y C es la curva orientada que se muestra en la figura 8.15

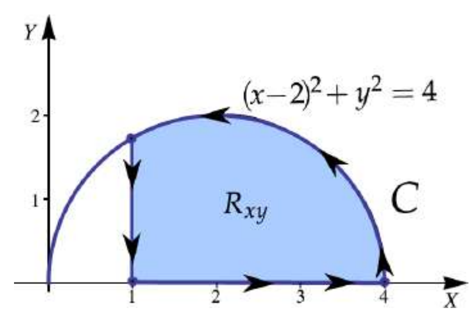


Figura 8.15

Solución: Podemos aplicar el teorema de Green en el plano. La curva es cerrada simple y está orientada contr-reloj. $\mathbf{F} = (P,Q) = (xy^2,\; yx^2-xy)$

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_{R_{xy}} [2xy - y \;-\; 2xy]\, dA \\
&= \int_1^4 \int_0^{\sqrt{4-(x-2)^2}} -y\; dy\, dx \\
&= \int_1^4 -\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{4-(x-2)^2}} dy\, dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_1^4 (4-(x-2)^2)\, dx \;=\; -9/2
\end{aligned}$$

3. **[5 puntos]** Calcule la integral $\iint_S (x - y + 2z)\, d\mathbf{S}$. La superficie $S:\;\; y = x$ se muestra en la figura 8.16. La superficie S esta limitada los planos $z = 1,\; y = 1$ y el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 18$.

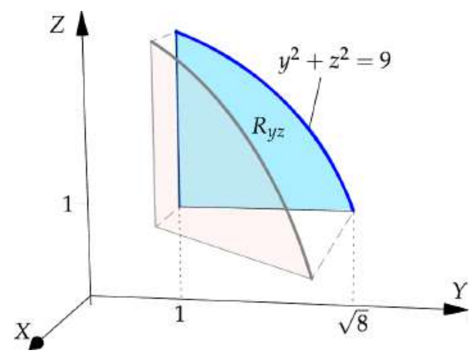


Figura 8.16

Solución: $S:\; x = y$, entonces $dS = \sqrt{1+(x_y)^2+(x_z)^2}\, dA = \sqrt{2}\, dA$

$$\begin{aligned}
\iint_S (x-y+2z)\, d\mathbf{S} &= \int_1^{\sqrt{8}} \int_1^{\sqrt{9-y^2}} (x-y+2z)\sqrt{2}\; dzdy \\
&= \sqrt{2}\int_1^{\sqrt{8}} \int_1^{\sqrt{9-y^2}} (y-y+2z)\; dzdy \;\;(\text{pues } S:\; x=y) \\
&= \sqrt{2}\int_1^{\sqrt{8}} \int_1^{\sqrt{9-y^2}} 2z\; dzdy \\
&= \sqrt{2}\int_1^{\sqrt{8}} z^2\Big|_1^{\sqrt{9-y^2}} dy \\
&= \sqrt{2}\int_1^{\sqrt{8}} (9-y^2-1)\; dy \;=\; \sqrt{2}\Big(\frac{32\sqrt{2}}{3} - \frac{23}{3}\Big) \approx 10.491
\end{aligned}$$

4. **[5 puntos]** Sea el sólido Q limitado por las superficies $z = 4$ y el cono $x^2+y^2 = (z-1)^2$, tal y como se muestra en la figura 8.17. Calcule la integral $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\mathbf{S}$ donde $\mathbf{F} = (xy^2,\ 1,\ z)$ y $\mathbf{N}$ es un vector normal unitario, exterior al sólido Q, y la superficie S es la frontera de Q, es decir, $S = \partial Q$.

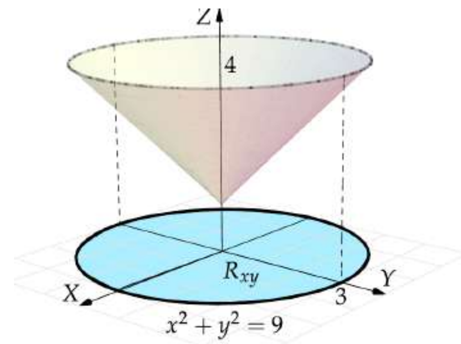


Figura 8.17: Sólido Q.

Solución: Podemos aplicar el Teorema de la Divergencia. Div$\mathbf{F} = y^2 + 0 + 1$,

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\mathbf{S} &= \iiint_Q (y^2+1)\,dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \left[\int_{1+\sqrt{x^2+y^2}}^4 (y^2+1)\,dz\right] r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (y^2+1)z\Big|_{1+\sqrt{x^2+y^2}}^4 \;r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (y^2+1)\left(3-\sqrt{x^2+y^2}\right) r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta+1)(3-r)\;r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{2}+\frac{243\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{20}\right)d\theta \;=\; \frac{423\pi}{20} \approx 66.4447
\end{aligned}
$$

5. **[5 puntos]** Calcule la integral $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F} = (zx,\ zy,\ x)$ y además $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ es la curva que se muestra en la figura 8.18

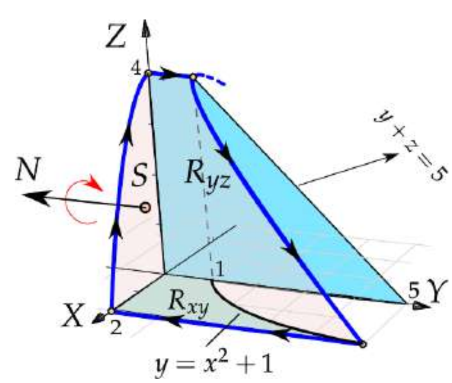


Figura 8.18

Solución: C es una curva cerrada simple, suave a trozos. Podemos usar el Teorema de Stokes (T. Green en el espacio). Tenemos dos opciones, proyectar sobre el plano XY o sobre el plano YZ.

Proyectando sobre el plano XY. En este caso, $S: \ z = 4 - x^2$ y $N = (-z_x, \ -z_y, 1) \ = \ (2x, 0, 1)$.

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{Rot}F \cdot N \, dS \\
&= -\iint_{R_{xy}} (-y, \ x-1, \ 0) \cdot (2x, \ 0, 1) \, dA \\
&= -\int_0^2 \int_0^{x^2+1} -2xy \, dy \, dx \ = \ \frac{62}{3} \approx 20.6667
\end{aligned}$$

Proyectando sobre el plano YZ. En este caso, $S: \ x = \sqrt{4-z}$ y $N = (1, \ -x_y, -x_z) \ = \ \left(1, 0, \dfrac{1}{2\sqrt{4-z}}\right)$.

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{Rot}F \cdot N \, dS \\
&= -\iint_{R_{xy}} (-y, \ x-1, \ 0) \cdot \left(1, 0, \frac{1}{2\sqrt{4-z}}\right) dA \qquad (*) \\
&= -\int_0^4 \int_0^{5-z} -y \, dy \, dz \ = \ \frac{62}{3} \approx 20.6667
\end{aligned}$$

Nota. La integral $(*)$ no es impropia pues al hacer el producto punto, el integrando es una función acotada. Las discontinuidades en un integrando acotado no afectan la integral sin constituyen un conjunto de medida cero.

6. **[5 puntos]** Considere el campo $\mathbf{F} = (y, x, z)$.
   a.) **[1 puntos]** Verifique que el campo $\mathbf{F}$ es conservativo

   Solución: Como $\operatorname{Rot}F = (0, 0, 0)$, El campo F es conservativo sobre regiones simplemente conexas.

   b.) **[3 puntos]** Calcule la integral $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ donde C es la curva orientada que se muestra en la figura 8.19.

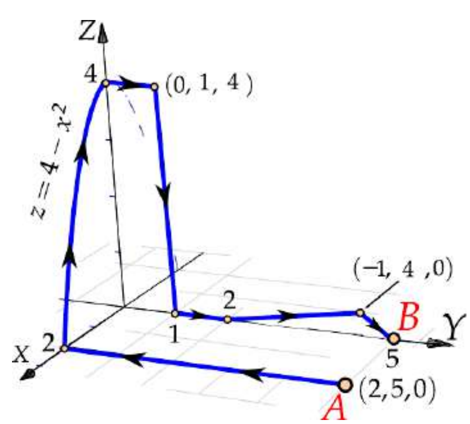


Figura 8.19

Solución: Como el campo es conservativo, podemos calcular la integral usando “independencia del camino” o una función potencial.

Usando otra curva C': Podemos usar la curva C' que une A con B. En este caso, $-C' \; : \; r(t) = (t, 5, 0),\; t \in [0, 2]$.

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= -\int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= -\int_0^2 (y,\; x,\; z) \cdot (1, 0, 0)\; dt \\
&= -\int_0^2 5\; dt \;=\; -10
\end{aligned}$$

Usando una función potencial: $\nabla\phi = F = (x, y, z)$, entonces

$$\begin{cases}
\phi = \int y\; dx = yx + K_1 \\
\phi = \int x\; dy = yx + K_2 \\
\phi = \int z\; dz = \dfrac{z^2}{2} + K_3
\end{cases} \Longrightarrow \phi = yx + \frac{z^2}{2} + K \Longrightarrow \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A) = \phi(0,5,0) - \phi(2,5,0) = -$$

8.10 Tercel parcial extraordinario–I–2015

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA	TIEMPO MÁXIMO: 2 HORAS 30 MINUTOS
ESCUELA DE MATEMÁTICA	PUNTAJE TOTAL:32
CÁLCULO SUPERIOR	I SEMESTRE 2015

Tercer Examen Parcial – Extraordinario

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración. No se permite el uso de hojas sueltas, calculadoras programables ni teléfonos celulares. *En el cálculo de integrales, debe dibujar e indicar la región de integración.*

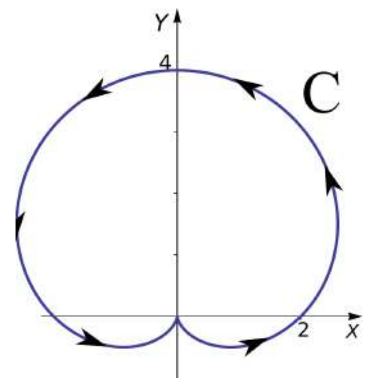
---

1. Considere la integral $I = \int_C (4xy - z^3)dx + 2x^2dy - 3xz^2dz$, donde C es una trayectoria orientada que va desde el punto $A = (2, 2, 3)$ al punto $B = (2, -3, 0)$.

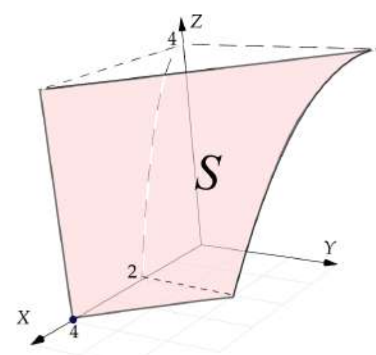
   a) [**2 pts.**] Verifique que el valor de I no depende de la trayectoria C seleccionada.

   b) [**3 pts.**] Calcule I utilizando cualquier trayectoria orientada de A hacia B.

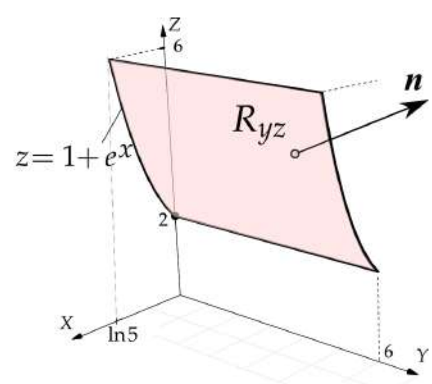
   c) [**3 pts.**] Calcule I utilizando una función potencial.



2. [**4 pts.**] Considere el campo vectorial $F(x, y) = (-y, x)$ y sea C la curva cerrada y positivamente orientada de ecuación $r = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, que se muestra en la figura adjunta. Calcule $\oint_C F \cdot d\mathbf{r}$.



3. [**4 pts.**] Calcule el área de la superficie $S: \; x + y = 4$, limitada por los planos $x = 0$, $z = 0$ y $z = 4$, y la superficie $z = 4 - x^2$, tal y como se muestra en la figura adjunta.



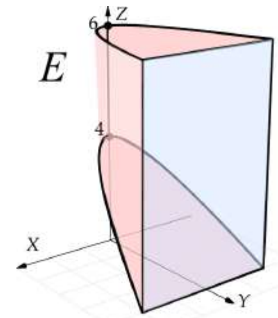
4. [**5 pts.**] Calcule $\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, dS$, con $\mathbf{n}$ el vector normal unitario orientado como se muestra en la figura adjunta y F el campo vectorial definido por:

$$F(x, y, z) = 2y\,\hat{\imath} + x^2z^3\hat{\jmath} + (z - 1)^2\,\hat{k}$$

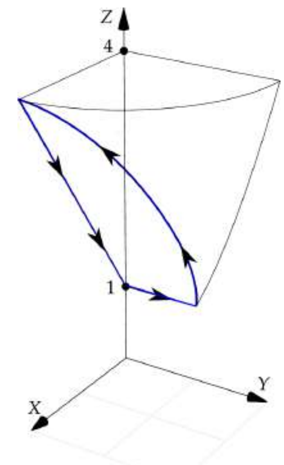
5. [**5 pts.**] Calcule

$$\iint_S (z^2 + x, 2y + xz, e^x + y^3) \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

si S es la frontera del sólido simple E limitado por $S_1 : y = x^2$, $S_2 : 4z + 3y = 12$, $S_3 : y = 4$ y $S_4 : z = 6$, que se muestra en la figura adjunta, y $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario exterior a E.



6. [**6 pts.**] Utilice Stokes para calcular $\int_C F \cdot dr$, si $F(x, y, z) = (z^2, -xy, x^2)$ y C es la frontera de la región plana de ecuación $2z - 3x = 2$, limitada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y los planos $z = 4$ y $y = 0$, tal y como se muestra en la figura adjunta.



8.11 Solución resumida: III parcial extraordinario, I–2015.

1. Considere la integral $I = \int_C (4xy - z^3)dx + 2x^2dy - 3xz^2dz$, donde C es una trayectoria orientada que va desde el punto $A = (2, 2, 3)$ al punto $B = (2, -3, 0)$.

   a) [**2 pts.**] Verifique que el valor de I no depende de la trayectoria C seleccionada.

   Solución: Verifique que **F** es conservativo.

   b) [**3 pts.**] Calcule I utilizando cualquier trayectoria orientada de A hacia B.

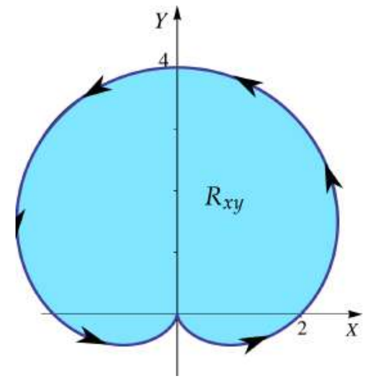
   Solución: $C' : r(t) = A + t(B - A)$ con $t \in [0, 1]$, es decir, $r(t) = (2, 2 - 5t, 3 - 3t)$.

   $$I = \int_C (4xy - z^3)dx + 2x^2dy - 3xz^2dz = \int_0^1 [18(3 - 3t)^2 - 40]\, dt = 14$$

   c) [**3 pts.**] Calcule I utilizando una función potencial.

   Solución: Una función potencial es $\phi(x, y, z) = 2x^2y - xz^3 + K \implies I = \phi(2, -3, 0) - \phi(2, 2, 3) = 14$

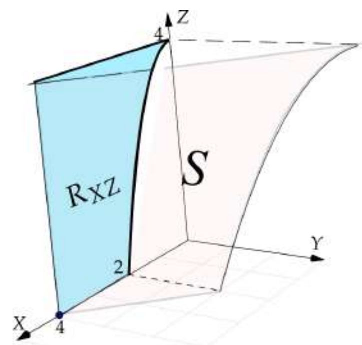
2. [**4 pts.**] Considere el campo vectorial $F(x, y) = (-y, x)$ y sea C la curva cerrada y positivamente orientada de ecuación $r = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, que se muestra en la figura adjunta. Calcule $\oint_C F \cdot d\mathbf{r}$.



Solución: Como C es cerrada simple, podemos utilizar el Teorema de Green:

$$\oint_C F \cdot d\mathbf{r} = \iint_{R_{xy}} [1 - (-1)]\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{2(1+\operatorname{sen}\theta)} 2r\, dr\, d\theta = 12\pi$$

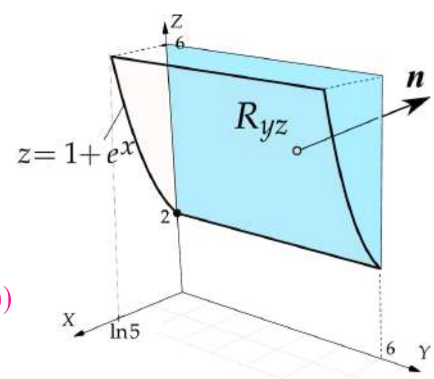
3. [**4 pts.**] Calcule el área de la superficie $S: \ x + y = 4$, limitada por los planos $x = 0$, $z = 0$ y $z = 4$, y la superficie $z = 4 - x^2$, tal y como se muestra en la figura adjunta.



Solución: Proyectando sobre XZ :

$$A = \iint_{R_{xz}} \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}\, dA = \int_0^4 \int_{\sqrt{4-z}}^4 \sqrt{2}\, dx\, dz = \sqrt{2} \cdot \frac{32}{3}$$

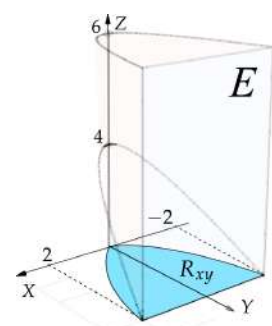
4. [**5 pts.**] Calcule $\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, dS$, con $\mathbf{n}$ el vector normal unitario orientado como se muestra en la figura adjunta y F el campo vectorial definido por: $F(x, y, z) = 2y\,\hat{\imath} + x^2z^3\hat{\jmath} + (z-1)^2\,\hat{k}$



Solución:

$$\iint_S F{\cdot}\mathbf{n}\, dS = \iint_S (2y,\ x^2z^3, (z-1)^2){\cdot}(-1, x_y, x_z)\, dS = \int_2^6 \int_0^6 (-2y+(z-1))$$

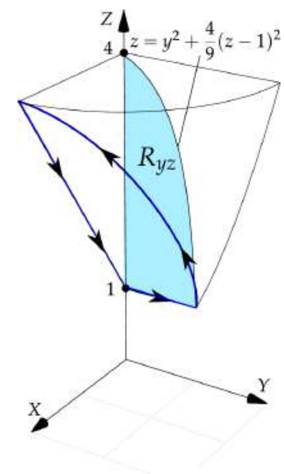
5. [**5 pts.**] Calcule $\iint_S (z^2 + x, 2y + xz, e^x + y^3) \cdot \mathbf{n}\, dS$, si S es la frontera del sólido E limitado por $S_2 : 4z+3y = 12$, $S_3 : y = 4$, $S_4 : z = 6$ y $S_1 : y = x^2$, tal y como se muestra en la figura adjunta, y $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario exterior a E.



Solución: Como S es la frontera de un sólido simple, podemos aplicar el Teorema de la Divergencia. $\text{Div}F = 1 + 2 + 0$

$$\iint_S (z^2{+}x, 2y{+}xz, e^x{+}y^3){\cdot}\mathbf{n}\, dS = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{3-3/4y}^{6} 3\, dz\, dy\, dx = \frac{768}{5}$$

6. [**6 pts.**] Utilice Stokes para calcular $\int_C F\cdot dr$, si $F(x,y,z) = (z^2, -xy, x^2)$ y C es la frontera de la región plana de ecuación $2z-3x=2$, limitada por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y los planos $z=4$ y $y=0$, tal y como se muestra en la figura adjunta.



Solución: La curva es cerrada simple, podemos aplicar el Teorema de Stokes: $\text{Rot}F = (0, 2z-2x, -y)$

$$\int_C F\cdot dr = \iint_{R_{yz}} (0, 2z-2x, -y)\cdot(1, -x_y, -x_z)\, dA = \int_1^4\int_0^{\sqrt{z-4/9(z-1)^2}} \frac{2}{3}\, y\, dy\, dz$$

8.12 Exámen de Reposición–I–2015

Instituto Tecnológico de Costa Rica	Tiempo máximo: 2 horas 30 minutos
Escuela de Matemática	puntaje total: 36 puntos
Cálculo Superior	II semestre 2015

Examen de reposición

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que debe presentar todos los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada. No se acogerán reclamos en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. Solo se permite el uso de calculadora no programable. No se permite el uso de celular durante el desarrollo de la prueba, manténgalo apagado o en silencio.

1. [**4 puntos**] Determine la ecuación canónica de la hipérbola H, la cual contiene el punto $(4,5)$ y cuyos vértices coinciden con los focos de la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$.

2. Sea f una función con derivadas de segundo orden continuas. La ecuación $xz + f(x^2, y^2) = 0$ define a z como funcón implícita de x y y.

   a) a [**4 puntos**] Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

b) b [**4 puntos**] Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

3. [**5 puntos**] Sea $z = yxe^{-x} + y^2$. Calcule y clasifique los puntos críticos de z.

4. [**5 puntos**] Considere la integral $I = \displaystyle\int_0^4 \int_{4-z}^{8-z^2/2} xy\, \mathbf{dydz} + \int_{-4}^0 \int_{4+z}^{8-z^2/2} xy\, \mathbf{dydz}$. Dibuje la región de integración y **plantear** la integral I usando el orden de integración $\mathbf{dz\,dy}$.

5. [**5 puntos**] Considere el sólido Q tal y como se muestra en la figura 8.24. Calcule el volumen del sólido Q (debe dibujar la región de integración con todo detalle).

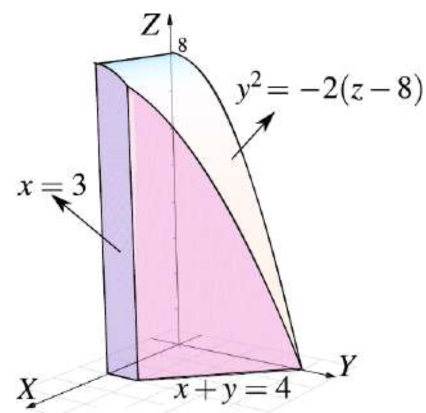


Figura 8.20

6. Sea $F(x,y,z) = (xy,\ z-y,\ 0)$ y $C = C_1 + C_2 + C_3$ donde C_1, C_2, y C_3 se muestran en la figura 8.25.

   a) a [**1 puntos**] Verifique que el campo F es conservativo

   b) b [**3 puntos**] Calcule $\displaystyle\int_C F \cdot dr$

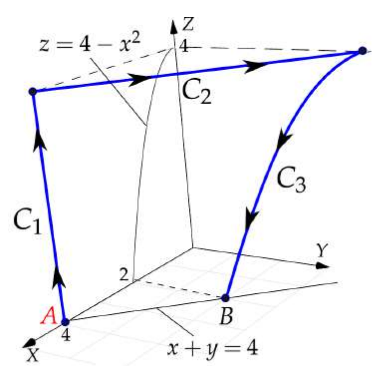


Figura 8.21

7. **[5 puntos]** Calcular $\iint_S F\cdot N\,dS$ si $S:\ z = 2-x$, tal y como se muestra en la figura 8.26, y $F(x,y,z) = (x^2+y^2,\ 1,\ z)$ (Debe dibujar la región de integración con todo detalle).

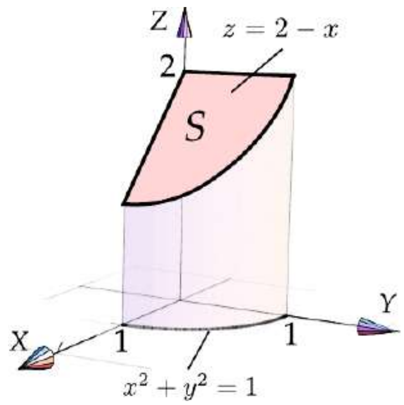
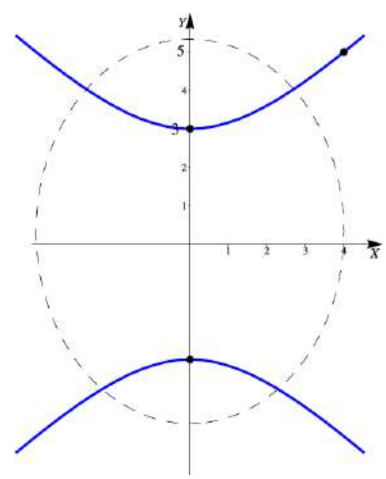


Figura 8.22

8.13 Solución resumida: Examen de reposición, I semestre, 2015

1. **[4 puntos]** Determine la ecuación canónica de la hipérbola H, la cual contiene el punto $(4,5)$ y cuyos vértices coinciden con los focos de la elipse $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$.



Solución: Los focos de la elipse $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ son $(0,\pm 3)$, pues $c^2 = 25-16 \implies c = 3$.

Los vértices de H son $(0,\pm 3)$, entonces H tiene centro en $(0,0)$ y $a=3$. La ecuación canónica de H es $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$, sustituyendo $(4,5)$ en esta ecuación obtenemos $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{9}=1$.

2. Sea f una función con derivadas de segundo orden continuas. La ecuación $xz + f(x^2, y^2) = 0$ define a z como funcón implícita de x y y.

   a) a [**4 puntos**] Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

   b) b [**4 puntos**] Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Solución: Debemos hacer un cambio de variable para poder aplicar la regla de la cadena: $F(x,y,z) = xz + f(u,v)$ con $u = x^2$ y $v = y^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{z + f_u \cdot 2x}{x} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{f_v \cdot 2y}{x} \\
\frac{\partial z}{\partial y^2} &= -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2y \cdot f_v}{x}\right] = -\frac{1}{x} \cdot \left[2f_v + f_{vv}2y \cdot 2y\right]
\end{aligned}$$

3. **[5 puntos]** Sea $z = yxe^{-x} + y^2$. Calcule y clasifique los puntos críticos de z.

Solución:

a.) Puntos críticos: $\begin{cases} z_x = ye^{-x}(1-x) = 0 \implies \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \\ \\ z_y = xe^{-x} + 2y = 0 \;\; (E2) \end{cases}$

Sustituyendo $y = 0$ en (E2) obtenemos el punto crítico $(0,0)$.

Sustituyendo $x = 1$ en (E2) obtenemos el punto crítico $(1, -1/2e)$.

b.) Clasificación: $H(x,y) = [ye^{-x}(x-2)]\,[2] - [e^{-x}(x-1)]^2$

Punto P	H(P)	$f_{xx}(P)$	Clasificación
(0,0)	-1		$(0,0,0)$ es punto de silla
(1,-1/2e)	1	1/2	$\left(1, -\frac{1}{2e}, -\frac{1}{2} + \frac{e^2}{4}\right)$ es mínimo local

4. **[5 puntos]** Considere la integral $I = \int_{-4}^{0}\int_{8+2y}^{8-y^2/2} 2y\,\mathbf{dzdy} + \int_{0}^{4}\int_{8-2y}^{8-y^2/2} 2y\,\mathbf{dzdy}$. Dibuje la región de integración y **plantear** la integral I usando el orden de integración $\mathbf{dy\,dz}$.

Solución:

$$I = \int_0^8 \int_{-\sqrt{16-2z}}^{z/2-4} 2y\, \mathbf{dydz} + \int_0^8 \int_{4-z/2}^{\sqrt{16-2z}} 2y\, \mathbf{dydz}$$

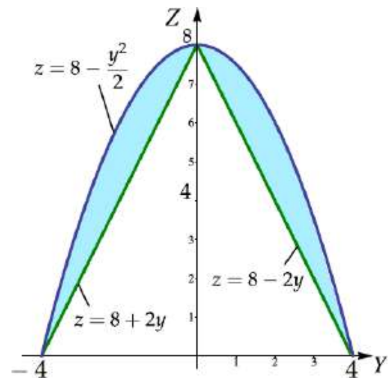


Figura 8.23

5. **[5 puntos]** Considere el sólido Q tal y como se muestra en la figura 8.24. Calcule el volumen del sólido Q (debe dibujar la región de integración con todo detalle).

Solución:

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^3 \int_0^{4-x} (8 - y^2/2 \; - \; 0)\, \mathbf{dydx} \\ &= \int_0^3 8y - \frac{y^3}{6}\Big|_0^{4-x} \mathbf{dx} \\ &= \int_0^3 \left(8(4-x) - \frac{(4-x)^3}{6}\right) \mathbf{dx} \\ &= -8\frac{(4-x)^2}{2} + \frac{(4-x)^4}{24}\Big|_0^3 = \frac{395}{8} \end{aligned}$$

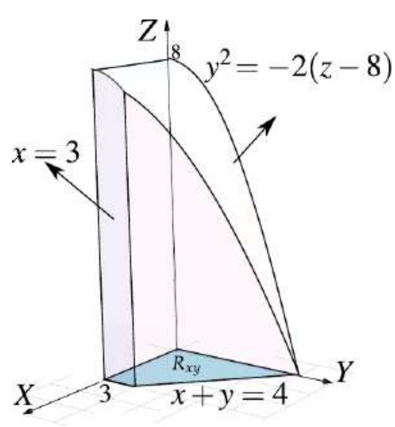


Figura 8.24

6. Sea $F(x,y,z) = (y+z,\ x-y,\ x+z)$ y $C = C_1 + C_2 + C_3$ donde C_1, C_2, y C_3 se muestran en la figura 8.25.

   a.) **[1 puntos]** Verifique que el campo F es conservativo

   b.) **[3 puntos]** Calcule $\int_C F\cdot dr$

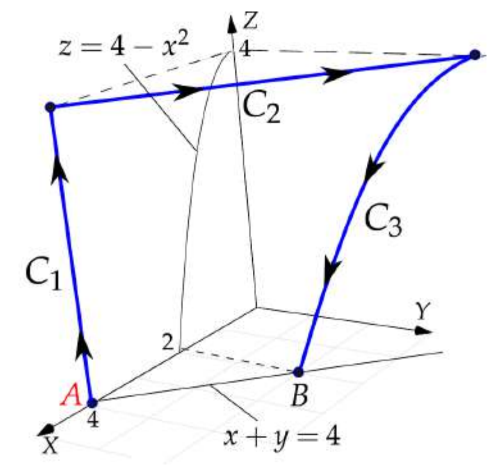


Figura 8.25

Solución:

a.) $\text{Rot}F = (0,0,0)$, entonces F es conservativo sobre regiones simplemente conexas.

b.) **Usando una función potencial:**

$$\phi(x,y,z) = xy + xz - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + K$$

$$\Longrightarrow \int_C F\cdot dr = \phi(2,2,0) - \phi(4,0,0) = 2$$

Usando otra trayectoria C' :

$$-C' : \ r(t) = (t, 4-t, 0), \quad \text{con } t \in [2,4]$$

$$\int_C F\cdot dr = -\int_2^4 (4-t+0,\ t-4+t,\ t+0)\cdot(1,-1,0)\,dt$$

$$= -\int_2^4 (8-3t)\,dt = 2$$

7. **[5 puntos]** Calcular $\iint_S F\cdot N\,dS$ si $S:\ z = 2-x$, tal y como se muestra en la figura 8.26, y $F(x,y,z) = (x^2+y^2,\ 1,\ z)$ (Debe dibujar la región de integración con todo detalle).

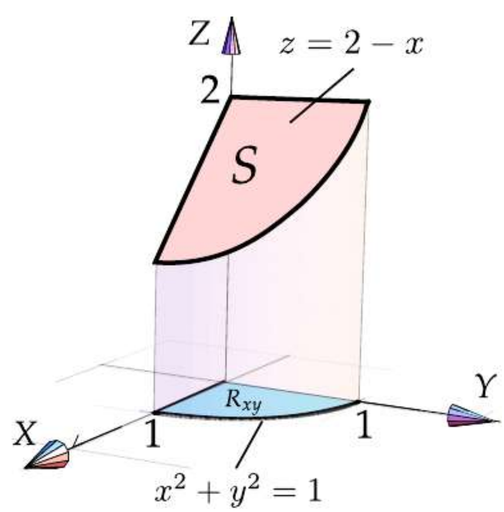


Figura 8.26

Solución: Como $S:\ z=2-x \implies N_1=(1,0,1)$.

$$\begin{aligned}
\iint_S F\cdot N\,dS &= \iint_{R_{xy}} (x^2+y^2,1,z)\cdot(1,0,1)\,dA\\
&= \iint_{R_{xy}} (x^2+y^2+z)\,dA\\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2+2-r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta\\
&= \int_0^{\pi/2} \left.\frac{r^4}{4}+r^2-\frac{r^3}{3}\cos\theta\right|_0^1 d\theta\\
&= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{3}\cos\theta\right)d\theta \;=\; \frac{5\pi}{8}-\frac{1}{3}\approx 1.63016
\end{aligned}$$

8.14 Exámenes 2016

8.15 I parcial, I–2016

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MA-2104 CÁLCULO SUPERIOR

Tiempo: 2:30 horas
Valor: 30 puntos

I EXAMEN PARCIAL

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimdad. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, y tampoco el uso de hojas sueltas.

1. Considere la parábola P cuya gráfica se muestra en la figura 1. Determine la ecuación canónica de la elipse E cuyo centro es el foco de P y contiene los puntos $(0,0)$ y $(9,-\frac{5}{3})$. (5 puntos)

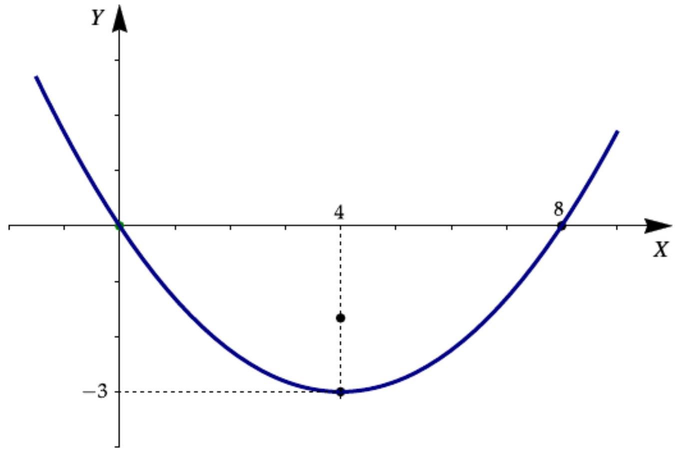


Figura 8.27: Parábola P y elipse E

2. Realice la gráfica e indique las características principales de la sección cónica de ecuación $C: 4x^2+y^2 = 2y+3$. (5 puntos)

3. Considere el sólido Q limitado por las superficies $S_1: x^2+1 = y$, $S_2: z = 5$, $S_3: y+z = 10$ y $S_4: z = 0$.

   a.) Dibuje la superficie S_1 . (3 puntos)

4. Determine el dominio máximo D de la función f, la cual está definida mediante el criterio:

$$f(x,y) = \log(x-y) - \sqrt{y-x^2+1},$$

   además realice la representación gráfica de D. (4 puntos)

5. Sea z definida mediante $z = xf(y)+yg(x)$, con f y g funciones dos veces derivables.

   Verifique la identidad: (5 puntos)

$$xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

6. Considere la ecuación $g(3x-y,\ y^2z) = x^2-z$ en la cual se define la función z en forma implícita,con g una función con derivada continua. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. (4 puntos)

8.16 Solución resumida I parcial, I–2016

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA-2104 Cálculo Superior

Tiempo: 2:30 horas
Valor: 30 puntos

Solución resumida del I examen parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimdad. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, y tampoco el uso de hojas sueltas.

1. Considere la parábola P cuya gráfica se muestra en la figura 1. Determine la ecuación canónica de la elipse E cuyo centro es el foco de P y contiene los puntos $(0,0)$ y $(9,-\frac{5}{3})$. (5 puntos)

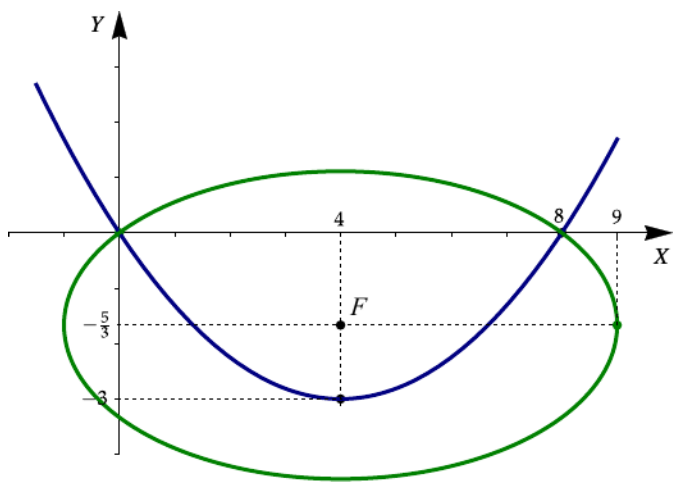


Figura 8.28: Parábola P y elipse E

Solución

Según la figura 1, la parábola P tiene ecuación $(x-4)^2 = 4p(y+3)$. Además como $(0,0)$ es un punto de la parábola P, al sustituir obtenemos que $p = \dfrac{4}{3}$. Entonces el foco de la parábola es $F = (4,-5/3)$.

Ahora, la ecuación canónica de la elipse E, con centro en F, es

$$\frac{(x-4)^2}{n^2} + \frac{(y+5/3)^2}{m^2} = 1$$

Como la elipse E contiene a los puntos $(0,0)$ y $(9,-\frac{5}{3})$, sustituimos estos puntos en la ecuación de la elipse E,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{(0-4)^2}{n^2}+\dfrac{(0+5/3)^2}{m^2} & = & 1 \\ \\ \dfrac{(9-4)^2}{n^2}+\dfrac{(-5/3+5/3)^2}{m^2} & = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow n^2 = 25 \quad \text{y} \quad m^2 = \frac{625}{81}$$

La ecuación canónica de la elipse E es $\dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{(y+5/3)^2}{\frac{625}{81}} = 1$

2. (5 puntos) Realice la gráfica e indique las características principales de la sección cónica de ecuación

$$C : 4x^2 + y^2 = 2y + 3$$

Solución

Completando cuadrados en y (en x no es necesario) obtenemos la ecuación canónica de esta cónica (una elipse),

$$x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Como $c^2 = 4 - 1 \implies c = \sqrt{3}.$

$F = (0,\ 1 \pm \sqrt{3})$

$V = (0,\ 1 \pm 2)$

Intersección eje X : $x = \approx \pm 0.86$

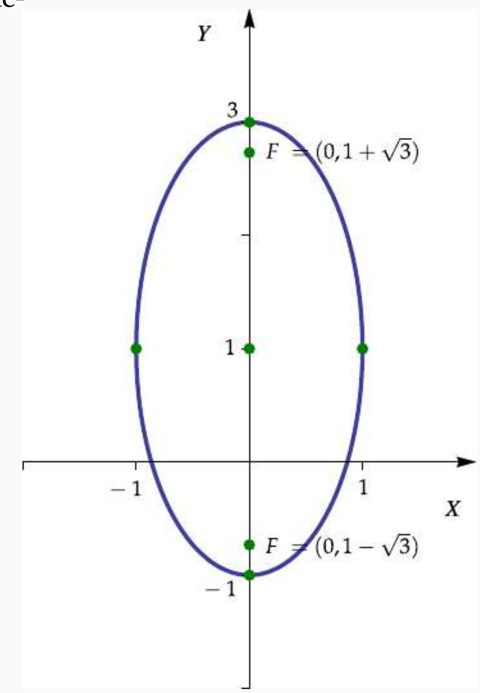


Figura 8.29: Elipse

3. Considere el sólido Q limitado por las superficies $S_1 : x^2 + 1 = y$, $S_2 : z = 5$, $S_3 : y + z = 10$ y $S_4 : z = 0$.

   a.) Dibuje la superficie S_1 . (3 puntos)

Solución

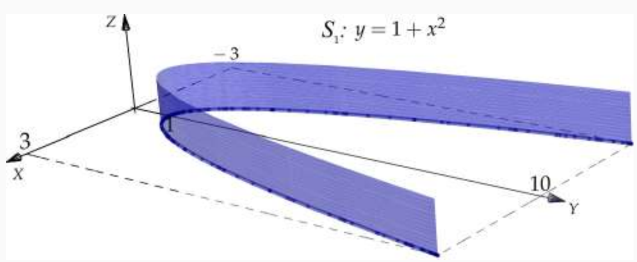
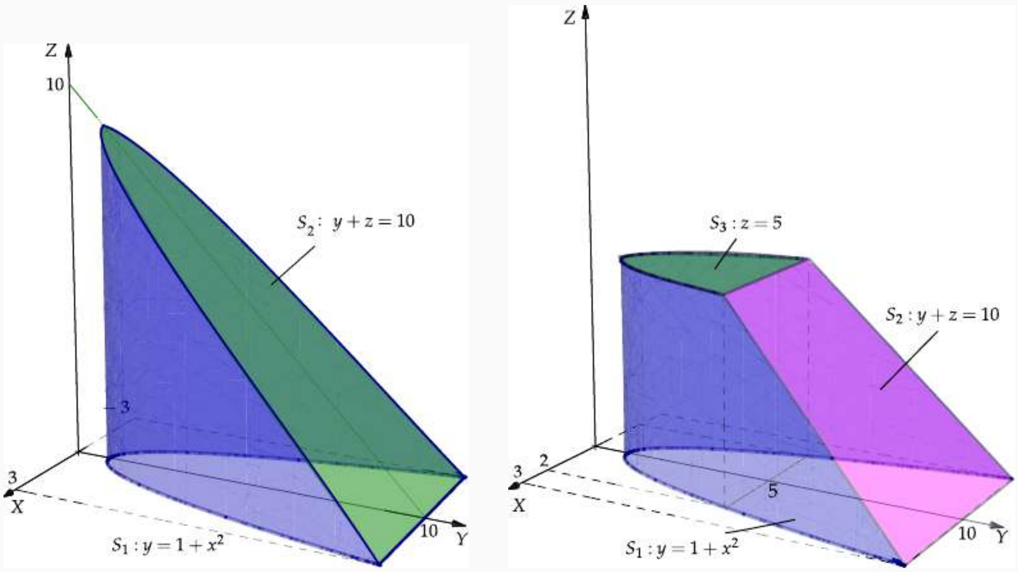


Figura 8.30: Elipse

b.) Dibuje el sólido Q . (4 puntos)

Solución



4. Determine el dominio máximo D de la función f, la cual está definida mediante el criterio:

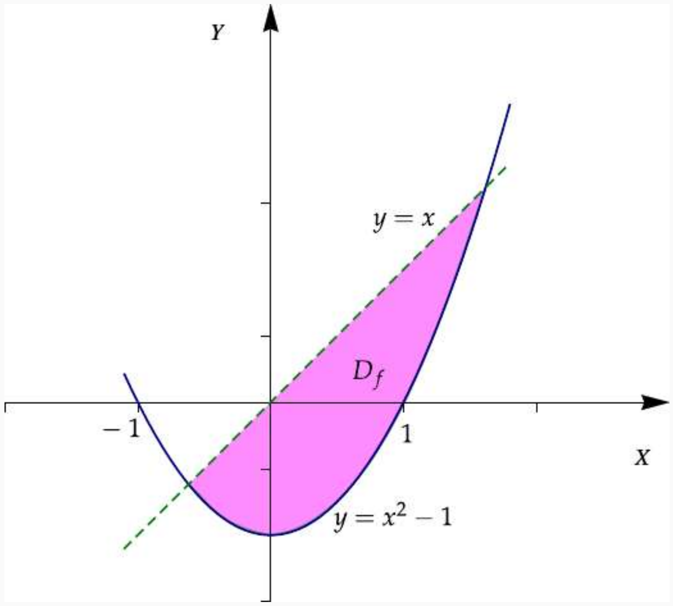
$$f(x,y) = \log(x-y) - \sqrt{y - x^2 + 1},$$

además realice la representación gráfica de D. (4 puntos)

Solución

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x - y > 0 \text{ y } y - x^2 + 1 \geq 0\right\}$$

La representación gráfica sería la intersección de dos regiones. La primera región es la región que está por debajo de la recta $y = x$ (sin incluirla), es decir, $R_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y < x\right\}$. La segunda región es la región que que está por encima de la parábola $y = x^2 - 1$ (incluida), es decir, $R_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y \geq x^2 - 1\right\}$.



5. Sea z definida mediante $z = xf(y) + yg(x)$, con f y g funciones dos veces derivables.

   Verifique la identidad: (5 puntos)

$$xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

Solución

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f(y) + yg'(x)$
- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xf'(y) + g(x)$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(y) + g'(x)$

Verificación de la identidad:

$$\begin{aligned} & xy(f'(y) + g'(x)) - x(f(y) + yg'(x)) - y(xf'(y) + g(x)) + z \\ = \; & xyf'(y) + xyg'(x) - xf(y) - xyg'(x) - yxf'(y) - yg(x) + z \\ = \; & -xf(y) - yg(x) + z \; = \; 0 \checkmark \quad \text{pues } z = xf(y) + yg(x) \end{aligned}$$

6. Considere la ecuación $g(3x - y,\ y^2z) = x^2 - z$ en la cual se define la función z en forma implícita,con g una función con derivada continua. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. (4 puntos)

Solución

a.) Hacemos un cambio de variable para poder usar la regla de la cadena. Sea

$$F(x,y,z)=g(u,v)-x^2+z=0 \ \text{ con } \ u=3x-y \quad \text{y} \quad v=y^2z$$

b.) Ahora derivamos parcialmente usando la fórmula de derivación implícita,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}-2x}{\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z}+1}=-\frac{\dfrac{\partial g}{\partial u}\cdot 3+\dfrac{\partial g}{\partial v}\cdot 0-2x}{\dfrac{\partial g}{\partial u}\cdot 0+\dfrac{\partial g}{\partial v}\cdot y^2+1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\dfrac{\partial g}{\partial u}\cdot -1+\dfrac{\partial g}{\partial v}\cdot 2yz}{\dfrac{\partial g}{\partial u}\cdot 0+\dfrac{\partial g}{\partial v}\cdot y^2+1}$$

8.17 Primer parcial extraordinario–I–2016

Instituto Tecnológico de Costa Rica | Tiempo: 2:30 horas
Escuela de Matemática | Valor: 30 puntos
MA-2104 Cálculo Superior

I examen parcial extraordinario

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimdad. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, y tampoco el uso de hojas sueltas.

1. Considere la parábola de ecuación $P: y^2-2ay=ax$ con $a\in\mathbb{R}^+$, en la cual la distancia entre su directriz y su foco es de 6 unidades. Exprese la ecuación de P en forma canónica, determine el valor de a e indique las coordenadas del foco, vértice y ecuación de la directriz. (5 puntos)

2. Realice la gráfica e indique las características principales de la sección cónica de ecuación $C: 16x^2=y^2+36$. (5 puntos)

3. Dibuje el sólido Q limitado por las superficies $S_1 : \dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, $S_2 : x + y + z = 6$, $S_3 : x = 0$ y $S_4 : z = 0$. (5 puntos)

4. Considere el paraboloide elíptico R el cual satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

   a.) la traza con el plano $z = 0$ es un círculo de radio 2 y centro en $(0, 3, 0)$,

   b.) la traza con el plano $y = 3$ es la parábola de ecuación $x^2 = 4 - z$.

   Dibuje ambas trazas en un mismo sistema coordenado e indique la ecuación de R. (5 puntos)

5. Considere la función f definida por $f(x, y) = x\mathrm{sen}(xy) + xy^3 + \ln(2x - 3y)$ y el operador $\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Determine el valor de $\nabla^2 f$ en el punto $(x, y) = (1, -1)$. (5 puntos)

6. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ a partir de la ecuación

   $$x^2 + xy^2 + z^2 = xz + z$$

   en la cual se define a z en forma implícita como función de x y y. (5 puntos)

8.18 Solución resumida I parcial extraordinario, I–2016

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MA-2104 CÁLCULO SUPERIOR

Tiempo: 2:30 horas
Valor: 30 puntos

SOLUCIÓN BREVE DEL I EXAMEN PARCIAL EXTRAORDINARIO

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimdad. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, y tampoco el uso de hojas sueltas.

1. Considere la parábola de ecuación $P : y^2 - 2ay = ax$ con $a \in \mathbb{R}^+$, en la cual la distancia entre su directriz y su foco es de 6 unidades. Exprese la ecuación de P en forma canónica, determine el valor de a e indique las coordenadas del foco, vértice y ecuación de la directriz. (5 puntos)

Solución

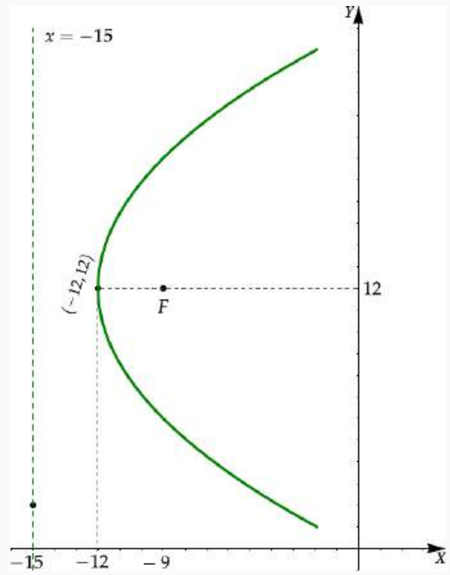
Completando cuadrados,

$y^2 - 2ay = ax \implies (y-a)^2 = a(x+a), \ \ a > 0.$

Es una parábola que "abre" a la derecha.

Como "la distancia entre su directriz y su foco es de 6 unidades" entonces $p = 3$, y como $4p = a$ entonces $a = 12$. La ecuación canónica es

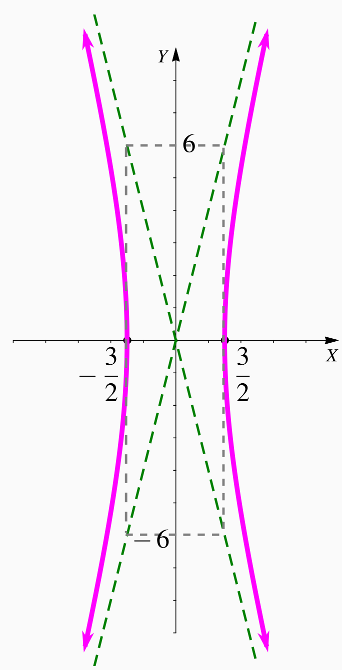
$$(y-12)^2 = 12(x+12)$$



2. Realice la gráfica e indique las características principales de la sección cónica de ecuación $C: 16x^2 = y^2 + 36$. (5 puntos)

Solución

$$\left\{\begin{array}{lll} 16x^2 = y^2 + 36 & \implies & 16x^2 = y^2 + 36 \\ & \implies & 16x^2 - y^2 = 36 \\ & \implies & \dfrac{16x^2}{36} - \dfrac{y^2}{36} = 1 \\ & \implies & \dfrac{x^2}{9/4} - \dfrac{y^2}{36} = 1 \end{array}\right.$$



La ecuación canónica es $\dfrac{x^2}{9/4} - \dfrac{y^2}{36} = 1$. Es una hipérbola con eje focal paraelo al eje X.

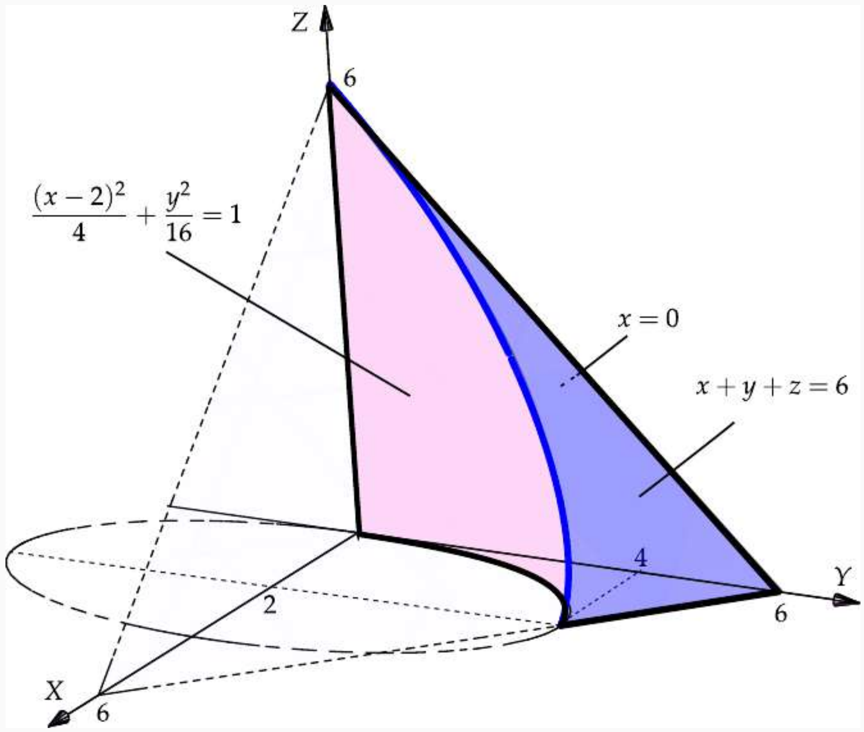
Características.

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\text{Centro} & & (0,0) \\
a^2 & = & 9/4 \implies a = 3/2 \\
b^2 & = & 36 \implies b = 6 \\
c^2 & = & 9/4 + 36 \implies c = \sqrt{153/4} \\
\text{Vértices} & & (0 \pm 3/2,\, 0) \\
\text{Focos} & & (0 \pm \sqrt{153/4},\, 0) \\
\text{Asíntotas} & & y = 0 \pm \dfrac{6}{3/2}(x-0) \implies y = \pm 4x \\
\text{Int X} & & \text{si } y = 0 \implies \dfrac{x^2}{9/4} = 1 \implies x = \pm 3/2 \\
\text{Int Y} & & \text{si } x = 0 \implies \dfrac{y^2}{36} = -1 \implies \text{no hay}
\end{array}\right.$$

3. Dibuje el sólido Q limitado por las superficies $S_1 : \dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, $S_2 : x + y + z = 6$, $S_3 : x = 0$ y $S_4 : z = 0$. (5 puntos)

Solución

Un punto de intersección, en el plano XY, entre la recta (del plano S_2) $x + y = 6$ y la elipse $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ es $(2,4,0)$.



4. Considere el paraboloide elíptico R el cual satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

   a.) la traza con el plano $z = 0$ es un círculo de radio 2 y centro en $(0, 3, 0)$,

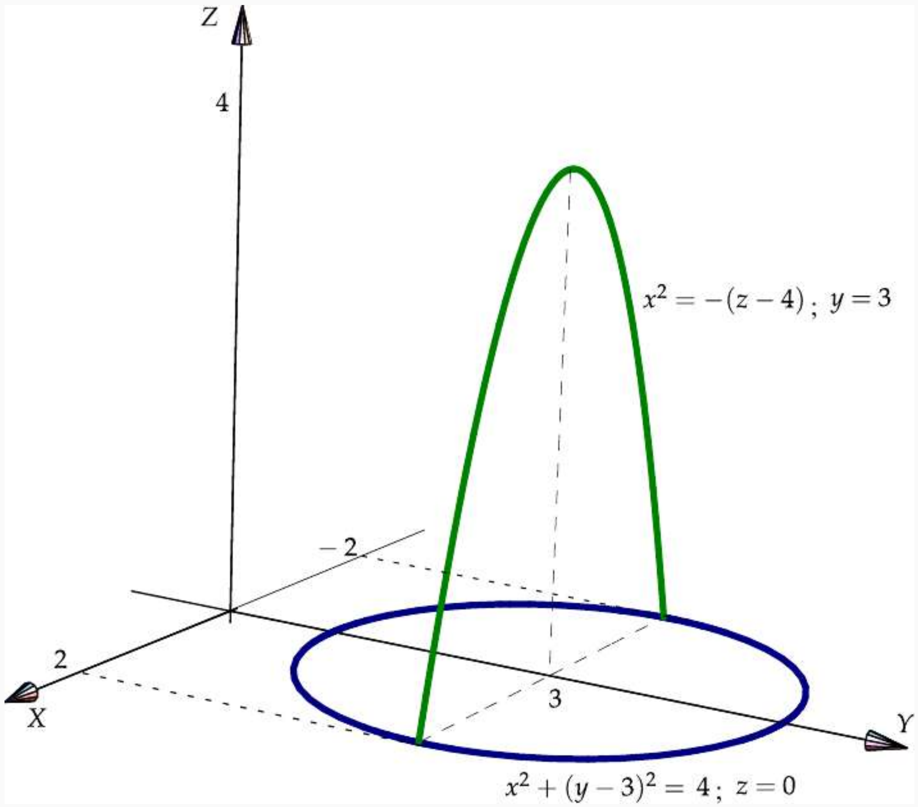
   b.) la traza con el plano $y = 3$ es la parábola de ecuación $x^2 = 4 - z$.

Dibuje ambas trazas en un mismo sistema coordenado e indique la ecuación de R.

(5 puntos)

Solución

El paraboloide elíptico R tiene ecuación $x^2 + (y - 3)^2 = -(z - 4)$.



5. Considere la función f definida por $f(x,y) = x\text{sen}(xy) + xy^3 + \ln(2x - 3y)$ y el operador $\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Determine el valor de $\nabla^2 f$ en el punto $(x,y) = (1,-1)$. (5 puntos)

Solución

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{2x-3y} + \sin(xy) + xy\cos(xy) + y^3$

- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2\cos(xy) + 3xy^2 - \frac{3}{2x-3y}$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -xy^2\sin(xy) - \frac{4}{(2x-3y)^2} + 2y\cos(xy)$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^3\sin(xy) + 6xy - \frac{9}{(2x-3y)^2}$

Evaluamos,

- $\nabla^2 f\big|_{x=1,y=-1} = -\dfrac{163}{25} - 2\sin(-1) - 2\cos(-1)$

6. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ a partir de la ecuación

$$x^2 + xy^2 + z^2 = xz + z$$

en la cual se define a z en forma implícita como función de x y y. (5 puntos)

Solución

Sea $F(x,y,z) = x^2 + xy^2 + z^2 - xz - z$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-2x - y^2 + z}{-x + 2z - 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2xy}{-x+2z-1}$$

8.19 Segundo parcial−2−2016

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA-2104 Cálculo Superior

Tiempo: 2:30 horas
Valor: 33 puntos

II Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta, esto incluye los dibujos necesarios. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimdad. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, y tampoco el uso de hojas sueltas.

1. **[5 puntos]** Determine y clasifique los puntos críticos de $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - x^2 + 3y^2$.

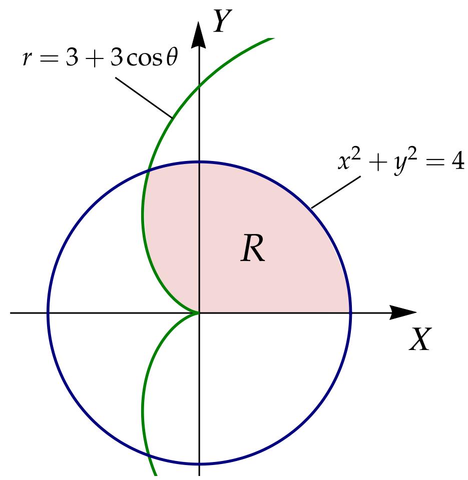
2. **[5 puntos]** La temperatura T en cualquier punto de una región del espacio es $T(x,y,z) = 400xyz^2$. Determine, usando multiplicadores de Lagrange, la temperatura máxima sobre la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$

3. Considere la integral $I = \iint_{R_{yz}} f(y,z)\,dA \;=\; \int_0^4 \int_0^{2-\frac{1}{2}\sqrt{4-z}} f(y,z)\,dy\,dz.$

   a.) **[3 puntos]** Dibuje la región de integración R

   b.) **[3 puntos]** Plantee $I = \iint_{R_{yz}} f(y,z)\,dA$ en el orden "dz dy"

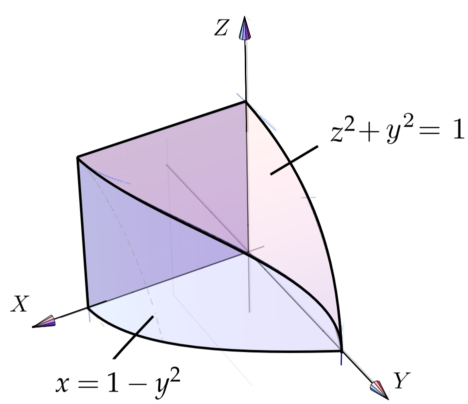
4. **[5 puntos]** La región R es la región sombreada en la figura que está a la derecha. Use coordenadas polares para calcular el área de la región R.



5. Considere el sólido Q limitado por los cilindros $S_1 :\; z^2 + y^2 = 1$ y $S_2 :\; x = 1 - y^2$, en el primer octante; tal y como se muestra en la figura a la derecha.

   a.) **[3 puntos]** Dibuje la proyección del sólido Q en el plano XZ y también en el plano YZ.

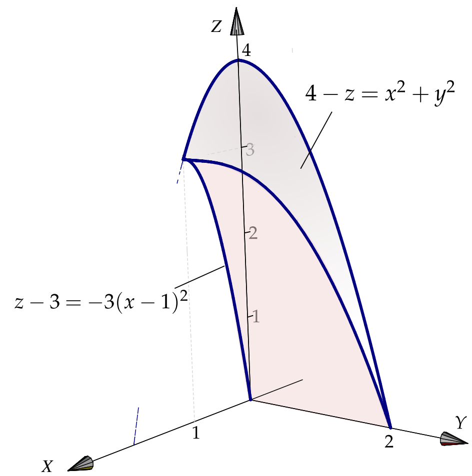
   b.) **[4 puntos]** Calcule la integral $\iiint_Q \sqrt{y^2 + z^2}\,dV$



6. Considere el sólido Q limitado por las superficies $S_1: z-3=-3(x-1)^2$, $S_2: 4-z=x^2+y^2$, $S_3: y=0$ y $S_4: x=0$, tal y como se muestra en la figura a la derecha.

    a.) **[2 puntos]** Dibuje las proyección del sólido Q en el plano XZ

    b.) **[3 puntos]** Plantee el volumen del sólido Q (indicando los límites de integración)



8.20 Solución resumida I parcial, 2−2016

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MA-2104 CÁLCULO SUPERIOR

Tiempo: 2:30 horas
Valor: 33 puntos

SOLUCIÓN BREVE DEL II EXAMEN PARCIAL

1. **[5 puntos]** Determine y clasifique los puntos críticos de $f(x,y)=x^4+2x^2y-x^2+3y^2$.

Solución:

Puntos estacionarios. $\begin{cases} f_x = 4x^3+4xy-2x = 0 & (E1) \\ f_y = 2x^2+6y = 0 & (E2) \end{cases}$

Factorizamos (E1): $x(4x^2+4y-2)=0 \implies x=0$ o $y=\frac{1}{2}-x^2$.

Sustituyendo $x=0$ en (E2) obtenemos el punto crítico $(0,0)$

Sustituyendo $y=\frac{1}{2}-x^2$ en (E2) obtenemos los puntos críticos $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$

Clasificación. $H(x,y)=(12x^2+4y-2)(6)-16x^2$

Puntos P	H(P)	$f_{xx}(P)$	Clasificación
$(0,0)$	-12		$(0,0,0)$ es un punto de silla
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\,-\frac{1}{4}\right)$	24	6	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\,-\frac{1}{4},-\frac{3}{8}\right)$ es mínimo local
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\,-\frac{1}{4}\right)$	24	6	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\,-\frac{1}{4},-\frac{3}{8}\right)$ es es mínimo local

2. **[5 puntos]** La temperatura T en cualquier punto de una región del espacio es $T(x,y,z) = 400xyz^2$. Determine la temperatura máxima sobre la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$

Solución:

$L(x,y,z,\lambda) = 400xyz^2 - \lambda(x^2+y^2+z^2-1).$

$$\begin{cases} L_x &=& 400yz^2 - 2\lambda x &=& 0 & (E1) \\ L_y &=& 400xz^2 - 2\lambda y &=& 0 & (E2) \\ L_z &=& 800xyz - 2\lambda z &=& 0 & (E3) \\ L_\lambda &=& x^2+y^2+z^2-1 &=& 0 & (E4) \end{cases}$$

La temperatura T puede tomar valores positivos y como estamos determinando la temperatura máxima, podemos asumir que $T(x,y,z) > 0$ por lo que x, y y z *los podemos asumir no nulos* y x y y deben tener el mismo signo.

Despejando λ en (E1), (E2) y (E3) e igualando, obtenemos

$$\frac{400yz^2}{2x} = \frac{400xz^2}{2y} = \frac{800xyz}{2z},$$

por tanto: $x = y$ y $z^2 = 2y^2$. Sustituyendo en (E4) obtenemos $x = y = \pm 1/2$ y por tanto *la temperatura máxima* es $T = 400\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = 50.$

3. Considere la integral $I = \displaystyle\iint_{R_{yz}} f(y,z)\,dA = \int_0^4\int_0^{2-\frac{1}{2}\sqrt{4-z}} f(y,z)\,dy\,dz.$

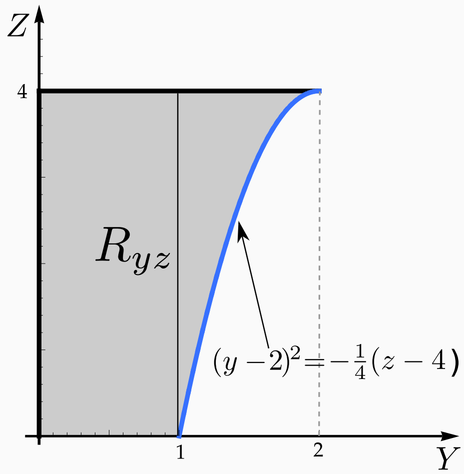
   a.) **[3 puntos]** Dibuje la región de integración R

   b.) **[3 puntos]** Plantee $I = \displaystyle\iint_{R_{yz}} f(y,z)\,dA$ en el orden "dz dy"

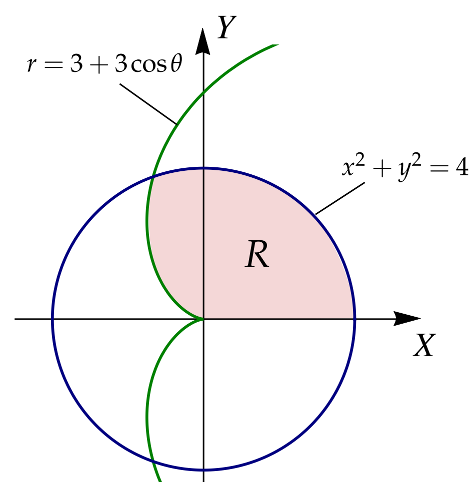
Solución:

Como $y = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{4-z} \implies (y-2)^2 = -\dfrac{1}{4}(z-4)$. Esta es la ecuación de una parábola con vértice en $(2,4)$ que "abre hacia abajo".

$$I = \int_0^1 \int_0^4 f(y,z)\,dz\,dy + \int_1^2 \int_{4-4(y-2)^2}^4 f(y,z)\,dz\,dy$$



4. **[5 puntos]** La región R es la región sombreada en la figura que está a la derecha. Use coordenadas polares para calcular el área de la región R.

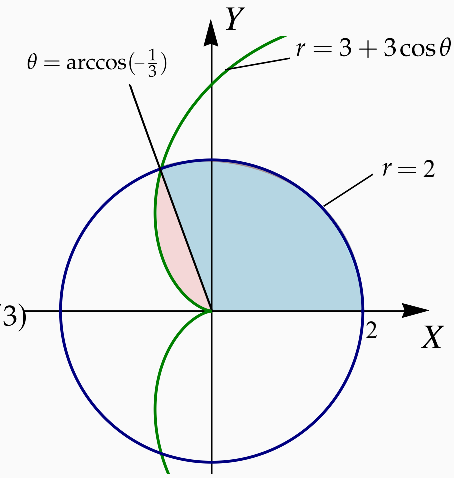


Solución:

Tangentes al polo: $3+3\cos\theta = 0 \implies \theta = \pi$.

Intersección entre las curvas:

$$r = 2 \bigcap r = 3+3\cos\theta \implies \cos\theta = -\frac{1}{3}$$
$$\implies \theta = \arccos(-1/3)$$



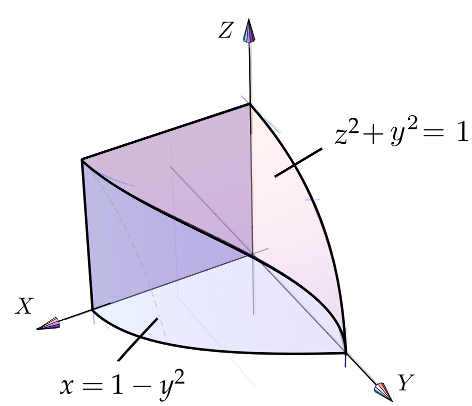
Sea $\theta_1 = \arccos(-1/3)$

$$\begin{aligned} A_R &= \int_0^{\theta_1}\int_0^2 1\cdot r\,dr\,d\theta \\ &\quad + \int_{\theta_1}^{\pi}\int_0^{3+3\cos\theta} 1\cdot r\,dr\,d\theta \\ &= 2\arccos\left(-\tfrac{1}{3}\right) + \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{9}{2} + 9\cos(\theta) + \frac{9\cos^2(\theta)}{2}\,d\theta \\ &= 2\arccos\left(-\tfrac{1}{3}\right) + 18\left(\tfrac{3t}{8} + \tfrac{\sin(\theta)}{2} + \tfrac{1}{16}\sin(2\theta)\right)\Big|_{\theta_1}^{\pi} \approx 4.35207 \end{aligned}$$

5. Considere el sólido Q limitado por los cilindros $S_1: \; z^2+y^2 = 1$ y $S_2: \; x = 1-y^2$, en el primer octante; tal y como se muestra en la figura a la derecha.

   a.) **[3 puntos]** Dibuje la proyección del sólido Q en el plano XZ y también en el plano YZ.

   b.) **[4 puntos]** Calcule la integral $\displaystyle\iiint_Q \sqrt{y^2+z^2}\,dV$

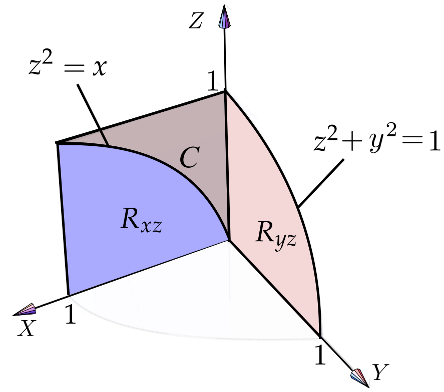


Solución:

a) Para determinar la ecuación de la curva de proyección C, sobre el plano XZ, sustituimos $y^2 = 1-x$ en la ecuación $z^2+y^2 = 1$ y obtenemos $C:\ z^2+1-x = 1$.

b) Proyectamos sobre YZ. Usando coordenadas cilíndricas,

$$y = r\cos\theta, \quad z = r\,\text{sen}\,\theta \text{ y } y^2+z^2 = r^2.$$

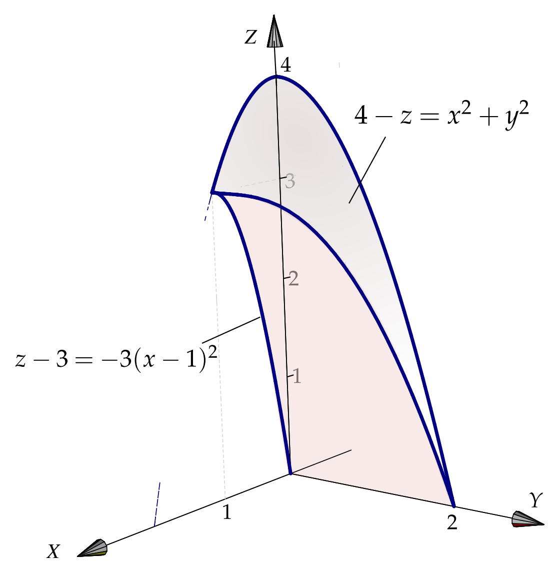


$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1\left(\int_0^{1-y^2}\sqrt{y^2+z^2}\,dx\right) r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (1-r^2\cos^2\theta)r^2\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}-\frac{\cos^2(\theta)}{5}\,d\theta \\ &= \frac{7\pi}{60} \approx 0.366519 \end{aligned}$$

6. Considere el sólido Q limitado por las superficies $S_1:\ z-3 = -3(x-1)^2$, $S_2:\ 4-z = x^2+y^2$, $S_3:\ y = 0$ y $S_4:\ x = 0$, tal y como se muestra en la figura a la derecha.

   a.) **[2 puntos]** Dibuje la proyección del sólido Q en el plano XZ

   b.) **[3 puntos]** Plantee el volumen del sólido Q (indicando los límites de integración)



Solución:

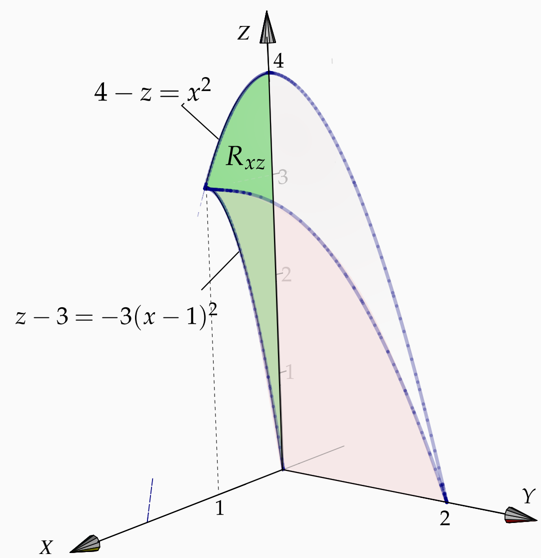
Proyectando sobre XZ, el volumen es

$$V_Q = \int_0^1 \int_{3-3(x-1)^2}^{4-x^2} \sqrt{4-z-x^2}\, dz\, dx$$

Observe que la proyección sobre XY está entre los ejes y la hipérbola

$$1 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 2y^2,$$

en el primer cuadrante.



8.21 Segundo parcial extraordinario–I–2016

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA-2104 Cálculo Superior

Tiempo: 2:30 horas
Valor: 30 puntos

II examen parcial extraordinario

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta, esto incluye los dibujos necesarios. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimdad. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, y tampoco el uso de hojas sueltas.

1. **[5 puntos]** Determine y clasifique los puntos críticos de $f(x,y) = xy(-x-y+1)$.

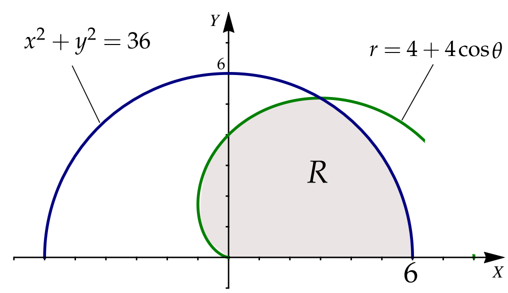
2. **[5 puntos]** Considere la superficie S de ecuación $x^3 + y^3 + z = 40$ con $x > 0$, $y > 0$ y $z > 0$. La densidad en cada punto de S es $\rho(x,y,z) = e^{xyz}$. Determine, usando multiplicadores de Lagrange, el punto (x,y,z) de la superficie S en el que la densidad ρ es máxima

3. Considere la integral $I = \iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^{9/2}\int_{(y-2)^2}^{4+y^2/9} f(x,y)\,dx\,dy.$

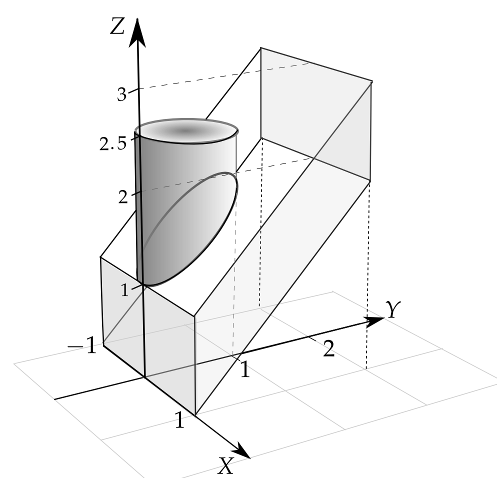
   a.) **[3 puntos]** Dibuje la región de integración R

   b.) **[3 puntos]** Plantee $I = \iint_R f(x,y)\,dA$ en el orden "dy dx"

4. **[4 puntos]** La región R es la región sombreada en la figura que está a la derecha. Use coordenadas polares para calcular el área de la región R.



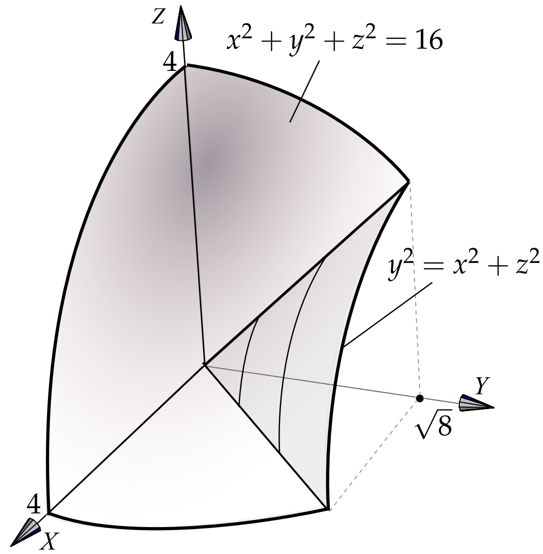
5. **[4 puntos]** Considere el sólido Q, compuesto de un paralelepípedo y un trozo de cilindro con base circular. Este sólido esta limitado por los planos $z=y+1$, $z=y$, $y=0$, $y=2$, $x=1$, $x=-1$, $z=2.5$, y el cilindro $(y-1/2)^2+x^2=1/4$; tal y como se muestra en la figura a la derecha. Dibuje una proyección del sólido Q y plantee (con sus respectivos límites de integración), usando integrales dobles, su volumen.



6. Considere el sólid Q limitado por la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=16$ y el cono $y^2=x^2+z^2$ tal y como se muestra en la figura a la derecha.

   a.) **[2 puntos]** Dibuje la región de integración en el plano XZ.

   b.) **[4 puntos]** Calcule, usando coordenadas cilíndricas, la integral $\iiint_Q 2y\sqrt{x^2+z^2}\,dV$



8.22 Solución resumida II parcial extraordinario, 2−2016

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA-2104 Cálculo Superior

Tiempo: 2:30 horas
Valor: 30 puntos

Solución breve del II examen parcial extraordinario

1. **[5 puntos]** Determine y clasifique los puntos críticos de $f(x,y)=xy(-x-y+1)$.

Solución:

Puntos estacionarios. $\begin{cases} f_x = y(1-2x-y) = 0 & (E1) \implies y=0 \quad \text{o} \quad y=1-2x \\ f_y = x-x^2-2xy = 0 & (E2) \end{cases}$

De $(E1)$, si $y=0$, sustituyendo en $(E2)$ obtenemos $x=0$ y $x=1$.

De $(E1)$, si $y=1-2x$, sustituyendo en $(E2)$ obtenemos $x=0$ y $x=1/3$.

Tenemos cuatro puntos estacionarios $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(1/3,\ 1/3)$.

Clasificación. $H(x,y)=4xy-(1-2x-2y)^2$

Puntos P	H(P)	$f_{xx}(P)$	Clasificación
$(0,0)$	-1	$-$	$(0,0,0)$ es un punto de silla
$(1,0)$	-1	$-$	$(1,0,0)$ es un punto de silla
$(0,1)$	-1	$-$	$(0,1,0)$ es un punto de silla
$(1/3,1/3)$	$1/3$	$-2/3$	$(1/3,1/3,1/27)$ es un máximo local

2. **[5 puntos]** Considere la superficie S de ecuación $x^3+y^3+z=40$ con $x>0$, $y>0$ y $z>0$. La densidad en cada punto de S es $\rho(x,y,z)=e^{xyz}$. Determine, usando multiplicadores de Lagrange, el punto (x,y,z) de la superficie S en el que la densidad ρ es máxima

Solución:

$$L(x,y,z,\lambda)=e^{xyz}-\lambda(x^3+y^3+z-40) \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} L_x = yze^{xyz}-3\lambda x^2 &= 0 \quad (E1)\\ L_y = xze^{xyz}-3\lambda y^2 &= 0 \quad (E2)\\ L_z = xye^{xyz}-\lambda &= 0 \quad (E3)\\ L_\lambda = x^3+y^3+z-40 &= 0 \quad (E4)\end{cases}$$

Como $x>0$, $y>0$ y $z>0$, podemos despejar λ en (E1), (E2) y (E3) y cancelar $e^{xyz}>0$,

$$\frac{yz}{3x^2} = \frac{xz}{3y^2} = xy$$

Cancelando y despejando obtenemos $x^3=y^3$ y $z=3y^3$. Sustituyendo en (E4) obtenemos $x=y=2$ y $z=24$ (y $\lambda=4e^{96}$).

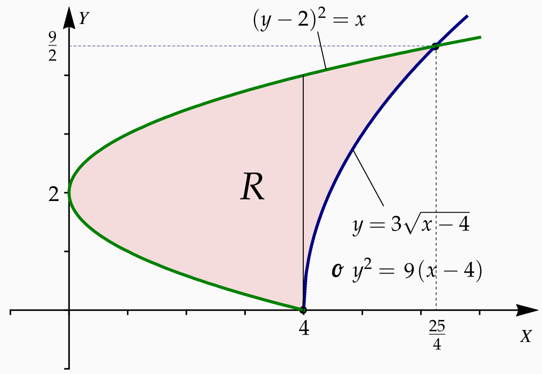
3. Considere la integral $I=\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^{9/2}\int_{(y-2)^2}^{4+y^2/9} f(x,y)\,dx\,dy.$

a.) **[3 puntos]** Dibuje la región de integración R

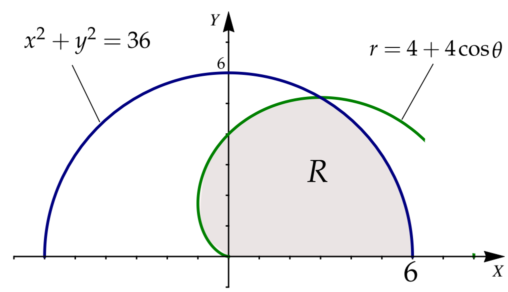
b.) **[3 puntos]** Plantee $I=\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dA$ en el orden "$dy\,dx$"

Solución:

$$I = \int_0^4 \int_{2-\sqrt{x}}^{2+\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_4^{25/4} \int_{3\sqrt{x-4}}^{2+\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$$



4. **[4 puntos]** La región R es la región sombreada en la figura que está a la derecha. Use coordenadas polares para calcular el área de la región R.



Solución:

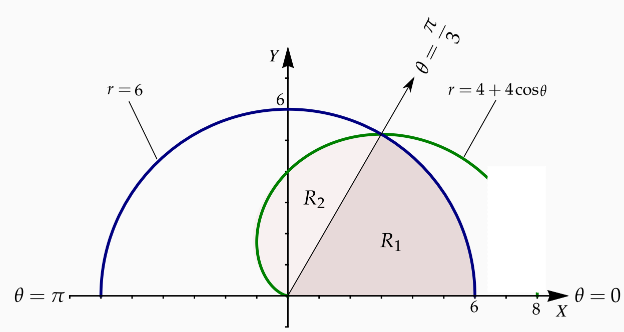
Tangentes al polo: $4+4\cos\theta = 0 \implies \theta = \pi$.

Intersección entre las curvas:

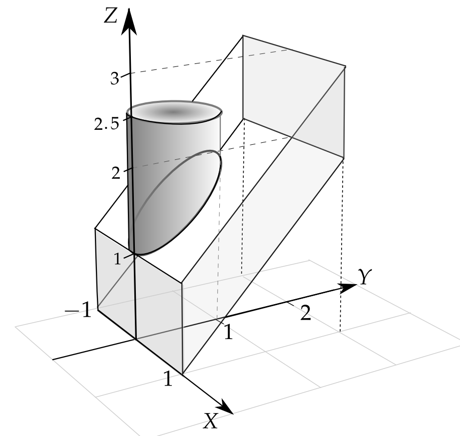
$$r = 6 \ \cap\ r = 4+4\cos\theta \implies \cos\theta = \frac{1}{2}$$
$$\implies \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$A_R = \int_0^{\pi/3}\int_0^6 1\cdot r\,dr\,d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi}\int_0^{4+4\cos\theta} 1\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= 6\pi + 8\pi - 9\sqrt{3} \approx 28.3938\ \text{ul}^2$$



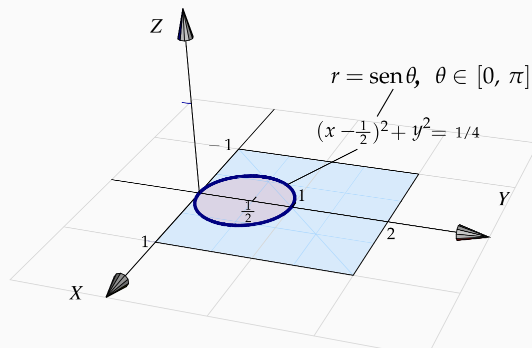
5. **[4 puntos]** Considere el sólido Q, compuesto de un paralelepípedo y un trozo de cilindro con base circular. Este sólido esta limitado por los planos $z = y+1$, $z = y$, $y = 0$, $y = 2$, $x = 1$, $x = -1$, $z = 2.5$, y el cilindro $(y-1/2)^2 + x^2 = 1/4$; tal y como se muestra en la figura a la derecha. Dibuje una proyeción del sólido Q y plantee (con sus respectivos límites de integración), usando integrales dobles, su volumen.



Solución:

La proyección del cilindro es el círculo $(x-0.5)^2 + y^2 \le (0.5)^2$. La ecuación en polares de este círculo es $r = \operatorname{sen}\theta$ con $\theta \in [0,\pi]$. El paralelepípedo está ente los planos $z = y$ y $z = y+1$.

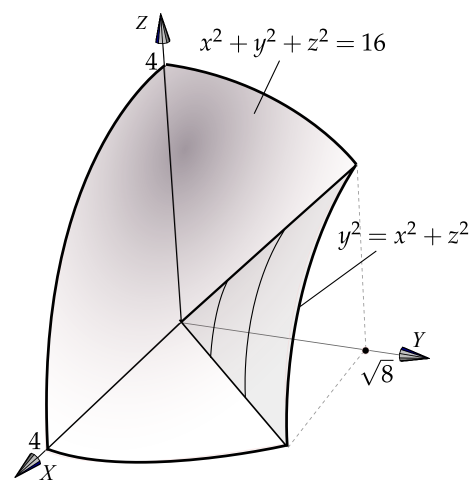
$$
\begin{aligned}
V_Q &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} y+1 - y\,dy\,dx \\
&\quad + \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\operatorname{sen}\theta} 2.5-(y+1)\,dy\,dx \\
&= 4 + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$



6. Considere el sólid Q limitado por la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 16$ y el cono $y^2 = x^2+z^2$ tal y como se muestra en la figura a la derecha.

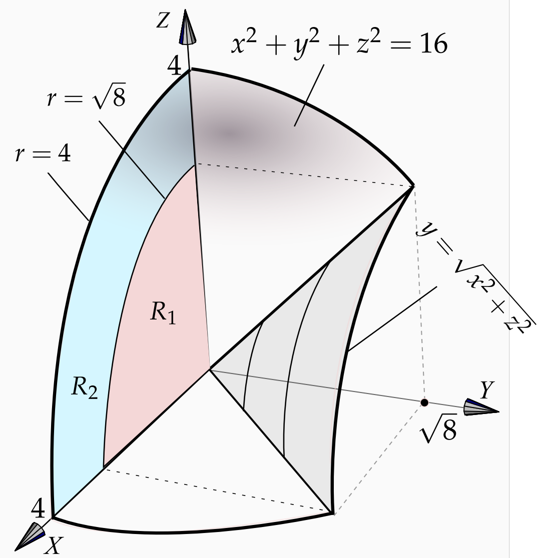
   a.) **[2 puntos]** Dibuje la región de integración en el plano XZ.

   b.) **[4 puntos]** Calcule, usando coordenadas cilíndricas, la integral $\iiint\limits_Q 2y\sqrt{x^2+z^2}\,dV$



Solución:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{8}}\left(\int_0^{\sqrt{x^2+z^2}} 2y\sqrt{x^2+z^2}\,dy\right) r\,dr\,d\theta \\ &\quad + \int_0^{\pi/2}\int_{\sqrt{8}}^{4}\left(\int_0^{\sqrt{16-x^2-z^2}} 2y\sqrt{x^2+z^2}\,dy\right) r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{8}} r^4\,dr\,d\theta \\ &\quad + \int_0^{\pi/2}\int_{\sqrt{8}}^{4} (16-r^2)r^2\,dr\,d\theta \end{aligned}$$



8.23 Tercel parcial–I–2016

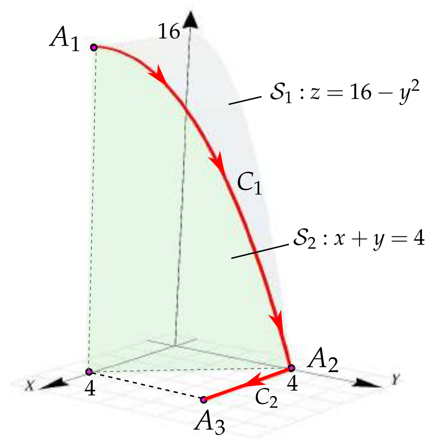
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MA-2104 CÁLCULO SUPERIOR

Tiempo: 2:20 horas
Valor: 28 puntos

III EXAMEN PARCIAL

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta, esto incluye los dibujos necesarios. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimdad. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, y tampoco el uso de hojas sueltas.

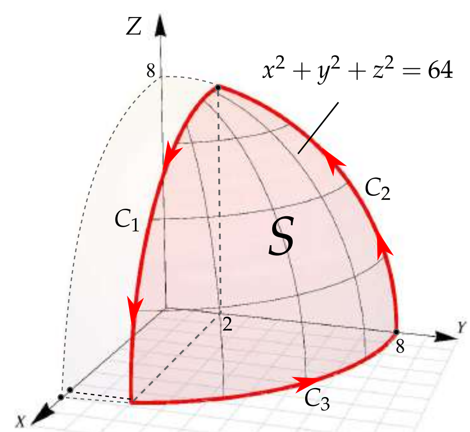
1. Sea $F(x,y,z) = 2xy\,\hat{\imath} + x^2\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ un campo de fuerzas y sea $C = C_1 \cup C_2$ la curva que se muestra en la figura a la derecha. La curva C_1 va desde $A_1 = (4,0,16)$ hasta $A_2 = (0,4,0)$ y es la intersección de las superficies $S_1 : z = 16 - y^2$ y $S_2 : x + y = 4$ y C_2 es el segmento de recta que va de A_2 hasta $A_3 = (4,4,0)$.



   a.) **[5 puntos]** Calcule la integral dada por $I = \int_C F \cdot dr$ utilizando una parametrizaciòn de las curvas involucradas.

   b.) **[3 puntos]** Asumiendo que el campo vectorial F es conservativo determine, mediante la función potencial, la integral dada por $I = \int_C F \cdot dr$.

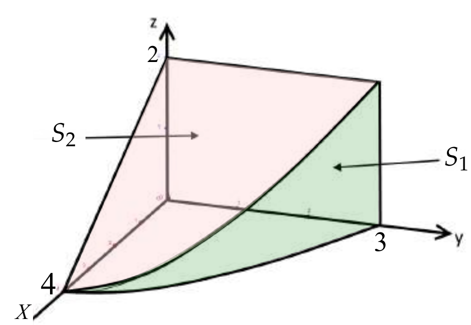
2. Sea S la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ dibujada en el primer octante y cortada por el plano $y = 2$, tal como se ve en la figura a la derecha.



   a.) **[4 puntos]** Determine el área de la superficie S. (Sugerencia: Considere la proyección en el plano XZ).

   b.) **[5 puntos]** Sea $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ como se indica en la figura a la derecha y $F(x,y,z) = (xy^2,\ y^2,\ z)$. Determine utilizando el teorema de Stokes, la integral dada por $I = \int_C F \cdot dr$

3. Sea $F(x,y,z) = 3y\ \hat{\imath} + z\ \hat{k}$ y sea S la frontera del sólido Q limitado por las superficies: $S_1 : 4y^2 = -9(x-4)$, $S_2 : x + 2z = 4$, $S_3 : z = 0$, $S_4 : x = 0$, $S_5 : y = 0$.



   a.) **[6 puntos]** Determine la integral de superficie dada por $I = \iint_{S_1 \cup S_2} (F \cdot N)\,dS$

   b.) **[5 puntos]** Utilizando el teorema de la divergencia determine $I = \iint_S (F \cdot N)\,dS$ donde N es el vector unitario exterior a Q.

8.24 Solución resumida III parcial, I–2016

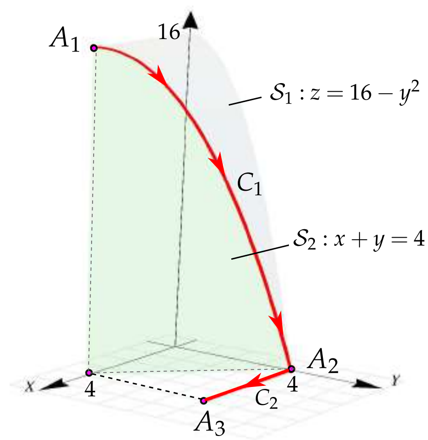
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MA-2104 CÁLCULO SUPERIOR

Tiempo: 2:20 horas
Valor: 28 puntos

SOLUCIÓN BREVE DEL III EXAMEN PARCIAL

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta, esto incluye los dibujos necesarios. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimdad. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, y tampoco el uso de hojas sueltas.

1. Sea $F(x,y,z) = 2xy\,\hat{\imath} + x^2\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ un campo de fuerzas y sea $C = C_1 \cup C_2$ la curva que se muestra en la figura a la derecha. La curva C_1 va desde $A_1 = (4,0,16)$ hasta $A_2 = (0,4,0)$ y es la intersección de las superficies $S_1 : z = 16 - y^2$ y $S_2 : x + y = 4$ y C_2 es el segmento de recta que va de A_2 hasta $A_3 = (4,4,0)$.



a.) **[5 puntos]** Calcule la integral dada por $I = \int_C F \cdot dr$ utilizando una parametrizaciòn de las curvas involucradas.

Solución:

$$C : \begin{cases} C_1 : r_1(t) = (4-t,\ t,\ 16-t^2),\ \ t \in [0,4] \text{ y } r_1'(t) = (-t,\ 1,\ -2t) \\ C_2 : r_2(t) = (t,\ 4,\ 0),\ \ t \in [0,4] \text{ y } r_2'(t) = (1,\ 0,\ 0) \end{cases}$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^4 (8t - 2t^2, t^2 - 8t + 16, 16 - t^2) \cdot (-1, 1, -2t)\, dt + \int_0^4 (8t, t^2, 0) \cdot (1,0,0)\, dt$$

$$= \int_0^4 2t^3 + 3t^2 - 48t + 16\, dt + \int_0^4 8t\, dt = -64$$

Nota: Si usa la parametrización: $-C_1 \;:\; r_1(t) = (t,\; 4-t,\; 16-(4-t)^2), \quad t \in [0,4]$, entonces la integral queda

$$-\int_0^4 2t^3 - 27t^2 + 72t\; dt + \int_0^4 8t\; dt \;=\; -64$$

b.) **[3 puntos]** Asumiendo que el campo vectorial F es conservativo determine, mediante la función potencial, la integral dada por $I = \int_C F \cdot dr$.

Solución:

Como el campo es conservativo, existe ϕ tal que $\nabla\phi = F$.

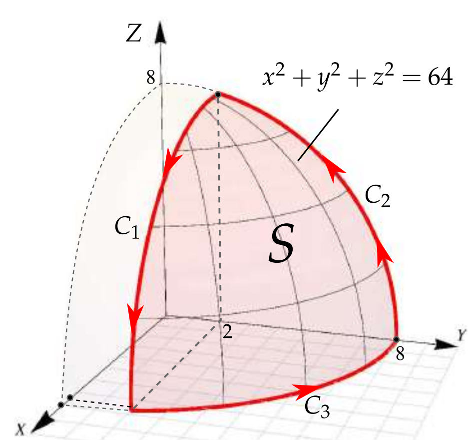
$$\phi_x = 2xy \quad\Longrightarrow\quad \phi = \int 2xy\; dx \;=\; x^2y + K_1$$

$$\phi_y = x^2 \quad\Longrightarrow\quad \phi = \int x^2\; dy \;=\; x^2y + K_2 \quad\Longrightarrow\quad \phi(x,y,z) \;=\; x^2y + \frac{z^2}{2} + K$$

$$\phi_z = z \quad\Longrightarrow\quad \phi = \int z\; dz \;=\; z^2/2 + K_3$$

$$\int_C F \cdot dr \;=\; \phi(4,4,0) \;-\; \phi(4,0,16) \;=\; 64 - 128 \;=\; -64$$

2. Sea S la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ dibujada en el primer octante y cortada por el plano $y = 2$, tal como se ve en la figura a la derecha.



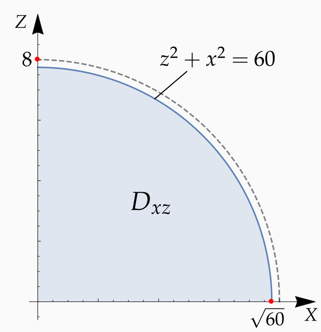
a.) **[4 puntos]** Determine el área de la superficie S. (Sugerencia: Considere la proyección en el plano XZ).

Solución:

La manera fácil: Si una esfera tiene radio R y un casquete de esfera tiene altura h, entonces el área del casquete es $A = 2\pi Rh$. En nuestro caso tenemos un cuarto de casquete: $A_S = \dfrac{2\pi \cdot 8 \cdot 6}{4} = 24\pi$

Ahora vamos a calcular con la fórmula del área de una superficie. La manera fácil es proyectar sobre el plano XZ.

Como $y = 2$, la proyección sobre el plano XZ es el cuarto de círculo $x^2 + z^2 \leq 60$.



$S:\ G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 64 = 0.$

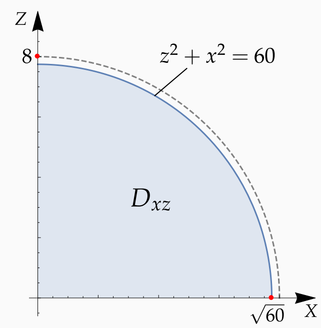
$$\begin{aligned}
A_S &= \iint_S dS \\
&= \iint_{D_{xz}} \sqrt{\frac{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}{G_y^2}}\,dA \quad \left(= \iint_{D_{xz}} \sqrt{y_x^2 + y_z^2 + 1}\,dA \right) \\
&= \iint_{D_{xz}} \sqrt{\frac{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}{4y^2}}\,dA = \iint_{D_{xz}} \sqrt{\frac{64}{64 - x^2 - z^2}}\,dA \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{60}} \frac{8r}{\sqrt{64 - r^2}}\,dr\,d\theta \quad \text{(hacemos la sustitución } u = 64 - r^2 \implies du = -2r\,dr\text{)} \\
&= \int_0^{\pi/2} -8\sqrt{64 - r^2}\Big|_0^{\sqrt{60}}\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} 48\,d\theta = 24\pi
\end{aligned}$$

b.) **[5 puntos]** Sea $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ como se indica en la figura a la derecha y $F(x,y,z) = (xy^2,\ y^2,\ z)$. Determine utilizando el teorema de Stokes, la integral dada por $I = \displaystyle\int_C F \cdot dr$

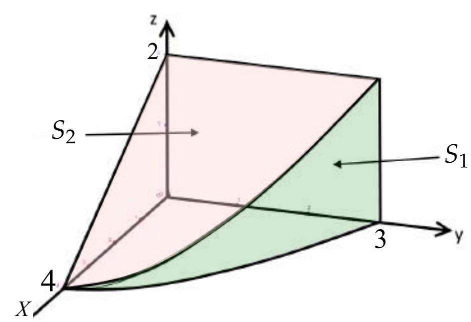
Solución:

Proyectamos sobre el plano XZ. Como $S:\ G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-64 = 0$ entonces sirve $N_1 = (-y_x, 1, -y+z) = \left(\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y}\right)$.

$$\begin{aligned}
\int_C F\cdot dr &= \iint_S \operatorname{rot}F \cdot N\,dS \\
&= \iint_{D_{xz}} (0,0,-2xy)\cdot\left(\frac{x}{y},1,\frac{z}{y}\right) dA \\
&= \iint_{D_{xz}} -2xz\ dA \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{60}} -2r^2\cos\theta\ \operatorname{sen}\theta\ r\,dr\,d\theta \ = \ -900
\end{aligned}$$



3. Sea $F(x,y,z) = 3y\ \hat{\imath} + z\ \hat{k}$ y sea S la frontera del sólido Q limitado por las superficies: $S_1\ :\ 4y^2 = -9(x-4)$, $S_2 : x+2z=4$, $S_3 : z=0$, $S_4 : x=0$, $S_5 : y=0$.



a.) **[6 puntos]** Determine la integral de superficie dada por $I = \iint_{S_1\cup S_2} (F\cdot N)dS$

Solución:

Proyectamos S_1 sobre el plano XZ y S_2 sobre el plano XY

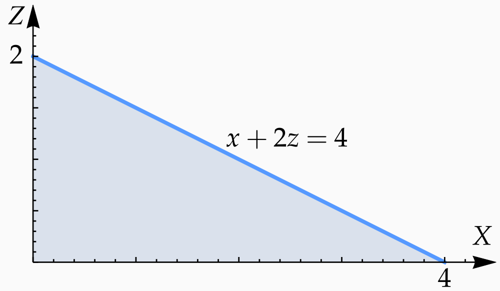


Figura 8.31: Proyección de S_1

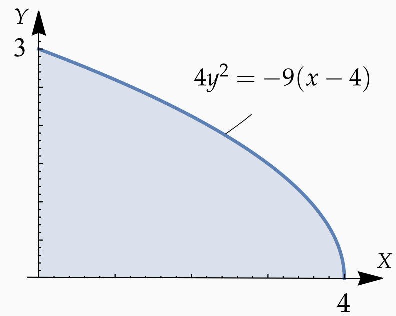


Figura 8.32: Proyección de S_2

$S_1 : 4y^2 + 9(x-4) = 0$ entonces $N_1 = (-y_x, 1, -y_z) = \left(\dfrac{9}{8y}, 1, 0\right)$

$S_2 : x + 2z - 4 = 0$ entonces $N_1 = (-z_x, -z_y, 1) = \left(\dfrac{1}{2}, 0, 1\right)$

$$\begin{aligned}
\iint_S (F\cdot N)dS &= \iint_{S_1} (F\cdot N)dS + \iint_{S_2} (F\cdot N)dS \\
&= \iint_{D_{xz}} (3y,0,z)\cdot\left(\frac{9}{8y},1,0\right) dA + \iint_{D_{xy}} (3y,0,z)\cdot\left(\frac{1}{2},0,1\right) dA \\
&= \int_0^4\int_0^{(4-x)/2} \frac{27}{8}\,dz\,dx + \int_0^3\int_0^{4-4y^2/9} \frac{3y}{2} + \frac{4-x}{2}\,dx\,dy = \frac{183}{5}
\end{aligned}$$

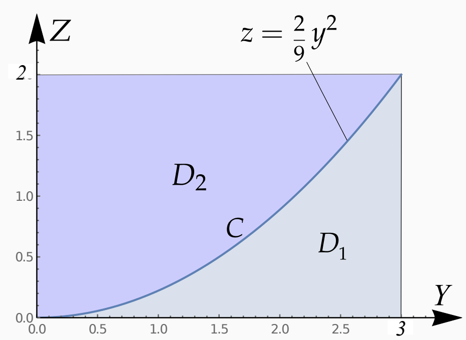
Solución proyectando sobre YZ.

$S_1 : 4y^2 + 9(x-4) = 0$ entonces

$N_1 = (1, -x_y, -x_z) = \left(1, \dfrac{8y}{9}, 0\right)$

$S_2 : x + 2z - 4 = 0$ entonces

$N_1 = (1, -x_y, -x_z) = (1, 0, 2)$

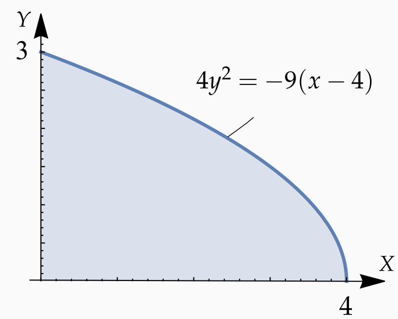


$$\begin{aligned}\iint_S (F\cdot N)dS &= \iint_{S_1}(F\cdot N)dS + \iint_{S_2}(F\cdot N)dS\\ &= \iint_{D_{yz}} (3y,0,z)\cdot\left(1,\frac{8y}{9},0\right)\,dA + \iint_{D_{yz}}(3y,0,z)\cdot(1,0,2)\,dA\\ &= \int_0^3\int_0^{2y^2/9} 3y\,dz\,dy + \int_0^3\int_{2y^2/9}^{2} 3y+2z\,\,dzdy = \frac{183}{5}\end{aligned}$$

b.) **[5 puntos]** Utilizando el teorema de la divergencia determine $I = \iint_S (F\cdot N)dS$ donde N es el vector unitario exterior a Q.

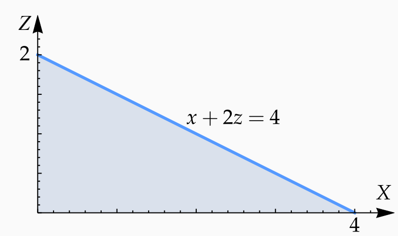
Solución:

$$\begin{aligned}\iint_S (F\cdot N)dS &= \iiint_Q \operatorname{div}F\,dV\\ &= \int_0^3\int_0^{4-4y^2/9}\int_0^{(4-x)/2} 1\,dz\,dx\,dy = \frac{48}{5}\end{aligned}$$



proyectando sobre XZ

$$\begin{aligned}\iint_S (F\cdot N)dS &= \iiint_Q \operatorname{div}F\,dV\\ &= \int_0^4\int_0^{(4-x)/2}\int_0^{\sqrt{-9(x-4)/4}} 1\,dy\,dz\,dx = \frac{48}{5}\end{aligned}$$



8.25 Tercel parcial extraordinario–I–2016

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA Tiempo: 2 horas

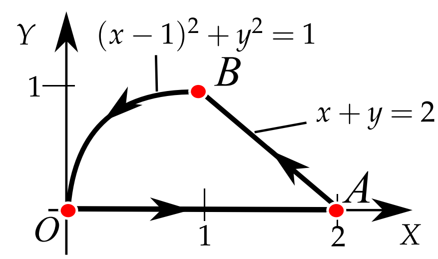
Escuela de Matemática
MA-2104 Cálculo Superior

Valor: 32 puntos

III Examen Parcial (extraordinario)

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta, esto incluye los dibujos necesarios. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimdad. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, y tampoco el uso de hojas sueltas.

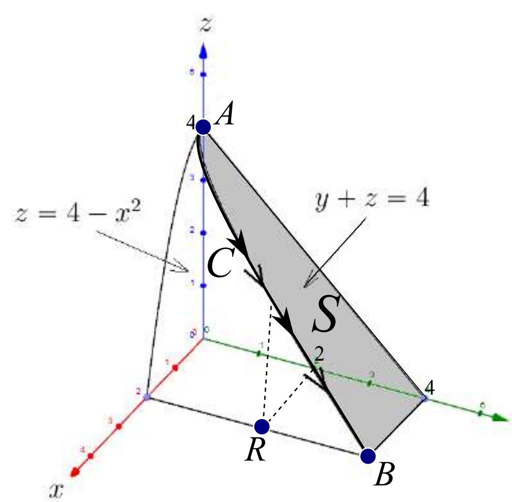
1. Considere la curva C que es la unión de dos segementos de recta y el trazo de círculo que une los puntos B y O. Las partes de la curva C se muestran en la figura a la derecha y los puntos son: $A(2,0)$, $B(1,1)$, y $O(0,0)$:



   a.) **[5 ptos]** Calcule la integral dada por $\int_C (1+x)\,ds$

   b.) **[5 ptos]** Calcule $\int_C F \cdot dr$ para la curva C y F el campo vectorial dado por $F(x,y) = (xy^2)\,\hat{\imath} + (yx^2 - xy)\,\hat{\jmath}$

2. Sea F el campo vectorial dado por $F(x,y,z) = (x+y)\,\hat{\imath} + (x-y)\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$



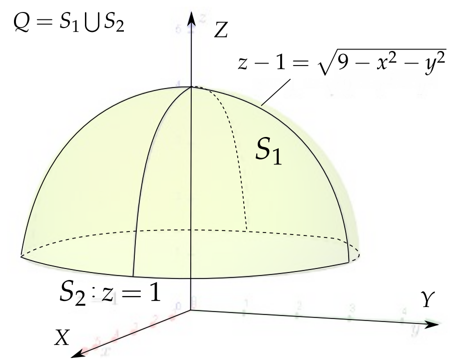
   a.) **[1 pto]** Verifique que F es un campo vectorial conservativo

   b.) **[4 ptos]** Determine una parametrización de la curva C entre A y B mostrada en la figura a la derecha, y con ello determine el trabajo que realiza el campo vectorial F para desplazar una parícula desde el punto A hasta el punto B a lo largo de la curva C. (No cambie la trayectoria. Debe estrictamente parametrizarla)

   c.) **[4 ptos]** Sabiendo que el campo vectorial es conservativo, determine el trabajo que realiza el campo vectorial F para desplazar una particula *desde el punto* $A(0,0,4)$ *hasta el punto* $R(2,2,0)$ utilizando una función potencial.

   d.) **[4 ptos]** La superifice S tiene ecuación $y+z=4$ y esta limitada por el cilindro $z=4-x^2$, tal y como se muestra en la figura a la derecha. Calcule el área de S

3. Considere el sólido Q limitado por $S_1 : z-1 = \sqrt{9-x^2-y^2}$ y el plano $S_2 : z = 1$, tal y como se muestra a la derecha.



   a.) **[4 ptos]** Cálcule la integral de superficie $I = \iint_{S_1} (F \cdot N)dS$ donde F es el campo vectorial dado por $F(x,y,z) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + (z-1)\,\hat{k}$. N es el vector normal exterior a la superficie S_1.

   b.) **[4 ptos]** Utilice el teorema de la divergencia para calcular

$$\iint_S (F \cdot N)dS$$

   donde $S = S_1 \bigcup S_2$, es decir, S es la fronetra del sólido

   c.) **[1 pto]** Justifique sin ningun cálculo, ¿por qué

$$\iint_{S_1} \text{rot}F \cdot N dS = \iint_{S_2} \text{rot}F \cdot N dS \text{ ?}$$

8.26 Exámen de Reposición–I–2016

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA-2104 Cálculo Superior

Tiempo: 2:30 horas
Valor: 30 puntos

Examen de reposición

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta, esto incluye los dibujos necesarios. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimdad. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, y tampoco el uso de hojas sueltas.

1. Considere la cónica C dada por la expresión $C : x^2 - 4y^2 - 2x - 16y - 19 = 0$, determine la forma canónica de la cónica C, realice su gráfica e indique todas sus características. **[5 puntos]**

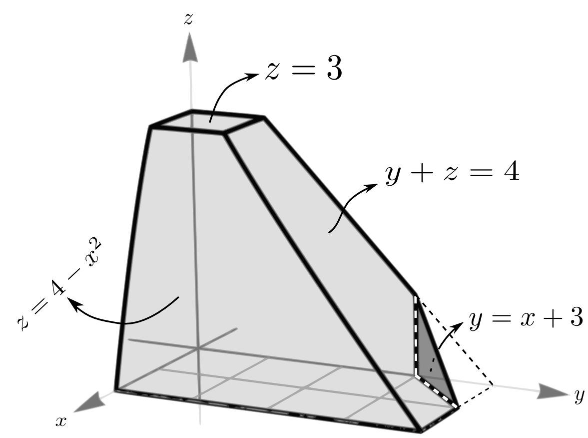
2. Considere las superficies dadas por
   $S_1 : 4 = x^2 + z^2$, $S_2 : x - y + z = 1$, $S_3 : y = 4$, $S_4 : x = 0$, $S_5 : y = 0$, $S_6 : z = 0$.

   a) Dibuje, por separado, las superficies S_1 y S_2 en un sistema de coordenadas rectangulares en tres dimensiones. **[4 puntos]** *b*) Realice el dibujo del sólido limitado por las superficies S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 y S_6 en el primer octante. **[3 puntos]**

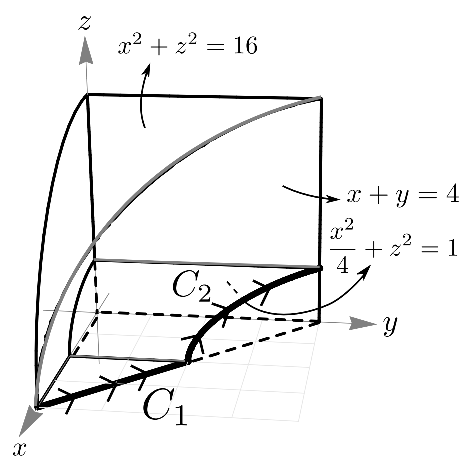
3. Considere la expresión $z + x^2 = f(x + y, z^2) - 3xyz$, donde z se define de forma implícita en término de las variables x y y, además f es una función con segundas derivadas continuas, determine $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$. **[5 puntos]**

4. Determine y clasifique los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^4 + x^2 y + y^4$. **[4 puntos]**

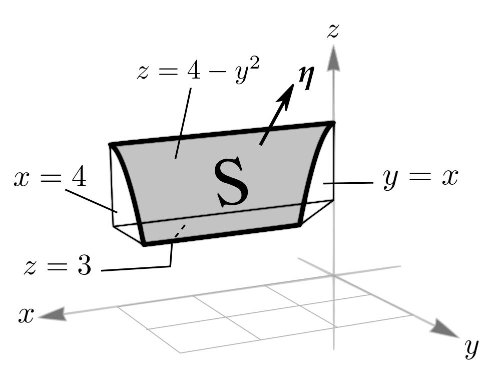
5. Considere el sólido Q limitado por las superficies $S_1 : z = 4 - x^2$, $S_2 : y - x = 3$, $S_3 : z + y = 4$, $S_4 : z = 3$, $S_5 : x = 0$, $S_6 : y = 0$, $S_7 : z = 0$, en el primer octante, tal como se muestra en la figura. Plantee la o las integrales que permiten calcular el volumen del sólido Q. **[4 puntos]**



6. Sea $C = C_1 \cup C_2$ la curva que se muestra en la figura, definida sobre el sólido con superficies $S_1 : x^2 + z^2 = 16$, $S_2 : x + y = 4$, $S_3 : \frac{x^2}{4} + z^2 = 1$, $S_4 : x = 0$, $S_5 : y = 0$, $S_6 : z = 0$. Se define el campo vectorial $F(x, y, z) = (-y, z^2, x)$.
Determine $\displaystyle\int_C F \cdot dr$ **[5 puntos]**



7. Sea S la superficie dada por la expresión $S : z = 4 - y^2$, definida entre las superficies $z = 3$, $y = x$, $x = 4$, $y = 0$ tal como se muestra en la figura. Considere el campo vectorial $F(x, y, z) = (-z, x, y - x)$.
Determine $\displaystyle\iint_S F \cdot \boldsymbol{\eta}\, dS$ **[4 puntos]**



8.27 Exámenes 2017

8.28 Primer parcial–I–2017

Instituto Tecnológico de Costa Rica	Tiempo:2:30 horas
Escuela de Matemática	Valor: 31 puntos
MA-2104 Cálculo Superior	I semestre 2017

I examen parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimdad. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, y tampoco el uso de hojas sueltas.

1. Determine la ecuación canónica de la elipse cuyos vértices son $V_1(3,2)$ y $V_2(3,-8))$. Además, la distancia entre uno de sus focos y V_2 es de 2 unidades lineales.

   (3 puntos)

2. Considere la superficie S de ecuación:

$$\frac{(y-2)^2}{4}+\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(z-3)^2}{16}=1$$

   Represente, en un sistema de coordenadas rectangulares a S y en la figura dibuje las trazas que se obtienen al intersecar S con cada uno de los planos de ecuación: $y=2, x=1, z=3$. (5 puntos)

3. Considere las superficies:

$$S_1:(y-1)^2=-8\,(z-2)\,;\quad S_3:x=4;\quad S_5:y=0;$$
$$S_2:2y+z=8;\quad S_4:x=0;\quad S_6:z=0$$

   a.) Represente las superficies S_1 y S_2 en diferentes sistemas de coordenadas rectangulares. (3 puntos)

   b.) Represente, en el primer octante, el sólido limitado por las superficies: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 y S_6. (3 puntos)

4. Sea $f(x, y) = \dfrac{\ln(y+2x)}{4y-4x^2+4}$. Determine y represente en un sistema de coordenadas el dominio de la función f. (5 puntos)

5. Considere
$$z = x \cdot f\left(\frac{y}{x}, e^{3x} + 3x\right) + h\left(x^2y^2\right)$$
Donde f es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas y h una función con derivadas de segundo orden continuas, calcule:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
(5 puntos)

6. Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en la superficie S, de ecuación $z = (x-1)^2 - (y-3)^2 + 1$. Si se sabe que el plano tangente a S en el punto P, viene dado por:
$$2(x - x_0) + 3(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$
Determine el o los valores de x_0, y_0 y z_0. (3 puntos)

7. Sea $P(-2,-1,1)$ un punto en la superficie S, de ecuación $3x^2 + zy^2 - z^2 = 12$.
Sean A y B dos puntos tales que $A(1,-3)$ y $B(-1,-2)$. Determine la derivada direccional de z en $(-2,-1)$ en la dirección de vector que va desde A hasta B. (4 puntos)

8.29 Solución del Primer parcial–I–2017

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MA-2104 CÁLCULO SUPERIOR

Tiempo:2:30 horas
Valor: 31 puntos
I semestre 2017

I EXAMEN PARCIAL

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimdad. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, y tampoco el uso de hojas sueltas.

1. Determine la ecuación canónica de la elipse cuyos vértices son $V_1(3,2)$ y $V_2(3,-8)$). Además, la distancia entre uno de sus focos y V_2 es de 2 unidades lineales.

(3 puntos)

Solución

Datos de la Elipse

$$V_1\,(3,2) \quad \wedge \quad V_2\,(3,-8) \quad \Rightarrow \begin{cases} PM(V_1,V_2) = C\,(3,-3) \\ d(V_1,V_2) = 10 = 2a \quad \Rightarrow \quad a = 5 \end{cases}$$

$$d(F_?,V_2) = 2ul \quad \Rightarrow \begin{cases} a+c=2 \\ \vee \\ a-c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-3 \quad \times \\ \vee \\ c=3 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} a=5 \\ c=3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 \\ b = \sqrt{25-9} = 4 \end{array}$$

La ecuación canónica de la elipse sería

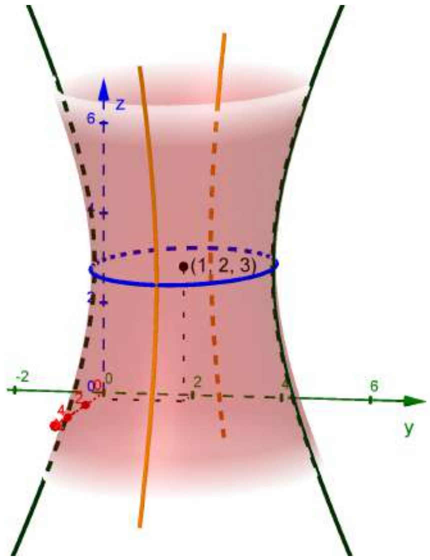
$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$$

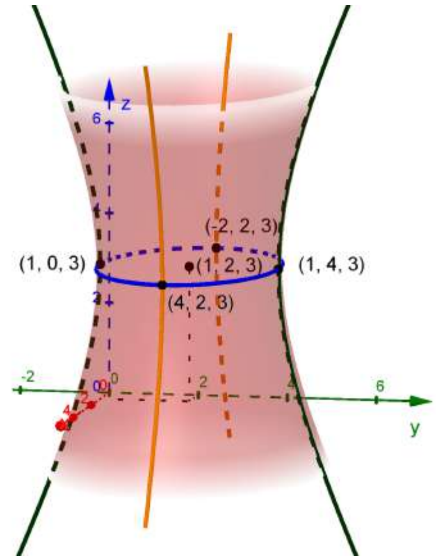
2. Considere la superficie S de ecuación:

$$\frac{(y-2)^2}{4} + \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(z-3)^2}{16} = 1$$

Represente, en un sistema de coordenadas rectangulares a S y en la figura dibuje las trazas que se obtienen al intersecar S con cada uno de los planos de ecuación: $y=2, x=1, z=3$. (5 puntos)

Solución





3. Considere las superficies:

$$\begin{array}{lll} S_1 : (y-1)^2 = -8\,(z-2)\,; & S_3 : x = 4; & S_5 : y = 0; \\ S_2 : 2y + z = 8; & S_4 : x = 0; & S_6 : z = 0 \end{array}$$

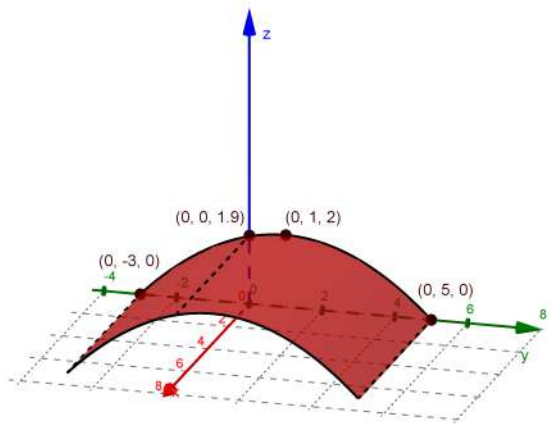
a.) Represente las superficies S_1 y S_2 en diferentes sistemas de coordenadas rectangulares. (3 puntos)

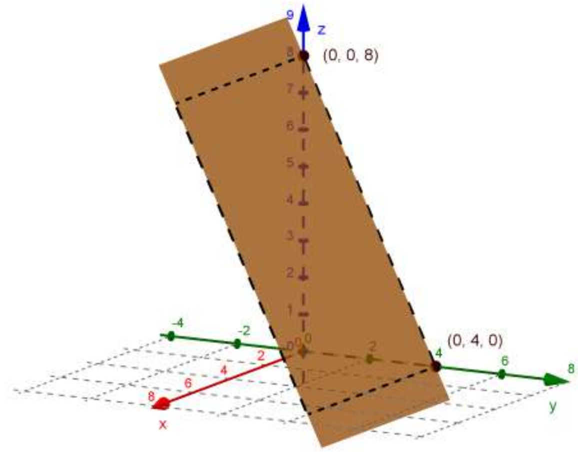
b.) Represente, en el primer octante, el sólido limitado por las superficies: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 y S_6. (3 puntos)

Solución

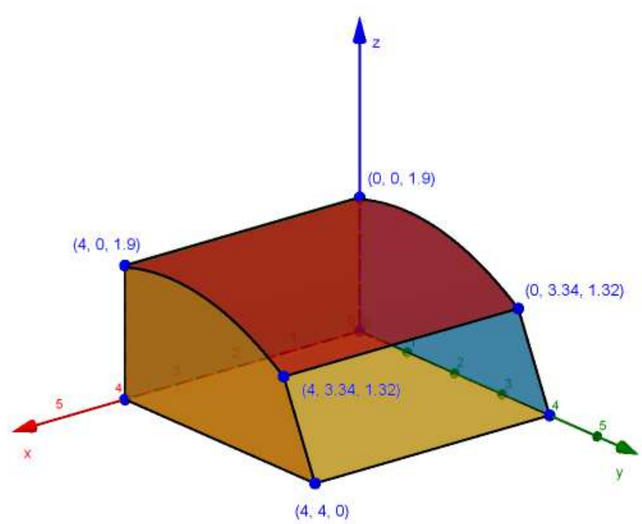
$S_1 : (y-1)^2 = -8\,(z-2)$

$S_2 : 2y + z = 8$





Superficie



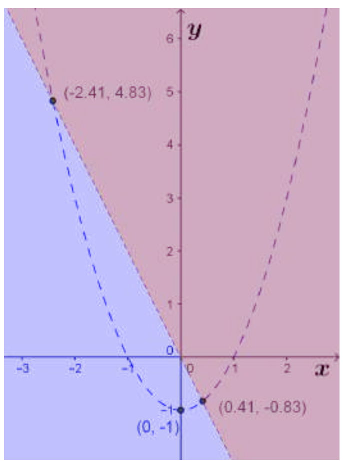
4. Sea

$$f(x,y) = \frac{\ln(y+2x)}{4y-4x^2+4}$$

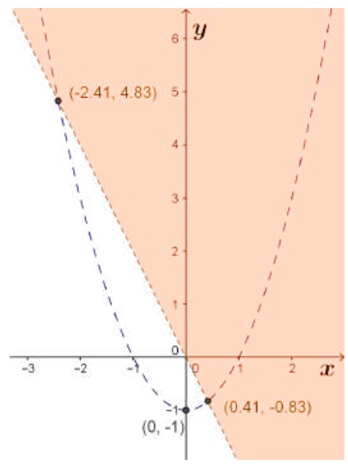
Determine y represente en un sistema de coordenadas el dominio de la función f. (5 puntos)

Solución

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2 \neq 4y+4 \wedge y > -2x\right\}$$



$\Rightarrow$



5. Considere

$$z = x \cdot f\left(\frac{y}{x},\, e^{3x}+3x\right) + h\left(x^2y^2\right)$$

Donde f es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas y h una función con derivadas de segundo orden continuas, calcule:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

(5 puntos)

Solución

Sea $u = \frac{y}{x}$, $v = e^{3x}+3x$ y $w = x^2y^2$. Entonces $z = x \cdot f(u,v) + h(w)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \\
&= x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \\
&= x \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + h'(w) \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\
&= x \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{1}{x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 0 \right) + h'(w) \cdot 2x^2 y \\
&= \frac{\partial f}{\partial u} + h'(w) \cdot 2x^2 y
\end{aligned}
$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial x} \\
&= \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial u} + h'(w) \cdot 2x^2 y \right)}{\partial x} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + h''(w) \frac{\partial w}{\partial x} \cdot 2x^2 y + h'(w) \cdot 4xy \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{-y}{x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \left(3e^{3x} + 3 \right) + h''(w) \cdot 2xy^2 \cdot 2x^2 y + h'(w) \cdot 4xy \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{-y}{x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \left(3e^{3x} + 3 \right) + h''(w) \cdot 4x^3 y^3 + h'(w) \cdot 4xy
\end{aligned}
$$

6. Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en la superficie S, de ecuación $z = (x-1)^2 - (y-3)^2 + 1$. Si se sabe que el plano tangente a S en el punto P, viene dado por:

$$2(x - x_0) + 3(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Determine el o los valores de x_0, y_0 y z_0. (3 puntos)

Solución

Sea $F(x, y, z) = (x-1)^2 - (y-3)^2 + 1 - z = 0$

Entoces, el vector normal a la superficie S en el punto P es: $n|_{(x_0, y_0)} = \alpha(2, 3, -1) ; \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
n|_{(x_0,y_0)} &= \alpha\,(2,3,-1)\\
\left(F_x, F_y, F_z\right)\big|_{(x_0,y_0)} &= (2\alpha, 3\alpha, -\alpha)\\
(2\,(x-1)\,, -2\,(y-3)\,, -1)|_{(x_0,y_0)} &= (2\alpha, 3\alpha, -\alpha)\\
(2\,(x_0-1)\,, -2\,(y_0-3)\,, -1) &= (2\alpha, 3\alpha, -\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2\,(x_0-1) = 2\alpha \\ -2\,(y_0-3) = 3\alpha \\ -1 = -\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Evaluando x y y en la superficie, se obtiene z: $z = \frac{-1}{4}$ $\quad\therefore\quad P\left(2, \frac{3}{2}, \frac{-1}{4}\right)$

7. Sea $P(-2,-1,1)$ un punto en la superficie S, de ecuación $3x^2 + zy^2 - z^2 = 12$.
Sean A y B dos puntos tales que $A(1,-3)$ y $B(-1,-2)$. Determine la derivada direccional de z en $(-2,-1)$ en la dirección de vector que va desde A hasta B. (4 puntos)

Solución

Sea $F\,(x,y,z) = 3x^2 + zy^2 - z^2 - 12 = 0$

Entonces

$$\begin{aligned}
\nabla z &= \left(z_x, z_y\right) = \left(-\frac{F_x}{F_z}, -\frac{F_y}{F_z}\right) = \left(-\frac{6x}{y^2-2z}, -\frac{-2zy}{y^2-2z}\right)\\
\nabla z|_{(-2,-1)} &= \left(-\frac{6x}{y^2-2z}, -\frac{-2zy}{y^2-2z}\right)\bigg|_{(-2,-1)} = (-12,-2)
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
u &= \overrightarrow{AB} = (-2,1)\\
u^* &= \frac{1}{||u||}\,(-2,1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(-2,1) = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)
\end{aligned}$$

Por último

$$D_u z|_{(-2,-1)} = \nabla z|_{(-2,-1)} \cdot u^* = (-12,-2)\cdot\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{24}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}$$

8.30 Segundo parcial–I–2017

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MA-2104 CÁLCULO SUPERIOR

TIEMPO MÁXIMO: 2 HORAS, 30 MINUTOS
PUNTAJE MÁXIMO: 31 PUNTOS
I SEMESTRE 2017

II Examen parcial

Sábado 13 de mayo del 2017

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que debe presentar **todos** los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. No se acogerán reclamos en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. Solo se permite el uso de la calculadora científica no programable. No se permite el uso de celular durante el desarrollo de la prueba, manténgalo apagado o en silencio.

---

1. [**4 puntos**] Determine y clasifique los puntos críticos de la función f de criterio

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 3y^2 - y^3$$

2. [**5 puntos**] Suponga que $T(x,y,z) = 100xy^2z$ es la temperatura en grados en cualquier punto (x,y,z) de la superficie de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 4$, con $x,y,z \geq 0$ (es decir, la parte de la esfera del primer octante). Use multiplicadores de Lagrange para determinar el punto en el que la temperatura es máxima. Calcule además la temperatura máxima.

3. [**5 puntos**] Sea f una función integrable en $\mathbb{R}^2$ y considere:

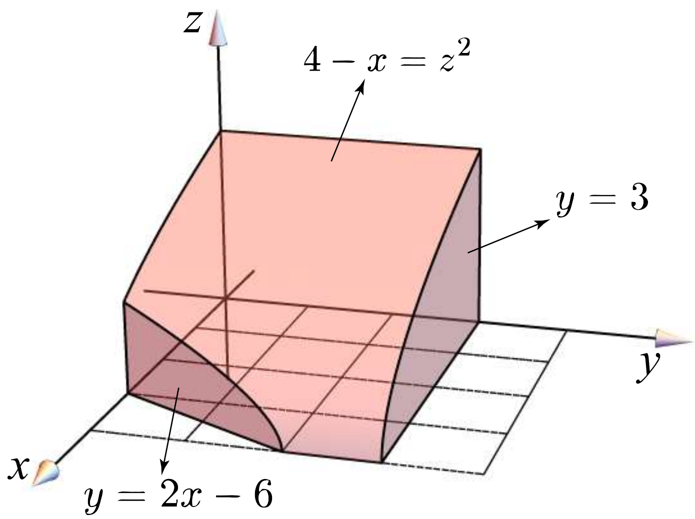
$$I = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{y+1} f(x,y)\,dx\,dy$$

Dibuje la región de integración y plantee a I pero en el orden de integración $dy\,dx$.

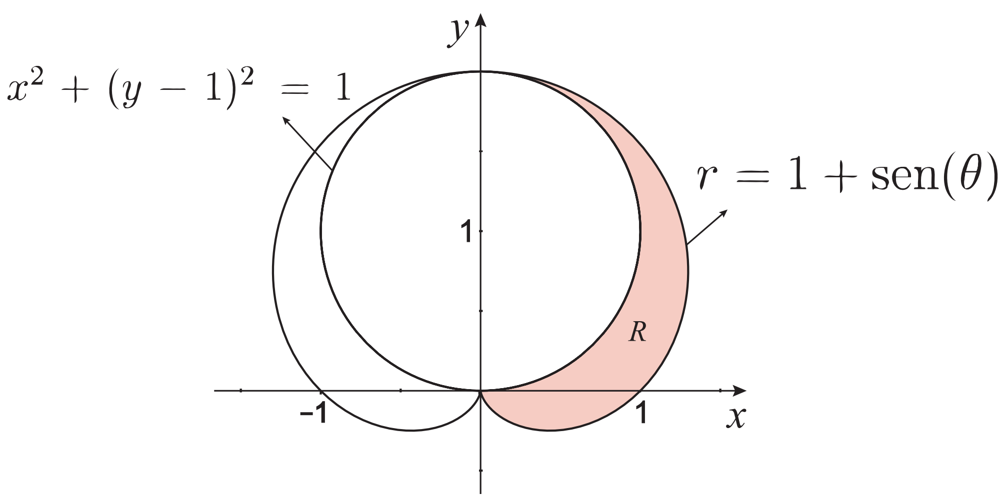
4. Considere el sólido E limitado en el primer octante por las superficies de ecuación $S_1 : 4 - x = z^2$, $S_2 : y = 2x - 6$, y $S_3 : y = 3$, que se muestra en la Figura 1.

   a) [**3 puntos**] Dibuje las proyecciones del sólido E en los planos XZ y YZ. Debe indicar explícitamente las ecuaciones de las curvas que limitan cada proyección.

   b) [**4 puntos**] Calcule el volumen del sólido E (use la proyección en XZ).



5. **[5 puntos]** Considere las curvas de ecuación $x^2 + (y-1)^2 = 1$ y $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta)$, para $\theta \in [0, 2\pi]$, y la región sombreada R que se muestra en la Figura 2. Calcule $\displaystyle\iint_R x\,dA$.

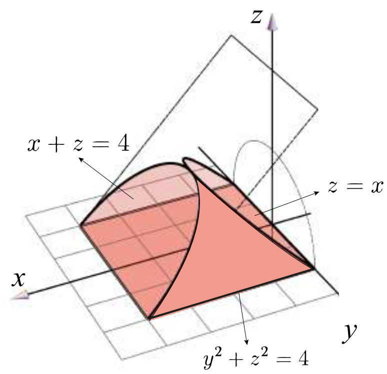


6. **[5 puntos]** Considere la Figura 3 que muestra el sólido W limitado por las superficies:

$$S_1 : y^2 + z^2 = 4, \quad S_2 : x + z = 4, \quad S_3 : z = x \;\; \mathbf{y} \;\; S_4 : z = 0$$

Calcule $\displaystyle\iiint_W 1 \cdot dV$, empleando para ello un cambio de variable a coordenadas cilíndricas.

w



8.31 Solución del Segundo parcial–I–2017

Solución breve: No está editada.

8.32 Segundo parcial – Extraordinario –I–2017

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MA-2104 CÁLCULO SUPERIOR

Tiempo:2:30 horas
Valor: 32 puntos
I semestre 2017

II EXAMEN PARCIAL (EXTRAORDINARIO)

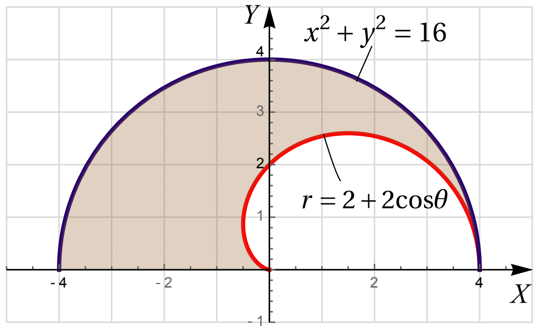
Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimdad. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, y tampoco el uso de hojas sueltas.

1. [**5 Puntos**] Determina los puntos críticos de la función $f(x,y) = 2y^3 + 6yx^2 - 3x^3 - 150y$. Además, clasifíquelos como máximos, mínimos o puntos de silla

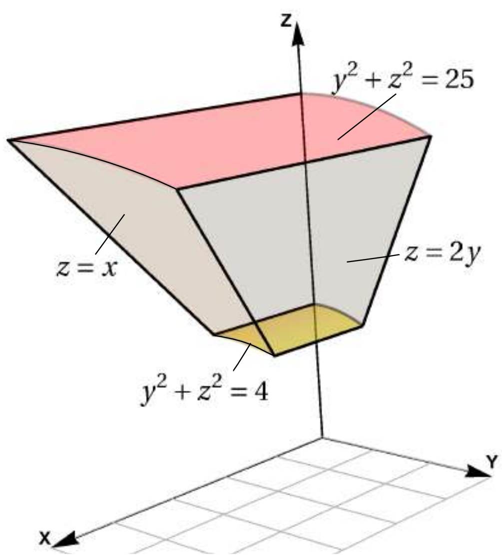
2. [**5 Puntos**] Determine el valor mínimo y máximo de $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeto a que el punto (x,y,z) pertenezca a la esfera $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{7}{2}$.

3. **[5 Puntos]** Determine la región R asociada a la integral doble $\int_{-3}^{3}\int_{y^2-9}^{2-\frac{2}{3}y} g(x,y)\,dx\,dy$ y, luego, exprese dicha integral inviertiendo el orden de integración

4. **[5 Puntos]** Haciendo el cambio a coordenadas polares, plantee la integral $\iint_R y\,dA$, donde R es la región representada en la siguiente figura:

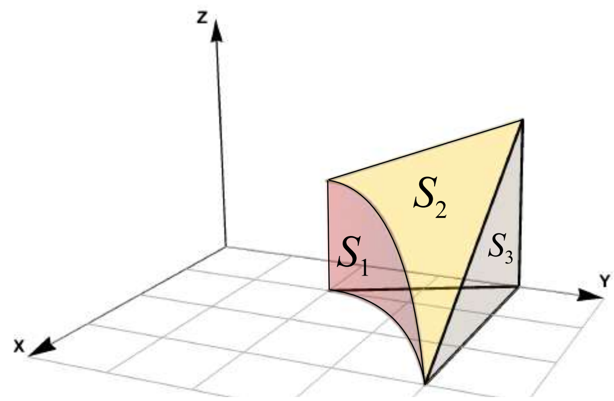


5. **[5 Puntos]** Utilice coordenadas cilíndricas para calculaar el volumen del sólido Q representado en la siguiente figura:



6. **[7 Puntos]** Considere el sólido E, limitado por las siguientes superficies:

$$S_1 : (y-2)^2 = 2(x-1), \quad S_2 : 2x + 3z = 6, \quad S_3 : 2x + y = 4, \quad S_4 : y = 4, \quad S_5 : z = 0,$$



a.) **[3 Puntos]** Dibuje las proyecciones de E sobre los planos XY, XZ.

b.) **[4 Puntos]** Usando la proyección XY, calcule $\iiint_E y\,dV$

8.33 Solución del Segundo parcial – Extarodinario –I–2017

Solución breve: No está editada.

8.34 Tercel parcial–I–2017

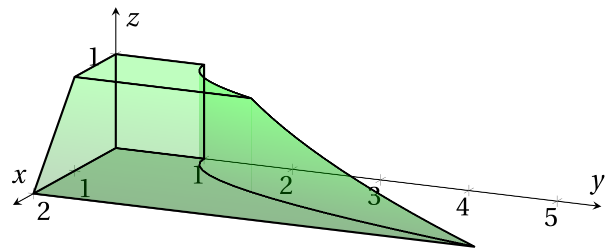
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MA-2104 CÁLCULO SUPERIOR
I SEMESTRE, 2017

Tiempo: 2:30 horas
Valor: 30 puntos

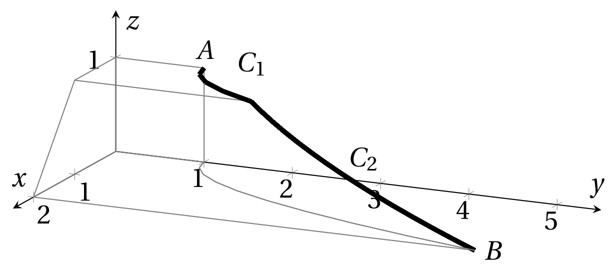
III EXAMEN PARCIAL

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimidad. No se permite el intercambio de instrumentos, el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet ni tampoco el uso de hojas sueltas.

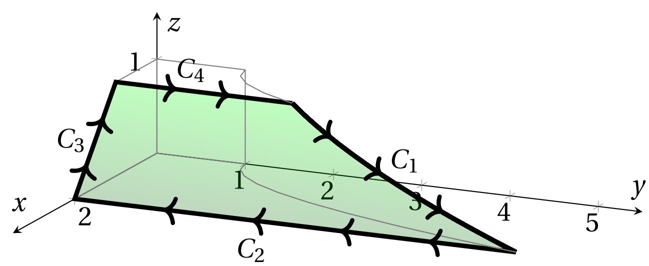
1. Sea $F(x, y, z) = (x + y, 0, -z)$ un campo vectorial y sea Q el sólido limitado por las superficies $S_1 : y = x^2 + 1$, $S_2 : x + z = 2$, $S_3 : z = 1$, $S_4 : x = 0$, $S_5 : y = 0$, $S_6 : z = 0$ tal como se muestra en la figura.



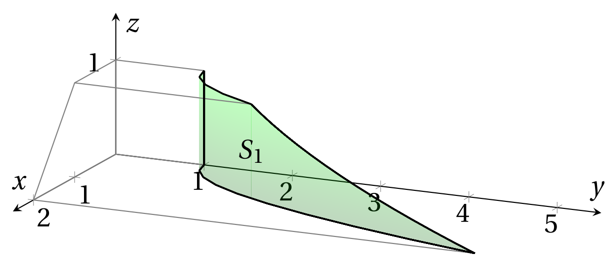
   a) **[5 puntos]** Calcule $\int_C 1 \cdot ds$ donde la curva $C = C_1 \cup C_2$ desde el punto A hasta el punto B que se resalta en la figura.



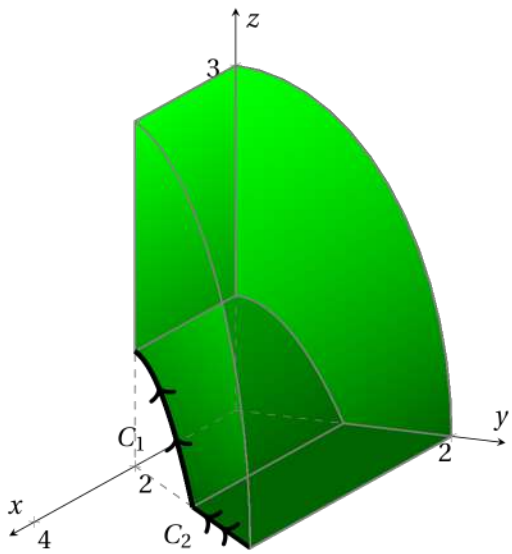
   b) **[5 puntos]** Utilice el Teorema de Stokes para calcular $\int_C F \cdot dr$ donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ es la curva que se muestra en la figura.



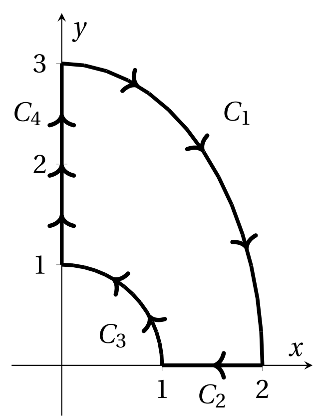
   c) **[5 puntos]** Determine $\iint_S x \, dS$ donde S es la superficie S_1 del sólido que se resalta en la figura.



2. **[5 puntos]** Sea Q el sólido definido por las superficies $S_1 : z = 1 - y^2$, $S_2 : \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$, $S_3 : x - y = 2$, $S_4 : x = 0$, $S_5 : y = 0$, $S_6 : z = 0$. Sea $F(x, y, z) = -x\,\hat{\imath} + z\,\hat{\jmath} + y\,\hat{k}$ un campo vectorial, determine $\int_C F \cdot dr$, donde $C = C_1 \cup C_2$ es la curva que se muestra en la figura.



3. **[5 puntos]** Utilice el Teorema de Green para calcular $\int_C y^2\,dx + xy\,dy$, donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C3 \cup C_4$ es la curva que se muestra en la figura en donde $C_1 : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ y $C_3 : x^2 + y^2 = 1$.



4. **[5 puntos]** Sea $F(x, y, z) = \left(\dfrac{1}{x} + \cos y\right)\hat{\imath} + \left(\dfrac{1}{y} - x \operatorname{sen} y\right)\hat{\jmath} - 2z\hat{k}$ y C una curva que va del punto $(1, 1, 2)$ al punto $(1, 3, 2)$. Verifique que F es un campo vectorial conservativo y calcule $\int_C F \cdot dr$.

8.35 Solución del Tercel parcial–I–2017

Instituto Tecnológico de Costa Rica — Tiempo: 2:30 horas

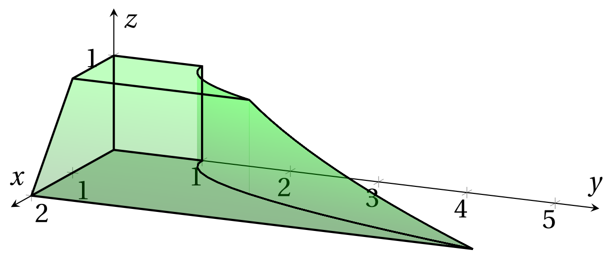
Escuela de Matemática
MA-2104 Cálculo Superior
I semestre, 2017

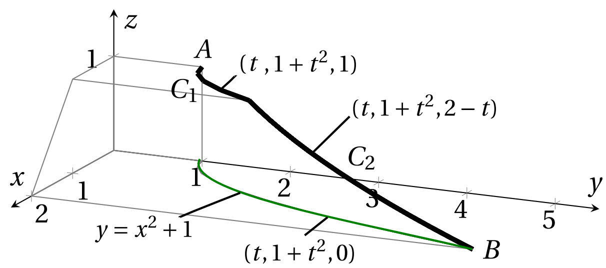
Valor: 30 puntos

Solución sucinta del III Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimidad. No se permite el intercambio de instrumentos, el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet ni tampoco el uso de hojas sueltas.

1. Sea $F(x,y,z) = (x+y, 0, -z)$ un campo vectorial y sea Q el sólido limitado por las superficies $S_1 : y = x^2+1$, $S_2 : x+z = 2$, $S_3 : z = 1$, $S_4 : x = 0$, $S_5 : y = 0$, $S_6 : z = 0$ tal como se muestra en la figura.





a) **[5 puntos]** Calcule $\int_C 1 \cdot ds$ donde la curva $C = C_1 \cup C_2$ desde el punto A hasta el punto B que se resalta en la figura.

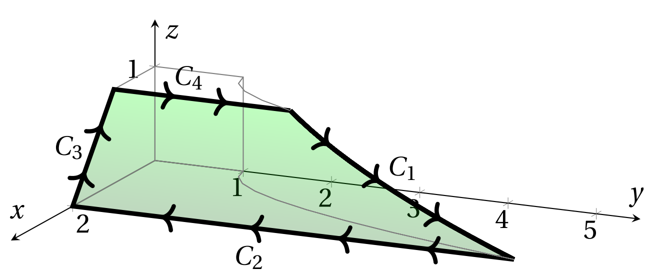
Solución:

$C_1 : r_1(t) = (t, t^2+1, 1), \quad t \in [0,1]$,
$r_1'(t) = (1, 2t, 0)$

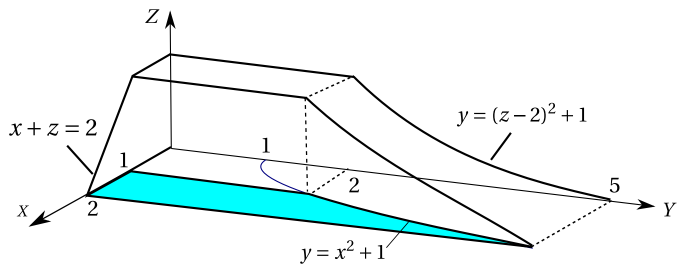
$C_2 : r_2(t) = (t, t^2+1, 2-t), \quad t \in [1,2]$,
$r_2'(t) = (1, 2t, -1)$

$$\begin{aligned}\int_C 1 \cdot ds &= \int_0^1 ||r_1'(t)||dt + \int_1^2 ||r_2'(t)||dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}dt + \int_1^2 \sqrt{2+4t^2}dt \\ &\approx 4,80\end{aligned}$$

b) **[5 puntos]** Utilice el Teorema de Stokes para calcular $\int_C F \cdot dr$ donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ es la curva que se muestra en la figura.



Solución:

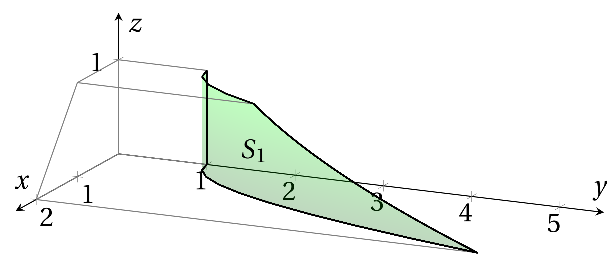


La curva C es borde de la superficie $S: x+z=2$, como se ve en la figura. Vamos a proyectar la superficie S sobre el plano XY. El vector normal adecuado, para que la curva gire contra-reloj alrededor de él, es $\mathbf{F} = -(-z_x, -z_y, 1) = (-1,0,-1)$

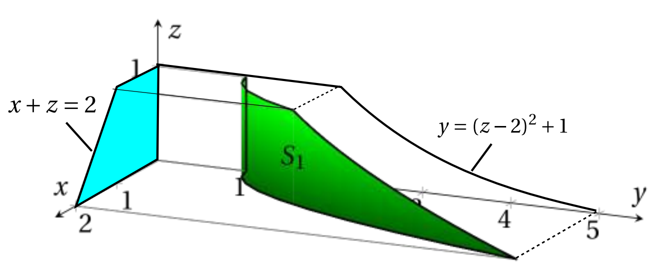
$\text{Rot}\mathbf{F} = (0,0,-1)$.

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \text{Rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS\\ &= \iint_{R_{xy}} (0,0,-1)\cdot(-1,0,-1)\,dA\\ &= \int_1^2\int_0^{x^2+1} 1\cdot dy\,dx \;=\; \frac{10}{3}\end{aligned}$$

c) **[5 puntos]** Determine $\iint_S x\,dS$ donde S es la superficie S_1 del sólido que se resalta en la figura.



Solución:



La superficie S_1 tiene ecuación $S_1: y = x^2+1$.

a.) Si proyectamos la superficie sobre XZ, entonces $S_1: y = x^2+1$,

$$\iint_S x\, dS = \iint_{R_{xz}} x\sqrt{y_x^2 + y_z^2 + 1}\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-z} x\,\sqrt{4x^2+1}\, dx dz \;\approx 2,802$$

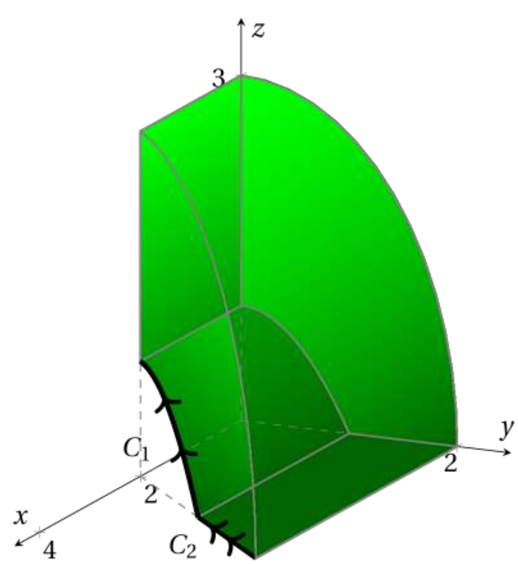
b.) Si proyectamos la superficie sobre YZ, entonces $S_1 : x = \sqrt{y-1}$,

$$\iint_S x\, dS = \iint_{R_{yz}} x\sqrt{x_y^2 + x_z^2 + 1}\, dA$$

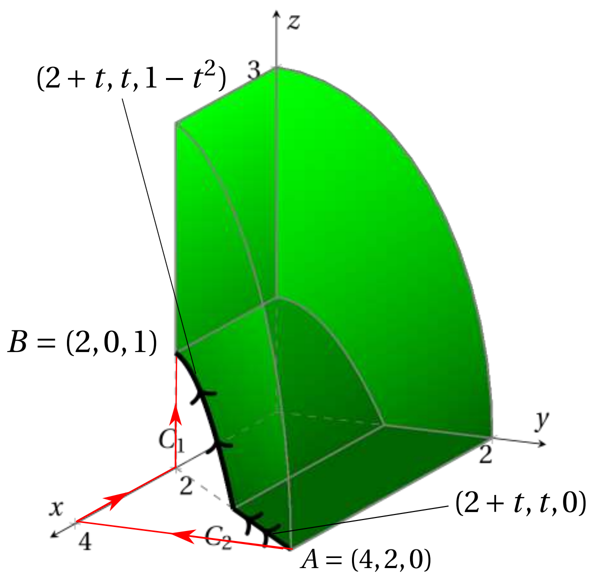
$$= \int_0^1 \int_1^{(z-2)^2+1} \sqrt{y-1}\,\sqrt{\frac{1}{4(y-1)}+1}\, dy dz$$

$$= \int_0^1 \int_1^{(z-2)^2+1} \sqrt{y-3/4}\, dy dz \approx 2,802$$

2. **[5 puntos]** Sea Q el sólido definido por las superficies $S_1 : z = 1-y^2$, $S_2 : \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$, $S_3 : x - y = 2$, $S_4 : x = 0$, $S_5 : y = 0$, $S_6 : z = 0$. Sea $F(x,y,z) = -x\,\hat{\imath} + z\,\hat{\jmath} + y\,\hat{k}$ un campo vectorial, determine $\displaystyle\int_C F\cdot dr$, donde $C = C_1 \cup C_2$ es la curva que se muestra en la figura.



Solución:



a.) Primera manera: Observe que el campo es conservativo: Rot $\mathbf{F}=(0,0,0)$. Entonces podemos usar una función potencial u otro camino C'

- Funcion potencial: $\begin{cases} \phi_x=-x \implies \phi=\int -x\,dx=-\dfrac{x^2}{2}+K_1 \\ \\ \phi_y=z \implies \phi=\int z\,dy=zy+K_2 \\ \\ \phi_z=y \implies \phi=\int y\,dz=zy+K_3 \end{cases} \implies \phi(x,y,z)=-\dfrac{x^2}{2}+yz+K$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot dr=\phi(2,0,1)-\phi(4,2,0) \;=\; 6$$

- Otro camino C' desde $A=(4,2,0)$ hasta $B=(2,0,1)$, con segmentos paralelos a los ejes.

$$\begin{cases} -C_1' & : & r_1(t)=(4,t,0),t\in[0,2] \\ -C_2' & : & r_1(t)=(t,0,0),t\in[2,4] \\ C_3' & : & r_1(t)=(2,0,t),t\in[0,1] \end{cases}$$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot dr=-\int_0^2(-4,0,t)\cdot(0,1,0)\,dt-\int_2^4(-t,0,0)\cdot(1,0,0)\,dt+\int_0^1(-2,t,0)\cdot(0,0,1)\,dt=\int_2^4 t\,dt \;=\; 6$$

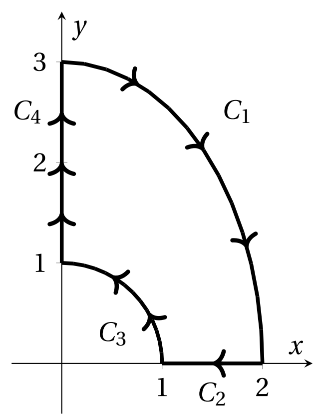
---

b.) Segunda manera: Paramerizando C y usando la definición.

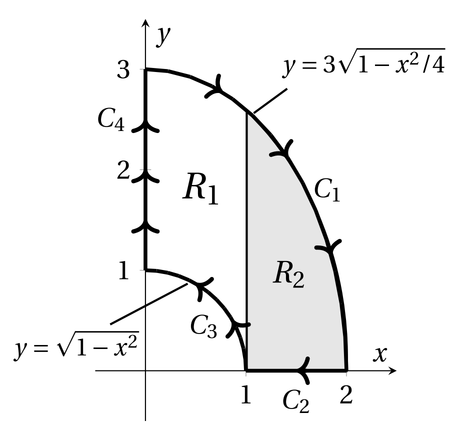
$$\begin{cases} -C_1 & : & r_1(t) = (2+t, t, 1-t^2), t \in [0,1] \quad (\text{con } y = t) \\ -C_2 & : & r_1(t) = (2+t, t, 0), t \in [1,2] \quad (\text{con } y = t) \end{cases}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot dr = -\int_0^1 (-2-t, 1-t^2, t) \cdot (1,1,-2t)\, dt - \int_1^2 (-2-t, 0, t) \cdot (1,1,0)\, dt \;=\; 6$$

3. **[5 puntos]** Utilice el Teorema de Green para calcular $\int_C y^2\,dx + xy\,dy$, donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C3 \cup C_4$ es la curva que se muestra en la figura en donde $C_1 : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ y $C_3 : x^2 + y^2 = 1$.



Solución: Usamos la sugerencia de usar coordenadas rectangulares. Notar que la orientación de la curva es a favor de reloj.



$$\int_C \underbrace{y^2}_{P}\, dx + \underbrace{xy}_{Q}\, dy \;=\; -\iint_{R_{xy}} Q_x - P_y\; dA$$

$$= -\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{3\sqrt{1-x^2/4}} -y\; dy dx \;-\; \int_1^2 \int_0^{3\sqrt{1-x^2/4}} -y\; dy dx \;=\; \frac{17}{3}$$

4. **[5 puntos]** Sea $F(x,y,z) = \left(\frac{1}{x} + \cos y\right)\hat{\imath} + \left(\frac{1}{y} - x \operatorname{sen} y\right)\hat{\jmath} - 2z\hat{k}$ y C una curva que va del punto $(1,1,2)$ al punto $(1,3,2)$. Verifique que F es un campo vectorial conservativo y calcule $\int_C F \cdot dr$.

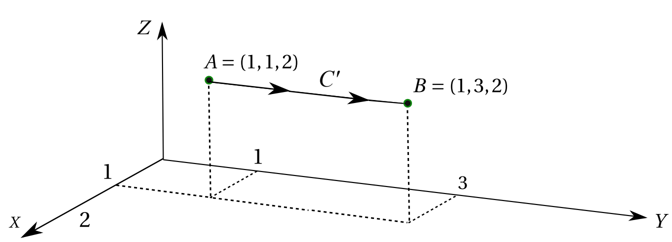
Solución: El campo es conservativo: Rot $\mathbf{F} = (0,0,0)$. Entonces podemos usar una función potencial u otro camino C'

- Funcion potencial: $\begin{cases} \phi_x = \dfrac{1}{x} + \cos y & \Longrightarrow \quad \phi = \displaystyle\int \frac{1}{x} + \cos y\; dx = \ln|x| + x\cos y + K_1 \\[2ex] \phi_y = \dfrac{1}{y} - x \operatorname{sen} y & \Longrightarrow \quad \phi = \displaystyle\int \frac{1}{y} - x \operatorname{sen} y\; dy = \ln|y| + x\cos y + K_2 \\[2ex] \phi_z = -2z & \Longrightarrow \quad \phi = \displaystyle\int -2z\; dz = -z^2 + K_3 \end{cases}$

$\phi(x,y,z) = -z^2 + \ln|x| + \ln|y| + x\cos y + K$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot dr = \phi(1,3,2) - \phi(1,1,2) \;\approx\; -0.43$$

- Otro camino C' desde $A = (1,1,2)$ hasta $B = (1,3,2)$. Podríamos tomar el segmento de recta que inicia en A y finaliza en B.



$$C' \;:\; r(t) = (1,t,2), t \;\in\; [1,3]$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot dr = \int_1^3 (P,Q,R) \cdot (0,1,0)\; dt \;=\; \int_1^3 \frac{1}{t} - 1 \cdot \operatorname{sen} t\; dt \;\approx\; -0,43$$

8.36 Exámenes 2018

8.37 Tercer Parcial – I–2018

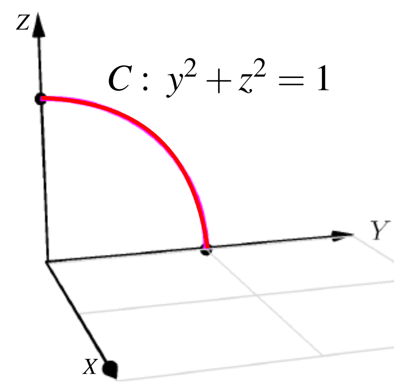
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MA-2104 CÁLCULO SUPERIOR

Tiempo:2:20 horas
Valor: 32 puntos
I semestre 2018

III EXAMEN PARCIAL

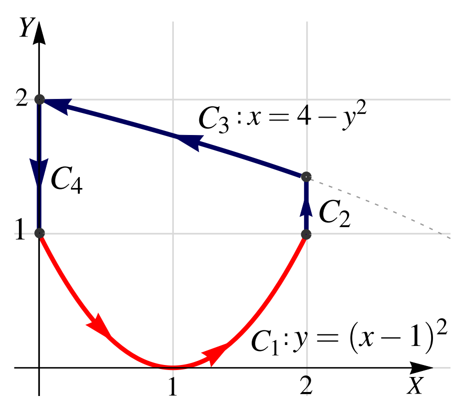
Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimdad. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, y tampoco el uso de hojas sueltas.

images/



1. **[4 Puntos]** Calcule $\int_C (yx+z)\, ds$ si C es la curva de ecuación $y^2+z^2=1$ tal y como se muestra en la figura a la derecha

images/

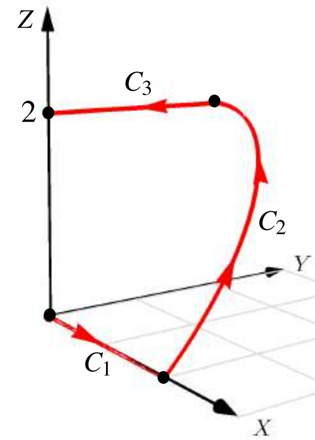


2. **[5 Puntos]**Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ si C es la unión de las curvas C_1, C_2, C_3 y C_4, como se muestra en la figura de la derecha, y

$$F(x,y) = x\ln(y+1)\ \hat{\imath}\ +\ \left(\frac{x^2}{2(y+1)}+x^2\right)\hat{\jmath}$$

images/

3. Si la curva C es la unión de las curvas C_1, C_2 y C_3, como se muestra en la figura de la derecha, y



$$\mathbf{F}(x,y,z) = (e^x \operatorname{sen}(y) - yz)\ \hat{\imath}\ +\ (e^x \cos(y) - xz)\ \hat{\jmath}\ +\ (z - xy)\ \hat{\mathbf{k}}$$

a.) **[2 puntos]** Muestre que $\mathbf{F}$ es conservativo

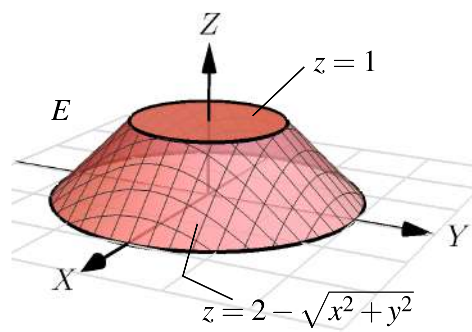
b.) **[4 puntos]** Calcule $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ usando una función potencial

c.) **[2 puntos]** Calcule $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ usando otro camino C'

Continúa atrás ...

images/

4. **[5 puntos]** Calcule $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ si S es la frontera del sólido E limitado por el cono $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ y los planos $z = 1$ y $z = 0$, como se muestra en la figura de la derecha, $\mathbf{N}$ es el vector unitario exterior al sólido E y



$$\mathbf{F}(x,y,z) = (0,\ 0,\ z^2 + x^2 + y^2)$$

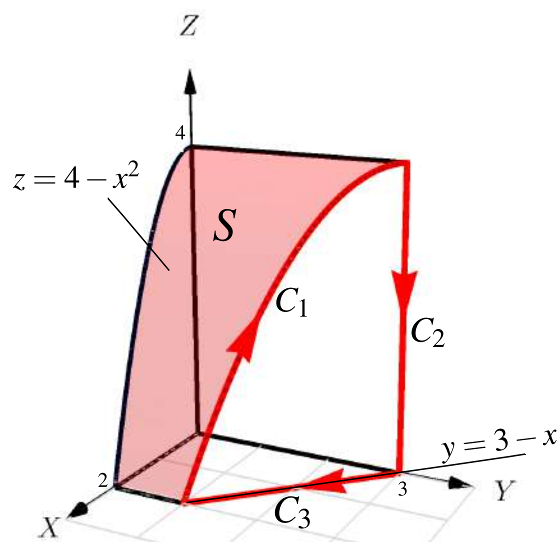
images/

5. a.) **[5 puntos]** Considere la superficie S de ecuación $z = 4 - x^2$ limitada por el plano $y = 3 - x$, en el I octante (como se muestra en la figura a la derecha). Calcule el área de la superficie S

b.) **[5 puntos]** Calcule $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ usando el Teorema de Stokes, sabiendo que $\mathbf{F}$ es el campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x,\ y,\ z)\ =\ x\ \hat{\imath} + yz\ \hat{\jmath} + y^2\ \hat{\mathbf{k}},$$

y $C = C_1 + C_2 + C_3$ es la curva cerrada y orientada, que se muestra a la derecha.



8.38 Solución del Tercer Parcial – I–2018

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA-2104 Cálculo Superior

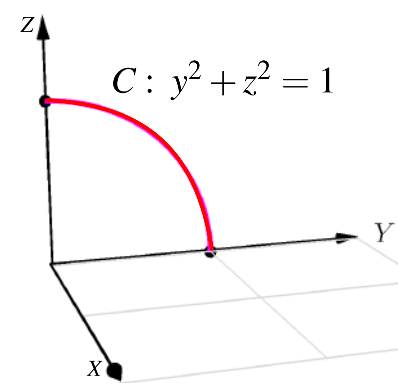
Tiempo:x:xx horas
Valor: xx puntos
I semestre 2018

III examen parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimdad. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, y tampoco el uso de hojas sueltas.

images/

1. **[4 Puntos]** Calcule $\int_C (yx + z)\, ds$ si C es la curva de ecuación $y^2 + z^2 = 1$ tal y como se muestra en la figura a la derecha



Solución: Tres maneras

$y = t$,
$C:\ r(t) = (0, t, \sqrt{1-t^2}),\ t \in [0,1]$

$$r'(t) = \left(0, 1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}\, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\sqrt{\frac{1}{1-t^2}}\, dt \\ &= 1 \quad \text{(No es impropia!)} \end{aligned}$$

$z = t$,
$C:\ r(t) = (0, \sqrt{1-t^2}, t),\ t \in [0,1]$

$$r'(t) = \left(0, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, 1\right)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 t\sqrt{\frac{1}{1-t^2}}\, dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

Se debe calcular como impropia!

$y = \cos t,\ z = \operatorname{sen} t$,
$C:\ r(t) = (0, \cos t, \operatorname{sen} t)$,
$t \in [0, \pi/2]$

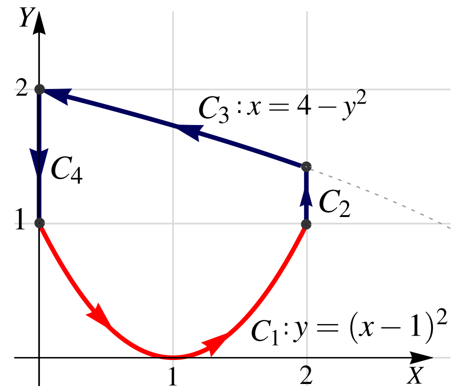
$$r'(t) = (0, -\operatorname{sen} t, \cos t)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t\, \sqrt{1}\, dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

images/

2. **[5 Puntos]**Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ si C es la unión de las curvas C_1, C_2, C_3 y C_4, como se muestra en la figura de la derecha, y

$$\mathbf{F}(x, y) = x \ln(y+1)\ \hat{\imath}\ +\ \left(\frac{x^2}{2(y+1)} + x^2\right)\ \hat{\jmath}$$



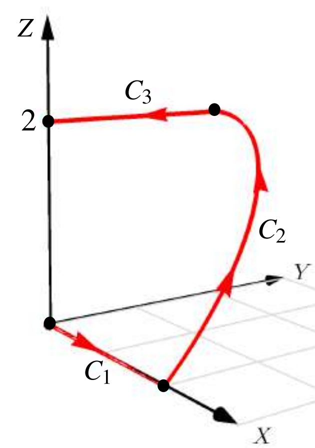
Solución: Usando el teorema de Green,

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_R \left(\frac{x}{y+1} + 2x - \frac{x}{y+1}\right)\, dA \\
&= \int_0^2 \int_{(x-1)^2}^{\sqrt{4-x}} 2x\, dy\, dx \\
&= \int_0^2 2x\left(\sqrt{4-x} - (x-1)^2\right)\, dx \approx 5.17387
\end{aligned}$$

images/

3. Si la curva C es la unión de las curvas C_1, C_2 y C_3, como se muestra en la figura de la derecha, y

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen}(y) - yz)\ \hat{\imath}\ +\ (e^x \cos(y) - xz)\ \hat{\jmath}\ +\ (z - xy)\ \hat{\mathbf{k}}$$



a.) **[2 puntos]** Muestre que $\mathbf{F}$ es conservativo

b.) **[4 puntos]** Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ usando una función potencial

c.) **[2 puntos]** Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ usando otro camino C'

Solución:

a.) $\mathbf{F}$ es conservativo:

$$\begin{array}{rcccl} P_y & = & e^x\cos(y) - z & = & Q_x \\ P_z & = & -y & = & R_x \\ Q_z & = & -x & = & R_y \end{array}$$

b.) Calcule $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ usando una función potencial:

$$\phi_x = e^x\,\mathrm{sen}(y) - yz \quad\Longrightarrow\quad \phi(x,y,z) = \int (e^x\,\mathrm{sen}(y) - yz)\,dx = e^x\,\mathrm{sen}(y) - xyz + K_1(y,z)$$

$$\phi_y = e^x\cos(y) - xz \quad\Longrightarrow\quad \phi(x,y,z) = \int (e^x\cos(y) - xz)\,dy = e^x\,\mathrm{sen}(y) - xyz + K_2(x,z)$$

$$\phi_z = z - xy \quad\Longrightarrow\quad \phi(x,y,z) = \int (z - xy)\,dz = \frac{z^2}{2} - xyz + K_3(x,y)$$

$$\therefore\quad \phi(x,y,z) = e^x\,\mathrm{sen}(y) - xyz + \frac{z^2}{2} + K$$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(0,0,2) - \phi(0,0,0) = 2$$

c.) Calcule $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ usando otro camino C':

Usando el segmento de recta que va de $A = (0,0,0)$ hasta $B = (0,0,2)$ tenemos,

images/ $C' \;:\; r(t) \;=\; (0,0,t),\quad t \;\in\; [0,2]$

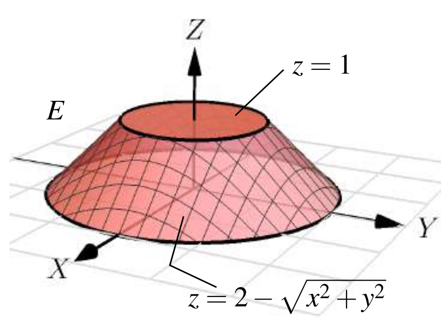
$r'(t) = (0,0,1)$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C F(r(t))\cdot r'(t)\,dt \\ &= \int_0^2 (0,1,t)\cdot(0,0,1)\,dt = 2 \end{aligned}$$

images/

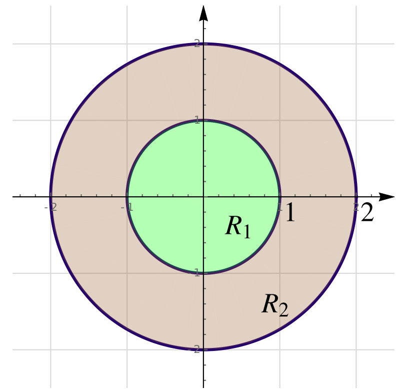
4. **[5 puntos]** Calcule $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ si S es la frontera del sólido E limitado por el cono $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ y los planos $z = 1$ y $z = 0$, como se muestra en la figura de la derecha, $\mathbf{N}$ es el vector unitario exterior al sólido E y

$$F(x,y,z) = (0,\ 0,\ z^2 + x^2 + y^2)$$

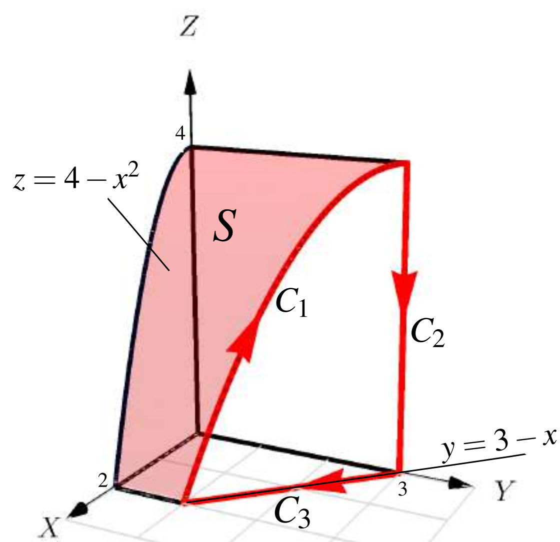


Solución:
images/

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_E \mathbf{Div}\,\mathbf{F}\,dV$$
$$= \iint_{R_2}\int_0^{2-\sqrt{x^2+y^2}} 2z\,dz\,dA + \iint_{R_1}\int_0^1 2z\,dz\,dA$$
$$= \iint_{R_2}(-4\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2+4)\,dA + \iint_{R_1} 1\,dA$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 (-4r+r^2+4)\,r dr\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^1 1\,r dr\,d\theta$$
$$= \frac{5\pi}{6}+\pi \approx 5.75959$$



images/



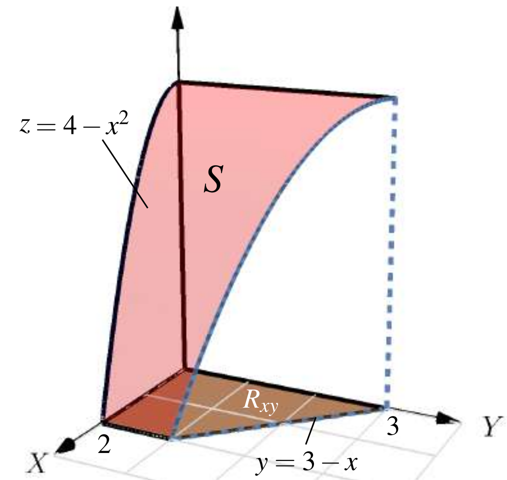
5. a.) **[5 puntos]** Considere la superficie S de ecuación $z = 4 - x^2$ limitada por el plano $y = 3 - x$, en el I octante (como se muestra en la figura a la derecha). Calcule el área de la superficie S

   b.) **[5 puntos]** Calcule $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ usando el Teorema de Stokes, sabiendo que $\mathbf{F}$ es el campo vectorial definido por
$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\hat{\imath} + yz\,\hat{\jmath} + y^2\,\hat{\mathbf{k}},$$
   y $C = C_1 + C_2 + C_3$ es la curva cerrada y orientada, que se muestra a la derecha.

Solución:

images/

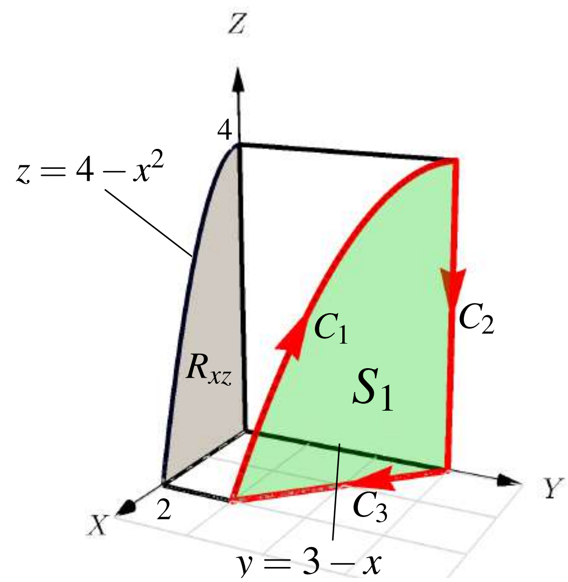
a.) Proyectamos sobre XY. Como $S:\ z=4-x^2$ entonces $dS=\sqrt{1+4x^2+0^2}\,dA$



$$\begin{aligned}\iint_S 1\cdot\, dS &= \iint_{R_{xy}} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dA\\ &= \int_0^2\int_0^{3-x} \sqrt{1+4x^2+0^2}\,dy\,dx\\ &= \int_0^2 (3-x)\sqrt{1+4x^2}\,dx \approx 8.18262\end{aligned}$$

images/

b.) Proyectamos sobre XZ. La curva C es el borde del plano $S_1:\ y=3-x$.



$\operatorname{Rot}\mathbf{F}=(y,0,0)$. Para que la orientación de C sea contrareloj respecto a N_1, escogemos $N_1=(y_x,-1,y_z)=(-1,-1,0)$

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\, \mathbf{dr} &= \iint_{S_1} \operatorname{Rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS\\ &= \iint_{R_{xz}} (y,0,0)\cdot(-1,-1,0)\,dA\\ &= \int_0^2\int_0^{4-x^2} (x-3)\,dz\,dx\\ &= \int_0^2 (x-3)\left(4-x^2\right)\,dx = -12\end{aligned}$$

8.39 Exámenes 2019

8.40 Primer Parcial – I–2019

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA-2104 Cálculo Superior

Tiempo: x:xx horas
Valor: puntos
Marzo , 2019

I EXAMEN PARCIAL

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta, esto incluye los dibujos necesarios. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimdad. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, y tampoco el uso de hojas sueltas.

1. **[5 puntos]** Determine la ecuación canónica y realice la representación gráfica de la hipérbola H si se sabe que la distancia entre sus focos es 8 unidades, sus asíntotas tienen ecuación $x+y=2$ y $y-x=2$ y $(\sqrt{12},0)$ es un punto de la esta cónica.

2. **[5 puntos]** Determine la ecuación canónica de la cónica de ecuación $3x^2-6x+y^2+4y-2=0$ e indique sus principales carcterísticas.

3. Considere el sólido Q limitado por las superficies $S_1:\ 4(x-2)=y^2,\ S_2:\ y+z=4,\ S_3:\ 2x+y=8,$ $S_4:\ z=0,\ S_5:\ y=0$ y $S_6:\ x=0.$

   a.) **[3 puntos]** Dibuje, por separado, las *superficies* $S_1,\ S_2$ y S_3

   b.) **[3 puntos]** Dibuje el sólido Q

4. **[5 puntos]** Considere la superficie $S:\ (z-2)^2-(x-1)^2-y^2=1.$ Dibuje la superficie S usando las trazas que se obtienen al intersecar la superficie S con cada uno de los planos de ecuación $z=0,\ z=4,$ y $x=1.$

5. **[5 puntos]** Sea f una función con primeras derivadas parciales continuas y sea g una función derivable. Si $z=f(x^2,\ g(xy^2)),$ calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}.$

6. **[3 puntos]** Sea $f(x,y)=\cos(x+2y)+\operatorname{sen}(x-Ky).$ Determine una constante $K\in\mathbb{R}$ tal que se cumpla la identidad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=K^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

8.41 Solución del Primer Parcial – I–2019

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MA-2104 CÁLCULO SUPERIOR

Tiempo: x:xx horas
Valor: xx puntos
Marzo bb, 2019

SOLUCIÓN BREVE DEL I EXAMEN PARCIAL

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta, esto incluye los dibujos necesarios. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración que haga dudar de su legitimdad. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, y tampoco el uso de hojas sueltas.

1. **[5 puntos]** Determine la ecuación canónica y realice la representación gráfica de la hipérbola H si se sabe que la distancia entre sus focos es 8 unidades, sus asíntotas tienen ecuación $x + y = 2$ y $y - x = 2$ y $(\sqrt{12}, 0)$ es un punto de la esta cónica.

   Solución:

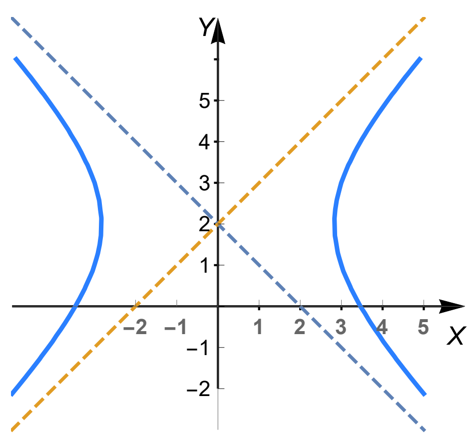
   a.) $2 - x = 2 + x \implies$ centro $(0, 2)$

   b.) Por la posición del punto $(\sqrt{12}, 0)$: Ecuación canónica $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{(y-2)^2}{b^2} = 1$

   c.) Pendiente de la asíntota $y = 2 + x$ es $1 = \dfrac{b}{a} \implies a = b$

   d.) $2c = 8 \implies a^2 + b^2 = 16 \implies 2a^2 = 16 \implies a^2 = 8$

   Ecuación canónica $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{(y-2)^2}{8} = 1$



2. **[5 puntos]** Determine la ecuación canónica de la cónica de ecuación $3x^2 - 6x + y^2 + 4y - 2 = 0$ e indique sus principales características.

   Solución: $3x^2 - 6x + y^2 + 4y - 2 = 0 \implies 3(x-1)^2 + (y+2)^2 - 9 = 0 \implies \dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{(y+2)^2}{9} = 0$

   a.) Centro $(1, -2)$

   b.) $b^2 = 3,\ a^2 = 9 \implies c = \sqrt{6}$

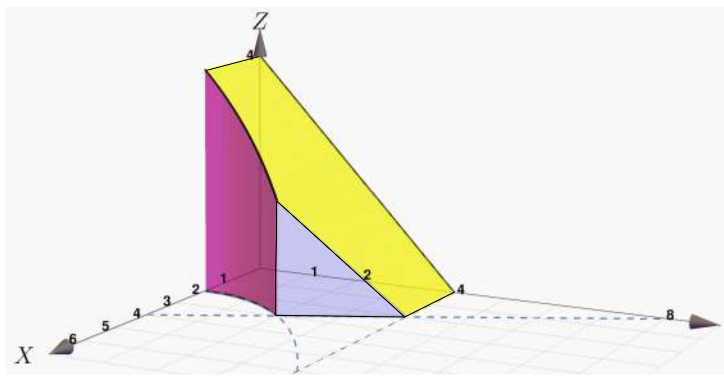
c.) Focos $(1,\ -2 \pm \sqrt{6})$

3. Considere el sólido Q limitado por las superficies $S_1:\ 4(x-2)=y^2,\ S_2:\ y+z=4,\ S_3:\ 2x+y=8,$ $S_4:\ z=0,\ S_5:\ y=0$ y $S_6:\ x=0.$

   a.) **[3 puntos]** Dibuje, por separado, las *superficies* $S_1,\ S_2$ y S_3

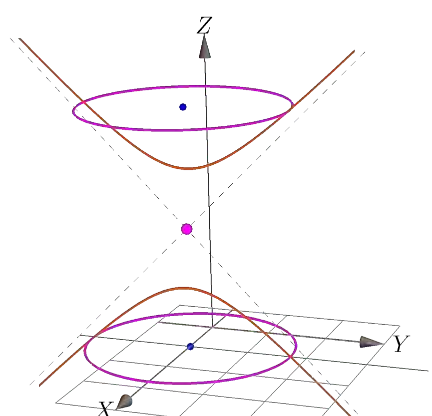
   b.) **[3 puntos]** Dibuje el sólido Q

Solución:



4. **[5 puntos]** Considere la superficie $S:\ (z-2)^2-(x-1)^2-y^2=1.$ Dibuje la superficie S usando las trazas que se obtienen al intersecar la superficie S con cada uno de los planos de ecuación $z=0,\ z=4,$ y $x=1.$

Solución:



5. **[5 puntos]** Sea f una función con primeras derivadas parciales continuas y sea g una función derivable. Si $z = f(x^2,\ g(xy^2))$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución: $z = f(u, w)$ donde $u = x^2,\ v = xy^2$ y $w = g(v)$

a.) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \dfrac{\partial f}{\partial w} \cdot g'(w) \cdot y^2$

b.) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot 0 + \dfrac{\partial f}{\partial w} \cdot g'(w) \cdot 2xy$

6. **[3 puntos]** Sea $f(x, y) = \cos(x + 2y) + \operatorname{sen}(x - Ky)$. Determine una constante $K \in \mathbb{R}$ tal que se cumpla la identidad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = K^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & = & -K^2 \operatorname{sen}(x - Ky) - 4\cos(x + 2y) \\[2ex] K^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & = & -K^2 \operatorname{sen}(x - Ky) - K^2 \cos(x + 2y) \end{array}\right. \implies K = 2$$

8.42 Tercer Parcial – I–2019

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA	Tiempo: 1:40 horas
ESCUELA DE MATEMÁTICA	Valor: 29 puntos
MA-1303: MATEMÁTICA BÁSICA PARA ADMINISTRACIÓN	I SEMESTRE - 2019

III EXAMEN PARCIAL

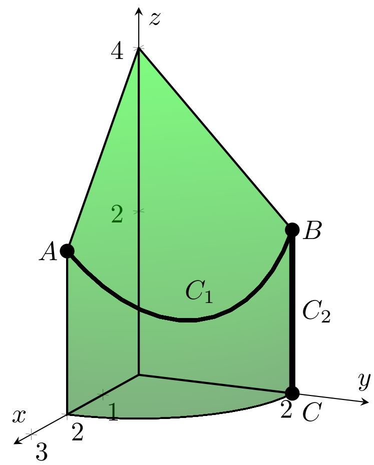
Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Indique el número (y la letra, si la hay) de cada ejercicio que resuelva. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet

1. **[5 puntos]** En la figura adjunta se muestra el sólido limitado por las superficies

   $S_1 : z + x + y = 4,$ $\quad$ $S_4 : y = 0,$
   $S_2 : x^2 + y^2 = 4,$ $\quad$ $S_5 : z = 0,$
   $S_3 : x = 0,$

   donde C está compuesta por las curvas C_1 (que va del punto A al punto B) y C_2 (que va del punto B al punto C).

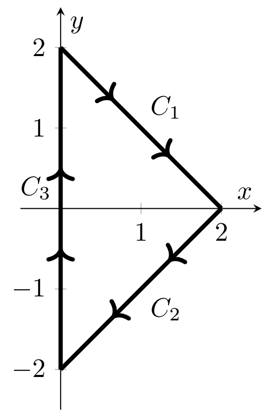
   Calcule $\displaystyle\int_C (x + y + z)\, ds.$



2. En la figura adjunta se muestra la curva C definida por la parábola $x = y^2 - 1$ y el eje y.

   a) **[4 puntos]** Calcule $\displaystyle\int_C xy\ dx + x\ dy$ sin usar el Teorema de Green.

   b) **[4 puntos]** Calcule $\displaystyle\int_C xy\ dx + x\ dy$ utilizando el Teorema de Green.



3. Considere el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (ye^{xy}, xe^{xy} + 2yz, y^2 - 1)$

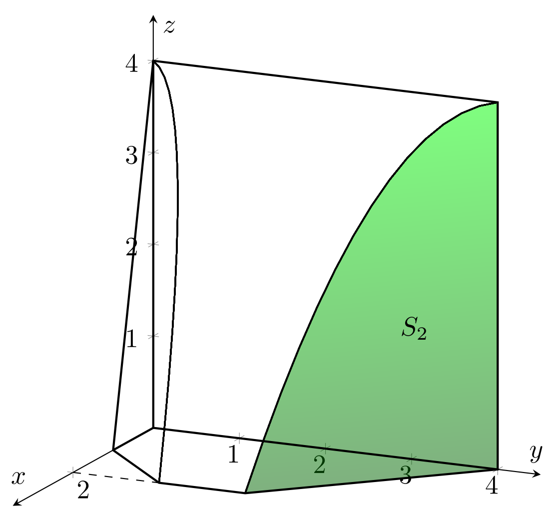
   a) **[2 punto]** Verifique que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo.

   b) **[3 puntos]** Determine $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde C es una curva que va desde el punto $(0, 0, 1)$ hasta el punto $(1, 0, 2)$, para esto utilice la función potencial de $\mathbf{F}$.

4. **[5 puntos]** En la figura adjunta se muestra el sólido definido por las superficies

   $S_1 : z = 4 - x^2,$ $\quad$ $S_4 : x = 0,$
   $S_2 : x + y = 4,$ $\quad$ $S_5 : y = 0,$
   $S_3 : 4x - 4y + z = 4,$ $\quad$ $S_6 : z = 0.$

   Calcule $\displaystyle\iint_{S_2} (z + x^2 - y)\, dS.$



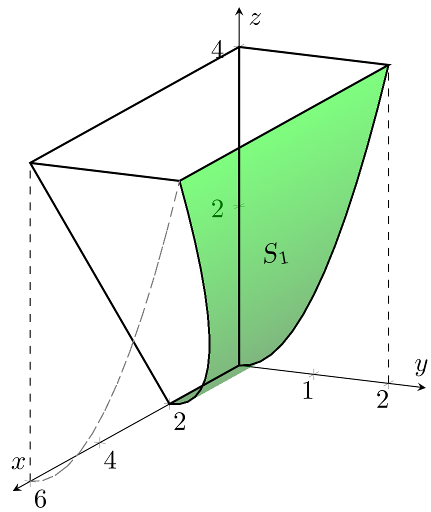
5. **[5 puntos]** En la figura adjunta se muestra el sólido definido por las superficies

$S_1 : z = y^2,$ $\qquad$ $S_4 : y = 0,$
$S_2 : z = x - 2,$ $\qquad$ $S_5 : z = 4.$
$S_3 : x = 0,$

Calcule $\displaystyle\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}\, dS$, donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

con $\boldsymbol{\eta}$ externo unitario al sólido.

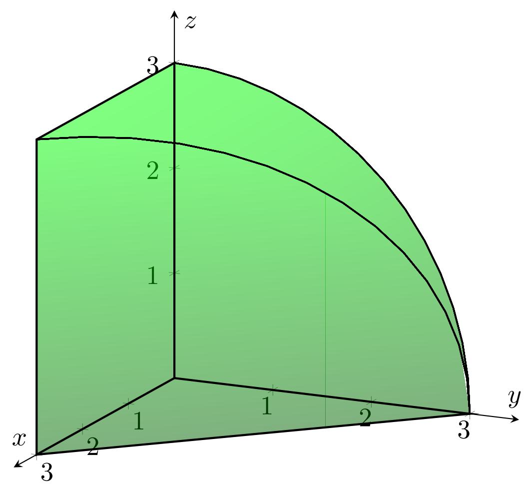


6. **[5 puntos]** En la figura adjunta se muestra el sólido limitado por las superficies

$S_1 : y^2 + z^2 = 9,$ $\qquad$ $S_4 : y = 0,$
$S_2 : x + y = 3,$ $\qquad$ $S_5 : z = 0.$
$S_3 : x = 0,$

Sea $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$ (S está formado por todas las caras del sólido).
Calcule $\displaystyle\iint_{S} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}\, dS$,

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, y^2, xy)$, con $\boldsymbol{\eta}$ el vector normal externo unitario al sólido en cada una de sus caras.



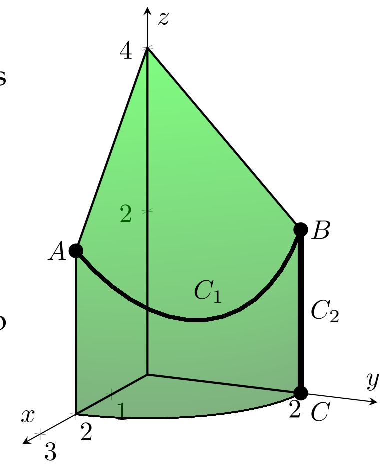
8.43 Solución del Tercer Parcial – I–2019

Instituto Tecnológico de Costa Rica $\qquad$ Tiempo: 2:30 horas
Escuela de Matemática $\qquad$ Valor: 33 puntos
Cálculo Superior $\qquad$ I Semestre - 2019

III Examen Parcial – Solución Breve

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Indique el número (y la letra, si la hay) de cada ejercicio que resuelva. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet

1. **[5 puntos]** En la figura adjunta se muestra el sólido limitado por las superficies



$S_1 : z + x + y = 4$, $\quad$ $S_4 : y = 0$,
$S_2 : x^2 + y^2 = 4$, $\quad$ $S_5 : z = 0$,
$S_3 : x = 0$,

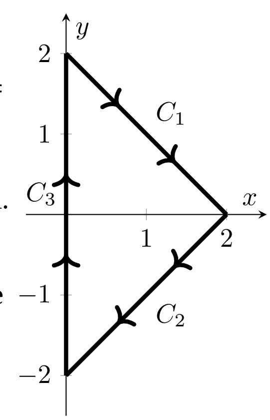
donde C está compuesta por las curvas C_1 (que va del punto A al punto B) y C_2 (que va del punto B al punto C). Calcule $\displaystyle\int_C (x + y + z)\, ds$.

Solución:

$$\begin{cases} C_1 : \; r_1(t) = (2\cos t,\; 2\operatorname{sen} t,\; 4 - 2\cos t - 2\operatorname{sen} t),\; t \in [0, \pi/2] \\ C_2 : \; r_2(t) = (0,\; 2,\; t),\; t \in [0, 2] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_C (x + y + z)\, ds &= \int_{C_1} (x + y + z)\, ds + \int_{C_2} (x + y + z)\, ds \\ &= \int_0^{\pi/2} (2\cos t + 2\operatorname{sen} t + 4 - 2\cos t - 2\operatorname{sen} t)\, \sqrt{8 - 8\operatorname{sen}(t)\cos(t)}\, dt + \int_0^2 (2 + t)\, \sqrt{1}\, dt \\ &\approx 14.5822 + 6 \approx 20.58 \end{aligned}$$

2. En la figura adjunta se muestra la curva C definida por la parábola $x = y^2 - 1$ y el eje y.



   a) **[4 puntos]** Calcule $\displaystyle\int_C xy\, dx + x\, dy$ sin usar el Teorema de Green.

   b) **[4 puntos]** Calcule $\displaystyle\int_C xy\; dx + x\; dy$ utilizando el Teorema de Green.

Solución: $F(x, y) = (xy,\; x)$ y $\begin{cases} -C_1 : \; r_1(t) = (t^2 - 1, t),\; t \in [-1, 1] \\ C_2 : \; r_2(t) = (0,\; t),\; t \in [-1, 1] \end{cases}$

a.)

$$\begin{aligned}
\int_C xy\ dx + x\ dy &= \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\\
&= -\int_{-1}^{1} (t^3-t, t^2-1)\cdot(2t,1)\,dt + \int_{-1}^{1}(0,0)\cdot(0,1)\,dt\\
&= \frac{28}{15}+0
\end{aligned}$$

b.)

$$\begin{aligned}
\int_C xy\ dx + x\ dy &= \iint_R (1-x)\,dA\\
&= \int_{-1}^{1}\int_{y^2-1}^{0}(1-x)\,dx\,dy\\
&= \frac{28}{15}
\end{aligned}$$

3. Considere el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (ye^{xy}, xe^{xy}+2yz, y^2-1)$

   a) **[2 punto]** Verifique que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo.

   b) **[3 puntos]** Determine $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde C es una curva que va desde el punto $(0,0,1)$ hasta el punto $(1,0,2)$, para esto utilice la función potencial de $\mathbf{F}$.

Solución:

a.) $\text{Rot}\mathbf{F} = (2y-2y,\ 0-0,\ xye^{xy}+e^{xy}-(xye^{xy}+e^{xy})) = (0,0,0)$

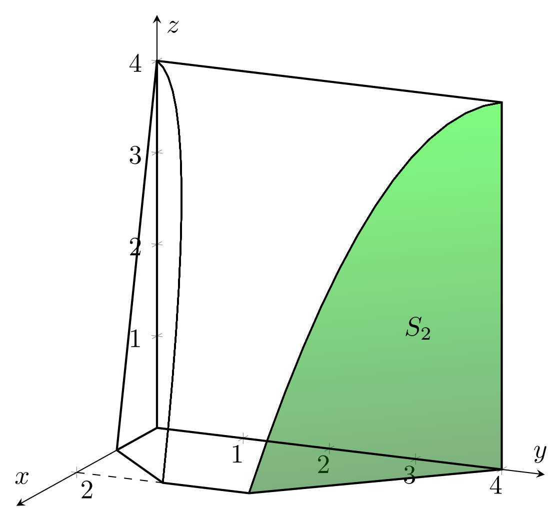
b.) Una función potencial es $\phi(x,y,z) = e^{xy}+y^2z-z+K$.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(B)-\phi(A) = -1$$

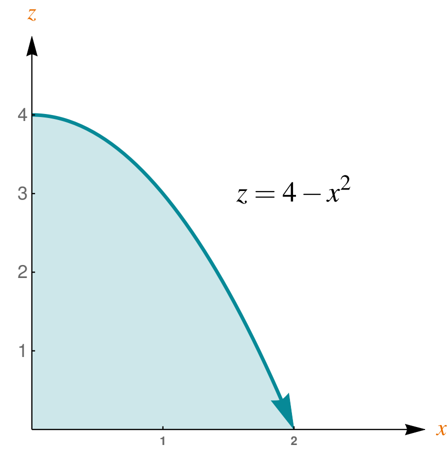
4. **[5 puntos]** En la figura adjunta se muestra el sólido definido por las superficies

$S_1: z = 4-x^2,$	$S_4: x = 0,$
$S_2: x+y=4,$	$S_5: y=0,$
$S_3: 4x-4y+z=4,$	$S_6: z=0.$

Calcule $\iint_{S_2}(z+x^2-y)\ dS.$



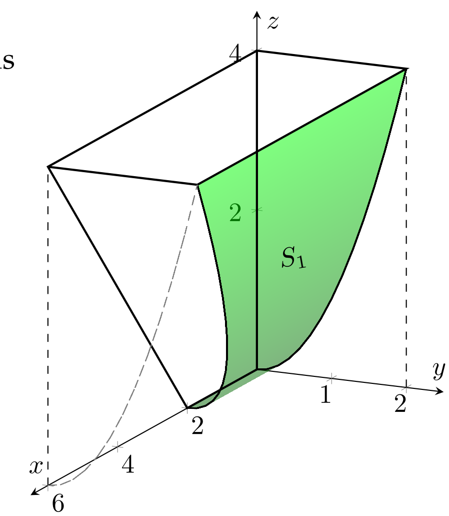
Solución: Proyectando sobre XZ. $S_2 : y = 4 - x$



$$\iint_{S_2} (z + x^2 - y)\, dS \;=\; \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \left(z + x^2 - (4 - x)\right) \sqrt{2}\, dz\, dx$$

$$= -\frac{68\sqrt{2}}{15} \approx -6.4111$$

5. **[5 puntos]** En la figura adjunta se muestra el sólido definido por las superficies



$S_1 : z = y^2,$ $\quad S_4 : y = 0,$

$S_2 : z = x - 2,$ $\quad S_5 : z = 4.$

$S_3 : x = 0,$

Calcule $\displaystyle\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}\; dS$, donde

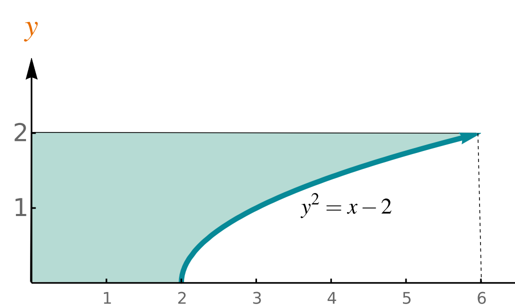
$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

con $\boldsymbol{\eta}$ externo unitario al sólido.

Solución: Dos maneras, proyectando sobre XY y sobre XZ

Primera manera: Proyectando sobre XY

Solución:



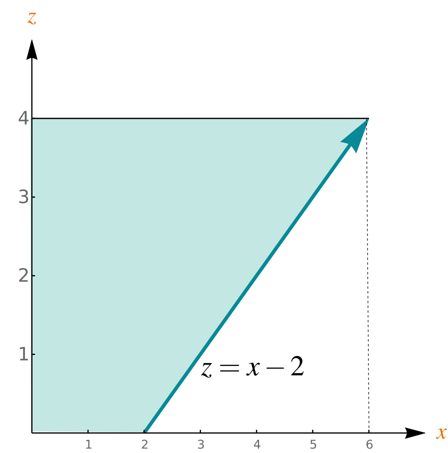
$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}\; dS \;=\; \iint_{D_{xy}} \left(y, -y^2, x\right) \cdot \left(0, 2y, -1\right)\; dA$$

$$= \int_0^2 \int_0^{y^2+2} \left(-x - 2y^3\right)\; dx\, dy$$

$$= -\frac{748}{15} \approx -49.8667$$

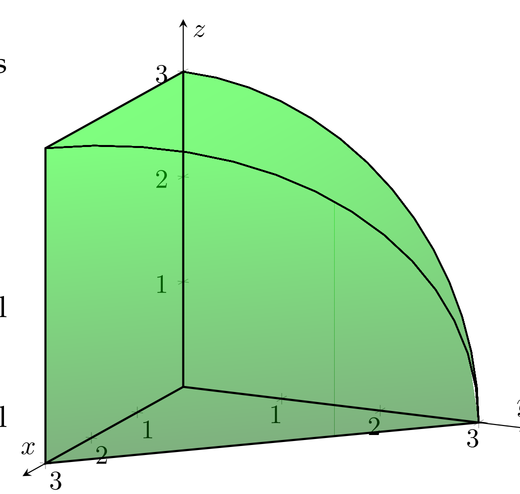
Segunda manera: Proyectando sobre XZ

Solución:



$$\begin{aligned}\iint\limits_{S_1} \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}\ dS &= \iint\limits_{D_{xz}} \left(y,-z,x\right)\cdot\left(0,1,-\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)\ dA\\ &= \int_0^4\int_0^{z+2}\left(-\frac{x}{2\sqrt{z}}-z\right)\ dx\ dz\\ &= -\frac{748}{15}\approx -49.8667\end{aligned}$$

6. **[5 puntos]** En la figura adjunta se muestra el sólido E limitado por las superficies



$S_1 : y^2+z^2=9,$ $\qquad$ $S_4 : y=0,$

$S_2 : x+y=3,$ $\qquad$ $S_5 : z=0.$

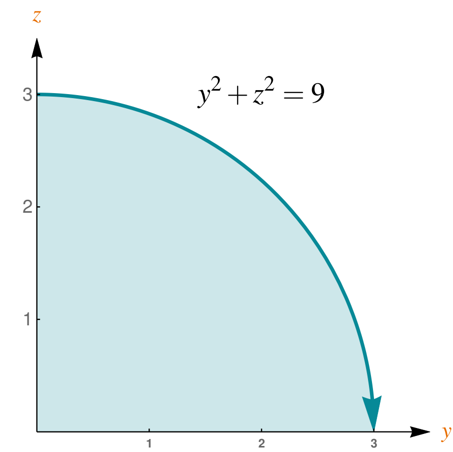
$S_3 : x=0,$

Sea $S = S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5$ (S está formado por todas las caras del sólido). Calcule $\displaystyle\iint\limits_{S}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}\ dS,$

donde $\mathbf{F}(x,y,z)=(z^2,y^2,xy)$, con $\boldsymbol{\eta}$ el vector normal externo unitario al sólido en cada una de sus caras.

Solución: Usamos el teorema de la divergencia, proyectando sobre YZ.
Div$\mathbf{F} = 0 + 2y + 0$

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\eta\, dS &= \iiint_E 2y\; dV \\
&= \iint_{D_{yz}} \left[\int_0^{3-y} 2y\, dx\right] dA \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^3 \left[\int_0^{3-r\cos t} 2r\cos t\, dx\right] r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^3 \left[r\left(6r\cos(t) - 2(r\cos(t))^2\right)\right] dr\, d\theta \\
&= 54 - \frac{81\pi}{8} \approx 22.1914
\end{aligned}$$



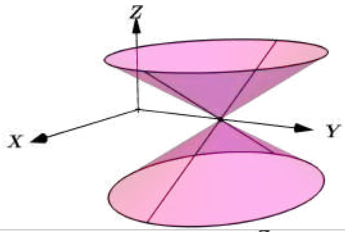
8.44 Primer Parcial – II–2019

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MA-2104: CÁLCULO SUPERIOR - I PARCIAL

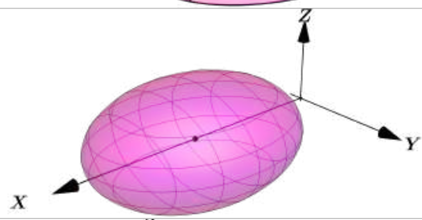
Tiempo: 2:20 horas
Valor: 29 puntos
II SEMESTRE - 2019

1. [**6 Puntos**] Asocie cada una de las figuras con la respectiva ecuación de la superficie que representa. Escriba en su cuaderno de examen el número de la figura y la letra de la ecuación con la que va asociada. Para cada figura solo hay una posible ecuación en el lado derecho.

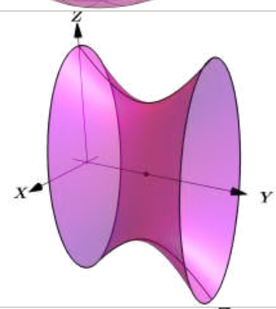
1.



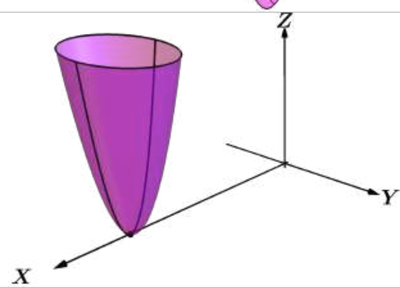
2.



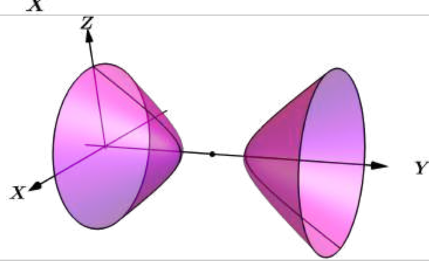
3.



4.



5.



A. ( ) $\dfrac{(x-3)^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{z^2}{4}$

B. ( ) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{(z-5)^2}{4} = 1$

C. ( ) $\dfrac{(x-5)^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$

D. ( ) $-x^2 - z^2 + \dfrac{(y-5)^2}{2} = 1$

E. ( ) $\dfrac{z^2}{16} - \dfrac{(y-4)^2}{9} + \dfrac{x^2}{4} = 1$

F. ( ) $\dfrac{z^2}{16} - \dfrac{(x-5)^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

G. ( ) $\dfrac{(x-5)^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{z}{16}$

H. ( ) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = \dfrac{z^2}{4}$

I. ( ) $\dfrac{z^2}{16} - \dfrac{(y-5)^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

J. ( ) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{z-5}{16}$

K. ( ) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{(y-4)^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$

L. ( ) $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

El examen sigue atrás...

2. [**5 Puntos**] Determine la ecuación canónica de la hipérbola H, la cual contiene el punto $(0,4)$ y cuyos vértices tienen coordenadas $(2,2)$, $(2,-2)$. Indique además las ecuaciones de sus asíntotas, las coordenadas del centro y los focos y realice su representación gráfica.

3. [**4 Puntos**] Determine la ecuación canónica de la cónica de ecuación $x^2 + 2y^2 - 4y - 2x = -2$. Además indique el nombre de la cónica y realice su representación gráfica indicando las coordenadas de los

focos, centro y vértices.

4. Considere las Superficies $S_1 : x - 1 = y^2$, $S_2 : y + z = 2$, $S_3 : x = 0$, $S_4 : y = 0$, y $S_5 : z = 0$.

   a) [**2 Puntos**] Dibuje por separado la superficie S_1 y la superficie S_2

   b) [**3 Puntos**] Dibuje el sólido limitado por las superficies S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5

5. Sean F una función diferenciable y f una función derivable. La ecuación $F[f(xy),\ f(yz)] = 0$ define a z como una función implícita de x y y

   a) [**2 Puntos**] Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

   b) [**2 Puntos**] Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

6. [**2 Puntos**] Suponga que h es una función con segundas derivadas parciales continuas y la función g se define como $g(x, y) = \dfrac{1}{x} \cdot h(\pi x + \sqrt{2},\ x^2 + y^3)$. Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}$

7. [**3 Puntos**] Si $f(x, y) = \dfrac{\cos(7x - y)}{x}$, determine una constante K de tal manera que se cumpla la identidad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 7 \cdot f(x, y) + \frac{K}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

8.45 Solución del primer Parcial – II–2019

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MA-2104: CÁLCULO SUPERIOR

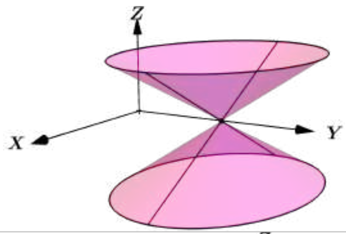
Tiempo: 2:20 horas
Valor: 29 puntos
II SEMESTRE - 2019

I PARCIAL – SOLUCIÓN BREVE

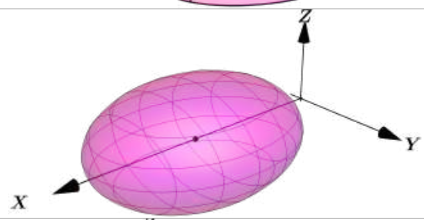
Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Indique el número (y la letra, si la hay) de cada ejercicio que resuelva. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet.

1. [**6 Puntos**] Asocie cada una de las figuras con la respectiva ecuación de la superficie que representa. Escriba en su cuaderno de examen el número de la figura y la letra de la ecuación con la que va asociada. Para cada figura solo hay una posible ecuación en el lado derecho.

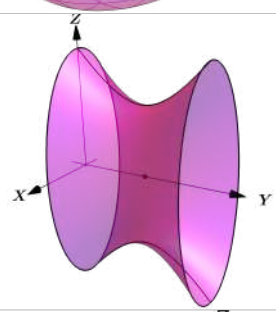
Solución:
La

1. 

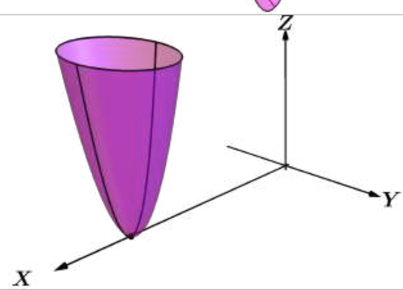
[**H.**] $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = \dfrac{z^2}{4}$

2. 

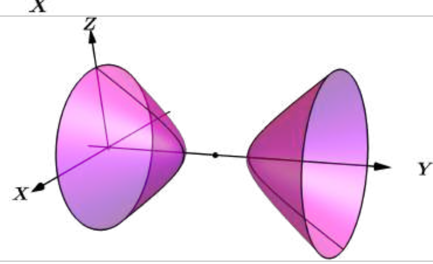
[**C.**] $\dfrac{(x-5)^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$

3. 

[**E.**] $\dfrac{z^2}{16} - \dfrac{(y-4)^2}{9} + \dfrac{x^2}{4} = 1$

4. 

[**G.**] $\dfrac{(x-5)^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{z}{16}$

5. 

[**D.**] $-x^2 - z^2 + \dfrac{(y-5)^2}{2} = 1$

A. ( ) $\dfrac{(x-3)^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{z^2}{4}$

B. ( ) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{(z-5)^2}{4} = 1$

C. (**2**) $\dfrac{(x-5)^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$

D. (**5**) $-x^2 - z^2 + \dfrac{(y-5)^2}{2} = 1$

E. (**3**) $\dfrac{z^2}{16} - \dfrac{(y-4)^2}{9} + \dfrac{x^2}{4} = 1$

F. ( ) $\dfrac{z^2}{16} - \dfrac{(x-5)^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

G. (**4**) $\dfrac{(x-5)^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{z}{16}$

H. (**1**) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = \dfrac{z^2}{4}$

I. ( ) $\dfrac{z^2}{16} - \dfrac{(y-5)^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

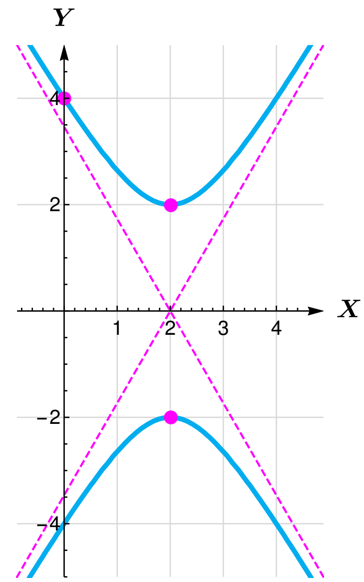
J. ( ) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{z-5}{16}$

K. ( ) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{(y-4)^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$

L. ( ) $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

2. [**5 Puntos**] Determine la ecuación canónica de la hipérbola H, la cual contiene el punto $(0,4)$ y cuyos vértices tienen coordenadas $(2,2)$, $(2,-2)$. Indique además las ecuaciones de sus asíntotas, las coordenadas del centro y los focos y realice su representación gráfica.

Solución: De acuerdo a la posición de los vértices el centro es $(2,0)$, $a = 2$ y la ecuación es $\frac{y^2}{2^2} - \frac{(x-2)^2}{b^2} = 1$.



Ahora, para obtener b sustituimos el punto $(0,4)$ en la ecuación:

$\frac{4^2}{2^2} - \frac{(0-2)^2}{b^2} = 1 \implies b^2 = \frac{4}{3}$. $\therefore$ Ec. Canónica: $\frac{y^2}{2^2} - \frac{(x-2)^2}{4/3} = 1$.

a.) Asíntotas: $y = 0 \pm \frac{2}{\sqrt{4/3}}(x-2) = \pm\sqrt{3}(x-2)$

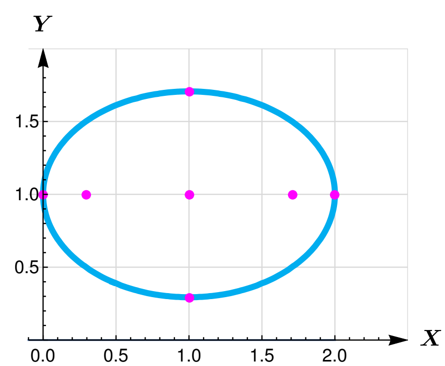
b.) Como $c = \sqrt{4 + \frac{4}{3}} \implies$ los focos son $\left(2,\ 0 \pm \sqrt{4+\frac{4}{3}}\right)$

c.) Solo hay intersección con el eje Y: $y = \pm 4$

3. [**4 Puntos**] Determine la ecuación canónica de la cónica de ecuación $x^2 + 2y^2 - 4y - 2x = -2$. Además indique el nombre de la cónica y realice su representación gráfica indicando las coordenadas de los focos, centro y vértices.

Solución: Completando cuadrados obtenemos una elipse de ecuación

$$(x-1)^2 + \frac{(y-1)^2}{1/2} = 1$$



Como $c = \sqrt{1 - \frac{1}{2}}$ entonces los focos son $\left(1 \pm \sqrt{1/2},\ 1\right)$.

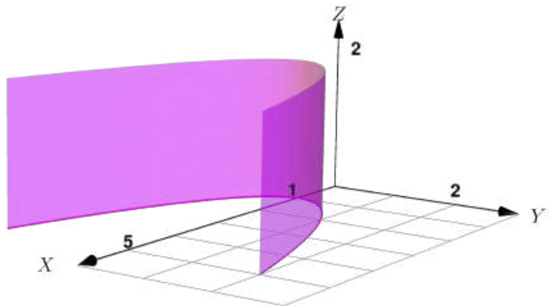
El resto de detalles están en la representación gráfica.

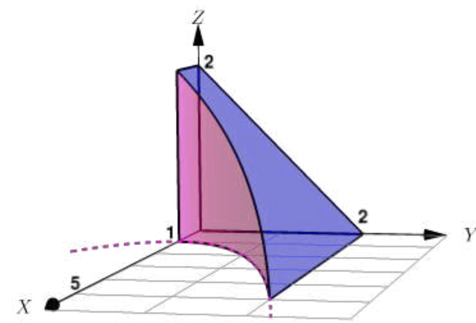
4. Considere las Superficies $S_1 : x - 1 = y^2$, $S_2 : y + z = 2$, $S_3 : x = 0$, $S_4 : y = 0$, y $S_5 : z = 0$.

a) [**2 Puntos**] Dibuje por separado la superficie S_1 y la superficie S_2

b) [**3 Puntos**] Dibuje el sólido limitado por las superficies S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5

Solución:





5. Sean $\mathbf{F}$ una función diferenciable y $\mathbf{f}$ una función derivable. La ecuación $\mathbf{F}[\mathbf{f}(xy),\ \mathbf{f}(yz)] = 0$ define a z como una función implícita de x y y. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Solución: 1ro: Cambio de variable:

$$F(u, v) = 0 \quad \text{con} \quad u = f(xy) \text{ y } v = f(yz)$$

a) [**2 Puntos**]

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot u_x + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot v_x}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot u_z + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot v_z}$$

Como $u = f(A)$ con $A = xy$ y $v = f(B)$ con $B = yz$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot f'(A)\cdot y + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot f'(B)\cdot 0}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot f'(A)\cdot 0 + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot f'(B)\cdot y}$$

b) [**2 Puntos**] $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot f'(A)\cdot x + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot f'(B)\cdot z}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot f'(A)\cdot 0 + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot f'(B)\cdot y}$

6. [**2 Puntos**] Suponga que $\mathbf{h}$ es una función con segundas derivadas parciales continuas y la función $\mathbf{g}$ se define como $\mathbf{g}(x, y) = \dfrac{1}{x}\cdot \mathbf{h}(\pi x + \sqrt{2},\ x^2 + y^3)$. Calcule $\dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}$

Solución: 1ro Cambio de variable: $\mathbf{g}(x, y) = \dfrac{1}{x}\cdot \mathbf{h}(u,\ v)$. con $u = \pi x + \sqrt{2}$ y $v = x^2 + y^3$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\cdot \mathbf{h}(u,\ v) + \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u}\cdot \pi + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial v}\cdot 2x\right)$$

7. [**3 Puntos**] Si $f(x,y) = \dfrac{\cos(7x-y)}{x}$, determine una constante K de tal manera que se cumpla la identidad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 7 \cdot f(x,y) + \frac{K}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

Solución:

a.) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-7x \operatorname{sen}(7x-y) - \cos(7x-y)}{x^2}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\operatorname{sen}(7x-y)}{x}$

b.) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{7\cos(7x-y)}{x} - \dfrac{\operatorname{sen}(7x-y)}{x^2}$

c.) $7 \cdot f(x,y) + \dfrac{K}{x} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y} = 7 \cdot \dfrac{\cos(7x-y)}{x} + \dfrac{K}{x} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(7x-y)}{x}$

$$\frac{7\cos(7x-y)}{x} - \frac{\operatorname{sen}(7x-y)}{x^2} = 7 \cdot \frac{\cos(7x-y)}{x} + \frac{K}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen}(7x-y)}{x} \implies \mathbf{K = -1}$$

8.46 Primer Parcial Extraordinario – II–2019

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA	Tiempo: 2:20 horas
ESCUELA DE MATEMÁTICA	Valor: 30 puntos
MA-2104: CÁLCULO SUPERIOR	II SEMESTRE - 2019

I PARCIAL – EXTRAORDINARIO

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Indique el número (y la letra, si la hay) de cada ejercicio que resuelva. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet.

a) [**5 Puntos**] Determine la ecuación canónica y realice la representación gráfica de la hipérbola cuyo eje mayor es paralelo al eje X, el centro es $(h,2)$, el eje menor mide 6 unidades, la distancia de un foco al vértice es de 1 unidad y el punto $(3,5)$ pertenece a la elipse buscada.

b) [**4 Puntos**] Determine la ecuación canónica de la cónica de ecuación $9x^2 - 54x - y^2 + 4y + 68 = 0$. Indique sus características más importantes y realice su representación gráfica.

c) Considere Q un sólido limitado en el primer octante por las superficies siguientes:

$S_1: \ 25(z-3) = -3y^2, \ S_2: \ 2y = 3x - 6, \ S_3: \ x = 4, \ S_4: \ x = 0, \ S_5: \ y = 0 \ \text{ y } \ S_6: \ z = 0$

1) [**2 Puntos**] Dibuje por separado las superficies S_1 y S_2

2) [**3 Puntos**] Dibuje el sólido Q

d) [**4 Puntos**] Sea $C(x,t) = \sqrt{t}\, e^{-x^2}$ Determine una constante $K \in \mathbb{R}$ de tal manera que se cumpla la identidad

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + 4t\frac{\partial C}{\partial t} = K\, x^2 C(x,t)$$

e) [**4 Puntos**] Sea $z = g(y)f(x+y, \ x)$ donde g es una función dos veces derivable y f es una función con derivadas parciales de orden dos continuas. Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

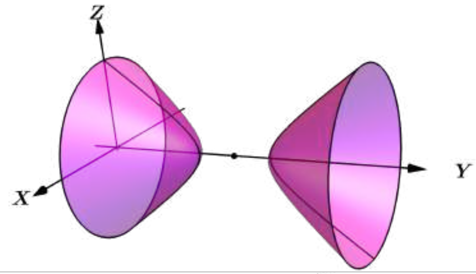
f) La ecuación $x^2 + y^2 + z = 2e^z$ define a z como una función implícita de x y y.

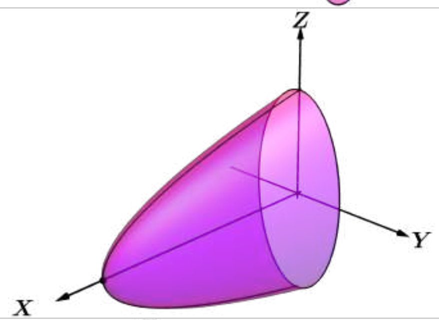
a.) [**2 Puntos**] Calcular el valor de $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}$ evaluado en el punto $(1,1,0)$

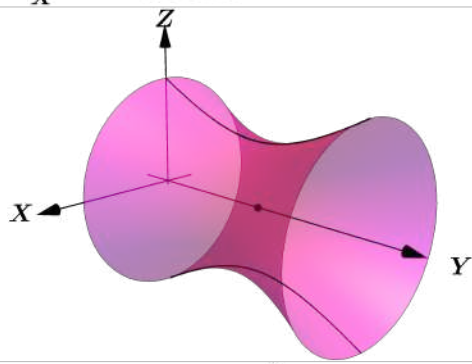
b.) [**2 Puntos**] Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

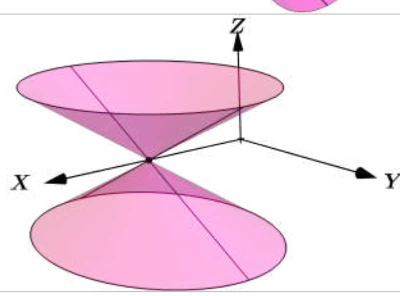
g) [**4 Puntos**] Asocie cada una de las figuras con la respectiva ecuación de la superficie que representa. Escriba en su cuaderno de examen el número de la figura y la letra de la ecuación con la que va asociada. Para cada figura solo hay una posible ecuación en el lado derecho.

El examen sigue atrás...

1. 

2. 

3. 

4. 

A. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-3)^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$

B. $\dfrac{(x-5)^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = \dfrac{z^2}{4}$

C. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{(y-5)^2}{2} = 0$

D. $x = y^2 + \dfrac{z^2}{16}$

E. $-\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{z^2}{4} + \dfrac{(y-5)^2}{3} = 1$

F. $(x-3)^2 + (y-3)^2 = z^2$

G. $\dfrac{z^2}{4} - \dfrac{(y-4)^2}{9} + \dfrac{x^2}{4} = 1$

H. $\dfrac{x-5}{-16} - \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{16} = 0$

I. $-\dfrac{z^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

No hay solución editada para este parcial extraordinario.

8.47 Segundo Parcial − II−2019

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Tiempo: 2:20 horas
Valor: 32 puntos

II PARCIAL

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Indique el número (y la letra, si la hay) de cada ejercicio que resuelva. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet.

1. Considere la superficie S de ecuación $x^3z + x^2y^2 + \operatorname{sen}(yz) + 3 = 0$ y sea $P(-1, 0, 3)$ un punto en S.

   a) [**3 Puntos**] Determine la ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto P

   b) [**1 Puntos**] Determine la ecuación vectorial de la recta normal a la superficie S en el punto P

   c) [**2 Puntos**] La ecuación de la superficie S define a z como función implicíta de x e y. Calcule la derivada direccional de z en el punto P en la dirección del vector $\mathbf{u} = (1, 1)$

2. [**5 Puntos**] Considere la función f definida mediante $f(x, y) = xye^{x+2y}$. Determine los puntos críticos de f y realice su clasificación si es posible.

3. [**5 Puntos**] Para la construcción de una caja con tapa con un volumen de 16m^3 se tienen que emplear tres tipos de materiales. El costo del material para el fondo y la tapa es de $\$9$ por metro cuadrado, el costo para el material del frente y la parte trasera es de $\$8$ por metro cuadrado, y el costo del material para las otras dos caras es de $\$6$ por metro cuadrado. Utilizando Multiplicadores de Lagrange, calcule las dimensiones de la caja de modo que el costo de los materiales sea mínimo.

4. Considere una región R de área $A_R = \displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3-x^2} dy\,dx$

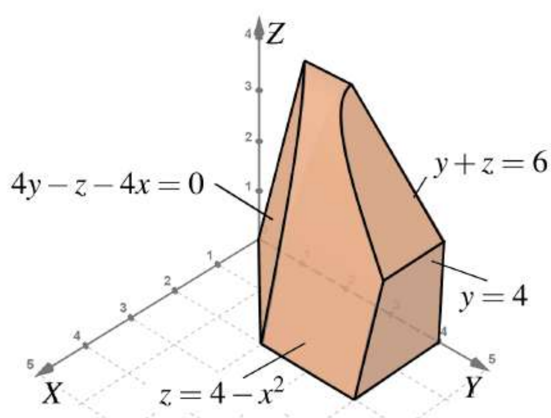
   a) [**2 Puntos**] Dibuje la región R

   b) [**3 Puntos**] Plantee la o las integrales que permiten calcular A_R en el orden de integración $dxdy$.

   c) [**1 Puntos**] Calcule A_R

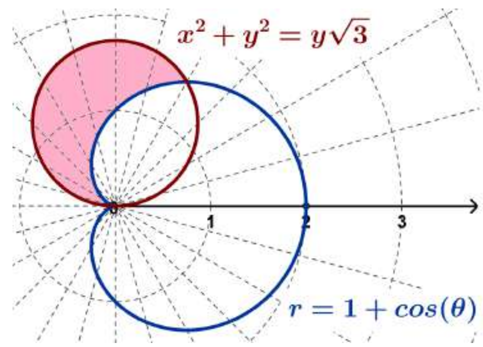
5. [**5 Puntos**] Dibuje la proyección en el plano XZ y, usando esta proyección, calcule el volumen del sólido Q limitado por las superficies

$$\begin{cases} S_1: & y + z = 6 \\ S_2: & z = 4 - x^2 \\ S_3: & 4y - z - 4x = 0 \\ S_4: & z = 0, \quad S_5: y = 4 \text{ y } S_6: x = 0 \end{cases}$$



Continúa en la siguiente página ...

6. [**5 Puntos**] Calcule el área de la región R comprendida entre el exterior del cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ y el círculo de ecuación $x^2 + y^2 = y\sqrt{3}$ (región sombreada en que se muestra en la figura 2).



8.48 Solución del Primer Parcial – II–2019

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MA-2104: CÁLCULO SUPERIOR

Tiempo: 2:20 horas
Valor: 32 puntos
II SEMESTRE - 2019

II PARCIAL – SOLUCIÓN BREVE

1. Considere la superficie S de ecuación $x^3z + x^2y^2 + \text{sen}(yz) + 3 = 0$ y sea $P\,(-1, 0, 3)$ un punto en S.

   a) [**3 Puntos**] Determine la ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto P

   Solución:

   $S: \;\; G(x, y, z) = x^3z + x^2y^2 + \text{sen}(yz) + 3 = 0$ entonces:

   $$\nabla G(x, y, z) = \left(3x^2z + 2xy^2,\; 2x^2y + z\cos(yz),\; x^3 + y\cos(yz)\right) \implies N = \nabla G(-1, 0, 3) = (9, 3, -1)$$

   Ecuación cartesiana: $\therefore \;\; 9x + 3y - z = -12$

   b) [**1 Puntos**] Determine una ecuación vectorial de la recta normal a la superficie S en el punto P

   Solución:

   $L(t) = P + t \cdot N \implies L(t) = (-1, 0, 3) + t \cdot (9, 3, -1)$

   c) [**2 Puntos**] La ecuación de la superficie S define a z como función implicíta de x e y. Calcule la derivada direccional de z en el punto P en la dirección del vector $\mathbf{u} = (1, 1)$

2. [**5 Puntos**] Considere la función f definida mediante $f(x, y) = xye^{x+2y}$. Determine los puntos críticos de f y realice su clasificación si es posible.

   Solución:

   Puntos críticos:

$$\nabla f(x,y) = \left(ye^{x+2y} + xye^{x+2y}, xe^{x+2y} + xye^{x+2y} \cdot 2\right) \implies \begin{cases} y(1+x)e^{x+2y} & = & 0 & (E1) \\ x(1+2y)e^{x+2y} & = & 0 & (E2) \end{cases}$$

$$y(1+x)e^{x+2y} = 0 \implies \begin{cases} y & = & 0 \\ x & = & -1 \end{cases}$$

- Si $y = 0$, sustituyendo en (E2) queda $xe^x = 0 \implies x = 0$. Punto crítico $(0,0)$

- Si $x = -1$, sustituyendo en (E2) queda $-(1+2y)e^{-1+2y} = 0 \implies y = -\frac{1}{2}$. Punto crítico $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

De lo anterior se obtienen los puntos críticos: $(0,0)$ y $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

Clasificación:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} (x+2)ye^{x+2y} & (x+1)(2y+1)ye^{x+2y} \\ (x+1)(2y+1)e^{x+2y} & 4x(y+1)ye^{x+2y} \end{vmatrix}$$

Además $f_{xx}(x,y) = (x+2)ye^{x+2y}$, entonces:

punto crítico	$H(x,y)$	$f_{xx}(x,y)$	Clasificación
$(0,0)$	-1	$-$	$(0,0,0)$ es un punto de silla
$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$	1	$-\frac{1}{2}e^{-2} < 0$	$\left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-2}\right)$ es un máximo local

3. [**5 Puntos**] Para la construcción de una caja de base rectangular con tapa con un volumen de $16m^3$ se tienen que emplear tres tipos de materiales. El costo del material para el fondo y la tapa es de \$9 por metro cuadrado, el costo para el material del frente y la parte trasera es de \$8 por metro cuadrado, y el costo del material para las otras dos caras es de \$6 por metro cuadrado. Utilizando Multiplicadores de Lagrange, calcule las dimensiones de la caja de modo que el costo de los materiales sea mínimo.

Solución:
Sean x el largo, y el ancho y h la altura de la caja. Como se requiere minimizar el costo, la función objetivo es $C(x,y,h) = 18xy + 16xh + 12yh$. La restricción (ligadura) e $V = 16$, es decir. $xyh - 16 = 0$

Así:

$$L(x,y,h,\lambda) = 18xy + 16xh + 12yh - \lambda(xyh - 16) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} L_x: & 18y + 16h - \lambda yh &=& 0 \\ L_y: & 18x + 12h - \lambda xh &=& 0 \\ L_h: & 16x + 12y - \lambda xy &=& 0 \\ L_\lambda: & -(xyh - 16) &=& 0 \end{cases}$$

Multiplicando (E1) por x, (E2) por y y (E3) por h, obtenemos

$$\begin{cases} L_x: & 18yx + 16hx - \lambda xyh &=& 0 & \text{(E1)} \\ L_y: & 18xy + 12hy - \lambda yxh &=& 0 & \text{(E2)} \\ L_h: & 16xh + 12yh - \lambda xyh &=& 0 & \text{(E3)} \\ L_\lambda: & xyh &=& 16 & \text{(E4)} \end{cases}$$

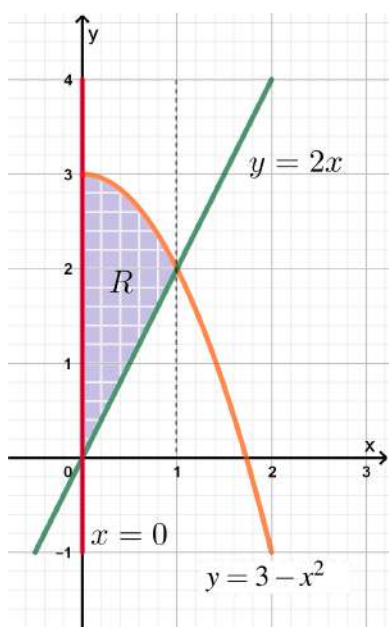
- Igualando (E1) y (E2) tenemos $18yx + 16hx = 18xy + 12hy \implies y = \frac{4}{3}x$ (pues $h \neq 0$, se puede cancelar)
- Igualando (E1) y (E3) tenemos $18yx + 16hx = 16xh + 12yh \implies h = \frac{18}{12}x$ (pues $y \neq 0$, se puede cancelar)

Sustituyendo $y = \frac{4}{3}x$ y $h = \frac{18}{12}x$ en (E4) se obtiene $x = 2$. Por tanto, $x = 2$, $y = \frac{8}{3}$, $h = 3$ (y $\lambda = 12$)

4. Considere una región R de área $A_R = \displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3-x^2} dy\,dx$

   a) [**2 Puntos**] Dibuje la región R

   Solución:



   b) [**3 Puntos**] Plantee la o las integrales que permiten calcular A_R en el orden de integración $dx\,dy$.

Solución:

$$A_R = \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} dx\,dy + \int_2^3 \int_0^{\sqrt{3-y}} dx\,dy$$

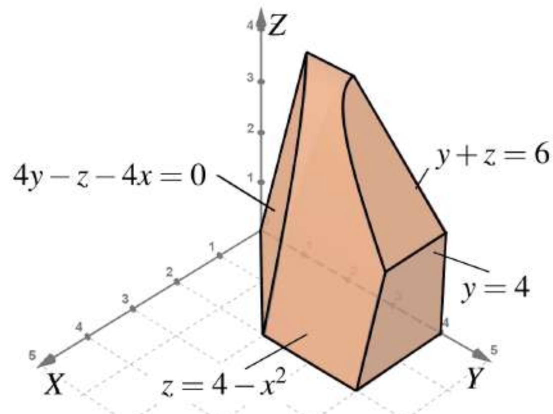
c) [**1 Puntos**] Calcule A_R

Solución:

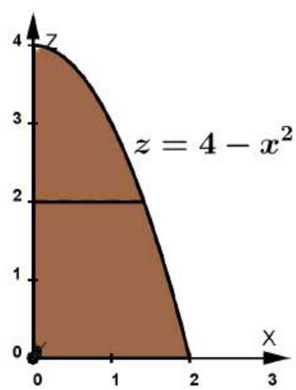
$$A_R = \int_0^1 \int_{2x}^{3-x^2} dy\,dx = \int_0^1 (3 - x^2 - 2x)\,dx = \frac{5}{3}\ ul^2$$

5. [**5 Puntos**] Dibuje la proyección en el plano XZ y, usando esta proyección, calcule el volumen del sólido Q limitado por las superficies

$$\begin{cases} S_1: & y + z = 6 \\ S_2: & z = 4 - x^2 \\ S_3: & 4y - z - 4x = 0 \\ S_4: & z = 0,\quad S_5: y = 4 \text{ y } S_6: x = 0 \end{cases}$$

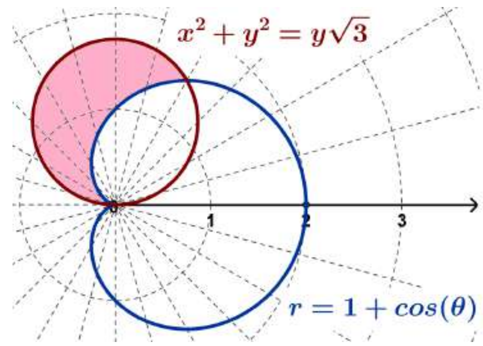


Solución:



$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z}} \left(4 - \frac{z+4x}{4}\right) dx\,dz + \int_2^4 \int_0^{\sqrt{4-z}} \left(6 - z - \frac{z+4x}{4}\right) dx\,dz \\ &= \int_0^2 4x - \frac{zx}{4} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{4-z}} dz + \int_2^4 4x - \frac{zx}{4} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{4-z}} dz \approx 13.6915 \end{aligned}$$

6. [**5 Puntos**] Calcule el área de la región R comprendida entre el exterior del cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ y el círculo de ecuación $x^2 + y^2 = y\sqrt{3}$ (región sombreada en que se muestra en la figura 2).



Solución:
Si $x^2 + y^2 = y\sqrt{3}$ entonces $r = \sqrt{3}\,\text{sen}(\theta)$

Intersección entre las curvas $r = 1 + \cos\theta$ y $r = \sqrt{3}\,\text{sen}(\theta)$

$$\begin{aligned}
1 + \cos(\theta) = \sqrt{3}\,\text{sen}(\theta) \quad &\Longrightarrow \quad (1+\cos(\theta))^2 = \left(\sqrt{3}\,\text{sen}(\theta)\right)^2 \\
&\Longrightarrow \quad 1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) = 3\,\text{sen}^2(\theta) \qquad \text{como } \text{sen}^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) \\
&\Longrightarrow \quad 1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) = 3 - 3\cos^2(\theta) \\
&\Longrightarrow \quad 4\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta) - 2 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{1}{2} \ \vee \ \cos(\theta) = -1 \\
&\Longrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ \theta = \pi + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Así el área encerrada por las curvas se calcula haciendo:

$$
\begin{aligned}
A_R &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \int_{1+\cos(\theta)}^{\sqrt{3}\operatorname{sen}(\theta)} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} r^2\Big|_{1+\cos(\theta)}^{\sqrt{3}\operatorname{sen}(\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left[\sqrt{3}\operatorname{sen}(\theta)\right]^2 - [1+\cos(\theta)]^2\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 3\operatorname{sen}^2(\theta) - 1 - 2\cos(\theta) - \cos^2(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 3 - 3\cos^2(\theta) - 1 - 2\cos(\theta) - \cos^2(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 2 - 2\cos(\theta) - 4\cos^2(\theta)\,d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 1 - \cos(\theta) - 2\cdot\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 1 - \cos(\theta) - 1 - \cos(2\theta)\,d\theta \\
&= \left[-\operatorname{sen}(\theta) - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{ul}^2 \approx 1{,}299038106\ \mathrm{ul}^2
\end{aligned}
$$

8.49 Tercer Parcial – II–2019

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas
Cálculo Superior

Tiempo máximo: 2 horas y 30 minutos
Puntaje total: 31 puntos
II semestre 2019

Tercer Examen Parcial

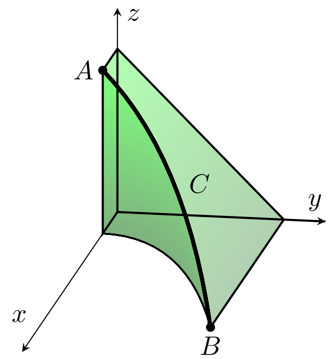
Instrucciones:

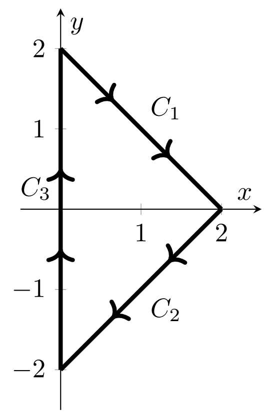
Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, incluya el procedimiento completo que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje de forma clara, ordenada y utilice bolígrafo de tinta indeleble para resolver el examen. Las preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones en que se utilizó corrector o cualquier tipo de alteración no podrán apelarse. No se permite el uso de hojas sueltas, calculadora programable, teléfonos o cualquier dispositivo electrónico con conectividad inalámbrica.

1. **[4 puntos]** En la figura adjunta se muestra el sólido limitado por las superficies

   $S_1 : x - 1 = y^2,$ $\quad$ $S_4 : y = 0,$
   $S_2 : y + z = 2,$ $\quad$ $S_5 : z = 0,$
   $S_3 : x = 0,$

   donde C es la curva que va del punto A al punto B.
   Calcule $\displaystyle\int_C (2x - y + z)\, ds.$





2. En la figura adjunta se muestra la curva C definida por los tres segmentos rectos C_1, C_2 y C_3.

   a) **[3 puntos]** Calcule $\displaystyle\int_{C_1} y\, dx + xy\, dy.$

   b) **[4 puntos]** Calcule $\displaystyle\int_C y\, dx + xy\, dy$ utilizando el Teorema de Green.

3. Considere el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{z}{x} + 2x, \dfrac{z}{y} - 3y^2z, \ln(xy) - y^3\right)$

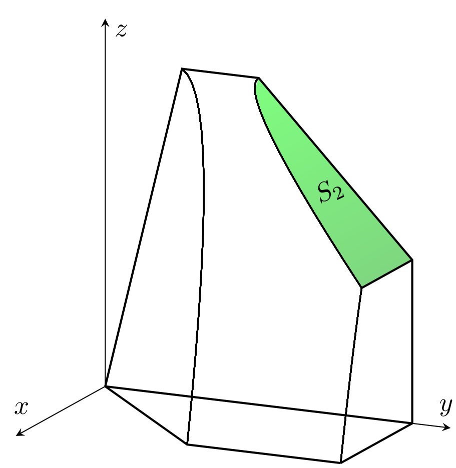
   a) **[2 punto]** Verifique que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo.

   b) **[3 puntos]** Determine $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ donde C es una curva que va desde el punto $(1, 1, 0)$ hasta el punto $(1, e, 1)$, para esto utilice la función potencial de $\mathbf{F}$.

4. **[5 puntos]** En la figura adjunta se muestra el sólido definido por las superficies

   $S_1 : z = 4 - x^2,$ $\quad$ $S_4 : y = 4,$
   $S_2 : y + z = 6,$ $\quad$ $S_5 : x = 0,$
   $S_3 : 4y - z - 4x = 0,$ $\quad$ $S_6 : z = 0.$

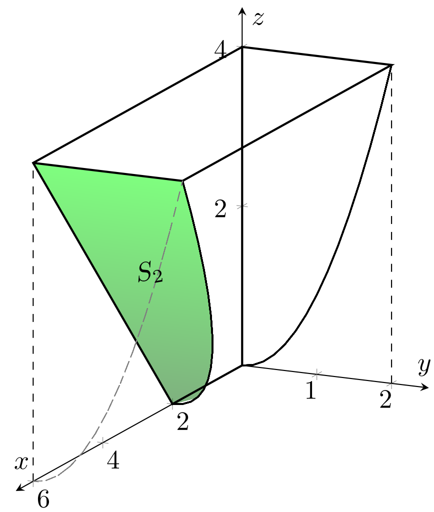
   Calcule $\displaystyle\iint_{S_2} (2z + x^2 - y)\, dS.$



5. [**5 puntos**] En la figura adjunta se muestra el sólido definido por las superficies

$S_1 : z = y^2,$ $\quad$ $S_4 : y = 0,$
$S_2 : z = x - 2,$ $\quad$ $S_5 : z = 4.$
$S_3 : x = 0,$

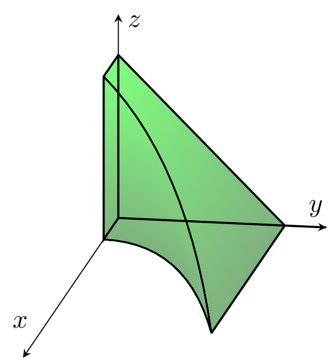
Calcule $\displaystyle\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$, donde
$\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} - y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, con $\mathbf{N}$ externo unitario al sólido.



6. [**5 puntos**] En la figura adjunta se muestra el sólido limitado por las superficies

$S_1 : x - 1 = y^2,$ $\quad$ $S_4 : y = 0,$
$S_2 : y + z = 2,$ $\quad$ $S_5 : z = 0,$
$S_3 : x = 0,$

Sea $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$ (S está formado por todas las caras del sólido).
Calcule $\displaystyle\iint_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$,
donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, y^2, zy)$, con $\mathbf{N}$ el vector normal externo unitario al sólido en cada una de sus caras.



8.50 Solución del Tercer – II–2019

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas
Cálculo Superior

Tiempo máximo: 2 horas y 30 minutos
Puntaje total: 31 puntos
II semestre 2019

Tercer Examen Parcial – Solución breve

Instrucciones:

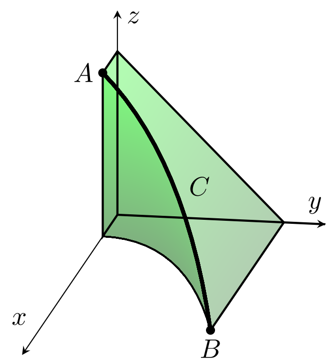
Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, incluya el procedimiento completo que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje de forma clara, ordenada y utilice bolígrafo de tinta indeleble para resolver el examen.

Las preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones en que se utilizó corrector o cualquier tipo de alteración no podrán apelarse. No se permite el uso de hojas sueltas, calculadora programable, teléfonos o cualquier dispositivo electrónico con conectividad inalámbrica.

1. **[4 puntos]** En la figura adjunta se muestra el sólido limitado por las superficies

   $S_1 : x - 1 = y^2,$ $\quad S_4 : y = 0,$
   $S_2 : y + z = 2,$ $\quad S_5 : z = 0,$
   $S_3 : x = 0,$

   donde C es la curva que va del punto A al punto B.
   Calcule $\displaystyle\int_C (2x - y + z)\ ds.$



Solución:

$C : r(t) = (t^2 + 1, t, 2 - t), t \in [0, 2]$

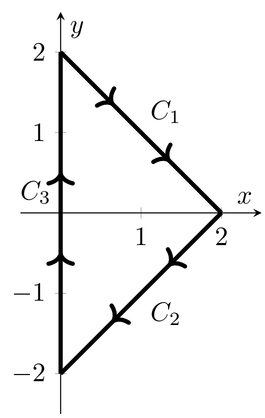
$r'(t) = (2t, 1, -1)$

$$\int_C (2x - y + z)\ ds = \int_0^2 (2(t^2 + 1) - t + 2 - t)\sqrt{4t^2 + 2}\ dt = 26.05$$

2. En la figura adjunta se muestra la curva C definida por los tres segmentos rectos C_1, C_2 y C_3.

   a) **[3 puntos]** Calcule $\displaystyle\int_{C_1} y\ dx + xy\ dy.$

   b) **[4 puntos]** Calcule $\displaystyle\int_C y\ dx + xy\ dy$ utilizando el Teorema de Green.



Solución:

a) $C_1 : r_1(t) = (t, 2 - t), t \in [0, 2]$

$r_1'(t) = (1, -1)$

$$\int_{C_1} y\ dx + xy\ dy = \int_0^2 (2 - t, t(2 - t)) \cdot (1, -1)\ dt = \int_0^2 (2 - t - t(2 - t))\ dt = \frac{2}{3}$$

b) $$\int_C y\ dx + xy\ dy = -\iint_D (y - 1)\ dA = -\int_0^2 \int_{-2+x}^{2-x} (y - 1)\ dy\, dx$$

$$= -\int_0^2 \left(\frac{(2 - x)^2}{2} - (2 - x)\right) - \left(\frac{(-2 + x)^2}{2} - (-2 + x)\right)\ dx = 4$$

3. Considere el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{z}{x} + 2x, \frac{z}{y} - 3y^2 z, \ln(xy) - y^3\right)$

a) **[2 punto]** Verifique que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo.

b) **[3 puntos]** Determine $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ donde C es una curva que va desde el punto $(1,1,0)$ hasta el punto $(1,e,1)$, para esto utilice la función potencial de $\mathbf{F}$.

Solución:

a) $\text{Rot}\, F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{z}{x} + 2x & \frac{z}{y} - 3y^2 z & \ln(xy) - y^3 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{xy} \cdot x - 3y^2 - \frac{1}{y} + 3y^2, -\frac{1}{xy} \cdot y + \frac{1}{x}, 0 - 0\right) = (0,0,0)$

Por lo que F es un campo vectorial conservativo.

b) $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{z}{x} + 2x \Rightarrow \rho = z \ln x + x^2 + C(y,z)$

$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{z}{y} - 3y^2 z \Rightarrow \rho = z \ln y - y^3 z + C(x,z)$

$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \ln(xy) - y^3 \Rightarrow \rho = z \ln(xy) - y^3 z + C(x,y)$

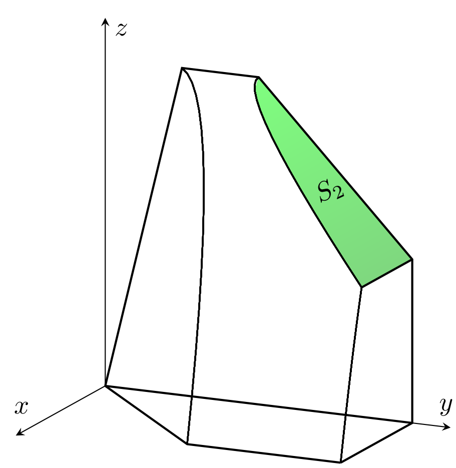
Por lo que $\rho = z \ln(xy) + x^2 - y^3 z$

Así $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \rho(1,e,1) - \rho(1,1,0) = 1 + 1 - e^3 - 1 = 1 - e^3$

4. **[5 puntos]** En la figura adjunta se muestra el sólido definido por las superficies

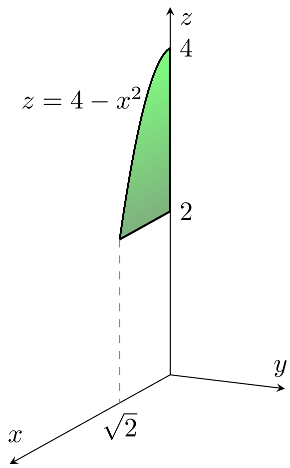
$S_1 : z = 4 - x^2$,	$S_4 : y = 4$,
$S_2 : y + z = 6$,	$S_5 : x = 0$,
$S_3 : 4y - z - 4x = 0$,	$S_6 : z = 0$.

Calcule $\iint_{S_2} (2z + x^2 - y)\, dS$.



Solución:

Se proyecta la superficie en el plano XZ:



$$S : \underbrace{y + z - 6}_{F} = 0$$

$$S : r(x, z) = (x, 6 - z, z), (x, z) \in \text{Proy}$$

$$\eta = \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial x} = \triangle F = (0, 1, 1)$$

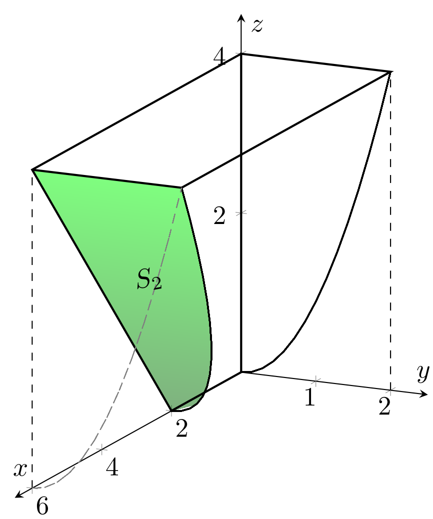
$$\text{Así} \iint\limits_{S_2} (2z + x^2 - y)\ dS = \int_0^{\sqrt{2}} \int_2^{4-x^2} (2z + x^2 - (6 - z))\sqrt{2}\ dz\, dx = \int_0^{\sqrt{2}} \int_2^{4-x^2} (3z - 6 + x^2)\sqrt{2}\ dz\, dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(3\frac{(4-x^2)^2}{2} - 6(4 - x^2) + x^2(4 - x^2) - (6 - 12 + 2x^2)\right)\sqrt{2}\, dx = \frac{112}{15} \approx 7.47$$

5. **[5 puntos]** En la figura adjunta se muestra el sólido definido por las superficies

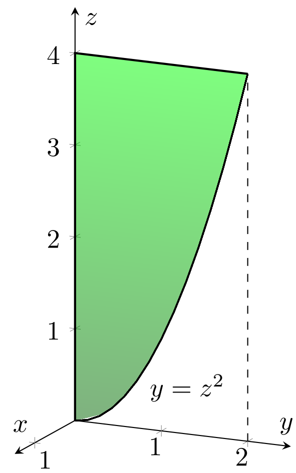
$S_1 : z = y^2$,	$S_4 : y = 0$,
$S_2 : z = x - 2$,	$S_5 : z = 4$.
$S_3 : x = 0$,	

Calcule $\iint\limits_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\ dS$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} - y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, con $\mathbf{N}$ externo unitario al sólido.



Solución:

Se proyecta en YZ:



$S : \underbrace{x - z - 2}\, F = 0$

$S : r(y,z) = (z+2, y, z), (y,z) \in \text{Proy}$

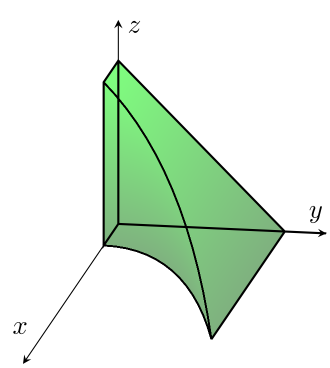
$\eta = \dfrac{\partial r}{\partial y} \times \dfrac{\partial r}{\partial z} = \triangle F = (1, 0, -1)$ (para que sea externo al sólido).

$$\iint\limits_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \int_0^2 \int_{y^2}^4 (z, -y, z+2)(1, 0, -1) \, dz \, dy = \int_0^2 \int_{y^2}^4 (z - z - 2) \, dz \, dy$$

$$= \int_0^2 -2(4 - y^2) \, dz \, dy = \frac{-32}{3}$$

6. **[5 puntos]** En la figura adjunta se muestra el sólido limitado por las superficies

$S_1 : x - 1 = y^2,$ $\quad S_4 : y = 0,$
$S_2 : y + z = 2,$ $\quad S_5 : z = 0,$
$S_3 : x = 0,$



Sea $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$ (S está formado por todas las caras del sólido).
Calcule $\displaystyle\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$,
donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, y^2, zy)$, con $\mathbf{N}$ el vector normal externo unitario al sólido en cada una de sus caras.

Solución:

$\text{div}F = 0 + 2y + y = 3y$

$$\iint\limits_S f \, dr = \int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{y^2+1} 3y \, dx \, dz \, dy = \int_0^2 \int_0^{2-y} 3y(y^2+1) \, dz \, dy = \int_0^2 3y(y^2+1)(2-y) \, dy = \frac{44}{5}$$

8.51 Examen de Reposición – II–2019

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
SEDES CARTAGO, ALAJUELA, LIMÓN
ESCUELA DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS. SAN CARLOS
MA-2104: CÁLCULO SUPERIOR

Tiempo: 3:00 horas
Valor: 40 puntos
II SEMESTRE - 2019

EXAMEN DE REPOSICIÓN

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Indique el número (y la letra, si la hay) de cada ejercicio que resuelva. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet.

1. [**5 Puntos**] Determine la ecuación canónica y realice la representación gráfica de la hipérbola cuyo eje focal es paralelo al eje X, el centro es $(2,0)$, una asíntota tiene ecuación $y = 2x - 4$ y un foco está a una distancia de $\sqrt{5}$ unidades del centro.

2. [**4 puntos**] Supongamos que g es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas. Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ si $z = \dfrac{g(y^3,\ x-2)}{y^2}$.

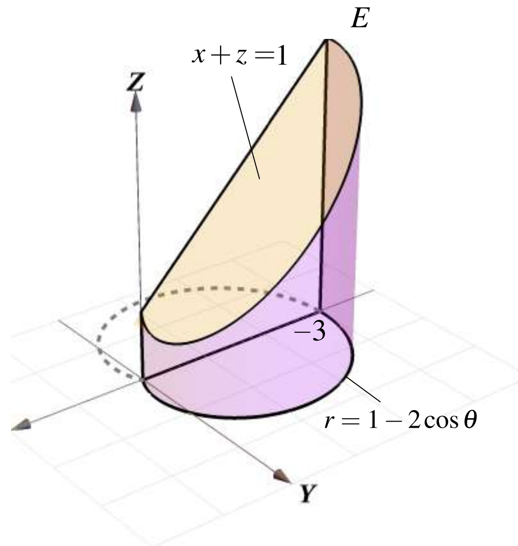
3. Considere la superficie S de ecuación $x^2 + xz^3 = -y^2 z$ con $P = (1,0,-1) \in S$

   a.) [**4 puntos**] Calcule $D_{\mathbf{u}} z(P)$ donde $\mathbf{u} = (1,-1)$

   b.) [**3 puntos**] Calcule la ecuación cartesiana del plano tangente a S en el punto P

4. [**5 puntos**] Calcule y clasifique los puntos críticos de $z = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3xy^2}{2} + y^3$

5. **[5 puntos]** Considere siguientes S_1, S_2, S_3 y S_4 (tal y como se muestran a la derecha),

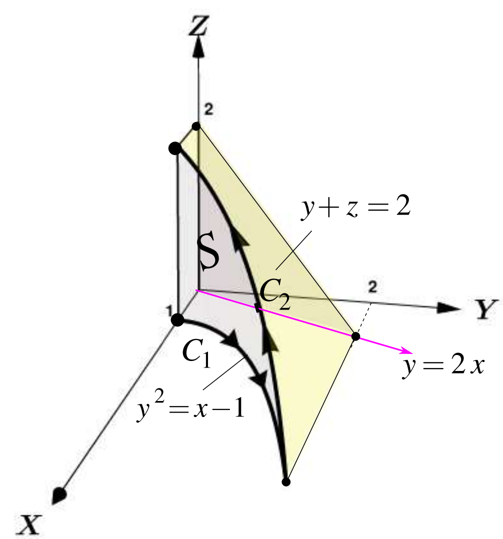


- S_1 es el cilindro generado por la curva $r = 1 - 2\cos\theta$,
- $S_2 : \ x + z = 1$,
- $S_3 : \ z = 0$,
- $S_4 : \ y = 0$.

E es el sólido limitado por estas superficies, tal y como aparece a al derecha. Calcule el volumen del sólido E

Continúa en la siguiente página ...

6. Considere la curva orientada C y la superficie $\mathbf{S}$ tal y como se muestran en la figura a la derecha. La curva C es la unión de dos curvas: $C = C_1 \cup C_2$ y la superficie $\mathbf{S}$ es el cilindro de ecuación $\mathbf{S} : \ y^2 = x - 1$, limitada por el plano $S_1 : \ y + z = 2$.



Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = \cos x \ \operatorname{sen} z \ \hat{\imath} + 5 \ \hat{\jmath} + \cos z \ \operatorname{sen} x \ \hat{\mathbf{k}}$.

a.) **[4 puntos]** Calcular la longitud de la curva C_2

b.) **[5 puntos]** Calcular $\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$

c.) **[5 puntos]** Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot \, \mathbf{dr}$

8.52 Solución del examen de reposición − II−2019

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Sedes Cartago, Alajuela, Limón
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas. San Carlos
MA-2104: Cálculo Superior

Tiempo: 3:00 horas
Valor: 43 puntos
II Semestre - 2019

Examen de Reposición – Solución Breve

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Indique el número (y la letra, si la hay) de cada ejercicio que resuelva. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el intercambio de instrumentos ni el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet.

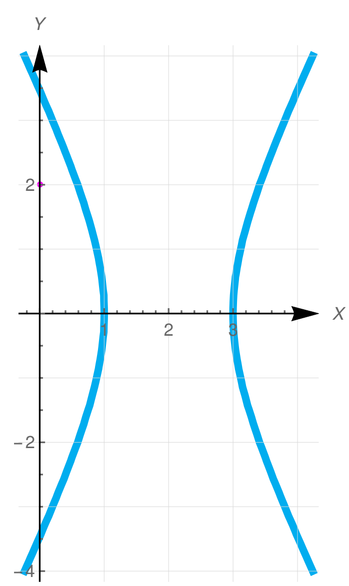
1. [**5 Puntos**] Determine la ecuación canónica y realice la representación gráfica de la hipérbola cuyo eje focal es paralelo al eje X, el centro es $(2, 0)$, una asíntota tiene ecuación $y = 2x - 4$ y un foco está a una distancia de $\sqrt{5}$ unidades del centro.

Solución: $\dfrac{(x-2)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Como una asíntota es $y = 2x - 4 \implies \dfrac{b}{a} = 2$

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a} & = & 2 \\ 5 & = & a^2 + b^2 \end{cases} \implies a = 1 \quad \wedge \quad b = 2$$

$$\therefore \quad \frac{(x-2)^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$$



2. **[4 puntos]** Supongamos que g es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas. Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ si $z = \dfrac{g(u, v)}{y^2}$ con $u = y^3$ y $v = x - 2$

Solución: $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} & = & \dfrac{1}{y^2}\left(\cdot\dfrac{\partial g}{\partial u}\cdot 0+\dfrac{\partial g}{\partial v}\cdot 1\right) \\ \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} & = & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial v}}{y^2}\right)=\dfrac{3y^4\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\ -\ 2y\cdot\dfrac{\partial g}{\partial v}}{y^4} \end{cases}$

3. Considere la superficie S de ecuación $x^2+xz^3 \ = \ -y^2z$ y $P=(1,0,-1)\in S$

a.) **[4 puntos]** Calcule $D_{\mathbf{u}}z(P)$ donde $\mathbf{u}=(1,-1)$

Solución: z está definida de manera implícita. Sea $G(x,y,z)=x^2+xz^3+y^2z$

$$\nabla z=\left(-\frac{G_x}{G_z}\ ,\ -\frac{G_y}{G_z},\right)=\left(-\frac{2x+z^3}{y^2+3xz^2}\ ,\ -\frac{2yz}{y^2+3xz^2}\right)$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}z(P) &= \nabla z(P)\cdot\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} \\ &= \left(-\frac{1}{3},0\right)\cdot\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} \ = \ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

b.) **[3 puntos]** Calcule la ecuación cartesiana del plano tangente a S en el punto P

Solución: Como $G(x,y,z)=x^2+xz^3+y^2z$, la ecuación cartesiana del plano tangente en el punto P es $\nabla\mathbf{G}(P)\cdot(x,y,z)=\nabla\mathbf{G}(P)\cdot P$

- $\nabla\mathbf{G}(x,y,z)=(2x+z^3\ ,\ 2yz\ ,\ y^2+3xz^2)$
- $N=\nabla\mathbf{G}(1,0,-1)=(1\ ,\ 0\ ,\ 3)$

La ecuación cartesiana del plano tangente en el punto P es $x+3z=-2$.

4. **[5 puntos]** Calcule y clasifique los puntos críticos de $z=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3xy^2}{2}+y^3$

Solución: $\begin{cases} z_x=x^2-x-\dfrac{3y^2}{2} & = & 0 \quad (E1) \\ \\ z_y=3y^2-3xy & = & 0 \implies 3y(y-x)=0 \implies y=0\ \vee\ y=x \end{cases}$

Sustituyendo $y = 0$ en (E1) se obtienen los puntos críticos $(0,0)$ y $(1,0)$

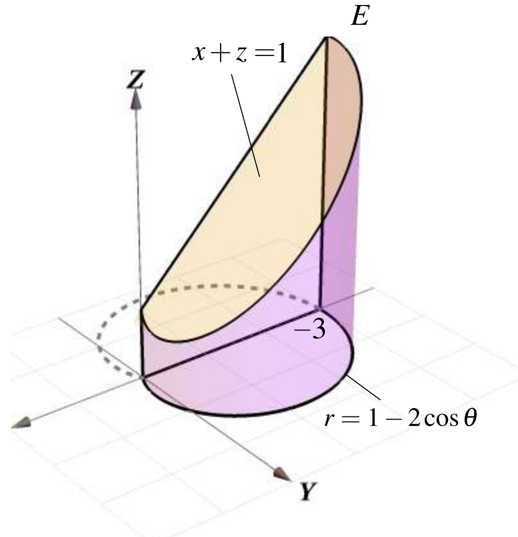
Sustituyendo $y = x$ en (E1) se obtiene otro punto crítico, $(-2,-2)$

$$D_2(x,y) = (2x-1)(6y-3x) - 9y^2 \implies \begin{cases} D_2(0,0) & = & 0 & \therefore & \text{el criterio no decide} \\ D_2(1,0) & = & -3, & \therefore & (1,0,-1/6) \text{ es punto de silla} \\ D_2(-2,-2) & = & -6 & \therefore & (-2,-2,-2/3) \text{ es punto de silla} \end{cases}$$

5. **[5 puntos]** Considere siguientes S_1, S_2, S_3 y S_4 (tal y como se muestran a la derecha),

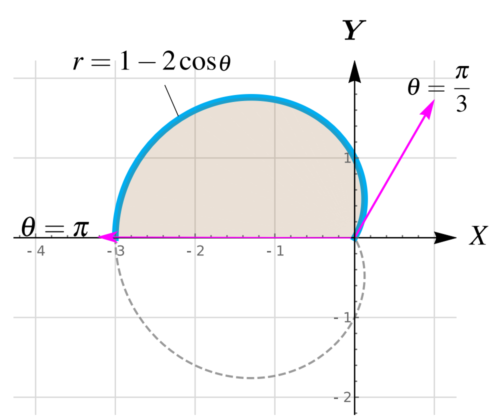
   - S_1 es el cilindro generado por la curva $r = 1 - 2\cos\theta$,
   - $S_2 :\ x + z = 1$,
   - $S_3 :\ z = 0$,
   - $S_4 :\ y = 0$.

   E es el sólido limitado por estas superficies, tal y como aparece a al derecha. Calcule el volumen del sólido E

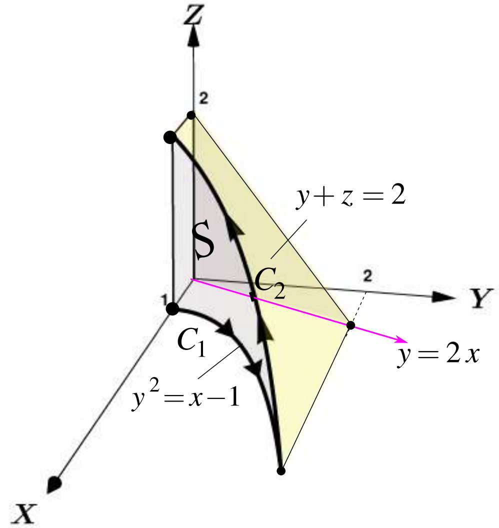


Solución:

$$\begin{aligned} V_E &= \iint_{R_{xy}} (1 - x - 0)\, dA \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi} \int_0^{1-2\cos\theta} (1 - r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi} \left. \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\cos\theta \right|_0^{1-2\cos\theta} d\theta \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{(1-2\cos\theta)^2}{2} - \frac{(1-2\cos\theta)^3}{3}\cos\theta\, d\theta \approx 10.578 \end{aligned}$$



6. Considere la curva orientada C y la superficie S tal y como se muestran en la figura a la derecha. La curva C es la unión de dos curvas: $C = C_1 + C_2$ y la superficie $S:\ y^2 = x - 1$ está limitada por el plano $S_1:\ y + z = 2$.



Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = \cos x\ \operatorname{sen} z\ \hat{\imath} + 5\ \hat{\jmath} + \cos z\ \operatorname{sen} x\ \hat{\mathbf{k}}$.

a.) **[5 puntos]** Calcular la longitud de C_2

b.) **[5 puntos]** Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$

c.) **[5 puntos]** Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$

Solución:

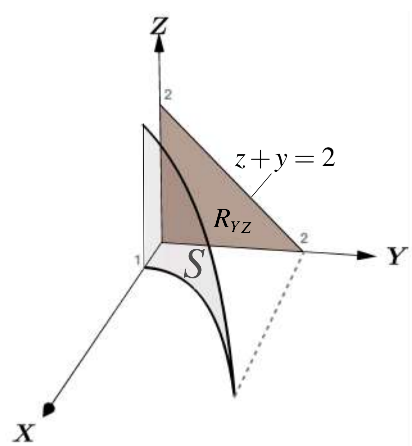
a.) Si $y = t$, $C_2:\ r_2(t) = (t^2 + 1,\ t\ , 2 - t),\ \ t \in [0, 2]$

$$s = \int_C 1 \cdot ds = \int_0^2 \sqrt{4t^2 + 2}\, dt \approx 5.12401$$

Si $x = t \implies s = \int_1^5 \sqrt{\frac{1}{2(t-1)} + 1}\, dt$. Impropia convergente. Singularidad en $t = 1$

b.)

Primera manera: Proyectando sobre YZ

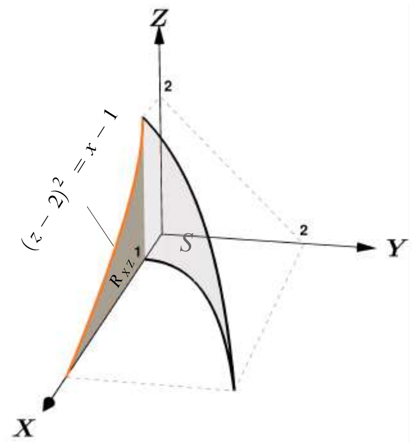


$S:\ x = y^2 + 1.\ N_1 = (1, -2y, 0)$

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS &= \int_0^2 \int_0^{2-y} (\cos x\ \operatorname{sen} z,\ 5\ , \cos z\ \operatorname{sen} x\ ) \cdot (1, -2y, 0)\, dz\, dy \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-y} (\cos(y^2 + 1)\ \operatorname{sen} z - \ 10y)\, dz\, dy \\
&= \int_0^2 -\cos(y^2 + 1)\ \cos z - \ 10yz\Big|_0^{2-y}\ dy \\
&= \int_0^2 -\cos(y^2 + 1)\ \cos(2 - y) - \ 10y(2 - y) + \cos(y^2 + 1)\, dy \\
&\approx\ -13.1613
\end{aligned}$$

Segunda manera: Proyectando sobre XZ

$S: \; y = \sqrt{x-1}$. $\; N_2 = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}, 1, 0\right)$.



Este vector N_2 es opuesto a N_1, por tanto la integral de flujo quedará con signo contrario. La integral es impropia en ambos órdenes "dzdx" y "dxdz". Además en el orden "dxdz" aparecen funciones sin primitiva elemental.

$$(\cos(x)\operatorname{sen}(z), 5, \operatorname{sen}(x)\cos(z)) \cdot \left(\frac{1}{4\sqrt{x-1}}, 1, 0\right) = 5 - \frac{\cos(x)\operatorname{sen}(z)}{2\sqrt{x-1}}$$

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS &= \int_1^5 \int_0^{2-\sqrt{x-1}} \left(5 - \frac{\cos(x)\operatorname{sen}(z)}{2\sqrt{x-1}}\right) dz\, dx \\
&= \int_1^5 \left(5\left(2-\sqrt{x-1}\right) + \frac{\cos\left(2-\sqrt{x-1}\right)\cos(x)}{2\sqrt{x-1}} - \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x-1}}\right) dx \\
&\approx 13.1613
\end{aligned}$$

c.) $\mathbf{F}$ es conservativo pues Rot $\mathbf{F} = (0,0,0)$. Podemos aplicar "Independencia del camino" o resolver la integral con una función potencial.

Primera manera: Resolver la integral con una función potencial

$$\nabla\phi = F \implies \begin{cases} \phi_x = \displaystyle\int \cos x \, \operatorname{sen} z \, dx &= \operatorname{sen} x \, \operatorname{sen} z + K_1(y,z) \\ \phi_y = \displaystyle\int 5\, dy &= 5y + K_2(x,z) \\ \phi_z = \displaystyle\int \cos z \, \operatorname{sen} x \, dz &= \operatorname{sen} x \, \operatorname{sen} z + K_3(x,y) \end{cases} \implies \phi(x,y,z) = \operatorname{sen} x \, \operatorname{sen} z + 5y + K$$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \phi(1,0,2) - \phi(1,0,0) = \operatorname{sen}(1)\operatorname{sen}(2) \approx 0.765147$$

Segunda manera: Usar independencia del camino.

Podemos usar el camino $C': \; (1,0,t), \; t \in [0,2]$. Este camino es el segmento que une el punto $(1,0,0)$ con el punto $(1,0,2)$.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \int_0^2 (\cos(1)\,\operatorname{sen} t, \, 5, \, \cos t \, \operatorname{sen} 1)\cdot(0,0,1)\, dt = \int_0^2 \operatorname{sen}(1)\cos t \, dt = \operatorname{sen}(1)\operatorname{sen}(2) \approx 0.765147$$

Tercera manera: Resolver la integral "a pie"

$$C:\begin{cases} C_1:\ \mathbf{r}_1(t) = (t^2+1, t, 0), & t\in[0,2] \\ -C_2:\ \mathbf{r}_2(t) = (t^2+1, t, 2-t), & t\in[0,2] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\\
&= \int_0^2 \left(0,\, 5,\, \operatorname{sen}\left(t^2+1\right)\right)\cdot(2t,1,0)\,dt - \int_0^2 \left(\operatorname{sen}(2-t)\cos\left(t^2+1\right),\, 5\,, \operatorname{sen}\left(t^2+1\right)\cos(2-t)\right)\cdot(2t,1,-\\
&= \int_0^2 5\,dt - \int_0^2 \left(2t\operatorname{sen}(2-t)\cos\left(t^2+1\right) + 5 - \operatorname{sen}\left(t^2+1\right)\cos(2-t)\right)\,dt\\
&= 10-\frac{1}{2}(20-\cos(1)+\cos(3)) \approx 0.765147
\end{aligned}$$