Walter Mora
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Apuntes y prácticas del curso

MA-1404 Cálculo

Selección de ejercicios con respuestas

II Semestre, 2018

Compartir

https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

http://www.matematicainteractivacr.com/

Las aplicaciones interactivas requieren haber instalado la aplicación gratuita:

Wolfram CDFPlayer https://www.wolfram.com/cdf-player/

Wolfram CDF Player

Revista digital
Matemática, Educación e Internet. (https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/).

Índice general

1 PRELIMINARES: LOS NÚMEROS REALES — PÁGINA 3
1.1 Ejercicios 7

2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN: DEFINICIÓN FORMAL — PÁGINA 9
2.1 Ejercicios 13

3 CÁLCULO DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO — PÁGINA 15
3.1 Teoremas básicos 15
3.2 Ejercicios 16

4 CÁLCULO DE LÍMITES INFINITOS Y LÍMITES AL INFINITO — PÁGINA 20
4.1 Limites unilaterales 20
4.2 Ejercicios 21
4.3 Limites infinitos 23
4.4 Limites al infinito 24
4.5 Ejercicios 28

5 CONTINUIDAD — PÁGINA 33
5.1 Ejercicios 36

6 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN — PÁGINA 41
6.1 Derivadas: Defínción y teoremas 41
6.2 Regla de la cadena 43
- Derivación Implícita 43
- Derivación logarítmica 44

6.3 Ejercicios 45

7 APLICACIONES DE LA DERIVADA — PÁGINA 53
7.1 Teorema del valor medio para derivadas 53

7.2 Extremos locales. 54
7.3 Concavidad y puntos de inflexión 55
7.4 Regla de L'Hopital 58
7.5 Ejercicios 59

8 INTEGRACIÓN — PÁGINA 75
8.1 Introducción 75
8.2 Integral de Riemann (Integral Definida) 76
- Particiones de $[a,b]$ 76
- Cálculo de integrales usando sumas de Riemann 79
- "Álgebra" de las funciones R-integrables 83
8.3 Primitivas e integrales indefinidas 85
- Integral indefinida. 85
8.4 Cálculo de "integrales indefinidas" 88
- Método de sustitución 88
- Método de integración "por partes" 88
8.5 Teorema fundamental del cálculo 89
- Teoremas de valor medio para integrales 94
8.6 Cálculo de Integrales definidas. Área 95
- Método de integración "por partes" en la integral definida 95
- Método de sustitución en la integral definida 95
8.7 Área 97
8.8 Ejercicios 98
- Integral de Riemann 98
- Primitivas y Teorema fundamental del Cálculo 100
- Cálculo: Integración definida 105
- Cálculo de áreas 107

BIBLIOGRAFÍA — PÁGINA 111

9 SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS — PÁGINA 114

Créditos

Esta práctica: “Apuntes y prácticas del curso de Cálculo (para computación)” es el resultado de la selección de ejercicios de los libros y las prácticas consignadas en la bibliografía.

Citar como:

W. Mora et al. “Apuntes y prácticas del curso de Cálculo (para computación). Selección de ejercicios.” Revista digital, Matemática, Educación e Internet.

https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/no_revisado/

https://www.matematicainteractivacr.com/

Capítulo 1

Preliminares: Los números reales

En este resumen, vamos a presentar algunas propiedades de los números reales que serán muy útiles para describir el comportamiento de las funciones. Las demsotraciones formales usualmente usarán estas propiedades. Aunque los números reales se pueden presentar como una construcción desde los números naturales, aquí el enfoque es axiomático: Asumimos la existencia de $\mathbb{R}$ y postulamos las propiedades que lo caracterizan.

Axioma (del buen ordenamiento de $\mathbb{N}$)

Si S es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, entonces existe $m \in S$ tal que $m \leq k$ para todo $k \in S$

Teorema 1.1 (Principio de Inducción)

Sea $m \in \mathbb{N}$. Si $P(n)$ es una proposición para cada $n \geq m$, entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq m$ si se cumplen las dos condiciones siguientes

a.) $P(m)$ es verdadero

b.) para cada $k \geq m$, si $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

Axiomas de campo. El conjunto de los números reales se puede describir como un conjunto "completo y ordenado". Asumimos la existencia de un conjunto $\mathbb{R}$ con dos operaciones "$+$" y "$\cdot$" llamadas adicoón y multiplicación, respectivamente, tal que cumplen las siguientes propiedades (de campo):

a.) $\forall\ x,y \in \mathbb{R},\ x+y \in \mathbb{R}$ y, si $x = w$ y $y = z$, entonces $x+y = w+z$.

b.) $\forall\ x,y \in \mathbb{R},\ x+y = y+x$

c.) $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R},\ x+(y+z) = (x+y)+z$

d.) Existe un único número real 0 tal que $0+x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

e.) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x+(-x) = 0$

f.) $\forall\ x,y \in \mathbb{R},\ x\cdot y \in \mathbb{R}$ y, si $x = w \wedge y = z$, entonces $x \cdot y = w \cdot z$.

g.) $\forall\ x,y \in \mathbb{R},\ x\cdot y = y \cdot x$

h.) $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R},\ x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$

i.) Existe un único número real 1 con $1 \neq 0$, tal que $1 \cdot x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

j.) Para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, existe un único $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$. También se escribe $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$.

k.) $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R},\ x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

La resta $x - y$ se define como $x + (-y)$ y el cociente $\dfrac{x}{y} = x \cdot \dfrac{1}{y}$, además si $n \in \mathbb{N},\ x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ veces}}$, etc.

Axiomas de orden. Además de los axiomas de campo, los números reales también satisfacen los siguientes axiomas de orden:

a.) $\forall\ x,y \in \mathbb{R}$ entonces se cumple exactamente una de las siguientes relaciones: $x = y,\ x > y$, o $x < y$ **(Ley de tricotomía).**

b.) $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$, si $x < y \wedge y < z$, entonces $x < z$

c.) $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$, si $x < y$, entonces $x + z < y + z$

d.) $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$, si $x < y \wedge z > 0$ entonces $x \cdot z < y \cdot z$

De aquí podemso deducir algunas propiedades familiares:

Teorema 1.2

Sean $x,y,z \in \mathbb{R}$.

a.) Si $x + z = y + z$, entonces $x = y$

b.) $x \cdot 0 = 0$

c.) $-0 = 0$

d.) $(-1) \cdot x = -x$

e.) $x \cdot y = 0 \iff x = 0$ o $y = 0$

f.) $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$, si $x < y \wedge z < 0$ entonces $x \cdot z > y \cdot z$

Los números racioneales. Recordemos que $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{m}{n} \text{ tal que } m,n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0.\right\} \subset \mathbb{R}$. Este conjunto también es un campo ordenado. Como usual,

a.) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{p}{q} = \dfrac{a \cdot q + b \cdot p}{b \cdot q}$

b.) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{p}{q} = \dfrac{a \cdot p}{b \cdot q}$

c.) $\dfrac{a}{b} \geq \dfrac{p}{q} \iff \dfrac{a}{b} - \dfrac{p}{q} \geq 0$

La siguiente propiedad es de gran utilidad:

Teorema 1.3

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq y + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Entonces $x \leq y$.

Valor absoluto. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces el valor absoluto de $\mathbb{R}$ es $|x|$, y se define como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Las propiedades básicas del valor absoluto son:

Teorema 1.4

Sean $x, y, a \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$, entonces

a.) $|x| \geq 0$ y $|x| \geq x$.

b.) $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

c.) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

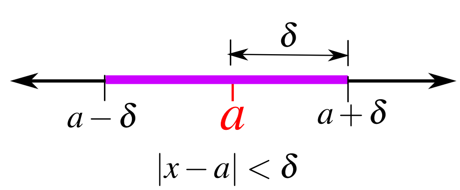
d.) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (**desigualdad triangular**).

- Observe que en la desigualdad $|x + y| \leq |x| + |y|$ podemos sustituir $x - c$ por x y $y - c$ por y y obtenemos

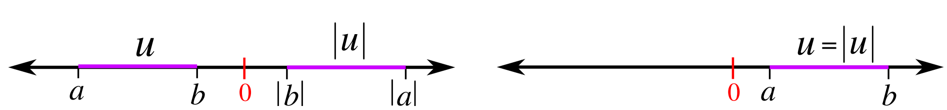
$$|x - y| \leq |x - c| + |c - y|$$

- También observe que, como $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$, entonces

$$|x - a| < \delta \implies -\delta < x - a < \delta \implies a - \delta < x < a + \delta$$



- De gran utilidad es visualizar el valor absoluto de manera geométrica



a.) Si $a < u < b < 0 \implies |b| < |u| < |a|$

b.) Si $0 < a < u < b \implies a < |u| < b$

c.) Si $a < 0 < b$ y si $a < u < b \implies \text{mín}\{|a|,|b|\} < |u| < \text{máx}\{|a|,|b|\}$

Axioma de completitud. Hasta ahora los axiomas y las propiedades que hemos enunciado son válidas tanto para $\mathbb{R}$ como para $\mathbb{Q}$. Hay un axioma adicional que hace la diferencia.

Conjuntos acotados. Sea S subconjunto de $\mathbb{R}$. Si existe un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \geq s$ para todo $s \in S$ entonces decimos que M es una cota superior de S. El concepto de cota inferior se define de manera similar.

Supremo. Si una cota superior $M \in S$, entonces $M = \text{máx}\, S$. Si S subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, entonces la más pequeña cota superior de S se llama *supremo* de S y se escribe $M = \text{Sup}\, S$.

Por ejemplo, si consideramos los intervalos $S_1 = [a,b]$ y $S_2 = [a,b[$, entonces $b = \text{máx}\, S_1$ y $b = \text{Sup}\, S_2$

(Axioma de completitud)

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que es acotado superiormente, tiene supremo

Observe que $S = \left\{q \in \mathbb{Q} \text{ tal que } 0 \leq q \leq \sqrt{2}\right\}$ no tiene supremo como subconjuto de $\mathbb{Q}$ pues $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, pero todo cambia si $q \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.5 (Propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$)

$\mathbb{N}$ no es acotado superiormente en $\mathbb{R}$. Equivalentemente,

a.) para cada $z \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > z$

b.) para cada $x,y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$

c.) para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n} < x$

Teorema 1.6 (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$)

Si $x,y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

1.1 Ejercicios

R **1.1.1** Verifique: Si $x,y \in \mathbb{R}$ tal que $y < x$, entonces $\dfrac{x+y}{2} < x$

R **1.1.2** Verifique: Si $x,y \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq y + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Entonces $x \leq y$.

R **1.1.3** Verifique la regla de los signos: Si $x,y \in \mathbb{R}, entonces$

a.) $-(-x) = x$

b.) $(-x)y = -(xy)$

c.) $(-x)(-y) = xy$

R **1.1.4** Verifique que si $x,y,z \in \mathbb{R}$ con $z \neq 0$, entonces $xz = yz \implies x = y$. ¿porqué es necesaria la hipótesis $z \neq 0$

R **1.1.5** Verifique que si $x,y,z \in \mathbb{R}$, entonces

a.) si $x \neq 0 \implies x^2 > 0$

b.) si $x > 1 \implies x^2 > x$

c.) si $0 < x < 1 \implies x^2 < 1$

d.) si $0 < x < y \implies 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$

e.) si $0 < x < y \implies x^n < y^n$ con $n \in \mathbb{N}$

f.) si $0 < x < y \implies \sqrt{x} < \sqrt{y}$

R **1.1.6** ¿Bajo qué condiciones, si $x < y$ entonces $x^2 < y^2$?

R **1.1.7** Verifique: Si $x \geq 0$ y $x \leq \epsilon$, para todo $\epsilon < 0$, entonces $x = 0$.

R **1.1.8** Si $x,y \in \mathbb{R}$, verifique que $|x - y| = |y - x|$

R **1.1.9** Si $x,y \in \mathbb{R}$, verifique

a.) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (sugerencia: $|x| = |x - y + y|$ y $|y| = |y - x + x|$).

b.) $|x - y| < c \implies |x| < |y| + c$

c.) Si $|x - y| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, entonces $x = y$

Ⓡ **1.1.10** Verifique que si $0 < x-a < b$, entonces $|x-a| < b$

Ⓡ **1.1.11** Verifique que si $0 < |x-3| < 1$, entonces $|x-2| < 2$.

Ⓡ **1.1.12** Sean $p,a,b \in \mathbb{R}$. Si $0 < a < p < b$, verifique que $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{p} < \dfrac{1}{a}$

Ⓡ **1.1.13** Verifique que si $0 < |x-2| < \dfrac{1}{2}$, entonces $\dfrac{1}{|x-1|} < 2$

Ⓡ **1.1.14** Verifique que si $0 < |x-2| < \dfrac{1}{2}$, entonces $\dfrac{7}{2} < |x-6| < \dfrac{9}{2}$

Ⓡ **1.1.15** Verifique que si $0 < |x-2| < \dfrac{1}{2}$, entonces $\dfrac{|x-6|}{|x-1|} < 9$

Ⓡ **1.1.16** Verifique que si $|x-3| < \dfrac{\epsilon}{5}$, entonces $|5x-15| < \epsilon$

Ⓡ **1.1.17** Verifique que si $|x-2| < \dfrac{\epsilon}{2}$, entonces $|2\,\mathrm{sen}(x)(x-2)| < \epsilon$

Ⓡ **1.1.18** Sea $\delta = \mathrm{mín}\left\{1, \dfrac{\epsilon}{2}\right\}$. Verifique que si $0 < |x-3| < \delta$, entonces $|x^2-5x+6| < \epsilon$

Ⓡ **1.1.19** Sea $\delta = \mathrm{mín}\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{\epsilon}{9}\right\}$. Pruebe que si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{x^2+3x+1}{x-1} - 11\right| < \epsilon$

Ⓡ **1.1.20** Sea $N > 0$ y sea $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{N}}$. Verifique que si $0 < |x-6| < \delta$, entonces $\dfrac{2}{(x-6)^2} > N$

Ⓡ **1.1.21** Verifique que si $0 < |x-1| < \dfrac{\epsilon}{2}$, entonces $\left|\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1} - 1\right| < \epsilon$

Ⓡ **1.1.22** Verifique que si $0 < |x-3| < \mathrm{mín}\left\{1, \dfrac{\epsilon}{9}\right\}$, entonces $|x^2+2x+6-21| < \epsilon$

Ⓡ **1.1.23** Encuentre δ tal que si $|x-2| > \delta$, entonces (en cada caso),

a.) $|x^2+x-6| < 1$

b.) $|x^2+x-6| < 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$ fijo.

c.) $|x^2+x-6| < \epsilon$ con $\epsilon > 0$ dado

Capítulo 2

Límite de una función: Definición formal

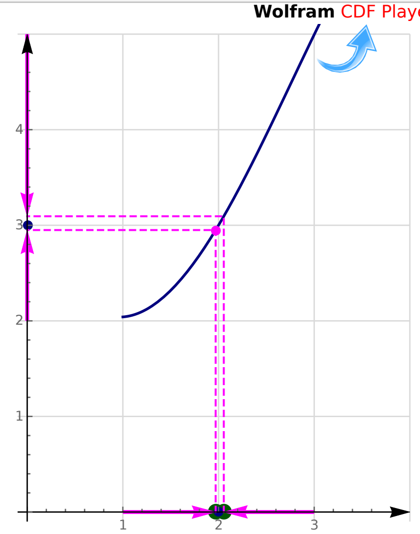
Nos interesa conocer hacia dónde tienden los valores de una función f, conforme nos acercamos a un punto $x = c$.

Por ejemplo, consideremos el comportamiento de $f(x) = 2(x-2)\,\text{sen}(x/2) + 3$ en los alrededores de $x = 2$, es decir, tomando valores por la izquierda de $x = 2$, denotado $x \to 2^-$, y tomando valores por la derecha de $x = 2$, denotado $x \to 2^+$.

Seleccione y arrastre los puntos verdes

$f(x) = 2(x-2)\text{sen}(x/2) + 3$

Tabla de Valores		Tabla de Valores	
$x \to 2^-$	$f(x)$	$x \to 2^+$	$f(x)$
1.955	2.9253808	2.125	3.21839373
1.97	2.95000367	2.125	3.21839373
1.97	2.95000367	2.095	3.16457355
1.97	2.95000367	2.08	3.13798468
1.97	2.95000367	2.055	3.09416102



Compartir |

Como se observa, conforme nos acercamos a $x = 2$ por la derecha y por izquierda, entonces parece que $f(x)$ tiende a $L = 3$, y no pasa de ahí (es un valor "límite"). Escribimos

$$\lim_{x\to 2} 2(x-2)\,\text{sen}(x/2) + 3 \;=\; 3$$

Desafortunadamente, con solo la tabla de arriba, no podemos estar seguros de que si nos acercamos más a $x = 2$, la función va seguir acercándose cada vez más a $L = 3$, como su valor límite.

Para estar seguros de que el límite existe, es decir, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, necesitamos una prueba formal, basada en una definición aceptable del límite de una función: El límite de f, cuando x tiende a c, es L si $f(x)$ se puede acercar a L, tanto como queramos, tomando valores de x suficientemente cercanos a c.

La "cercanía" de $f(x)$ a L se estima con "$|f(x)-L|<\epsilon$": Si ϵ es muy pequeño, $f(x)$ está muy cercano a L. La "cercanía" de x a c se estima con "$|x-c|<\delta$.". En la defición que sigue, la escogencia del δ usualmente depende del valor de ϵ.

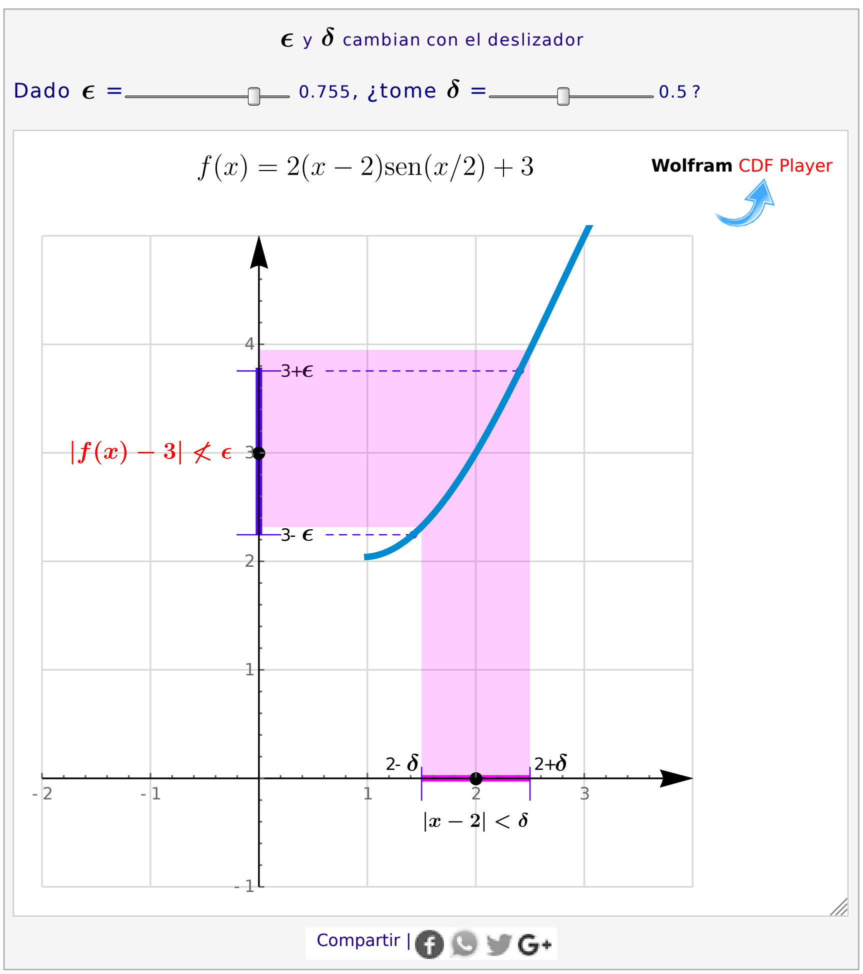
Definición 2.1 (formal de límite)

Sea $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $x=c$ un punto de acumulación[1] de D. Decimos que

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \ \text{ tal que } \ |f(x)-L| < \epsilon \text{ siempre que } \ 0 < |x-c| < \delta$$

En la aplicación interactiva que sigue, podemos tomar valores para ϵ pequeños y buscar valores para δ adecuados. recordemos que queremos formalizar el límite

$$\lim_{x\to 2} 2(x-2)\,\text{sen}(x/2)+3 \ = \ 3$$



[1]Si D es subconjunto de $\mathbb{R}$, decimos que x es un punto de acumulación de D si cualquier intervalo abierto que contenga a x, interseca a D

Para verificar que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ usando la definición de límite, usualmente analizamos la expresión $|f(x) - L|$ con tal de establecer un valor para δ (posiblemente en términos de ϵ), de tal manera que se cumpla la definición.

La definción formal "$\epsilon - \delta$" es debida a Karl Weierstrass (1815-1897) aunque ya se usaba mucho antes, en los argumentos de prueba por A. Cauchy y B. Bolzano.

Ejemplo 2.1

Verifique, usando la definición de límite de una función, que

$$\lim_{x\to 2} 2(x-2)\operatorname{sen}(x/2) + 3 = 3$$

Solución: Lo que hacemos es, dado $\epsilon > 0$, analizar $|2(x-2)\operatorname{sen}(x/2) + 3 - 3|$ con la intención de encontrar δ de tal manera que

$$\text{si } 0 < |x-2| < \delta \implies |2(x-2)\operatorname{sen}(x/2) + 3 - 3| < \epsilon$$

Bien, usamos el hecho de que $|\operatorname{sen} x| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} |2(x-2)\operatorname{sen}(x/2) + 3 - 3| &= |2(x-2)\operatorname{sen}(x/2)| \\ &< 2|x-2| < \epsilon \end{aligned}$$

de donde, bastaría que $|x-2| < \dfrac{\epsilon}{2}$, es decir, $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$.

Formalmente: Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$. De esta manera,

$$\begin{aligned} \text{si } 0 < |x-2| < \frac{\epsilon}{2} \implies |2(x-2)\operatorname{sen}(x/2) + 3 - 3| &= |2(x-2)\operatorname{sen}(x/2)| \\ &< 2|x-2| \\ &< 2\cdot\frac{\epsilon}{2} \quad \text{pues } |x-2| < \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2 **(Acotar el δ)**

Verifique, usando la definición de límite de una función, que

$$\lim_{x\to 3} x^2 - 5x + 12 \;=\; 6$$

Solución: Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar δ (que posiblemente dependa de ϵ), tal que

$$\text{si } 0 < |x-3| < \delta \implies |x^2 - 5x + 12 \;-\; 6| < \epsilon$$

Como antes, debemos analizar $|x^2 - 5x + 12 \;-\; 6|$:

$$\begin{aligned} |x^2 - 5x + 12 \;-\; 6| &= |x^2 - 5x + 6| \\ &= |(x-3)(x-2)| \;<\; \delta\,|x-2| \;<\; \epsilon \text{ pues } |x-3| < \delta \end{aligned}$$

Mmmmm... para poder visualizar lo que debe ser δ, necesitamos cambiar (acotar) $|x-2|$ por un valor más grande. Eso se podría lograr si *acotamos* provisonalmente el δ: De por sí sabemos que algún valor $\delta < 1$ podría servir (escogemos un entorno donde la función no se indefina).

Así que supongamos que $\delta < 1$, entonces

$$|x-3| < 1 \implies 2 < x < 4 \implies 0 < x-2 < 2 \implies |x-2| < 2.$$

De esta manera: $|x^2 - 5x + 6| \;<\; |x-2|\delta \;<\; 2\delta \;< \epsilon$, así, bastaría tomar $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$ siempre y cuando $\delta < 1$..., es decir,

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{2}\right\} \quad \text{y entonces} \quad \begin{cases} \delta & < \quad 1 \\ \delta & < \quad \epsilon/2 \end{cases}$$

Formalmente: Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \text{mín}\left\{1, \dfrac{\epsilon}{2}\right\}$. De esta manera,

$$\begin{aligned} \text{si } 0 < |x-3| < \delta \implies |x^2 - 5x + 12 \;-\; 6| &= |x-3|\,|x-2| \\ &< \frac{\epsilon}{2}|x-2| \quad (\text{pues } |x-3| < \delta < \frac{\epsilon}{2}) \\ &< 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} \quad (\text{pues como } |x-3| < \delta < 1 \implies |x-2| < 2) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3 **(Acotar el δ)**

Usando la definición formal de límite, muestre que $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x)=2$

Solución: HQM Dado $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ tal que $0<|x-2|<\delta \implies |x^2-x-2|<\varepsilon$

Tome $\delta=\text{mín}\left\{1,\frac{\varepsilon}{4}\right\}$, entonces $\begin{cases} |x-2|<\delta \implies |x-2|<\dfrac{\varepsilon}{4} \\ |x-2|<\delta \implies |x-2|<1 \implies |x+1|<4 \end{cases}$

De este modo,

$$|x-2|<\delta \implies |x^2-x-2|=|x-2|\,|x+1|<\frac{\varepsilon}{4}\cdot 4=\varepsilon \checkmark$$

2.1 Ejercicios

Ⓡ **2.1.1** Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to 2}5x-3 \;=\; 7$

Ⓡ **2.1.2** Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to a}mx+b \;=\; m\cdot a+b$

Ⓡ **2.1.3** Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to a}5\cos(x)(x-1)+2 \;=\; 2$

Ⓡ **2.1.4** Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2+11x+2}{x+2} \;=\; 1$

Ⓡ **2.1.5** Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-8x+6}{x-1} \;=\; -4$

Ⓡ **2.1.6** Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-12x}{x} \;=\; -3$

Acotar el δ

Ⓡ **2.1.7** Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to 2}x^2 \;=\; 4$

Ⓡ **2.1.8** Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2}{x-2} \;=\; 4$

Ⓡ **2.1.9** Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x+1}{x-1} \;=\; 11$

Ⓡ **2.1.10** Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to 3}x^2+2x+6 \;=\; 21$

2.1.11 Sea f y g funciones tales que $\lim_{x \to a} f(x) = 4$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 7$. Utilice la defnición formal de límite para demostrar que

$$\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = 11$$

2.1.12 Sea $L > 0$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ demostrar que existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \implies \frac{2L}{3} < f(x) < \frac{4L}{3}$$

Capítulo 3

Cálculo del límite de una función en un punto

3.1 Teoremas básicos

Para calcular el límite de una función (si existe), usamos algunos límites ya establecidos y un teorema que nos permite calcular límites de funciones más generales.

Teorema 3.1 (Unicidad)

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, entonces es L es único

Teorema 3.2 (Límites de algunas funciones elementales)

a.) $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a) \quad \text{con } P(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$

b.) $\lim\limits_{x\to a} |x| = |a|$

c.) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad \text{con } a > 0$

d.) $\lim\limits_{x\to a} \ln x = \ln a \quad \text{con } a > 0$

e.) $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$

f.) $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$

g.) $\lim\limits_{x\to a} \tan x = \tan a \quad \text{con } a \neq \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

h.) $\lim\limits_{x\to a} b^x = b^a \quad \text{con } b > 0$

Teorema 3.3 (Álgebra de límites)

Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, entonces

a.) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$

b.) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$. En particular $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = kA$

c.) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in D$ y si $B \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

Teorema 3.4 (Composición)

Si $\lim_{x\to a} g(x) = B$ y si $\lim_{x\to B} f(x) = f(B)$ entonces $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(B)$

Teorema 3.5

Sea I un intervalo abierto que contiene a $x = c$ y supongamos que g y f están definidas en I excepto tal vez en $x = c$. Si $g(x) = f(x)$ para todo $x \in I - \{c\}$, entonces

$$\lim_{x\to c} g(x) = L \implies \lim_{x\to c} f(x) = L$$

Teorema 3.6 (del emparedado)

Sea I un intervalo abierto que contierne a $x = c$ y supongamos que g, f y h están definidas en I excepto tal vez en $x = c$. Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \in I - \{c\}$, entonces

$$\lim_{x\to c} g(x) = L = \lim_{x\to c} h(x) \implies \lim_{x\to c} f(x) = L$$

Aplicación: En las cercanías de $x = 0$ (excepto $x = 0$) se puede probar que $\cos x \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$, entonces por el teorema del emparedado, tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

3.2 Ejercicios

Límites inmediatos y de la forma "$\frac{0}{0}$"

Ⓡ **3.2.1** Simplifique la expresión y calcule su límite

1) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 + 5x - 3x^2 - 15}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{3x - x^2}{1 + \sqrt{1 + x}}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$

4) $\displaystyle\lim_{b\to a^2} \frac{a^3 - b - ab + a^2}{2a^3 - 2ab + b - a^2}$

5) $\displaystyle\lim_{w\to a} \frac{2w^3 - 4aw^2 + 2a^2w}{w^4 + aw^3 - 2a^2w^2}$

6) $\displaystyle\lim_{t\to 5/2} \frac{4 - \sqrt{2t + 11}}{2t - 5}$

7) $\lim\limits_{p \to 1} \dfrac{p^3+p^2-2}{2-\sqrt{p+3}}$

8) $\lim\limits_{t \to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+t}}{1-\sqrt{5-t}}$

9) $\lim\limits_{w \to -1} \dfrac{w+1}{3w+\sqrt{6w^2+3}}$

10) $\lim\limits_{a \to 1} \dfrac{\sqrt{1+8a}-3}{\sqrt{4a}-2}$

11) $\lim\limits_{d \to -1} \dfrac{\sqrt{3d^2-5d-2}-\sqrt{1-5d}}{\sqrt{d^2-d}-\sqrt{3-d^2}}$

12) $\lim\limits_{t \to -1} \dfrac{t^2+t}{\sqrt[3]{2t+1}+\sqrt[3]{t+2}}$

13) $\lim\limits_{x \to -2} 2.1^{(|x|-2)/(x+2)}$

14) $\lim\limits_{y \to 4} \dfrac{\sqrt{y}-|y-2|}{y-4}$

15) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[4]{(x+2)^4}}{|(x+1)^2-1|}$

Cambio de variable

3.2.2 Simplifique la expresión y calcule su límite

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

2) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{5z+1}-\sqrt[4]{5z+1}}{z}$

3) $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{2-\sqrt[6]{3a+64}}{5a}$

4) $\lim\limits_{y \to 32} \dfrac{\sqrt[5]{y^2}-3\cdot\sqrt[5]{y}+2}{y-4\cdot\sqrt[5]{y^3}}$

5) $\lim\limits_{y \to 5} \dfrac{2-\sqrt[4]{4y-4}}{\sqrt{y-1}-2}$

6) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+ct}-1}{t}$

7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2-x}-1}{1+\sqrt[5]{x-2}}$

Trigonométricos

En algunos de estos ejercicios se usa el límite especial: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

3.2.3 Calcule

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+x\operatorname{sen} x}{\cos x-1}$

2) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t-\operatorname{sen}(2t)}{t+\operatorname{sen}(3t)}$

3) $\lim\limits_{n \to 0} \dfrac{1-\cos^3 n}{\operatorname{sen}^2 n}$

4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

5) $\lim_{y\to 0} \dfrac{\tan y - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen}^3 y}$

6) $\lim_{a\to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos a}}{\operatorname{sen}^2 a}$

7) $\lim_{z\to 0} \dfrac{\sec(2z)\cdot\tan(3z)}{4z}$

8) $\lim_{y\to 0} \dfrac{\sec y - 1}{y^3 \csc y}$

9) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x + x^2 \cos x}{x \tan x}$

10) $\lim_{z\to 0} \dfrac{\tan(3z)}{8z\cos z}$

11) $\lim_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} z - \tan z}{z^2\cdot \operatorname{sen}(2z)}$

12) $\lim_{t\to -4\pi/3} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$

13) $\lim_{w\to \pi/4} \dfrac{\operatorname{sen} w - \cos w}{1-\tan w}$

14) $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{\cot x \ \cos x}{1-\operatorname{sen} x}$

15) $\lim_{\beta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5\beta}{\beta}$

16) $\lim_{z\to 0} \dfrac{5\operatorname{sen}^2(3z)}{2z^2}$

17) $\lim_{y\to 1} \dfrac{y^2-1}{\operatorname{sen}(\pi y)}$

18) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{7}\right)^{\cot|x|}$

19) $\lim_{\alpha\to \pi} \dfrac{1-\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\pi-\alpha}$

20) $\lim_{x\to -\pi/6} \dfrac{\tan(x+\pi/6)}{6x+\pi}$

21) $\lim_{\beta\to 5\pi/6} 3\operatorname{sen}\beta - 2\cos\beta$

22) $\lim_{u\to a} \dfrac{\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} a}{u-a}$ con a constante

23) $\lim_{u\to a} \dfrac{\cos u - \cos a}{u-a}$ con a constante

24) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{sen}(7x)}{1-\sqrt{\cos x}}$

3.2.4 Las siguientes preguntas evalúan conceptos generales.

1) ¿Es correcto decir que $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^4-16x^2} = 0$?

2) ¿ Bajo que condiciones se satisface que $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \dfrac{x-2}{x+3}$?.

3) ¿Porqué es correcto afirmar que $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x+3}$?

4) Sea f una función tal que $\lim_{x\to 3} f(x) = 7$, ¿ es posible que $f(3) = 5$?. Justifique su respuesta.

5) Muestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)]$ puede existir aunque $\lim_{x\to a} f(x)$ y

$\lim\limits_{x \to a} g(x)$ no existan.

6) Determine el o los valores de a de modo que $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$ exista.

7) Encuentre los números reales a y b tales que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$

8) Sean f y g funciones tales que $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = 2$ y $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = 1$. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]$ y $\lim\limits_{x \to a} [g(x)]$ existen. Determine el valor de $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)]$.

Capítulo 4

Cálculo de límites infinitos y límites al infinito

4.1 Limites unilaterales

Hay algunas funciones en las que solo podemos calcular límites por la derecha o por la izquierda de algún valor, por ejemplo $\sqrt{x}$ y $\ln x$ están definidas para $x>0$ mientras que $\sqrt{-x}$ y $\ln(-x)$ están definidas para $x<0$. Hay otros tipos de funciones que pueden variar su comportamiento ya sea por la derecha o por la izquierda de un valor dado.

La notación $x \to a^+$ indica que nos acercamos a $x=a$ *por la derecha*, mientras que $x \to a^-$ indica que nos acercamos a $x=a$ *por la izquierda.* La notación $x \to a$ indica que nos acercamos a $x=a$ por *ambos lados.*

Definición 4.1 (Límites unilaterales)

Límite por la derecha: Se dice que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ si y sólo si para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<x-a<\delta$ entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$. El límite por la derecha de $f(x)$ en "$x=a$" es L.

Límite por la izquierda: Se dice que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = R$ si y sólo si para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<a-x<\delta$ entonces $|f(x)-R|<\varepsilon$. El límite por la izquierda de $f(x)$ en "$x=a$" es R.

El límite de una función *existe* y es L, solo sus límites unilaterales existen y son iguales a L

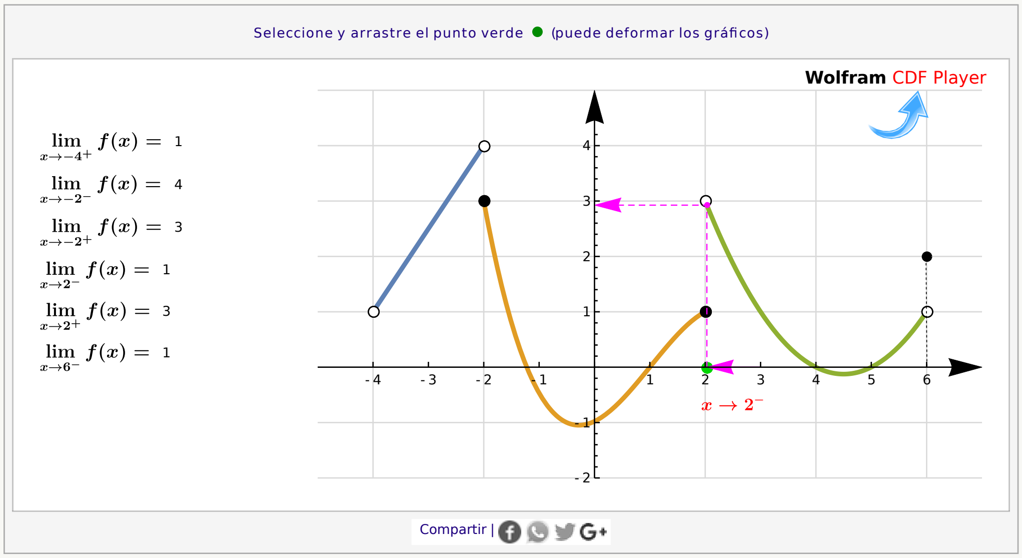
Teorema 4.1

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = L = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Este teorema nos dice que en principio los límites unilaterales se calculan de la manera usual (y los teoremas anteriores son válidos para límites unilaterales), excepto que el comportamiento de la función no sea el mismo por la izquierda y por la derecha. En este último caso decimos que el límite de f no existe, aunque los límites unilaterales pueden existir de manera independiente.

Ejemplo 4.1

En la figura que sigue se muestra la representación gráfica de una función f "a trozos"



Observe que $\lim_{x\to-2} f(x)$ no existe aunque los límites unilaterales sí existen. En particular, en $x=-4$ solo se puede establecer el límite "por la derecha", mientras que en $x=6$ solo se puede establecer el límite "por la izquierda".

4.2 Ejercicios

4.2.1 Determine, a partir del gráfico dado, los siguientes límites.

1) $\lim_{t\to3^+} g(t)$

2) $\lim_{t\to-1^-} g(t)$

3) $\lim_{t\to-1^+} g(t)$

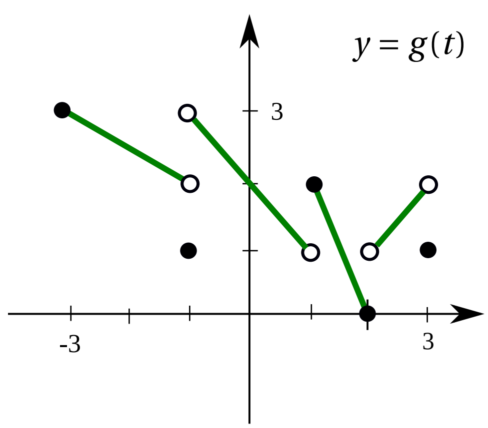
4) $\lim_{t\to1^-} g(t)$

5) $\lim_{t\to1^+} g(t)$

6) $\lim_{t\to2^-} g(t)$

7) $\lim_{t\to2^+} g(t)$

8) $\lim_{t\to3^-} g(t)$

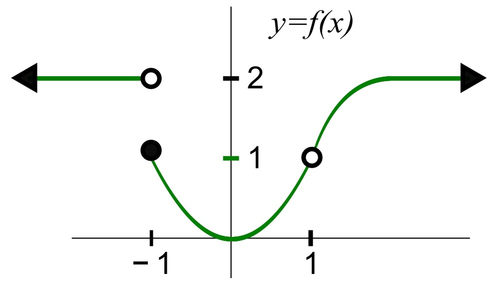


1) $\lim_{x\to 1} f(x)$

2) $\lim_{x\to 0} f(x)$

3) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

4) $\lim_{t\to 1^-} f(x)$



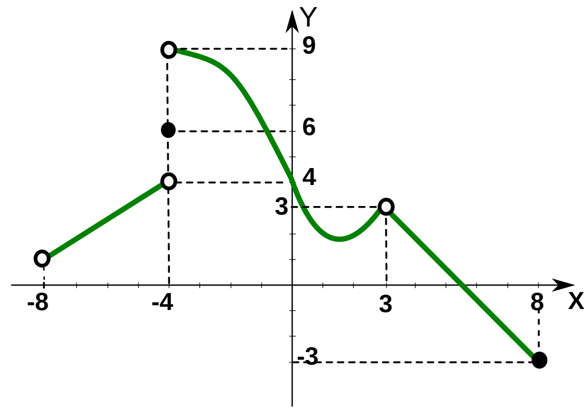
1) $\lim_{x\to -8} f(x)$

2) $\lim_{x\to -4} f(x)$

3) $\lim_{x\to 0} f(x)$

4) $\lim_{x\to 3} f(x)$

5) $\lim_{x\to 8} f(x)$



4.2.2 Las siguientes preguntas evalúan algunos límites unilaterales

1) Considere la función $g : \mathbb{R} - \{-2, -3\} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4-x^2}{(x+2)(x+3)} & \text{si} \quad x < -1 \\ x & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ 2x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

determine para cuáles $x \in \mathbb{R}$, el límite existe.

2) Considere las funciones $f(x) = \dfrac{(x-1)}{|x-1|}$ y $g(x) = \dfrac{|x-1|}{(x-1)}$

a) Verifique (analizando límites unilaterales) que $\lim_{x\to 1} f(x)$ y $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existen.

b) Verifique que $\lim_{x\to 1} [f(x) \cdot g(x)] = 1$

Nota: Este ejercicio muestra que $\lim_{x\to 1} [f(x) \cdot g(x)]$ puede existir aunque $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ no existan.

(R) **4.2.3** Considere $g(x)=\begin{cases} x^2-5 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 3x+2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 4x^2+2x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$. Calcule

1) $g(-1)$
2) $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)$
3) $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)$
4) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$
5) $g(1)$
6) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$
7) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$
8) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$
9) $g(0)$
10) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$
11) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$
12) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

4.3 Limites infinitos

Para indicar que una función f toma valores arbitrariamente grandes (hacia el infinito) conforme la variable x se aproxima a un valor $x=a$, escribimos

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

Para indicar que una función f toma valores negativos y arbitrariamente grandes en valor absoluto, conforme la variable x se aproxima a un valor $x=a$, escribimos

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty.$$

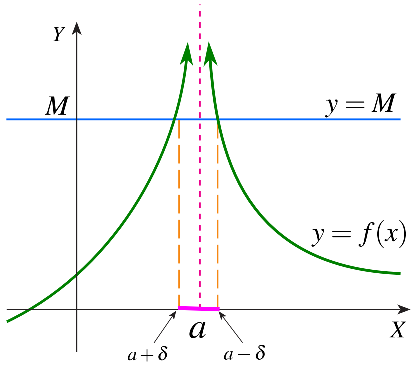
Formalmente:

Definición 4.2 (Limites infinitos)

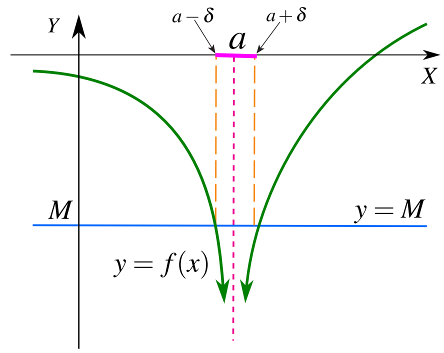
Sea I un intervalo abierto que contiene a $x=a$ y sea f una función definida en I excepto tal vez en $x=a$. Entonces

a.) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \iff \forall M>0,\, \exists\, \delta>0$ tal que si $x\in]a-\delta, a+\delta[\implies f(x)>M$

b.) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty \iff \forall M<0,\, \exists\, \delta>0$ tal que si $x\in]a-\delta, a+\delta[\implies f(x)<M$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

La definición anterior se puede adaptar para límites unilaterales, tomando la parte del intervalo adecuada.

Teorema 4.2 (Límites de algunas funciones especiales)

a.) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$

b.) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

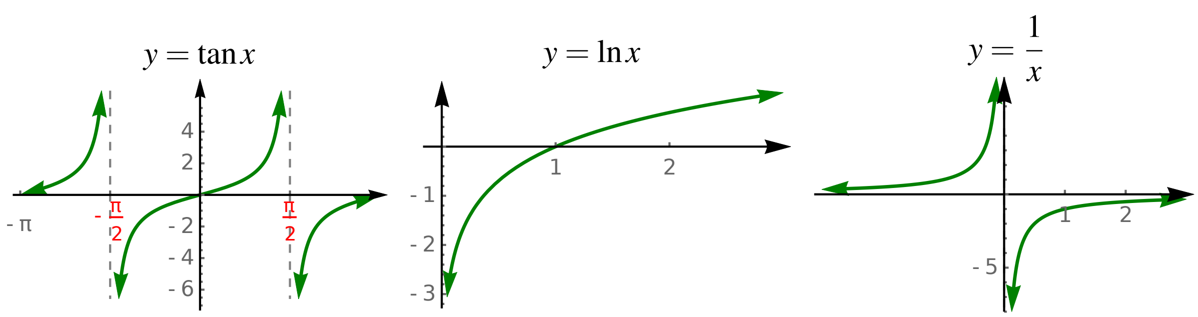
c.) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

d.) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = \infty$

e.) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = -\infty$

f.) Si $P(x) = b_m x^m + ... + b_1 x + b_0$ y $P(a) = 0$,

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{|P(x)|} = \infty$



4.4 Limites al infinito

Para indicar que una variable x toma valores arbitrariamente grandes (hacia el infinito) escribimos $x \to \infty$. Si la variable x toma valores negativos y arbitrariamente grandes en valor absoluto, escribimos $x \to -\infty$.

Definición 4.3 (Límites al infinito)

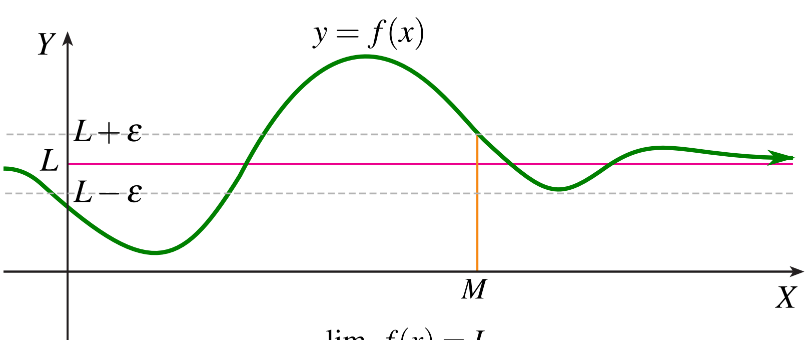
Sea f definida en algún intervalo $I =]a,\infty[$, entonces

a.) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\, M \in \mathbb{R}^+$ tal que si $x > M \implies |f(x) - L| < \varepsilon$

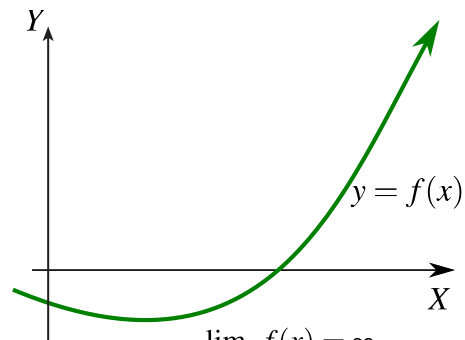
b.) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\, M \in \mathbb{R}^-$ tal que si $x < M \implies |f(x) - L| < \varepsilon$

c.) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \iff \forall M > 0, \exists\, N \in \mathbb{R}$ tal que si $x > N \implies f(x) > M$

d.) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M < 0, \exists\, N \in \mathbb{R}$ tal que si $x > N \implies f(x) < M$



$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = L$



$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Teorema 4.3 (Límites de algunas funciones especiales)

a.) Si $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$

b.) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} a_m x^m + ... + a_1 x + a_0 = \text{Sign}(a_m)\,\infty$

c.) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x} = 0$, k constante.

d.) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

e.) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$

f.) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

g.) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

h.) $$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + ... + a_1 x + a_0}{b_n x^n + ... + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \dfrac{a_m}{b_n} & \text{si} \quad m = n \\ 0 & \text{si} \quad n > m \\ \text{Sign}(a_m/b_n)\,\infty & \text{si} \quad m > n \end{cases}$$

i.) $$\lim_{x\to\infty} b^x = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad b > 1 \\ 1 & \text{si} \quad b = 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < b < 1 \end{cases}$$

En el siguiente teorema se puede cambiar sin ningún problema "$x \to a$" por "$x \to a^+$", "$x \to a^-$", "$x \to \infty$" o por "$x \to -\infty$"

Teorema 4.4 ("Áritmetica" de límites infinitos)

Sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces,

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	$F(x)$	$\lim_{x\to a} F(x)$	Brevemente
∞	∞	$f+g$	∞	"$\infty + \infty = \infty$"
∞	k	$f+g$	∞	"$k + \infty = \infty$"
$-\infty$	k	$f+g$	$-\infty$	"$k - \infty = -\infty$"
∞	∞	$f\cdot g$	∞	"$\infty \cdot \infty = \infty$"
$-\infty$	∞	$f\cdot g$	$-\infty$	"$-\infty \cdot \infty = -\infty$"
∞	$k>0$	$f\cdot g$	∞	"$\infty \cdot k = \infty,\ k > 0$"
∞	$k<0$	$f\cdot g$	$-\infty$	"$\infty \cdot k = -\infty,\ k < 0$"
k	$\pm\infty$	$\frac{f}{g}$	0	"$\frac{k}{\pm\infty} = 0$"
$k>0$	0^+	$\frac{f}{g}$	∞	"$\frac{k}{0^+} = \infty$"
∞	0^+	$\frac{f}{g}$	∞	"$\frac{\infty}{0^+} = \infty$"
$k>0$	0^-	$\frac{f}{g}$	$-\infty$	"$\frac{k}{0^-} = -\infty,\ k > 0$"
∞	0^-	$\frac{f}{g}$	$-\infty$	"$\frac{\infty}{0^-} = -\infty$"

Funciones oscilatorias. Como $\operatorname{sen} x$ oscila entre -1 y 1, no es posible estabilizar esta función cuando $x \to \infty$. Esto sucede también para $\cos x$ y $\tan x$.

a.) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}(x)$ no existe

b.) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos(x)$ no existe

c.) $\lim\limits_{x\to\infty} \tan(x)$ no existe

Formas indeterminadas. El símbolo ∞ en los límites anteriores no indican la "rapidez" con la que la función toma valores muy grandes. Esta "rapidez" puede decidir si la función f domina a la función g o viceversa. Por ejemplo, $\infty - \infty$ no es necesariamente cero:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty \text{ y } \lim_{x\to\infty} x = \infty, \text{ pero } \lim_{x\to\infty} x^2 - x = \lim_{x\to\infty} x(x-1) = \infty\cdot\infty = \infty$$

De igual manera, $\dfrac{\infty}{\infty}$ no siempre es uno:

$$\lim_{x\to\infty} 3x^2 - x = \infty \text{ y } \lim_{x\to\infty} 3x^2 = \infty, \text{ pero } \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-x}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)}{2x^2} = \frac{3}{2}(1-0) = \frac{3}{2}$$

En la siguiente tabla, las formas indeterminadas que aparecen, solo se pueden decidir al determinar (si se puediera) cuál función domina a cuál.

(Expresiones indeterminadas)

a.) $\infty - \infty$

b.) $\infty \cdot 0$

c.) $\dfrac{\infty}{\infty}$

d.) $\dfrac{0}{0}$

e.) 1^{∞}

f.) 0^{0}

g.) ∞^{0}

Teorema 4.5 (del emparedado)

Sea $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ en $]c,\infty[$, $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si } \lim_{x\to\infty} g(x) = L = \lim_{x\to\infty} h(x) \implies \lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

4.5 Ejercicios

Conceptos Básicos

4.5.1 Considere las funciones siguientes y sus representaciones gráfica. En cada caso, y si existen, determine a partir de la gráfica los límites, o los valores de la función, que se indican.

1)

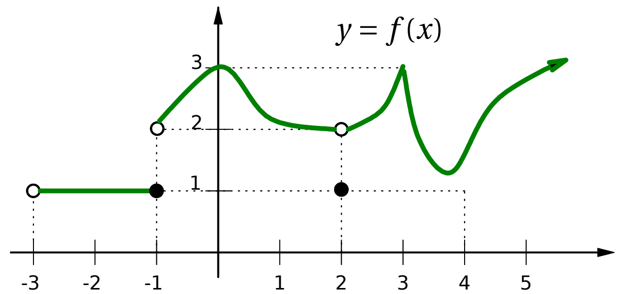
a) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

d) $f(-1)$; $f(2)$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$



2)

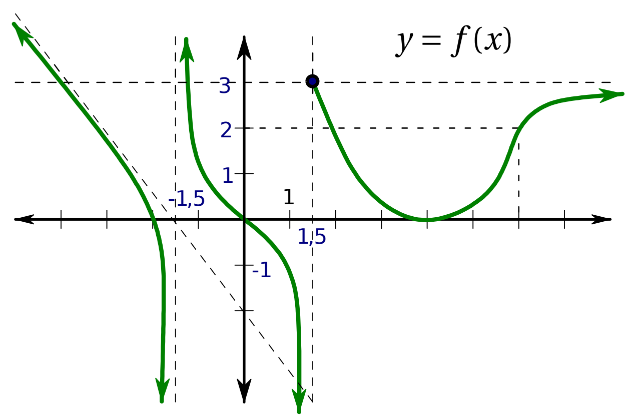
a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -3/2} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 3/2} f(x)$

d) $f(3/2)$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$



3)

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

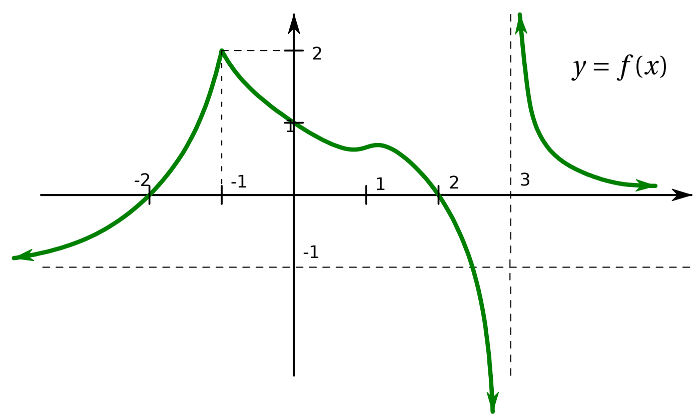
c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$



4) *a*) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

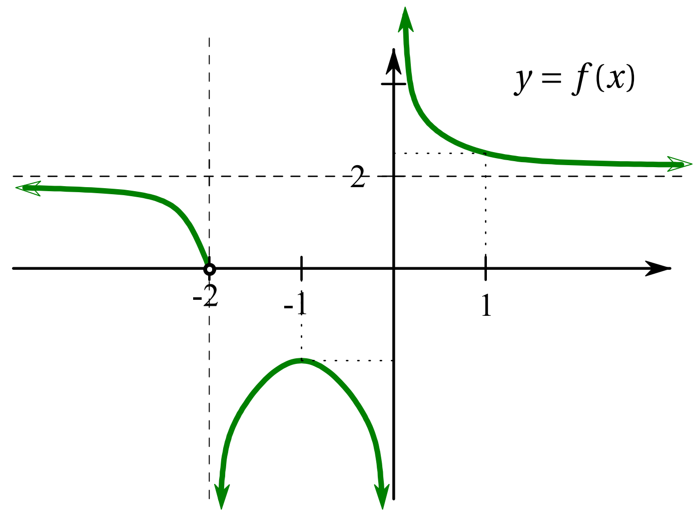
b) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$



5) *a*) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-3} g(x)$

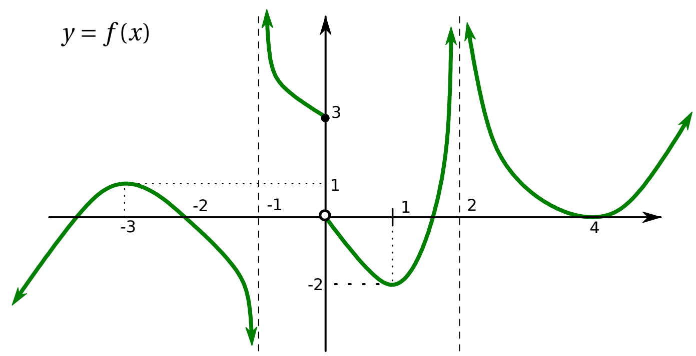
c) $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

f) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$



6) *a*) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$

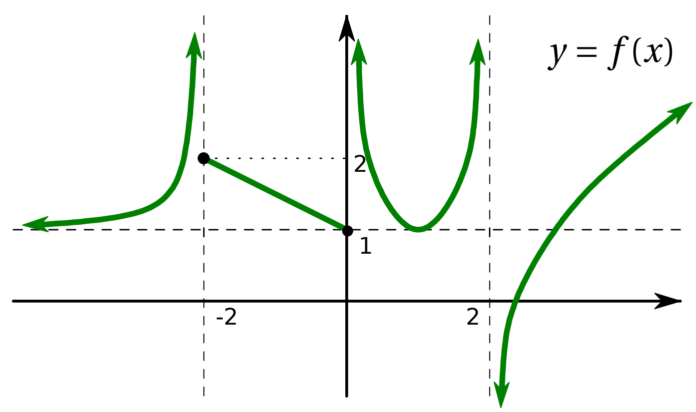
d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

g) $f(2)$

h) $f(0)$



4.5.2 Para cada uno de los siguientes casos, construya la gráfica de una función f que cumpla simultáneamente las condiciones dadas.

1) *a*) $D_f = \mathbb{R} - \{-2,3\}$

b) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 3$

d) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$

f) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$

g) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -3$

h) $f(0) = 0$

---

2) *a)* $D_f = \mathbb{R} -]0,1]$

b) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$

d) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$

f) $\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$

g) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$

h) $f(-1) = f(3) = 0$

i) $f(0) < 0$

---

3) *a)* $D_f = [-3,+\infty[$

b) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 1$

c) $f(x) \neq 0, \forall x \in]0,+\infty[$

d) $f(x) = 2, \forall x \in [-1,1]$

e) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -1$

f) $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$

g) $f(-3) = f(3) = -1$

h) $\lim_{x\to -1}$ no existe.

i) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe

j) $\forall x_0 \in [0,+\infty[$

---

4) *a)* $D_f =]-3,+\infty[- \{-2,3\}$

b) $\lim_{x\to 3} h(x) = 0$

c) $\lim_{x\to -2^-} h(x) = 4$

d) $\lim_{x\to -2^+} h(x) = 5$

e) $\lim_{x\to 2^-} h(x) = -\infty$

Cálculo de límites

Ⓡ **4.5.3** Calcule cada uno de los siguientes límites

1) $\lim\limits_{p \to -2} \dfrac{1-\sqrt{p+3}}{(p+2)^2}$

2) $\lim\limits_{p \to -1} \dfrac{p+2}{\ln(p+2)}$

3) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{2t-1}{t^2-t^4}$

4) $\lim\limits_{h \to -3} \dfrac{1}{h^2-9}$

5) $\lim\limits_{y \to 5} \dfrac{1}{y} - \dfrac{2-y}{(5-y)^2}$

6) $\lim\limits_{\beta \to \pi/2} \operatorname{sen}(\cos\beta)\sec^2\beta$

7) $\lim\limits_{x \to 2^+} \ln\left(\dfrac{x}{-2+x}\right)$

8) $\lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{\sqrt{u}}{\operatorname{sen} u}$

9) $\lim\limits_{y \to 4^+} \left(\dfrac{3}{7}\right)^{\dfrac{2^y-1}{-4\ln(5-y)}}$

10) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \dfrac{\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\dfrac{-\pi}{\pi-x}} + 2007}{\dfrac{1}{\ln(\pi+1-x)}}$

11) $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln\left(\dfrac{4}{\operatorname{sen}(3x-3)}\right)$

12) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{\frac{x+3}{x+1}} - \ln(-1+x)$

4.5.4 Calcule cada uno de los siguientes límites

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-4}{x^3+2x^2+x+2}$

2) $\lim\limits_{y \to -\infty} \dfrac{y^3-2y+1}{y-5} + \dfrac{y^2+6}{y^2-y}$

3) $\lim\limits_{r \to -\infty} \dfrac{3r+2}{\sqrt{4r^2-r+1}}$

4) $\lim\limits_{q \to \infty} \dfrac{e^q-e^{-q}}{2}$

5) $\lim\limits_{t \to \infty} \ln(t^2-4) - \ln(4t^2+1)$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2^x+4^x}{3^x-5^x} + \dfrac{|x+1|-1}{x}\right]$

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+x+3}{-x^3+1}$

9) $\lim\limits_{z \to +\infty} \dfrac{3z^2-5z+1}{\sqrt[3]{z^6+1}-z}$

10) $\lim\limits_{b \to +\infty} \left(\dfrac{b^2}{3b+x} - \dfrac{b^3}{3b^2-4}\right)$

11) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1}{2x^{\frac{4}{3}}+2x-\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^5}}$

12) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{4x^2-6}-\sqrt{4x^2-x}\right)$

13) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^5+3x^7}{2x^8}$

14) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-1}+x\right)$

15) $\lim\limits_{k \to +\infty} (e)^{\frac{x^2+x-2}{4x^3-1}}$

16) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\dfrac{x^2+5x+6}{x+1}}$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{\frac{35}{\ln(x-6)}}$

18) $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{-5x^2+3x}{|x+3|-x^2}$

Teorema del emparedado

R **4.5.5** Calcule los siguientes límites

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\operatorname{sen} x}{x^2+1}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+\cos x}{x+2}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x^2+\cos x}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\operatorname{sen} x}{x^2+1}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x\cos x+\cos^2(4-x)}{x}$

Límites usando la definición formal

R **4.5.6** Demuestre, usando la definición formal correspondiente, que

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \infty$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1}{|x-1|} = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-1}{x^2} = 5$

R **4.5.7** Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, con $L>0$, demueste que existen $A>0$ y $B>0$ (este último depende de L) tal que si $x>A \implies |f(x)|<B$

R **4.5.8** Sea I un intervalo abierto que contiene a $x=a$. Supongamos que $f(x)\geq g(x)$ para todo $x\in I$ excepto tal vez en $x=a$. Verifique que si $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$ entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

R **4.5.9** $(*)$ Verifique que $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ no existe

Capítulo 5

Continuidad

En la definición de límite $\lim_{x \to a} f(x) = L$ no se requiere que la función esté definida en $x = a$. Si f está definida en $x = a$ y $L = f(a)$, se dice quela función es continua en $x = a$.

Definición 5.1 (Continuidad en un punto)

Una función f es continua en $x = a$ si f está definida en $x = a$ y

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Es decir, f es continua en $x = a$ si

a.) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

b.) $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

(Algunas funciones continuas)

Las siguientes funciones son continuas en el dominio que se indica.

a.) $f(x) = P(x)$, $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

b.) $f(x) = \operatorname{sen} x$

c.) $f(x) = \cos x$

d.) $f(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$

e.) $f(x) = b^x$, $b > 0$

f.) $f(x) = |x|$

Teorema 5.1

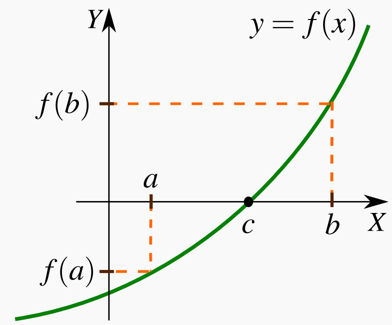
Si f y g son continuas en $x = a$, entonces la suma $f + g$, la resta $f - g$ y el producto $f \cdot g$ son continuas en $x = a$. Además el cociente f/g es continua en $x = a$ si $g(a) \neq 0$.

Si g es continua en $x = a$ y si f es continua en $x = g(a)$, entonces $(f \circ g)(x)$ es continua en $x = a$

En particular, una función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en los valores en los que $Q(x) = 0$.

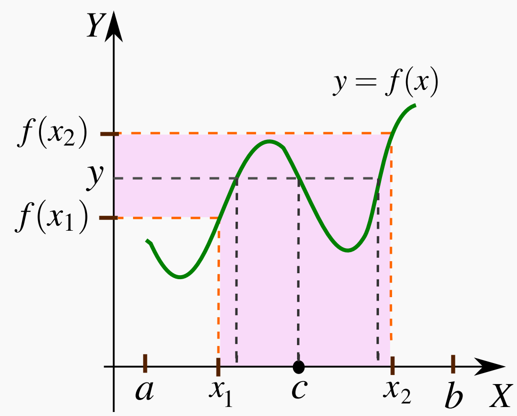
Teorema 5.2 (Bolzano)

Sea f continua en cada punto de $[a,b]$. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe algún $c\in]a,b[$ tal que $f(c)=0$



Teorema 5.3 (del valor intermedio)

Sea f continua en cada punto de $[a,b]$. Sean x_1, $x_2\in[a,b]$ tal que $x_1<x_2$ y $f(x_1)\neq f(x_2)$. Si y está entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$, existe algún $c\in]a,b[$ tal que $f(c)=y$

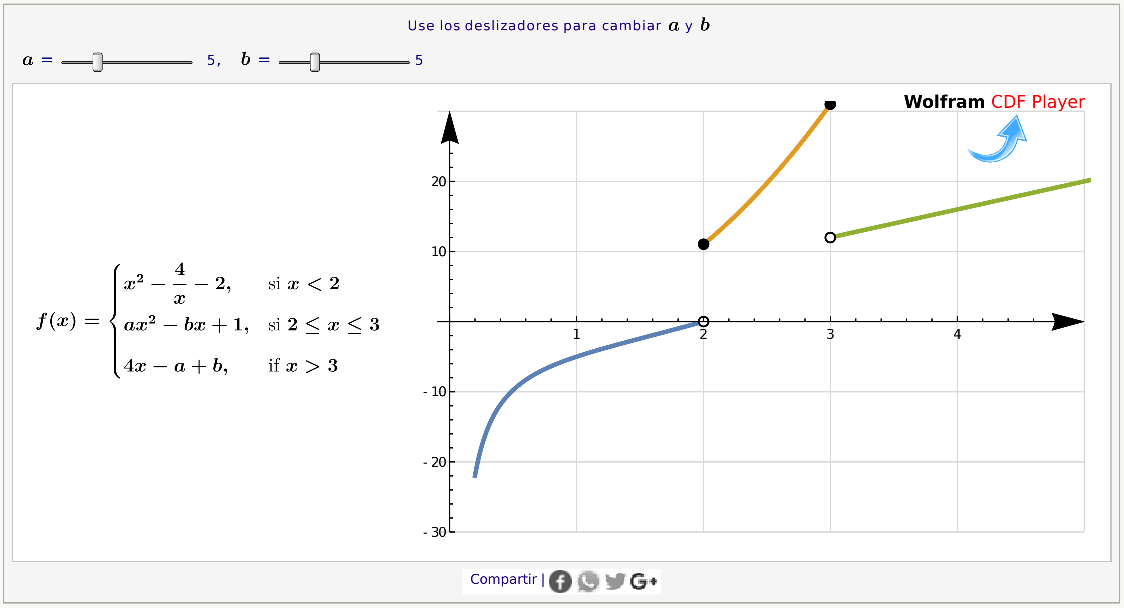


Ejemplo 5.1

Determine los valores de a y b (si hubieran) de tal manera que la función f, definida a continuación, sea continua en todo $[0.1,\infty[$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-\dfrac{4}{x}-2, & \text{si } \ 0.1\leq x<2 \\ ax^2-bx+1, & \text{si } \ 2\leq x\leq 3 \\ 4x-a+b, & \text{si } \ x>3 \end{cases}$$

Solución:



La función f está es una función a trozos de tres funciones continuas *en el dominio que se especifica* en la definición de f. Solo necesitamos analizar los valores que deben tomar a y b para que f sea continua en $x = 2$ y $x = 3$. Por definición de continuidad necesitamos:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 4a - 2b + 1 \text{ y } \lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 9a - 3b + 1$$

Como la función tiene distintos criterios a la derecha e izquierda de $x = 2$ y $x = 3$, estos límites se deben calcular usando límites unilaterales.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) \implies \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} ax^2 - bx + 1 & = & 4a - 2b + 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 - \dfrac{4}{x} - 2 & = & 4a - 2b + 1 \end{cases} \implies 4a - 2b + 1 = 0$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) \implies \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^+} 4x - a + b & = & 9a - 3b + 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} ax^2 - bx + 1 & = & 9a - 3b + 1 \end{cases} \implies 9a - 3b + 1 = 12 - a + b$$

Es decir, $\begin{cases} 4a - 2b + 1 & = & 0 \\ 9a - 3b + 1 & = & 12 - a + b \end{cases} \implies \begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{13}{2} \\ b & = & \dfrac{27}{2} \end{array}$

5.1 Ejercicios

R **5.1.1** Determine si la función g es continua en el valor dado de $c = -1$.

$$g(x) = \begin{cases} 8x - 5 & \text{si} \quad x < -1 \\ 10x - 2x^2 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

R **5.1.2** Determine el conjunto de valores de la variable donde la función es continua

1) $r(t) = \begin{cases} 6 - t & \text{si} \quad t < -2 \\ 10 + t & \text{si} \quad -2 \geq t < 1 \\ 5 + 6t & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$

2) $h(y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 - 1}{y - 1} & \text{si} \quad y < -1 \\ \dfrac{1}{y^2 - 4} & \text{si} \quad -1 < y < 3 \\ \dfrac{2y^2 - 9y + 4}{y^2 - 3y - 4} & \text{si} \quad y \geq 3 \end{cases}$

R **5.1.3** Encuentre los valores de a y $b > 0$ para que la función sea continua en $\mathbb{R}$

1) $g(t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad t \leq -1 \\ at + b & \text{si} \quad -1 < t \leq 3 \\ -2 & \text{si} \quad t > 3 \end{cases}$

2) $r(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 + a & \text{si} \quad 0 < x \leq b \\ 7 - x & \text{si} \quad x > b \end{cases}$

R **5.1.4** A continuación se presentan ciertas afirmaciones, determine si cada una de ellas es verdadera o falsa, justicando su respuesta.

1) Sea f una función tal que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existe, entonces necesariamente f debe estar definida en $x = 1$.

2) Sean f y g funciones, si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe, entonces necesariamente $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

3) El límite $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(a+1)(x-3)}{|3-x|}$ existe únicamente si $a = -1$.

4) Sea g una función continua en $\mathbb{R}$, si $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 5$, entonces puede darse que $g(2) \neq 5$

5) Si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x+4)}{2x+8} & \text{si} \quad x < -4 \\ \\ \dfrac{\sqrt{x+8}}{4} & \text{si} \quad x > -4 \end{cases}$ entonces $\begin{cases} \text{i.} \quad \text{El límite } \lim\limits_{x \to -4} f(x) \text{ existe} \\ \text{ii.} \quad f \text{ es continua en } x = -4 \end{cases}$

5.1.5 Considere la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{si} \quad x \neq \pm 1 \\ m & \text{si} \quad x = 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$

¿ Es f continua en $x = -1$?. ¿Cuánto debe valer m para que f sea continua en $x = 1$?

5.1.6 Considere la función $f(x) = \begin{cases} x^2+5 & \text{si} \quad x \leq k \\ x^2+9 & \text{si} \quad x > k \end{cases}$

Determine el o los valores de k, de modo que f sea continua en $\mathbb{R}$.

5.1.7 Considere la función $f(x) = \begin{cases} 1+t & \text{si} \quad t \leq 0 \\ b+t^2 & \text{si} \quad 0 < t \leq k \\ 7+t & \text{si} \quad t > k \end{cases}$

Determine el o los valores de k y b, de modo que f sea continua en $\mathbb{R}$.

5.1.8 Para cada una de las siguientes funciones, halle el valor de a y b para que la función correspondiente sea continua en el valor de x que se indica.

a) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{ax} & \text{si} \quad x < 0 \\ b & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{e^{ax}}{b} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ en $\quad x = 0.$

b) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{a} & \text{si} \quad x < 1 \\ b & \text{si} \quad x = 1 \\ \dfrac{a^2x-1}{1+a} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ en $\quad x = 1.$

Ⓡ **5.1.9** Considere las siguientes funciones:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad x < 2 \\ 6 & \text{si} \quad x = 2 \\ 2ax + 3b & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad f(x) = \begin{cases} cx^2 + 4 & \text{si} \quad x < 6 \\ cx + b & \text{si} \quad x \geq 6 \end{cases}$$

Determine condiciones sucientes para a, b y c; para que la función $f \circ g$ sea continua en $x = 2$.

Ⓡ **5.1.10** Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ que cumple: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} = 6$ y $f(2) = 0$

Considere la función: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{a \cdot f(x)}{x^2 - 5x + 6} + 4x & \text{si} \quad x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad x = 2 \\ \dfrac{b \cdot \operatorname{sen}(x-2)}{f(x)} + a & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

Determine el valor de a b para que g sea continua en $\mathbb{R}$.

Ⓡ **5.1.11** Para cada una de las siguientes funciones, determine si es continua en $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad x = 1 \\ -x + e + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} -x & \text{si} \quad x\leq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

4) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ \ln x & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

Ⓡ **5.1.12** Determine los valores de a y c (si es posible) de modo que f sea continua:

1) $f(x)=\begin{cases} x+2c & \text{si} \quad x<-2 \\ 3ax+a & \text{si} \quad -2\leq x\leq 1 \\ 3x-2a & \text{si} \quad 1<x \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x<1 \\ a & \text{si} \quad x=1 \\ x^2+a & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} -3\operatorname{sen} x & \text{si} \quad x\leq -\dfrac{\pi}{2} \\ a\operatorname{sen}\, x+c & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si} \quad x\geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Teorema del valor intermedio

Ⓡ **5.1.13** Use el teorema del valor intermedio para demostrar que $P(x)=x^3+x-1$ tiene una raíz en $[-1,1]$

Ⓡ **5.1.14** Use el teorema del valor intermedio para demostrar que $P(x)=x^3-5x^2+3x+6$ tiene al menos dos raíces en $[1,4]$

Ⓡ **5.1.15** Sean $a_1<a_2<\cdots<a_n$ con $a_i\in\mathbb{R}$. Use el teorema del valor intermedio para demostrar que

$$f(x)=\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\cdots+\frac{1}{x-a_n}=0$$

tiene $n-1$ ceros en $\mathbb{R}$

Ⓡ **5.1.16** Use el teorema del valor intermedio para demostrar que la ecuación

$$-x^3+4\operatorname{sen}(x)+4\cos^2(x)=0$$

tiene al menos dos soluciones

Ⓡ **5.1.17** Sea f continua en $\mathbb{R}$ tal que $f(x+2\pi) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Verifique que existe $c \in [0, \pi]$ tal que $f(c) = f(c+\pi)$

Capítulo 6

Derivada de una función

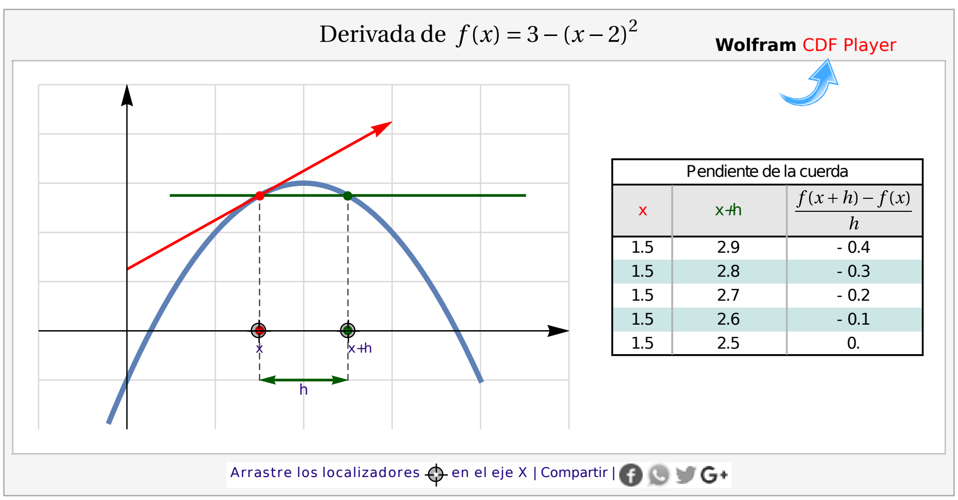
6.1 Derivadas: Defínción y teoremas

La derivada de una función de una variable mide la tasa (instántanea) de cambio de la variable dependiente respecto a la variable independiente. La derivada de la función $y = f(x)$ en x es,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista. Geométricamente, la derivada de f en x es la pendiente de la recta tangente a f en el punto $(x, f(x))$.

Ecuación de la recta tangente en un punto. Si f es derivable en $x = a$, entonces la ecuación de la recta tangente a f en $x = a$ es $y = f'(a)(x-a) + f(a)$



x	x+h	$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
1.5	2.9	- 0.4
1.5	2.8	- 0.3
1.5	2.7	- 0.2
1.5	2.6	- 0.1
1.5	2.5	0.

Figura 6.1: La derivada como la pendiente de una recta tangente

Definición 6.1

Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ y $x \in I$. Entonces, la derivada de f en x se denota $f'(x)$ y se define como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista.

Si $f'(x)$ existe, se dice que f es *diferenciable* (o derivable) en x. La derivada de f también se denota como $\frac{df}{dx}$

Ejemplo 6.1

Sea $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Usando la definción de derivada como un límite, calcule $f'(x)$

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h\cdot(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h\cdot(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\cdot(2x+h)}{\cancel{h}\cdot(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

Teorema 6.1 (Derivabilidad implica continuidad).

Si f es derivable en $x=a$, entronces f es coninua en $x=a$

Teorema 6.2 (Derivadas de algunas funciones).

a.) $(K)' = 0$

b.) $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$

c.) $(a^x)' = a^x \ln(a)$ si $a>0$

d.) $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$

e.) $(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$

f.) $(\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x)$

g.) $(\tan(x))' = \sec^2(x)$

h.) $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Teorema 6.3 (Derivada de la suma, el producto y cocientes).

Sean f y g derivables en x, entonces

a.) $(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$

b.) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$

c.) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$

d.) $\left(\dfrac{K}{g(x)}\right)' = \dfrac{-K\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

e.) $(Kf(x))' = K\cdot f'(x)$

f.) $\left(\dfrac{f(x)}{K}\right)' = \dfrac{1}{K}\cdot f'(x)$

6.2 Regla de la cadena

Teorema 6.4 (Regla de la cadena).

Supongamos que f es derivable en $u=g(x)$ y g es derivable en x, entonces la función compuesta $f\circ g$ es derivable en x y

$$(f(g(x)))' = f'(u)\cdot u' \quad \text{o también} \quad (f(g(x)))' = \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

Teorema 6.5 (Derivadas de algunas funciones).

Sea $u=u(x)$. Si se cumplen las condiciones del teorema 6.4, entonces

a.) $(u^\alpha)' = \alpha\, u^{\alpha-1}\cdot u'$

b.) $(a^u)' = a^u\ln(a)\cdot u'$, si $a>0$

c.) $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

d.) $(\operatorname{sen}(u))' = \cos(u)\cdot u'$

e.) $(\cos(u))' = -\operatorname{sen}(u)\cdot u'$

f.) $(\tan(u))' = \sec^2(u)\cdot u'$

g.) $(\arctan(u))' = \dfrac{u'}{1+x^2}$

Ejemplo 6.2

Sea $f(x)=\arctan^3(2^{\ln x}+x)$. Calcule $f'(x)$

Solución: Sea $u=2^{\ln x}+x$. Entonces

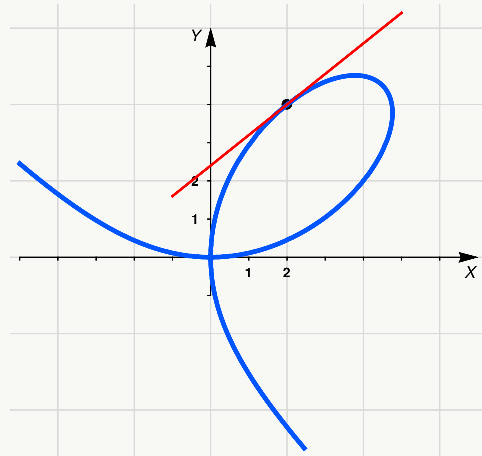
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\arctan^3(u)\right)' \\
&= 3\arctan^2(u)\cdot(\arctan(u))' \\
&= 3\arctan^2(u)\cdot\frac{1}{1+u^2}\cdot u' \\
&= 3\arctan^2(u)\cdot\frac{1}{1+u^2}\cdot\left(2^{\ln x}\cdot\ln(2)\cdot\frac{1}{x}+1\right)
\end{aligned}$$

A. Derivación Implícita

Hay curvas definidas por relaciones de la forma $F(x,y)=0$. Esta ecuación define a la función $y=y(x)$ de manera *implícita*. Podemos aplicar las reglas de derivación que hemos visto para calcular y'

Ejemplo 6.3

Considere la curva C de ecuación $x^3+y^3-9xy=0$. Observe que $Q=(2,4)\in C$. Determine la ecuación de la recta tangente a C en Q.



Solución: Derivamos a ambos lados respecto a x, aplicando regla de la cadena, regla de la suma y regla del producto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[x^3+y^3-9xy\right] &= \frac{d}{dx}[0]\\ 3x^2+3y^2\cdot y'-9y-9x\cdot y' &= 0\\ \implies y' &= \frac{9y-3x^2}{3y^2-9x}\end{aligned}$$

Como la pendiente de la recta tangente es $m=y'(Q)$, entonces, una ecuación de la recta tangente es $y=y'(Q)(x-2)+4$.

$$y'(Q)=y'(2,4)=\frac{9\cdot 4-3\cdot 2^2}{3\cdot 4^2-9\cdot 2}=\frac{4}{5}$$

$\therefore$ Ecuación de la recta tangente a C en Q es $y=\frac{4}{5}(x-2)+4$.

B. Derivación logarítmica

Usando regla de la cadena (y derivación implícita) podemos obtener la "derivada logarítmica" de una función $f(x)$

$$(\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Con este resultado y las propiedades de la función logaritmo se puede implementar un *mecanismo* para derivar funciones del tipo $f(x)^{g(x)}$ u otro tipo de expresiones algebraicas complicadas que involucran productos y cocientes. En general el mecanismo de la derivación logarítmica es aplicable a la mayoría de funciones diferenciables siempre y cuando estas funciones no se anulen.

Ejemplo 6.4 **(Derivación logarítmica).**

a.) Calcule y' si $y=(x+2)^{3\ln x}$

b.) Calcule y' si $y=\dfrac{x\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[5]{x^2+1}}$

Solución:

a.) $\ln y = \ln(x+2)^{3\ln x} \implies \ln y = (3\ln x)\ln(x+2)$. Ahora, derivando a ambos lados

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x}\cdot\ln(x+2)+\frac{3\ln x}{x+2} \implies y' = \ln(x+2)^{3\ln x}\cdot\left(\frac{3}{x}\cdot\ln(x+2)+\frac{3\ln x}{x+2}\right)$$

b.) $\ln y = \ln\left(x\sqrt[3]{x+2}\right) - \ln\left(\sqrt[5]{x^2+1}\right) = \ln x + \frac{1}{3}\ln(x+2) - \frac{1}{5}\ln(x^2+1)$. Ahora, derivando a ambos lados

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3(x+2)}-\frac{2x}{5(x^2+1)}\right)\\ y' &= \frac{x\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[5]{x^2+1}}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3(x+2)}-\frac{2x}{5(x^2+1)}\right)\end{aligned}$$

6.3 Ejercicios

Derivadas por definición

R **6.3.1** Use la definición para calcular la derivada de f.

1) $f(x) = 1-3x+x^2$ en $x=-6$

2) $f(v) = \dfrac{2v+3}{v-4}$ en $v=3$

3) $f(v) = \sqrt{v+3}$ en $v=1$

4) $f(y) = \sqrt{2y^2-5}$ en $y=2$

5) $f(x) = 5\cos(x-\pi)$ en $x=\pi$

6) $f(r) = \operatorname{sen} r - 3\cos r$ en $r=\pi/3$

7) $g(x) = cx^2+bx+1$

8) $h(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x+1}}$

9) $g(x) = x+\sqrt{x}$

10) $h(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Cálculo de derivadas

R **6.3.2** Calcule la derivada de las siguientes funciones

1) $f(x) = 2x^8 - 3x^5 + 5$

2) $f(x) = 3x^{4/3} - 6x^{2/3} - 2$

3) $g(z) = \sqrt{z} - \dfrac{1}{\sqrt{z}}$

4) $h(z) = 3z + \dfrac{1}{z} - \dfrac{2}{z^2} + \dfrac{3}{\sqrt[3]{z}}$

5) $f(s) = \left(s^2 + s + 1\right)\left(s^2 + 2\right)$

6) $f(v) = \left(v^2 + 2v\right)(v + 1) - 6v^2 + 5$

7) $f(y) = \dfrac{6\sqrt{y^5} - 9\sqrt{y}}{3\sqrt{y^3}}$

8) $f(t) = \dfrac{40t^5 - t^3\sqrt{t}}{5t^2\sqrt{t}}$

9) $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

10) $f(t) = t^2 - \sqrt{3} + \dfrac{1}{3 - t}$

11) $f(r) = \dfrac{\operatorname{sen} r}{1 + r} - \dfrac{\cos r}{1 - r}$

12) $f(u) = (2u - 5)\,\dfrac{u + 1}{u + 2}$

13) $f(p) = (1 - 2p)(3p + 2)\left(p^2 + 1\right)$

14) $f(x) = \dfrac{2}{x + 1}\left(1 - \dfrac{3}{x + 1}\right)$

15) $f(t) = \dfrac{4 - \dfrac{1}{1 - t}}{t - 2}$

16) $f(u) = \dfrac{u + 1}{u - 1} \cdot \dfrac{u^2 + 2}{5 + u}$

17) $f(r) = \dfrac{(4r + 6)(2 + 3r)}{r(1 - 2r)}$

18) $g(x) = 2x^{-2}\arctan x$

19) $g(x) = (\arccos x)(\operatorname{arcsen} x)$

20) $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

21) $f(u) = \dfrac{1 + \ln u}{1 - \ln u}$

22) $f(u) = \dfrac{u \ln u}{1 - e^u}$

23) $f(z) = \sqrt[3]{z}\,\ln z$

24) $g(t) = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$

25) $g(t) = \dfrac{\ln t}{t + 1}$

26) $h(x) = \dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$

27) $h(z) = \dfrac{e^z}{\arccos z}$

28) $h(z) = \dfrac{\operatorname{arccot} z}{\sqrt{z}}$

Regla de la cadena

6.3.3 Calcule la derivada de las siguientes funciones

1) $f(y)=\left[\left(y^2+3\right)^4-1\right]^3$

2) $f(\theta)=\operatorname{sen}(5\theta)\sec^2(5\theta)$

3) $f(x)=\left(\dfrac{x-7}{x+2}\right)^3$

4) $f(t)=\dfrac{3t^4}{\sqrt{t^2-5t}}$

5) $f(x)=\dfrac{\tan^3 x-1}{\csc x+2}$

6) $f(x)=e^{2x^2-5x+3}$

7) $f(q)=\left(q-3e^{q/3}\right)^5$

8) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

9) $f(x)=\ln\left(t\sqrt{t^2+1}\right)$

10) $f(p)=\ln\left[\dfrac{\left(p^3-1\right)e^{-p^2}}{\sqrt{1-5p}}\right]$

11) $f(z)=\sqrt{1+\ln z}+\ln\left(1+\sqrt{z}\right)$

12) $f(x)=e^{3x}g\left(\ln^2 x\right)$, donde g es derivable.

13) $f(y)=\ln^2(2y+6)$

14) $f(z)=\ln^2\left[\ln\left(2z^3-8z\right)\right]$

15) $f(x)=\dfrac{e^{5^x}+\tan(x+1)}{\operatorname{sen}^3(2x)}$

16) $f(w)=\ln\left(\dfrac{\sqrt{w-1}}{w^3\cos\left(w^2\right)}\right)$

17) $h(z)=\arccos^2\left(\dfrac{e^{-z}}{z}\right)$

18) $f(x)=\arctan^3(\ln(x^2+e^x))$

19) $h(x)=\ln(3^{g(x^3+4)}+1)$

20) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-2x^2}(x+3)}{(4x-1)^2}$

21) $f(v)=\sqrt{\dfrac{(v-1)^3}{(2v+7)(5-v)^2}}$

22) $f(t)=t^{\ln t}$

23) $f(w)=e^w w^{1-w}$

24) $g(z)=\sec\left(e^{1-2z}\right)$

25) $h(u)=e^{u\operatorname{sen} u}+\ln^3\left(3-2u^2\right)$

26) $h(u)=\cos^4\lfloor\operatorname{sen}\left(ku^3\right)\rfloor$

27) $g(u)=\ln^2(\operatorname{sen} u)+\ln\left(1-e^{2u}\right)$

28) $g(u)=\ln\left(\sec\left(u^3\right)+tan\left(u^3\right)\right)$

6.3.4 Si f es una función derivable, obtenga la derivada de las siguientes funciones

1) $y=\dfrac{f(\ln z)}{ze^z}$

2) $y=f\left(e^{-u}\right)e^{f(u)}$

3) $y=f\left(w^{2n}\right)-[f(w)]^n$

4) $y = e^{4w} f\left(\ln^3 w\right)$

Valor Numérico

6.3.5 Calcule el valor numérico que se indica

1) $(f \cdot g)'(2)$, dado que $f(2) = -1$, $g(2) = 3$, $f'(2) = 1$ y $g'(2) = -2$

2) $h'(-1)$, dado que $h(x) = x^2 p(x)$, $p(-1) = 4$ y $p'(-1) = 2$

3) $(f/g)'(5)$, dado que $f(5) = -2$, $g(5) = -1/2$, $f'(5) = 4$ y $g'(5) = 2$

4) $q'(4)$, dado que $q(x) = f(x)/\sqrt{x}$, $f(4) = -3$ y $f'(4) = 0$

5) Suponga que $f(5) = 4$, $g(5) = 2$, $f'(5) = -6$ y $g'(5) = 5$. Encuentre los valores de:

   a) $(f+g)'(5)$
   b) $(f \cdot g)'(5)$
   c) $(f/g)'(5)$
   d) $(g/f)'(5)$
   e) $\left(\dfrac{f}{f-g}\right)'(5)$.

6) Determine: $(p \circ q)'(6)$, dado que $q(6) = 2$, $p'(2) = -1$ y $q'(6) = 4$

7) Determine: $h'(2)$, dado que $h(t) = \dfrac{f(3-t)}{t}$ donde f es alguna función con $f(1) = 3$ y $f'(1) = -1$

8) Determine: $h'(0)$, dado que $h(x) = \sqrt{f\left(e^{x^2-x}\right)}$, $f(1) = 4$ y $f'(1) = 6$

9) Determine: $g'(0)$, dado que $g(y) = \ln f(2^y)$, $f(1) = \ln 2$ y $f'(1) = -3$

10) Si $H(x) = f(g(x))$ donde $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$ y $f'(6) = 7$, halle $H'(3)$.

11) Sean f y g funciones derivables. Si $H(x) = 2f(x)\ln(g(x))$, $g(x) > 0$, determine $H'(3)$ dado que $g(3) = e$, $g'(3) = -2$, $f(3) = 3$ y $f'(3) = 1/2$.

12) Sea g una función derivable tal que $g(1) = 3$ y $g'(1) = 2$. Determine:

a) $F'(0)$ si $F(x) = g\left(e^{ax}\right) \cdot e^{-ax}$, a constante real.

b.) $H'(0)$ si $H(x) = \left[g\left(2^x\right)\right]^2 \cdot 2^{-x}$.

13) Sea f una función derivable, entonces:

a) Si $x\left[f(x)\right]^3 + xf(x) = 6$ y $f(3) = 1$, hallar $f'(3)$.

b) Si $\left[g(x)\right]^2 + 12x = x^2 g(x)$ y $g(4) = 12$, hallar $g'(4)$

14) Sean f y g funciones tales que $f(5) = 4$, $g(5) = 2$, $f'(5) = -6$ y $g'(5) = 5$. Determine $(f \cdot g)'(5)$ y $\left(\dfrac{f}{f-g}\right)'(5)$.

15) Sea f una función derivable tal que $h(x) = x^2 f(x) + \dfrac{f(x)}{x}$. Si se sabe que $f(1) = 2$ y $h'(1) = 5$, encuentre $f'(1)$.

16) Sea f una función derivable tal que $x\left[f(x)\right]^3 + xf(x) = 6$ y $f(3) = 1$. Halle $f'(3)$.

Conceptos teóricos

6.3.6 Esta sección es para reforzar la teoría de derivación

1) Si f es una función derivable y g una función tal que $g(x) = xf(x)$, utilice la definición para demostrar que $g'(x) = f(x) + xf'(x)$.

2) Si f es una función derivable y g una función tal que $g(x) = 3f^2(x)$, utilice la definición para demostrar que $g'(x) = 6f(x)f'(x)$.

3) Encuentre una función f y un número real a tales que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^6 - 64}{h} = f'(a)$.

4) Suponga que f es una función que satisface la ecuación:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2 y + xy^2 \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Suponga también que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Encuentre $f(0)$, $f'(0)$ y $f'(x)$.

5) Suponga que la función $h(x)$ satisface $h'(x) = -xh(x)$. Muestre que la función $y = xh(x)$ satisface la ecuación:

$$xy' = \left(1 - x^2\right) y$$

6) Sea g una función continua que cumple $g'(x) = \dfrac{1}{x}$. Muestre que $y = \dfrac{1}{1+x+g(x)}$ cumple la ecuación (diferencial) $xy' = y\,(yg(x) - 1)$.

7) Sea $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ para todo $x \neq 0$:

   a) Verifique que $f''(x) = f(x) \cdot \dfrac{1}{x^2}$.

   b) Hallar condiciones sobre a, b, c tales que $ax^2 \cdot f''(x) + bx \cdot f'(x) + c \cdot f(x) = 0$ donde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

8) Si f es una función tal que $f'(x) = e^{-2x}$ y $u = \ln\left(x^2\right)$, utilice la regla de la cadena para demostrar que $\dfrac{d}{dx}[f(u)] = \dfrac{2}{x^5}$.

9) Encuentre $f'(x)$ si se sabe que $\dfrac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$.

Derivación implícita

R **6.3.7** Suponga que la ecuación $e^y = y^2 \cdot e^x$ define a y como función de x. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. En ambos casos exprese su respuesta sólo en términos de y.

R **6.3.8** Sabiendo que las ecuaciones siguientes definen a y como función implícita de la variable x, obtenga y'.

1) $x^3 - \operatorname{sen} y + x\ln^2 y = ye^{2x}$

2) $x + \cos x + xy^2 = e^y$

3) $x + e^{xy} - y^3 - y = 3$

Derivación logarítmica

R **6.3.9** Calcule la primera derivada de cada una de las funciones siguientes:

1) $f(x) = x^x$, con $x > 0$

2) $f(x) = (x+1)^{x^2}$

3) $g(x) = \sqrt{(2x)^x}$

4) $h(x) = \left(x^3 + x\right)^{3x-2}$

5) $y = \dfrac{(x+3)^2}{e^x \cos(x)}$

6) $h(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$

7) $f(x) = \dfrac{x^2\left(x^3-2\right)}{\left(5x^3+1\right)^2}$

Derivadas de orden superior

Ⓡ **6.3.10** Calcule la derivada que se indica.

1) $\dfrac{d^3z}{dq^3}$ si $z = e^{1-4q}$

2) $\dfrac{d^2x}{ds^2}$ si $x = \dfrac{1-2s}{1+2s}$

3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ en $(-1,4)$ si $x^2 - xy = 5$

4) y''' si $y = \dfrac{1-x}{1+x}$,

5) y'' si $y^3 + 3x + 7 = 6y$

6) y'' si $2y - y\ln y = 3x + 2$

Otros ejercicios

Ⓡ **6.3.11** Una ecuación diferencial es aquella en que interviene una función desconocida y sus derivadas. Resuelva los siguientes problemas relativos a ecuaciones diferenciales.

1) Considere la ecuación $f''(x) + 4 \cdot f'(x) + 4 \cdot f(x) = 0$. Pruebe que $f(x) = (3x-5)e^{-2x}$ satisface la ecuación anterior.

2) Halle las constantes A, B y C tales que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisfaga la ecuación:

$$y'' + y' - 2y = x^2$$

R **6.3.12** Sea $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, donde f y g tienen derivadas de todos los órdenes.

1) Demuestre que $F''(x) = f''(x) \cdot g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$.

2) Encuentre fórmulas similares para $F'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$.

R **6.3.13** Verifique que la función $y = e^{2x} + xe^{2x}$ satisface la ecuación $y'' - 4y' + 4y = 0$.

R **6.3.14** Verifique que la función $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x + 10e^{-x}$ satisface la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + y = \operatorname{sen} x$$

.

R **6.3.15** Verifique que la función $g(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x}$ satisface la siguiente igualdad:

$$g''(x) + \frac{2}{x}g'(x) = -\pi^2 g(x)$$

R **6.3.16** Pruebe que para $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ se cumple que $(4x^3 + 4x)\, y'' = 4y'\,(1 - 3x^2)$.

R **6.3.17** De un polinomio de tercer grado $Q(x)$ se sabe que $Q(1) = 0$, $Q'(1) = 2$, $Q''(1) = 4$ y $Q'''(1) = 12$. Calcular $Q(2)$ (Sugerencia: Sea $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$).

Capítulo 7

Aplicaciones de la derivada

7.1 Teorema del valor medio para derivadas

Sabemos que la derivada de una función constante es 0. ¿Habrá funciones no constantes con derivada nula en todo su dominio?

Teorema 7.1 (de Rolle)

Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$ y si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un punto $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$

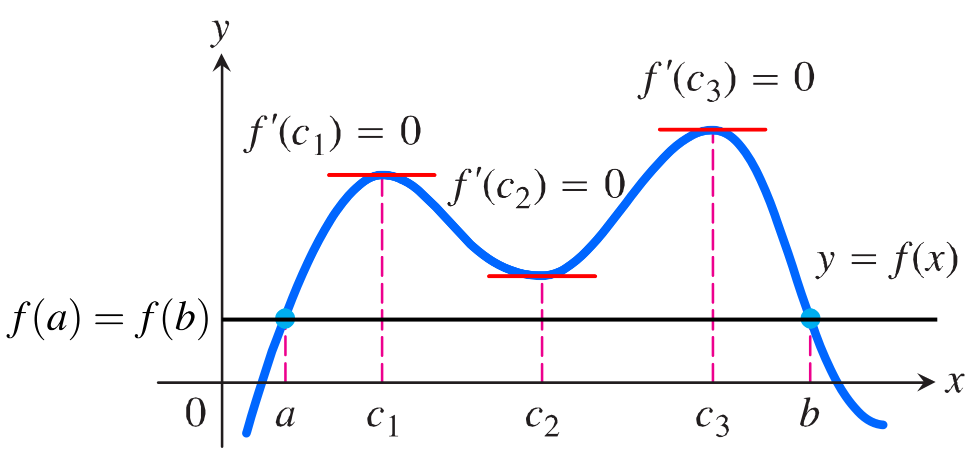


Figura 7.1: Un caso particular del teorema de Rolle

Teorema 7.2 (del Valor Medio)

Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$, entonces existe al menos un punto $c \in]a,b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corolario 7.1 Si $f'(x) = 0$ para todo x $es]a,b[$, entonces $f(x) = K$ para todo $x \in]a,b[$.

Corolario 7.2 Si $f'(x) = g'(x)$ para todo $x\ es]a,b[$, entonces $f(x) = g(x) + K$ para todo $x \in]a,b[$.

Teorema 7.3 (del valor intermedio para derivadas o Teorema de Darboux).

Sea f derivable en $[a,b]$ y supongamos que K es un número entre $f'(a)$ y $f'(b)$, entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(x) = K$

7.2 Extremos locales.

Teorema 7.4

Si f es continua en $[a,b]$ entonces f tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en este intervalo

Teorema 7.5

Si f tiene un extremo local en $x = c$ entonces, si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$

Definición 7.1 (Punto crítico)

$x = c$ es un punto crítico de f si es un punto interior en el dominio de f en el que $f'(c) = 0$ o donde $f'(x)$ no existe.

Teorema 7.6

Si f es continua en un intervalo $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$.

a.) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a,b[$ entonces f es creciente en $]a,b[$

b.) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a,b[$ entonces f es decreciente en $]a,b[$

Prueba de la primera derivada para extremos. Si f es continua en un intervalo I que contiene al *punto crítico* $x = c$ y si f es diferenciable en I (excepto tal vez en $x = c$), entonces podemos determinar si en $x = c$ la función f alcanza un máximo o un mínimo local si la derivada cambia de signo. Sino, no habría extremos locales en $x = c$.

		c	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Figura 7.2: f alcanza un máximo local en $x = c$

		c	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Figura 7.3: f alcanza un mínimo local en $x = c$

		c	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Figura 7.4: f no tiene un extremo en $x = c$

		c	
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

Figura 7.5: f no tiene un extremo en $x = c$

7.3 Concavidad y puntos de inflexión

Punto de inflexión. Un punto $Q(x_0, y_0)$ es un punto de inflexión de la representación gráfica de f si $f'(x_0)$ existe y f cambia de concavidad en este punto.

En los puntos de inflexión $Q(x_0, y_0)$, sucede que $f''(x_0) = 0$ o que $f''(x_0)$ no existe. Pero esto no es una condición suficiente, si f es k veces continuamente diferenciable en una cierta vecindad de un punto x_0 con k impar y $k \geq 3$, mientras que $f^{(n)}(x_0) = 0$ para $n = 2, ..., k-1$ y $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en x_0.

El siguiente teorema nos da una caracterizacón más sencilla de la concavidad y los puntos de inflexión.

Teorema 7.7 (Prueba de concavidad y puntos de inflexión).

Supongamos que f'' existe en $]a, b[$.

a.) Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$ entonces f es cóncava hacia arriba en $]a, b[$

b.) Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$ entonces f es es cóncava hacia abajo en $]a, b[$

c.) Si en $c \in]a, b[$, f'' cambia de signo, entonces f tiene un punto de inflexión en $x = c$

N ¿Se puede usar la primera derivada para determinar puntos de inflexión?. Sí, bajo ciertas condiciones: Si f tiene segunda derivada continua en $[a, b]$ y si f'' tiene un número finito de ceros en $[a, b]$ y si f' es estricamente positiva (o negativa) en $]a, b[$ excepto que $f'(c) = 0$ para $c \in]a, b[$, entonces f tiene un punto de inflexión en $x = c$.

Polinomios de Taylor de grado dos y extremos locales. Si f tiene derivadas continuas f', f'' y f''' en un intervalo I que contiene a $x = p$, entonces

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2 + R_2(x) \;\; \forall\, x \in I$$

donde $R_2(x) = \dfrac{f'''(\xi)}{6}(x-p)^3$ para algún ξ entre x y p.

Teorema 7.8 (Prueba de la segunda derivada para extremos).

Supongamos que f'' es continua en $]a,b[$ y que $p \in]a,b[$ y $f'(p) = 0$

a.) Si $f''(p) > 0$ entonces f alcanza un mínimo local en $x = c$

b.) Si $f''(p) < 0$ entonces f alcanza un máximo local en $x = c$

c.) Si en $f''(p) = 0$ entonces la prueba no dice nada concluyente.

La idea del teorema se puede ver con polinomios de Taylor de orden dos. Si $f'(p) = 0$, entonces

$$f(x) - f(p) = \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2 + R_2(x) \;\; \forall\, x \in I$$

y se puede verificar que en un entorno de $x = p$, el signo de $f(x) - f(p)$ es el signo de la cuadrática $\dfrac{f''(p)}{2}(x-p)^2$, es decir, el signo de $f''(p)$.

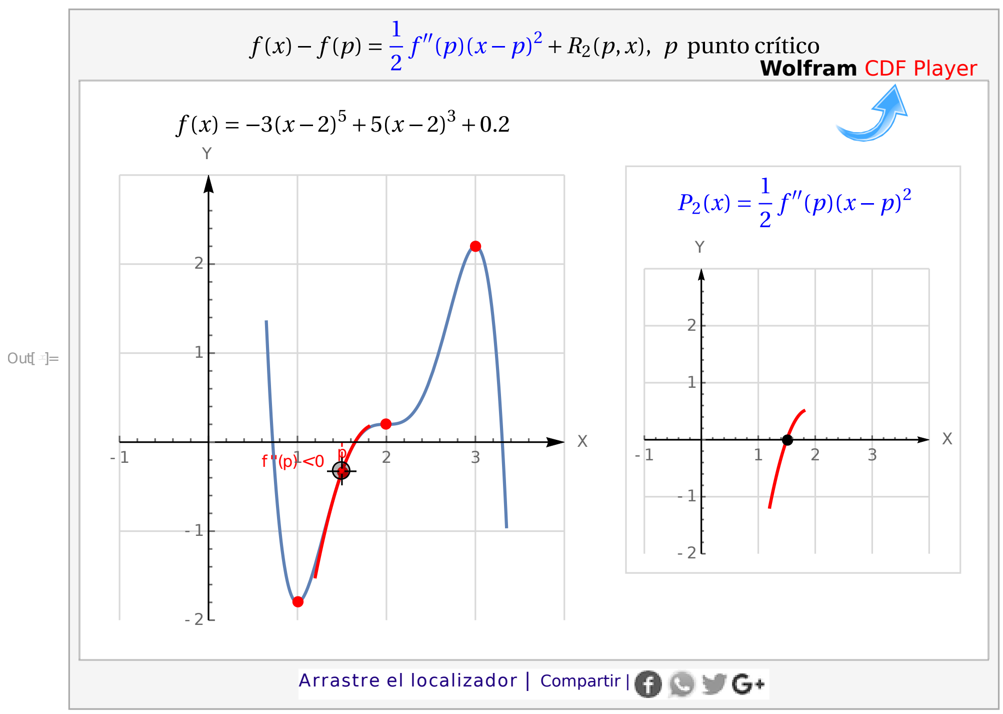


Figura 7.6: La prueba de la segunda derivada para extremos locales

Asíntotas

Una asíntota de una función f es una recta (o una curva) que está arbitrariamente cerca de f, en el sentido de un límite.

Definición 7.2 (Asíntotas)

a.) Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = K$ entonces la recta $y = K$ es una *asíntota horizontal* de f

b.) Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = K$ entonces la recta $y = K$ es una *asíntota horizontal* de f

c.) La recta vertical $x = c$ es una *asíntota vertical* de f si $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ y/o $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$

d.) La recta $y = mx + b$ es una *asíntota oblicua* de f si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - (mx+b) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) - (mx+b) = 0$$

La recta $y = mx + b$ es una *asíntota oblicua* de f si $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ (es finito). En este caso, $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx$

Ejemplo 7.1

En al figura 7.7 se muestra el gráfico de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x}{3x-2} & \text{si} \quad x \geq \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{x^3} + 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$

a.) Asíntota horizontal $y = 1$ si $x \to -\infty$ pues

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} + 1 = 1$$

b.) Asíntotas verticales $x = 2/3$ y $x = 0$ pues

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{2}{3}^+} \frac{x^2+x}{3x-2} = \infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x^3} + 1 = -\infty$$

c.) Asíntota oblicua $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{9}$ pues

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{x(3x-2)} = \frac{1}{3} \text{ y}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{3x-2} - \frac{x}{3} = \frac{5}{9}$$

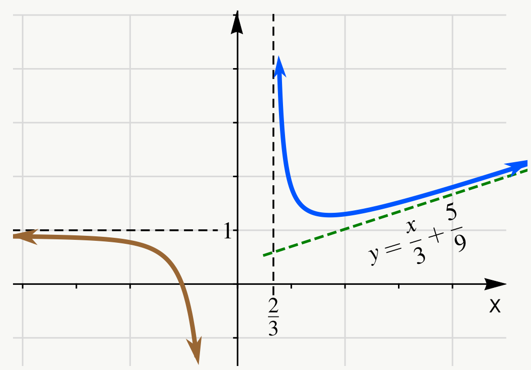


Figura 7.7: Asíntotas de f

Observe que el procedimiento para detectar asíntotas oblicuas también detecta asíntotas horizontales (un caso especial de asíntotas oblicuas con $m = 0$). Si empezamos con la prueba para asíntotas horizontales y detectamos una asíntota horizontal, esa sería la asíntota oblicua en esa dirección ($x \to \infty$ o $x \to -\infty$); pero si esta prueba falla, todavía podría haber asíntota oblicua.

Por supuesto, una función f puede tener o no tener asíntotas (de uno u otro tipo).

7.4 Regla de L'Hopital

Teorema 7.9 (Regla de L'Hopital).

Supongamos que existe un intervalo abierto I donde f y g son continuas y derivables y sea $c \in I$ tal que $f(c) = g(c) = 0$ y $g(x) \neq 0$ si $x \neq c$ en I. Entonces,

$$\text{si } \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Teorema 7.10 (Regla de L'Hopital).

Supongamos que existe $I =]a, \infty[$ donde f y g son continuas y derivables y $g(x) \neq 0$ si $x \in I$, y que si $\lim_{x\to c} f(x) = \infty = \lim_{x\to c} g(x)$, entonces

$$\text{si } \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Este teorema también es válido si $c = \pm\infty$. La regla de L'Hopital se puede aplicar a las formas indeterminadas de la siguiente lista (a veces se requiere algún arreglo preliminar)

(Expresiones indeterminadas)

a.) $\dfrac{\infty}{\infty}$

b.) $\dfrac{0}{0}$

c.) 1^∞

d.) 0^0

e.) ∞^0

f.) $\infty - \infty$

g.) $\infty \cdot 0$

Ejemplo 7.2 **(Regla de L'Hospital)**

Calcule $L = \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{-1/\ln x}$

Solución: El límite es de la forma $"0^0"$

$$\begin{aligned}
\ln L = \lim_{x\to 0^+} \ln\left[(\operatorname{sen} x)^{-1/\ln x}\right] &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln x} = "-\frac{\infty}{\infty}" \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} -\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x} = -1 \\
&\Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{-1/\ln x} = \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

7.5 Ejercicios

Teorema Rolle y TVM para derivadas

(R) **7.5.1** A continuación se da una función y un intervalo $[a,b]$. Verifique que el TVM para derivadas se puede aplicar y determine al menos un $x=c$ en el que se cumple el teorema

a.) $f(x)=x^2$ en $[-2,1]$

b.) $f(x)=\sqrt{x-2}$ en $[2,6]$

(R) **7.5.2** Aplicando el teorema de Rolle y el teorema de Bolzano, verifique que la ecuación $x^5+4x=1$ tiene exactamente una solución real. Sugerencia: Sea $f(x)=x^5+4x,\ f'(x)>0$

(R) **7.5.3** Aplique el TVM para derivadas para verificar que $|\operatorname{sen}(a)-\operatorname{sen}(b)|\leq|b-a|$ para todo $a,b\in\mathbb{R}$

(R) **7.5.4** Sea g derivable en todo $\mathbb{R}$. Sea $h(x)=g(x)+g(2-x)$. Probar que $h'(c)=0$ para algún $c\in]0,2[$

Rectas tangentes y rectas normales

(R) **7.5.5** Encuentre la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva: $f(x)=1-x^2$, en el punto $(2,-3)$. Grafique la parábola y sus respectivas rectas tangente y la normal.

(R) **7.5.6** Encuentre una parábola que tenga la ecuación $f(x)=ax^2+bx$, cuya recta tangente en el punto $(1,1)$ tenga por ecuación $y=3x-2$.

R **7.5.7** ¿Para qué valores de a y b la recta $2x+y=b$ es tangente a la parábola $f(x)=ax^2$ cuando $x=2$?

R **7.5.8** Verifique que la recta $y=-x$ es tangente a la curva dada por la ecuación $f(x)=x^3-6x^2+8x$. Determine el punto P de tangencia y encuentre la ecuación de la recta normal a la curva en el punto P.

R **7.5.9** Encuentre la ecuación de la recta normal a la curva $f(x)=x\ln x$ que sea paralela a la recta $2x-2y+3=0$. ¿En cuál punto la gráfica de $f(x)$ posee una recta tangente horizontal?

R **7.5.10** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado: $w=\dfrac{1}{\sqrt{2u+5}}$ en $u=-2$.

R **7.5.11** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

1) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ en $x=8$.

2) $y=\operatorname{sen}x+2\cos x$ en $x=\pi/2$.

R **7.5.12** Encuentre los puntos donde la recta tangente a $y=4u^2-5u+6$ es paralela a la recta con ecuación $y=7u-2$.

R **7.5.13** Encuentre los puntos donde la recta tangente a $y=\dfrac{2x}{(3-x)^2}$ es paralela a la recta $10x-y=5$.

R **7.5.14** Encuentre los puntos donde la recta tangente a $y=e^{u^2+2u}$ es horizontal.

R **7.5.15** Encuentre la ecuación de la recta tangente a $3x^2+5y^2=48$ en $(-1,3)$. (La ecuación anterior representa una elipse, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ donde a y b son los semiejes).

R **7.5.16** Encuentre la ecuación de la recta perpendicular a $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{6}=0$ en $(3,-2)$.(la ecuación anterior representa una hipérbola).

R **7.5.17** Halle los puntos de la curva $f(x)=x^3-3x+5$ en los que la recta tangente es perpendicular a la recta $y=-\dfrac{x}{9}$. ¿En cuáles puntos la gráfica de f posee rectas tangentes horizontales?

Ⓡ **7.5.18** Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $C: y = (2x+1)\left(x^2+3x+1\right)^{1/(x+1)}$ en el punto donde $x = 0$.

Ⓡ **7.5.19** Sea $f(x) = \left(x^3 - 4x^2\right) g(x)$. Se sabe que la ecuación de la recta normal a la curva $C: y = g(x)$ en el punto de tangencia $(-2,5)$ es $y = \dfrac{x}{4} + 5$. Determine $f'(-2)$.

Ⓡ **7.5.20** Sea $y = f(x)$ definida por $f(x) = x^2 + 3\ln(x+3)$. Determinar la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$. Verificar que la curva tiene otra recta tangente paralela a la recta anterior y determinarla.

Ⓡ **7.5.21** Sea $g(x) = [f(x)]^4$ donde f es una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$ y $f(1) = \dfrac{1}{2}$. Calcule una ecuación para la recta tangente a la gráfica de g en $x = 1$.

Ⓡ **7.5.22** Encuentre las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que pasan por el punto $(12,3)$.

Ⓡ **7.5.23** Hallar la derivada de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si} \quad x \geq -1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$

y, si existe, hallar la ecuación de la recta tangente en $x = -1$.

L'Hôpital y formas indeterminadas

Ⓡ **7.5.24** Calcule cada uno de los límites siguientes e indique la forma indeterminada que se presenta.

1) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 - x + \ln x}{x^3 - 3x + 2}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sqrt{2}}{x}$

3) $\displaystyle\lim_{v\to \pi/2} \operatorname{sen}(\cos v)\sec v$

4) $\displaystyle\lim_{r\to 0^+} (e^r - 1)\ln r$

5) $\displaystyle\lim_{r\to \pi/2} r\tan r - \frac{\pi}{2}\sec r$

6) $\displaystyle\lim_{q\to 0} q^{3/(4+\ln q)}$

7) $\displaystyle\lim_{t\to (\pi/2)^-} (\tan t)^{2t-\pi}$

8) $\displaystyle\lim_{\theta\to (\pi/2)^-} (\operatorname{sen}\theta)^{\sec\theta}$

9) $\displaystyle\lim_{n\to \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

con r y t constantes, $t > 0$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x - x}{\operatorname{sen}^2(2x)}$

11) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

12) $\lim\limits_{z\to +\infty} \left(xe^{1/z} - x\right)$

13) $\lim\limits_{x\to (\pi/2)^+} (x-\pi/2)^{\cos x}$

14) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\cos(3x) - e^{-x}}$

16) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{\ln(2x-1)}$

17) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{arcsen} x)(\csc x)$

18) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2 \sec x}\right)$

19) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\operatorname{sen} x)$

20) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos(2x))^{1/x^2}$

21) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x^2}$

22) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \tan x}{x - \operatorname{sen} x}$

23) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(kx) + \tan(nx)}{\arctan(nx)}, n \neq 0.$

24) $\lim\limits_{y\to 2} \dfrac{\sqrt[4]{5-2y} - 1}{1 + \sqrt[3]{2y-5}}$

25) $\lim\limits_{y\to 0} \left(e^{2y} - y\right)^{y^{-1}}$

26) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-1}{x^2 \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{2}{x}\right)}$

27) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-1)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{x-1}\right)$

28) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - (1+x)}{x^n}, n = 1,2,3,...$

Conceptos teóricos

Ⓡ **7.5.25** Sea $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right) - \arctan x$

a.) Verifique que $f'(x) = 0$

b.) Calcule $f(0)$ y $f(2)$

c.) ¿Debería ser f constante?

Ⓡ **7.5.26** Sea $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}(2x) + 2x$ y $g(x) = e^{\operatorname{sen} x}(\cos x \operatorname{sen} x + x)$.

a.) Verfique que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = ''\dfrac{\infty}{\infty}''$

b.) Verfique que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 0$

c.) Pero, verifique que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-\operatorname{sen} x}$ y por lo tanto no existe! ¿Qué pasó?

R **7.5.27** Sea $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Calcule el límite usando la regla de L'Hospital y calcule el límite sin usar regla de L'Hospital. ¿Por qué difieren?

R **7.5.28** Sean a, b y c constantes tales que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax^2 + \operatorname{sen}(bx) + \operatorname{sen}(cx) + \operatorname{sen}(dx)}{3x^2 + 5x^4 + 7x^6} = 8$. Encuentre el valor de $a + b + c + d$.

R **7.5.29** ¿Para qué valores de a y b es verdadera la ecuación siguiente?

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(2x)}{x^3} + a + \frac{b}{x^2} \right) = 0$$

.

R **7.5.30** ¿Para qué valor de a es verdadera la ecuación siguiente?

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = e$$

Extremos locales, crecimiento, decrecimiento y concavidad.

R **7.5.31** Sea $f(x) = x^2 + ax + b$. Encuentre los valores de a y b tales que $f(1) = 3$ sea un valor extremo de f en $[0,2]$. ¿Este valor es máximo o mínimo?

R **7.5.32** Determine los valores de a y b de modo que la función $f(x) = 3ax^2 \cdot e^{bx^2+1}$ tenga un extremo relativo en el punto $(1,2)$.

R **7.5.33** Halle una función de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que alcance extremos relativos en los puntos $(-2,3)$ y $(1,0)$. Verifique que en $(-2,3)$ se alcanza un máximo relativo y en $(1,0)$ un mínimo relativo.

R **7.5.34** A continuación se presentan ciertas afirmaciones, determine si cada una de ellas es verdadera o falsa, justificando su respuesta.

1) Sea f una función tal que $f'(c) = 0$, entonces necesariamente f tiene un máximo o un mínimmo relativo en $x = c$.

2) Si f es una función continua en $[-1,1]$ y $f(-1) = f(1)$ entonces necesariamente existe un número real c tal que $-1 < c < 1$ y $f'(c) = 0$.

3) Si f es una función derivable en $[-1,1]$ y $f(-1) = f(1)$ entonces necesariamente existe un número real c tal que $-1 < c < 1$ y $f'(c) = 0$.

4) Si f es una función tal que $f''(x) = 0$ entonces necesariamente $(2, f(2))$es un punto de inflexión de la gráfica de f.

5) Si (a,b) es un punto de inflexión de la gráfica de f entonces necesariamente (a,b) no puede ser extremo relativo de la gráfica de f.

6) Se puede encontrar una función f tal que $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda $x \in D_f$.

7) No se puede encontrar una función f, continua en $\mathbb{R}$ tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ y $f'(x) < 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

R **7.5.35** ¿Para qué valores de c el polinomio $P(x) = x^4 + cx^3 + \frac{1}{24}x^2$ tiene:

1) ¿Dos puntos de inflexión?

2) ¿Un punto de inflexión?

3) ¿Ningún punto de inflexión?

R **7.5.36** Determine los valores del número a para los cuales la función f no tiene valores críticos.

$$f(x) = \left(a^2 + a - 6\right)\cos(2x) + (a-2)x + 5$$

R **7.5.37** Encuentre los números críticos de la función.

1) $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$

2) $f(x) = xe^{2x}$

R **7.5.38** Encuentre los extremos absolutos de la función en el intervalo dado.

1) $g(r) = -3r^4 + 4r^3 + 72r^2$ en $[-3,2]$.

2) $f(q) = \dfrac{q+1}{\sqrt{q^2+5}}$ en $[-2,2]$.

3) $f(y) = y\ln y - 2y$ en $[1,4]$.

4) $g(\theta) = \cos(4\theta)$ en $[-\pi/2, \pi/2]$.

R **7.5.39** Encuentre los intervalos donde la función es creciente o decreciente, y los extremos locales.

1) g(z)=$5z^{2/3}+z^{5/3}$

2) g(v)=$\dfrac{v+1}{v^2+v+1}$

3) $f(p)=\dfrac{p^2-2p+2}{p-1}$

4) $h(x)=x^2+e^{4-x^2}$

5) $h(t)=\ln\left(t^2+5\right)$

R **7.5.40** Determinar el valor de k que hace que la función $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+k}$ tenga un único extremo relativo. ¿Se trata de un máximo o un mínimo?

R **7.5.41** La función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un punto de derivada nula en $(1,1)$ que no es extremo relativo. Razonar el valor de a, b y c

Trazo de curvas

R **7.5.42** Encuentre las ecuaciones de todas las rectas asíntotas de cada una de las funciones siguientes:

1) $f(z)=\dfrac{2z+3-z^2}{2z^2-3z-9}$

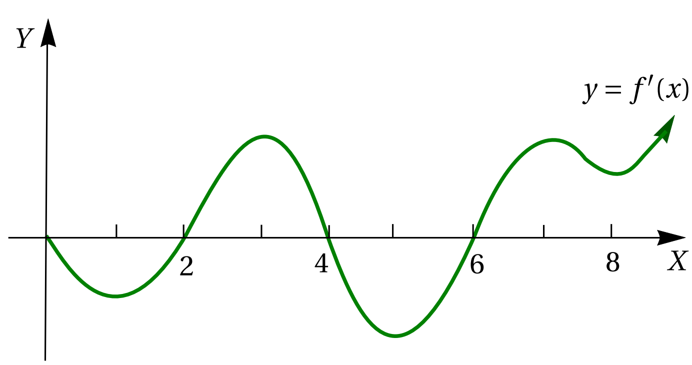
2) $g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-3}}$

3) $h(w)=\dfrac{e^w+1}{e^w-1}$

4) $g(u)=u-2+\dfrac{u^2}{u+2}$

5) $f(x)=\dfrac{xe^x+1}{e^x-1}$

R **7.5.43** A continuación se muestra la gráfica de la primera derivada de f:



1) ¿En qué intervalos crece la función f? Explique.

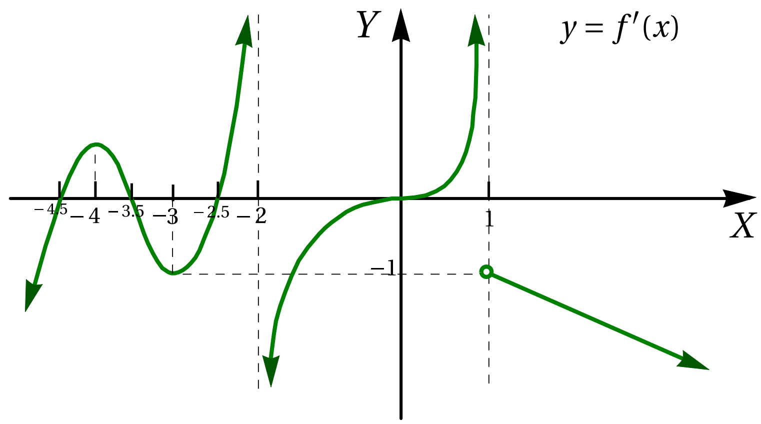
2) ¿En qué valores de x tiene f un máximo local? Explique.

3) ¿En qué valores de x tiene f un mínimo local? Explique.

4) ¿En qué intervalos es f cóncava hacia arriba? Explique.

5) ¿En qué valores de x, posee f puntos de inflexión? ¿Porqué?

R **7.5.44** Considere la gráfica de la primera derivada de una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que f sea continua en todo su dominio.



Con base en la gráfica anterior responda cada una de las preguntas siguientes:

1) ¿En qué intervalos f decrece?

2) ¿En qué valores de x, f alcanza un máximo local?

3) ¿En qué valores de x, f alcanza un mínimo local?

4) ¿En qué intervalos es f cóncava hacia abajo?

5) ¿En qué valores de x, f posee puntos de inflexión?

6) Realice un bosquejo de una posible gráfica para f''.

7) Realice un bosquejo de una posible gráfica para f.

R **7.5.45** Trace una gráfica para cada función que cumpla las condiciones dadas en cada ejercicio.

1)
- $f(-4) = f(-2) = f(0) = f(2) = 0$, $f(-1) = -1$,
- $f(1) = 2$,
- $f'(-3) = f'(-1) = f'(1) = 0$,
- $f'(x) > 0$ si $x < -3$ o $-1 < x < 1$,
- $f'(x) < 0$ si $-3 < x < -1$ o $x > 1$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

2)
- $\text{dom} f =]0,\infty[- \{2\}$,
- $f(1) = 1$,
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$,
- $f'(x) > 0$ si $0 < x < 1$ o $x > 2$,
- $f'(x) < 0$ si $1 < x < 2$

3)
- $D_f = \mathbb{R} - \{-3,1\}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$
- $f(0) = -1$
- $f(-1) = 1$
- $f'(x) < 0 \quad \forall x > 3$
- $f'(x) = -1 \quad \forall x \in]-3,-3[$
- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ existe.

4)
- $D_f = \mathbb{R} - \left[\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$
- $\lim\limits_{x\to(-1/2)^-} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to(1/2)^+} f(x) = 1$
- $f'(x) > 0\ \forall x \in]-\infty,-3[\cup \left]\dfrac{1}{2},2\right[$
- $f'(-2) = 0$
- $f'(-1)$ no existe.

5)
- $D_f = \mathbb{R}$
- f es derivable únicamente en $\mathbb{R} - \{-1,2\}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 1$
- $f''(x) > 0,\ \forall x > 3$
- $f'' < 0, \forall x \in]-\infty,2[- \{-1\}$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

- f es continua a la izquierda de 2.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) < 0$
- $f(2) = 2$

6)
- $f'(-1) = 0$, $f'(1)$ no existe
- $f'(x) < 0$ si $|x| < 1$, $f'(x) > 0$ si $|x| > 1$,
- $f(-1) = 4$,
- $f(1) = 0$,
- $f''(x) < 0$ si $x \neq 1$.

7.5.46 Dados la gráfica de f' y algunos datos de f, bosqueje la gráfica de f.

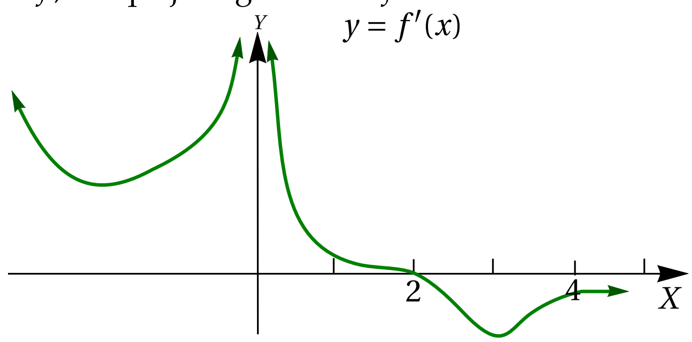
1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$

3) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

4) $f(-2) = f(1) = 0$

5) $f(3) = -1$



7.5.47 Realice el análisis completo y trace la gráfica, de cada una de las funciones siguientes:

1) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{4-x^2}$

2) $f(u) = \dfrac{u^3-4}{u}$

3) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-3}}$

4) $h(x) = \dfrac{3}{1+e^{-x}}$

7.5.48 Determine las ecuaciones de todas las asíntotas a la gráfica de la función h definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^3+2x}{x^2+1} & \text{si} \quad x \leq -5 \\[2ex] \dfrac{3x^2+6x}{x^2-9} & \text{si} \quad -5 < x \leq 0 \\[2ex] \arctan\left(\dfrac{3x-2}{1-3x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

R **7.5.49** Para cada una de las funciones siguientes:

- Verifique las derivadas dadas.
- Realice el análisis completo y trace la gráfica respectiva.

1) $f(x) = \dfrac{x^3-27}{8-x^3}, \quad f'(x) = -\dfrac{57x^2}{(x^3-8)^2}, \quad f''(x) = \dfrac{228x\left(x^3+4\right)}{(x^3-8)^3}$

2) $r(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}, \quad r'(x) = \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}, \quad r''(x) = \dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$

R **7.5.50** Sea $y = \dfrac{10\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}$

a.) Calcule y' y y'' (Sug. Use derivación logarítmica)

b.) Verifique que los puntos críticos son $x=3$, $x=3.5$ y $x=1$.

c.) Hacer el análsis completo y realizar la gráfica de f

R **7.5.51** Sea $f(x) = \begin{cases} |x|^{|x|}, & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

a.) Si $x>0$, verfique que $f'(x) = e^{x\ln x}(\ln x+1)$ y que $f''(x) = e^{x\ln x}(\ln x+1)^2 + \dfrac{e^{x\ln x}}{x}$

b.) Verifique que $f(-x) = f(x)$ (f es una función par, por lo tanto el gráfico en la parte negativa se obtiene por reflexión con el eje Y)

c.) Determine los extremos locales de f (si tuviera) y analice los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la concavidad y puntos de inflexión.

d.) Realizar el gráfico de f

Problemas de Optimización

R **7.5.52** Resuelva los siguientes problemas de optimización.

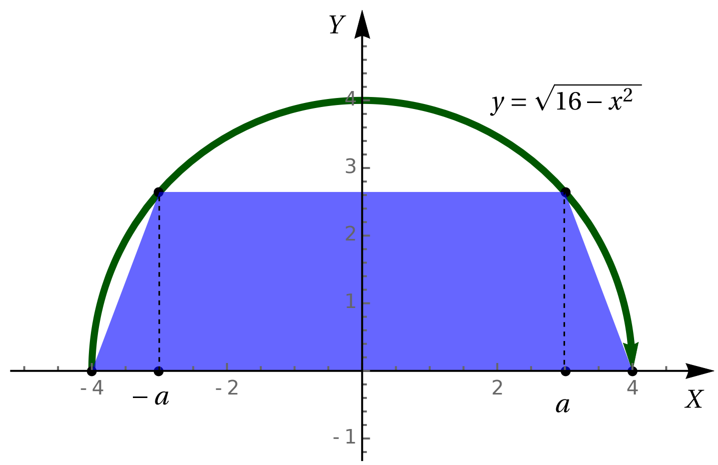
1) Se desea fabricar una caja sin tapa, de base cuadrada, cuyos materiales para los lados cuestan \$3 el dm^2 y, para el fondo, \$4 el dm^2. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de volumen máximo que se puede construir con un valor de \$48?

2) Halle el punto sobre la recta $6x + y = 9$, más cercano al punto $(-3,1)$.

3) Un bote sale de un muelle a las $2:00$ p.m. y viaja hacia el sur a una velocidad dde 20 km/h. Otro bote ha estado enfilando hacia el este a 15 km/h y llega al mismo muelle a las $3:00$ p.m. ¿En que momento estuvieron los dos botes más próximos?

4) Halle una ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,5)$ y corta un área mínima en el primer cuadrante.

5) Hallar las dimensiones del trapecio isósceles de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio 4.



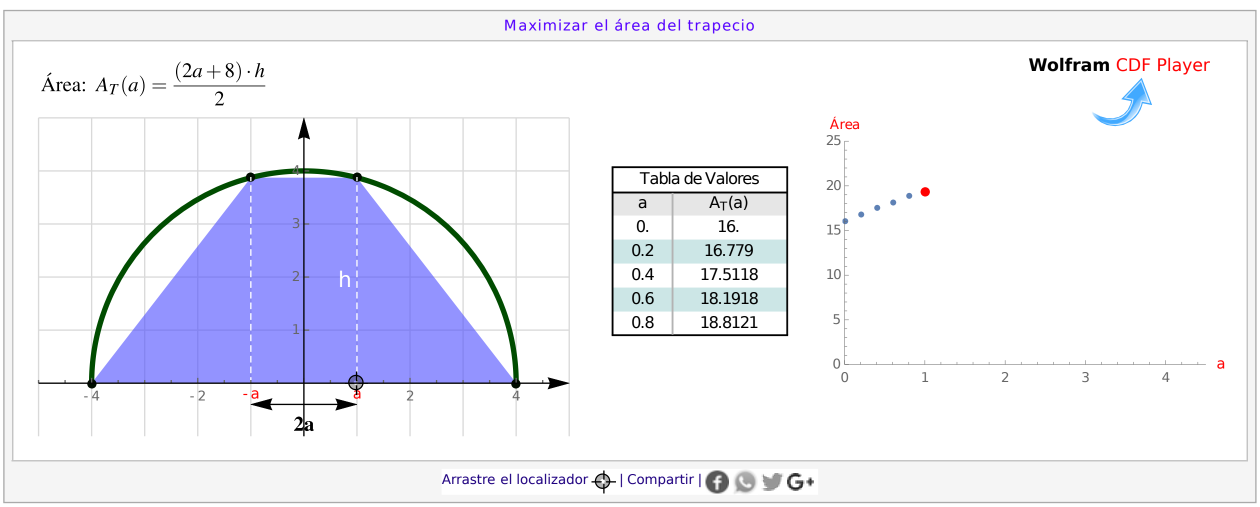


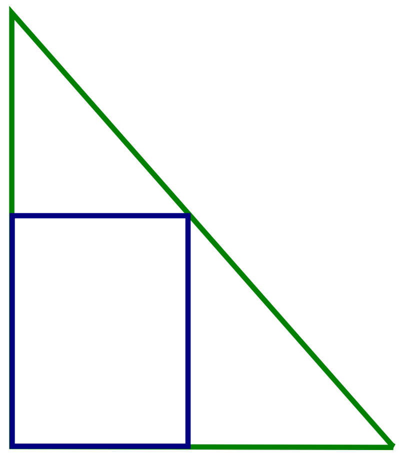
Figura 7.8: Aplicación interactiva para el ejercicio

6) Una persona está en un punto X en la orilla de un río recto de 50 m de ancho, y quiere llegar a otro punto Y en la otra orilla del río, ubicado 75 m río abajo. Puede correr a 250 m/min por su lado del río para luego nadar a 30 m/min en linea recta hasta llegar a Y. Desestimando

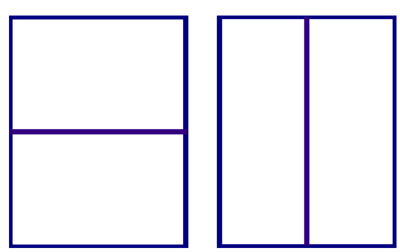
la corriente del río, ¿qué distancia debe correr antes de entrar al agua, y qué distancia nadar, de modo que minimice el tiempo total? ¿Cuánto es el tiempo mínimo?

7) Una pista de atletismo consta de una zona rectangular y un semicírculo en cada uno de sus extremos. Si el perímetro de la pista ha de ser 200 metros, calcular las dimensiones que hacen máxima el área de la zona rectangular. ¿Cuál es el área total de la pista?

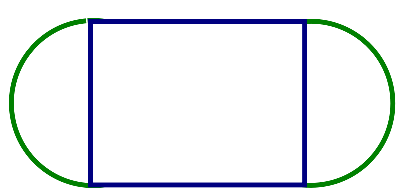
8) Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 cm y 12 cm, si el rectángulo tiene un vértice en el ángulo recto del triángulo y otro vértice en la hipotenusa del triángulo.



9) Se desea cercar una superficie de 60000 m^2 en forma rectangular, para después dividirla en dos mitades con una cerca paralela a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo y en qué dirección debe ir la división para minimizar el costo de la cerca?

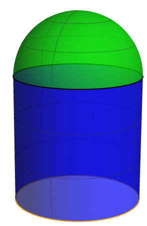


10) El interior de una pista de carreras de 800 metros consiste en un rectángulo con semicírculos en dos de sus extremos opuestos (en la figura, la pista es el perímetro). Encuentre las dimensiones que maximizan el área del rectángulo.

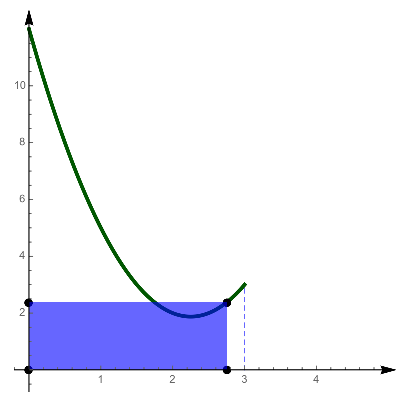


11) Una lata cilíndrica con tapa debe contener 225 cm^3 de líquido. EL costo por cm^2 de material es de 15 céntimos para el fondo y la tapa, y 10 céntimos para la pared lateral. ¿Qué dimensiones de la lata minimizan el costo de los materiales?¿Cuál es el costo mínimo?

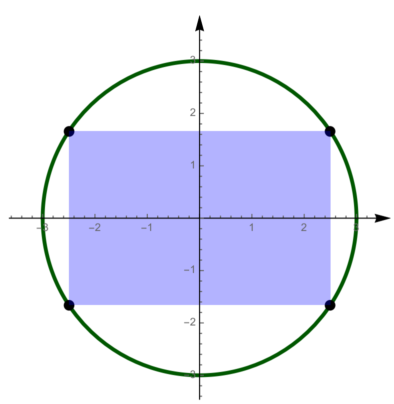
12) Un envase circular se construye poniendo una semiesfera en un extremo de un cilindro circular recto. El envase, incluyendo la semiesfera, debe tener una capacidad de 1.8 litros.¿Cuáles dimensiones minimizan la cantidad de material requerido?



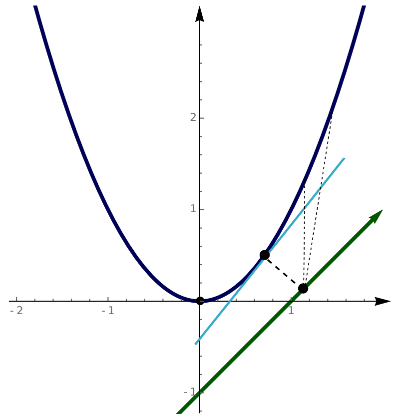
13) Un rectángulo tiene un vértice en $(0,0)$, un lado sobre el eje X y otro lado sobre el eje Y. El vértice opuesto a $(0,0)$ está sobre la parábola $y = 2x^2 - 9x + 12$ con $0 \leq x \leq 3$. ¿Cuál es el área máxima posible para el rectángulo?



14) La ecuación $x^2 + y^2 = 9$ describe en el plano cartesiano una circunferencia de radio 3 con centro en el origen.¿Cuál es el área del mayor rectángulo que se puede inscribir en esa circunferencia?



15) ¿Cuál es la distancia mínima entre la parábola P con ecuación $y = x^2$ y la recta R con ecuación $y = x - 1$?



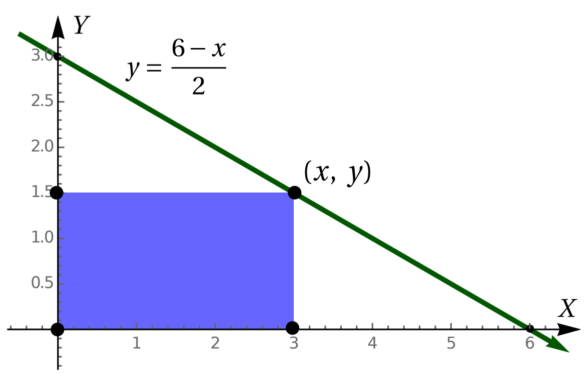
16) ¿Cuá es el largo y el ancho que debe tener un rectángulo de 100 metros de perímetro para que su área sea máxima?

17) Hallar dos números positivos cuyo producto sea 192 y cuya suma sea mínima.

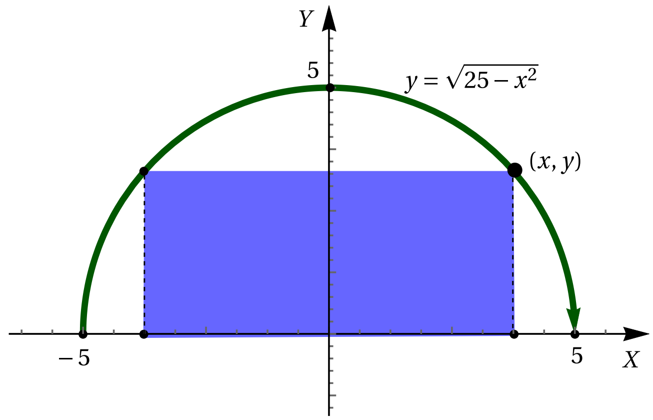
18) Con 10 metros de hilo se forman u círculo y un triángulo isósceles rectángulo. ¿Cuánto hilo hay que emplear en el círculo para que el área total encerrada por ambos sea máxima?

19) Una caja de base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 32 dm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

20) Un rectángulo está acotado por los ejes "x", "y" y por el gráfico de la ecuación $y = \dfrac{6-x}{2}$. ¿Cuál es el largo y el ancho que debe tener el rectángulo para que su área sea máxima?



21) Un rectángulo está limmitado por el eje "x" y por el semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$. ¿Cuál debe ser el largo y el ancho del rectángulo para lograr que su área sea máxima?



22) Si se cuenta con 1200 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

23) Halle el punto más cercano al punto $(-3,1)$, sobre la recta $6x + y = 9$.

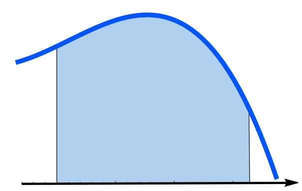
24) En un cartel rectangular los márgenes superior e inferior miden 6 cm cada uno y los laterales, 4 cm. Si el área del material impreso se fija en 384 cm^2, ¿cuáles son las dimensiones del cartel de área mínima?

25) Un bote sale de un muelle a las 2 : 00 p.m. y viaja hacia el sur a una velocidad de 20 km/h. Otro bote ha estado enfilando hacia el este a 15 km/h y llega al mismo muelle a las 3 : 00 p.m. ¿En qué momento estuvieron los dos botes más próximos?

Capítulo 8

Integración

8.1 Introducción



A finales de 1660, Isacc Newton y G. Libnitz descubrieron el método de "tangentes inversas" para calcular el área de una región bajo una curva ("integración"). Ambos descubrieron que la operación de "integración", siendo un proceso de sumación (pues involucra suma de áreas), era un proceso inverso de la operación de diferenciación, puesto que encontrar líneas tangentes involucra derivadas.

Libnitz introdujo la terminología "Calculus differentialis" y "Calculus integralis" para destacar este hecho. En este estado del arte, una función f es integrable en $[a,b]$ (en el sentido de Newton-Libnitz) si existe una función F, denotada $\int f\,dx$, tal que $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a,b]$.

Este proceso solo se podía aplicar a funciones que tengan "primitiva" F, así que a las funciones con "discontinuidades de salto" no se les podía aplicar este proceso pues no tienen primitiva (las derivadas tienen la propiedad del valor intermedio (Teorema 7.3), es decir, si $F' = f$ entonces $f(]a,b[)$ es un intervalo), además de otro sin fin de funciones que aparecen en matemáticas, física e ingeniería a las que no se le puede aplicar este proceso.

En 1854 B. Riemman hizo una formulación diferente al problema de integración, separando el concepto de integración del concepto de diferenciación. En esta nueva integral, las funciones acotadas aún con número no muy grande de discontinuidades, son integrables.

Una vez que la derivada y la integral han sido definidas de manera independiente, el "Teorema fundamental del cálculo" revela la relación inversa entre ambos conceptos. El "Teorema Fundamental del Cálculo" tiene dos partes, la primera muestra como integrales producen primitivas y la segunda, como las primitivas producen integrales.

Aunque muchos libros usan generalizaciones como la de Darboux-Stieltjes (sumas superiores y sumas inferiores), varios matemáticos ilustres [1], consideran que la presencia de la integral de Riemann en los libros de texto es un accidente histórico y que se debería cambiar todo esto por la integral "gauge": Una integral sin las limitaciones de la integral de Riemann ni la integral de Lebesgue y que preserva la sencillez de la definición de Riemann. Con esta integral, por ejemplo, se puede recuperar un función f a partir de su derivada sin imponer condiciones sobre f'.

8.2 Integral de Riemann (Integral Definida)

A. Particiones de $[a,b]$

Una *partición* P en n subintervalos del intervalo $[a,b]$ es una colección $\{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ tal que $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$ y $\bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k] = [a,b]$. Se denota con $||P||$ la "norma" de la partición.

$$||P|| = \max_{k=1,...,n} |x_{k-1} - x_k|$$

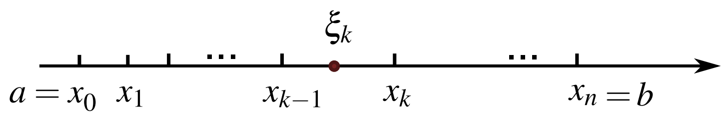


Figura 8.1: Partición del intervalo $[a,b]$

Sea f una función definida en el intervalo $[a,b]$. Una *suma de Riemann* de f respecto a una partición $P = \{x_0, ...x_n\}$, es una suma de la forma

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

con $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ y $\Delta x_k = |x_{k-1} - x_k|$.

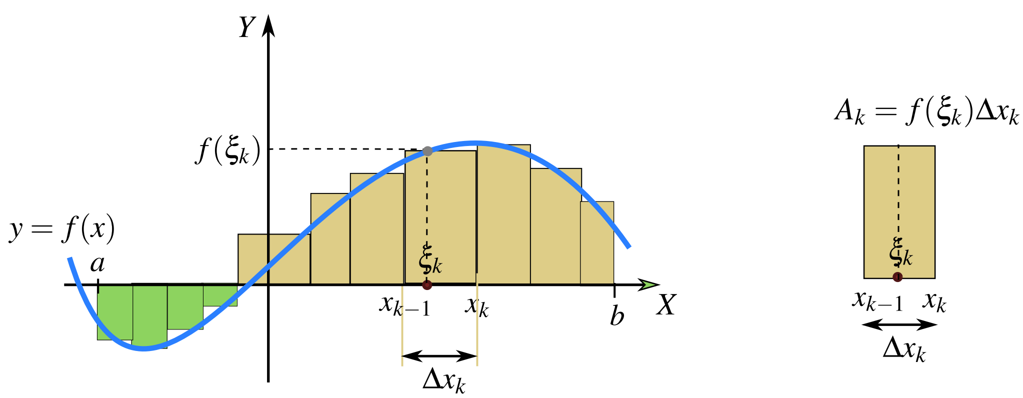


Figura 8.2: Suma de Riemann respecto a la partición P

Observe que $A_k = f(\xi_k)\Delta x_k$ puede ser negtivo si $f(\xi_k) < 0$.

Las particiones "igualmente espaciadas" se llaman "particiones regulares". Por ejemplo, la partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ con $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y $x_k = a + k \cdot \Delta x$, es una partición regular del intervalo $[a,b]$.

Definición 8.1 (Integral de Riemann — Versión clásica).

Sea f una función definida en $[a,b]$. Se dice que f es integrable (en el sentido de Riemann), en $[a,b]$, si existe un número real I tal que, $\forall\, \varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier partición P de $[a,b]$ dada por $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ y con $||P|| < \delta$ y con cualquier escogencia arbitaria de los puntos ξ_k en $[x_{k-1}, x_k]$, se tiene

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \; - \; I\right| < \varepsilon$$

En este caso, escribimos $\int_b^a f(x)\,dx = I$. A la expresión $\int_b^a f(x)\,dx$ la llamamos "integral definida" de f, de a hasta b.

Además se define $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ y $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

N En algunos textos se usa el "límite" $I = \lim\limits_{||P||\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, pero el proceso de tomar el límite no es igual en el conjunto de todas las particiones que sobre el conjunto de los números reales, así que este límite hay que tenerle cuidado.
Afortunadamente, en la definición anterior, el requerimiento "cualquier partición P de $[a,b]$" se puede cambiar por solamente "particiones regulares". Lo que no se puede cambiar es el requerimento "...con cualquier escogencia arbitaria de los puntos ξ_k...".

El siguiente teorema establece una versión más sencilla de la definición de la integral de Riemann (ver [6], [7], [10]).

Teorema 8.1

Sea f una función definida en $[a,b]$. Si existe un número I para el que dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, siempre que $n \geq N$ y ξ_k es escogido arbitrariamente en cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, con $x_k = a + k(b-a)/n$, se cumple

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\frac{b-a}{n} \; - \; I\right| < \varepsilon$$

entonces f es integrable en el sentido Riemann.

Dado que si f es Riemann-integrable entonces se cumple el teorema y si se cumple el teorema, f es Riemann integrable, tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \; = \; I \iff I = (b-a)\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(\xi_k)}{n}$$

si I es único para cualquier escogencia de $\xi_k \in \left[a + (k-1)\cdot\frac{(b-a)}{n},\, a + k\cdot\frac{(b-a)}{n}\right]$

Por ahora, este criterio nos permite decidir en algunos casos, si una función es no integrable, en sentido Riemann

Ejemplo 8.1

Sea $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I}. \end{cases}$

Entonces f no es integrable en $[0,1]$ pues, como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, podemos escoger ξ_k en $\mathbb{Q}$ o en $\mathbb{I}$, en cualquier intervalo de la partición regular, de tal manera que

$$\frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 0 = 0 & \text{si} \quad \xi_k \in \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = \dfrac{1}{n}\cdot n = 1 & \text{si} \quad \xi_k \in \mathbb{I}. \end{cases}.$$

Por tanto no se cumple el criterio de integrabilidad según Riemann.

Si logramos establecer que f es integrable en el sentido Riemann, entonces podríamos (si no es muy complicado) calcular la integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ usando el límite $(b-a)\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)}{n}$, con cualquier escogencia de los ξ_k en los intervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de cada partición regular (ver más adelante, sección B.).

Teorema 8.2 (Condiciones de integrabilidad en el sentido Riemann)

Sea f acotada en $[a,b]$ y sea f continua en $[a,b]$ excepto tal vez en un conjunto numerable de puntos (en particular, discontinua solo en un conjunto finito de puntos). Entonces f es integrable, en el sentido Riemann, en $[a,b]$

Si f es integrable en el sentido Riemann, debe ser acotada (pero no necesariamente viceversa). En particular,

Teorema 8.3

Sea f es continua en $[a,b]$, entonces f es integrable, en el sentido Riemann, en $[a,b]$

De ahora en adelante, "R-integrable" va a significar "integrable en el sentido Riemann"

Ejemplo 8.2

a.) Sea $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 1$.

Como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 = f(0)$, entonces f es continua en $\mathbb{R}$ y por lo tanto, R-integrable en cualquier intervalo $[a,b]$

b.) Sea $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; x \geq 0 \\ -1 & \text{si } \; x < 0. \end{cases}$

Como sgn es acotada en cualquier intervalo $[-a,a]$, $a>0$; y solo es discontinua en $x=0$, entonces sgnes R-integrable en $[-a,a]$

Teorema 8.4

Si f es R-integrable en $[a,b]$ y g es acotada en $[a,b]$ y si $f(x) = g(x)$ excepto en un número finito de puntos, entonces g es R-integrable y $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$

Es decir, la alteración de los valores de una función integrable en un número finito de puntos no afecta la existencia ni la la magnitud de la integral.

Ejemplo 8.3

Sea $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; 0 < x < 1 \\ 1000 & \text{si } \; x = 0 \end{cases}$ y $G(x) = 1$ si $0 \leq x \leq 1$.

Como ambas funciones f y g son R-integrables en $[0,1]$ e iguales excepto en un punto, entonces por el teorema 8.4,

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 G(x)\,dx$$

B. Cálculo de integrales usando sumas de Riemann

Calcular integrales con sumas de Riemann puede ser algo inmensamente laborioso. Si f es R-integrable, podemos usar el teorema 8.1 para calcular integrales definidas, usando solo particiones regulares y tomando cualquier ξ_k en los intervalos de la partición.

Primero necesitamos algunas herramientas para simplificar los cálculos.

Propiedades de las sumas finitas

a.) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Ka_i = K\sum_{k=1}^{n} a_i$

b.) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{k=1}^{n} a_i \;+\; \sum_{k=1}^{n} b_i$

Sumas de enteros positivos

a.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} C = Cn$

b.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

c.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Sumas de potencias de los primeros impares

a.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = 1^3+3^3+5^3...+(2n-1)^3 = \frac{1}{8}n^2\left(2n^2-1\right)$

b.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 1^2+3^2+5^2...+(2n-1)^2 = \frac{1}{12}n(2n-1)(2n+1)$

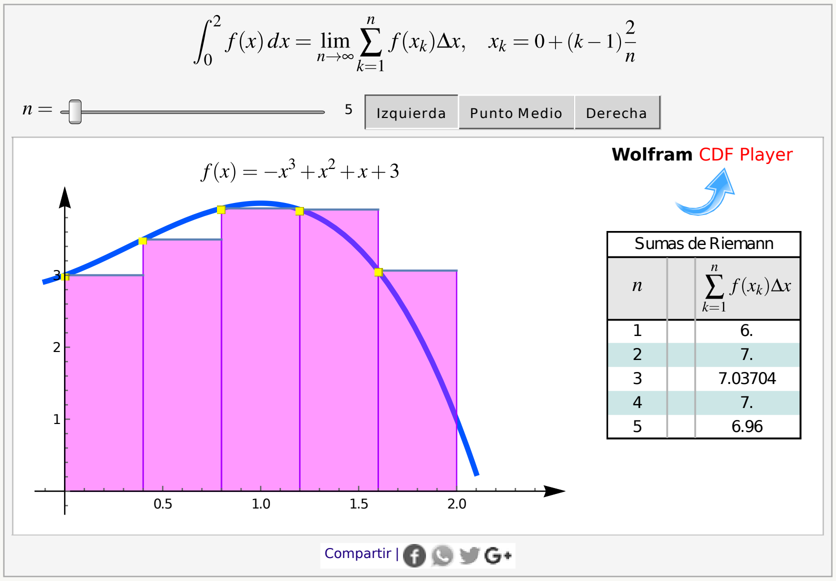
c.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = 1+3+5...+(2n-1) = \frac{n^2}{2}$

Ejemplo 8.4

Calcule, usando sumas de Riemann, $\displaystyle\int_0^2 (-x^3+x^2+x+3)\,dx$.

Solución: $f(x) = -x^3+x^2+x+3$ es continua en $[0,2]$, por tanto es R-integrable en este intervalo.

Para calcular la integral con sumas de Riemann, podemos usar una partición regular. Como $a=0$ y $b=2$, tomamos $\Delta x = \dfrac{2-0}{n}$ y $x_k = 0+k\cdot\dfrac{2}{n}$



- Usando $\xi_k = x_k = \dfrac{2k}{n} \in [x_{k-1},\, x_k]$, entonces

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 (-x^3+x^2+x+3)\,dx &= 2\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(\xi_k)}{n}\\
&= 2\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} -\left(\frac{2k}{n}\right)^3 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n} + \sum_{k=1}^{n} 3}{n}\\
&= 2\lim_{n\to\infty} \frac{-\left(\dfrac{2}{n}\right)^3 \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 + \left(\dfrac{2}{n}\right)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{2}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 3}{n}\\
&= 2\lim_{n\to\infty} \frac{-\dfrac{8}{n^3}\cdot\dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + \dfrac{4}{n^2}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2} + 3n}{n}\\
&= 2\lim_{n\to\infty} -\frac{8}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + 3\\
&= 2\left(-\frac{8}{4} + \frac{4\cdot 2}{6} + \frac{2}{2} + 3\right) = \frac{20}{3}
\end{aligned}
$$

- Usando $\xi_k = x_{k-1} = \dfrac{2(k-1)}{n} \in [x_{k-1},\, x_k]$, entonces

$$
\int_0^2 (-x^3+x^2+x+3)\,dx = 2\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(\xi_k)}{n}
$$

$$= \ 2 \lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} -\left(\frac{2(k-1)}{n}\right)^3 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2(k-1)}{n}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{2(k-1)}{n} + \sum_{k=1}^{n} 3}{n}$$

$$= \ 2 \lim_{n\to\infty} \frac{-\left(\dfrac{2}{n}\right)^3 \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3 + \left(\dfrac{2}{n}\right)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 + \dfrac{2}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}(k-1) + \sum_{k=1}^{n} 3}{n}$$

Ahora observamos que

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3 = 1^3 + ... + (n-1)^3 \ = \ \frac{1}{4}(n-1)^2 n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = 1^2 + ... + (n-1)^2 \ = \ \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1) = 1 + ... + (n-1) \ = \ \frac{1}{2}(n-1)n$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (-x^3 + x^2 + x + 3)\,dx \ &= \ 2 \lim_{n\to\infty} -\frac{8}{n^4}\cdot\frac{(n-1)^2 n^2}{4} + \frac{4}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2} + 3 \\
&= \ 2\left(-\frac{8}{4} + \frac{4\cdot 2}{6} + \frac{2}{2} + 3\right) \ = \ \frac{20}{3}
\end{aligned}$$

- Usando $\xi_k = \dfrac{2\left(k-\frac{1}{2}\right)}{n} \in [x_{k-1}, x_k]$ (punto medio), entonces

$$\int_0^2 (-x^3 + x^2 + x + 3)\,dx \ = \ 2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(\xi_k)}{n}$$

$$= \ 2 \lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} -\left(\frac{2\left(k-\frac{1}{2}\right)}{n}\right)^3 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2\left(k-\frac{1}{2}\right)}{n}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{2\left(k-\frac{1}{2}\right)}{n} + \sum_{k=1}^{n} 3}{n}$$

$$= \ 2 \lim_{n\to\infty} \frac{-\left(\dfrac{2}{n}\right)^3 \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{2}{n}\right)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{2}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n} 3}{n}$$

Ahora necesitamos fórmulas para la suma de potencias de los primeros impares,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3}\cdot\left(1^3+3^3+5^3...+(2n-1)^3\right) \;=\; \frac{1}{8}n^2\left(2n^2-1\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2}\cdot\left(1^2+3^2+5^2...+(2n-1)^2\right) \;=\; \frac{1}{12}n(2n-1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1+3+5...+(2n-1)\right) \;=\; \frac{n^2}{2}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^2(-x^3+x^2+x+3)\,dx &= 2\lim_{n\to\infty} -\frac{8}{n^4}\cdot\frac{1}{8}n^2\left(2n^2-1\right)+\frac{4}{n^3}\cdot\frac{1}{12}n(2n-1)(2n+1)+\frac{2}{n^2}\cdot\frac{n^2}{2}+3\\ &= 2\left(-\frac{8\cdot 2}{8}+\frac{4\cdot 4}{12}+\frac{2}{2}+3\right) = \frac{20}{3}\end{aligned}$$

C. "Álgebra" de las funciones R-integrables

Teorema 8.5

Sean f y g son R-integrables en $[a,b]$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

a.) $\alpha f \pm \beta g$ es R-integrable en $[a,b]$ y $\displaystyle\int_a^b (\alpha f \pm \beta g)(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx \pm \beta\int_a^b g(x)\,dx$

b.) $f\cdot g$ es R-integrable en $[a,b]$

c.) $\dfrac{f}{g}$ es R-integrable en $[a,b]$ si $0<m<|g(x)|$ en $[a,b]$

Teorema 8.6 (Integrabilidad de la composición).

Sea f R-integrable en $[a,b]$ y $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x\in[a,b]$. Sea g continua en $[m,M]$, entonces $g(f(x))$ es integrable en $[a,b]$

Teorema 8.7

Sea f R-integrable en $[a,b]$ y si $a<c<b$ entonces f es R-integrable en $[a,c]$ y $[c,d]$ y además

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx \;+\; \int_c^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 8.5

Sea $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ y considere las funciones $\begin{cases} h_1(x) = -1 & \text{si} \quad x \in [-2,0] \\ h_2(x) = 1 & \text{si} \quad x \in [0,3] \end{cases}$

Entonces, como sgn es acotada y solo tiene una discontinuidad, es R-integrable y las funciones h_1 y h_2 son R-integrables en sus intervalos de definición, por que son continuas. En los intervalos $[-2,0]$ y $[0,3]$ estas funciones coinciden con la función sgn, excepto tal vez en un número "finito de puntos", entonces por el teorema 8.4,

$$\int_{-2}^{3} \operatorname{sgn}(x)\,dx = \int_{-2}^{0} \operatorname{sgn}(x)\,dx + \int_{0}^{3} \operatorname{sgn}(x)\,dx = \int_{-2}^{0} h_1(x)\,dx + \int_{0}^{3} h_2(x)\,dx$$

Por esto es que podemos escribir

$$\int_{-2}^{3} \operatorname{sgn}(x)\,dx = \int_{-2}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{3} 1\,dx$$

Teorema 8.8

Sean f y g son R-integrable en $[a,b]$. Entonces,

a.) si $f(x) \geq g(x)$ en $[a,b]$, se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

b.) si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, se tiene

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Ejemplo 8.6

Sea $f(x) = \begin{cases} |x|^{|x|}, & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

En el ejercicio 7.5.51 se determinó que la función f es continua en $[0,1]$ (y por tanto, R-integrable) y que tiene un mínimo local en $x = 1/e$. En realidad, sus extremos absolutos en $[0,1]$ son $m = 1/e$ y $M = 1$. Por tanto,

$$0.692201 \approx 1 \cdot (1/e)^{1/e} \leq \int_0^1 |x|^{|x|}\,dx \leq 1$$

Usando técnicas de aproximación se tiene: $\displaystyle\int_0^1 |x|^{|x|}\,dx \approx 0.783431$

8.3 Primitivas e integrales indefinidas

Definición 8.2 (Primitiva).
Una función F es una primitiva (o antiderivada) de f en el intervalo $[a,b]$ si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Ejemplo 8.7

a.) Como $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ entonces $F(x) = \sqrt{x}$ es una primitiva de $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, en $[1,2]$ por ejemplo.

b.) Sean $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$ y $P(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x^3}{3} & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$

$P(x)$ *no* es un primitiva de f en $[0,2]$ pues, por el teorema 7.3 (de valores intermedios para derivadas), si $P' = f$ entonces f no puede tener "discontinuidades de salto". También,se puede observar que $P'(1)$ no existe

A. Integral indefinida.

Si F es una primitiva de f entonces las primitivas de f son de la forma $F(x) + K$.
Si F es una primitiva de f entonces, por razones históricas que quedarán claras más adelante, se usa la notación

$$\int f(x)\,dx = F(x) + K$$

Es decir, $\int f(x)\,dx$ denota todas las primitivas de f y, excepto en ciertos casos, no haremos mención del intervalo I.

N Como acabamos de ver en el ejemplo 8.7, no todas las funciones tienen primitiva en un intervalo. Más adelante veremos que si f es continua, entonces tiene primitiva, pero la existencia de una primitiva de f no significa que f sea continua (por supuesto, en este último caso, sus discontinuidades no pueden ser de salto). Ver el ejercicio 8.8.19.

Teorema 8.9

Cualesquiera dos primitivas de f en un intervalo $[a,b]$, difieren en una constante

Teorema 8.10 (Algunas "integrales indefinidas").

a.) $\displaystyle\int \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + K$ si $p \neq -1$

b.) (*) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + K$

c.) $\displaystyle\int \ln x\,dx = x\ln x - x + K$

d.) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(kx)\,dx = -\frac{1}{k}\cos(kx) + K$

e.) $\displaystyle\int \cos(kx)\,dx = \frac{1}{k}\operatorname{sen}(kx) + K$

f.) $\displaystyle\int \sec^2(kx)\,dx = \frac{1}{k}\tan(kx) + K$

g.) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + K,\ \ a > 0$

h.) $\displaystyle\int \sec x\,\tan x\,dx = \sec x + K$

i.) $\displaystyle\int \csc x\,\cot x\,dx = -\csc x + K$

j.) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) + K$

k.) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) + K$

l.) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \ = \ \arctan x + K$

N Algunas funciones no tienen primitiva "elemental", es decir, aunque tienen primitiva, esta primitiva no se puede expresar en términos de funciones "elementales" (estas son las funciones usuales del cálculo), y definen nuevas funciones. Por ejemplo

a.) $\text{SinIntegral}(x) = \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx,$

b.) $\text{CosIntegral}(x) = \int \frac{\cos x}{x}\, dx,$

c.) $\text{ExpIntegralEi}(x) = \int \frac{e^x}{x}\, dx,$

d.) $\text{Erfi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{x^2} dx,$ etc.

N ¿En que sentido se entiende $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + K$?. Formalmente se debe entender que K no es exactamente una "sola" constante, sino que puede variar dependiendo de si calculamos una primitiva para $x > 0$ o para $x < 0$. En efecto

$$\text{Si} \quad P'(x) = \frac{1}{x} \implies \begin{cases} P(x) = \ln(x) + K_1 & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ P(x) = \ln(-x) + K_2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

o también

$$\frac{d}{dx}(\ln|x| + K_i) = \frac{\text{signo}(x)}{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Es decir, las constantes K_1 y K_2 no tienen por qué ser iguales. Entonces lo correcto sería escribir

$$\int \frac{1}{x}\, dx \ = \ \ln|x| + \begin{cases} K_1 & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ K_2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

8.4 Cálculo de “integrales indefinidas”

Teorema 8.11

Si f y g tiene primitiva, entonces también Kf y $g \pm f$

a.) $\displaystyle\int K \cdot f(x)\,dx = K \cdot \int f(x)\,dx$

b.) $\displaystyle\int g(x) \pm f(x)\,dx = \int g(x)\,dx \pm \int f(x)\,dx$

A. Método de sustitución

Diferenciales. dx denota una variable independiente y, si $y = f(x)$ es derivable, entonces el *diferencial* dy es

$$dy = f'(x)\,dx$$

En el siguiente teorema vamos a usar la regla de la cadena. Asumimos continuidad para garantizar, como veremos más adelante, que una primitiva de f existe.

Teorema 8.12 (Sustitución).

Si $u = g(x)$ es una función derivable en un intervalo J y cuyo ámbito es un intervalo I y si f es continua en I, entonces

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Ejemplo 8.8

Si se cumple las condiciones del teorema 8.12, entonces verifique que, si $\alpha \neq -1$,

$$\int [f(x)]^{\alpha} \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$$

Solución: Sea $u = f(x)$ entonces $du = f'(x)\,dx$. Por tanto,

$$\int [f(x)]^{\alpha+1} \cdot f'(x)\,dx \;=\; \int u^{\alpha}\,du \;=\;=\; \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K \;=\; \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$$

B. Método de integración “por partes”

Usando la fórmula del producto de derivadas se puede deducir el siguiente teorema

Teorema 8.13 (Integración por partes).

Sean f, g derivables en $]a,b[$ y supongamos que $f'g$ tiene una primitiva en $]a,b[$, entonces fg' también tiene primitiva y

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Si hacemos $u = f(x)$ y $dv = g'(x)\,dx$ entonces

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

8.5 Teorema fundamental del cálculo

La derivada de f y la integral f han sido definidas de manera independiente. El Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) revela el notable relación inversa entre los dos procesos. El TFC consta de dos partes, la primera indica cómo las primitivas se puede usar para el cálculo de integrales sobre un intervalo. La otra parte es un mecanismo para calcular primitivas usando la integral.

Teorema 8.14 (TFC)

a.) Si f es R-integrable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_b^a = F(b) - F(a)$$

b.) Si g es continua en $[a,b]$ (por tanto R-integrable), entonces definimos la función G como

$$G(x) := \int_a^x g(t)\,dt,\; x \in [a,b]$$

Entonces G es continua en y $G'(x) = g(x)$ en $[a,b]$

Ejemplo 8.9 **(Interpretación física).**

Si $s(t)$ es la distancia recorrida en un tiempo t por un objeto, entonces la velocidad instántanea es $v(t) = s'(t)$. Supongamos que conocemos la velocidad de un objeto que se mueve sobre una línea recta, en centímetros por segundo,

$$s'(t) = v(t) = t^2 - \frac{10}{(t+1)^2} \text{ y } \int v(t)\,dt = s(t) + K$$

Es decir, s es una primitiva de v. Como $v(0) = -10$, esto nos dice que en $t = 0$ el objeto se movía para atrás, a una velocidad de $10\,\text{cm/seg}$. Y a partir de $t \approx 1.34$ se empezó a mover hacia adelante. Cinco segundos después, su velocidad era $v(5) = 24.72\,\text{cm/seg}$. ¿Cuál fue la distancia recorrida hacia adelante cuando $t = 5$?, y ¿cuál es la distancia total recorrida (incluyendo el recorrido hacia atrás)?

De acuerdo al TFC, la distancia neta recorrida es $\int_0^5 (t^2 - 10/(t+1)^2)\,dt = s(5) - s(0) =\approx 33.3333$, es decir, el área neta de la región bajo al curva v nos da la distancia neta recorrida.

Si $\int |t^2 - 10/(t+1)^2|\,dt = S(t) + K$, la distancia recorrida total es

$$\int_0^5 |t^2 - 10/(t+1)^2|\,dt = S(5) - S(0) \approx 43.1825$$

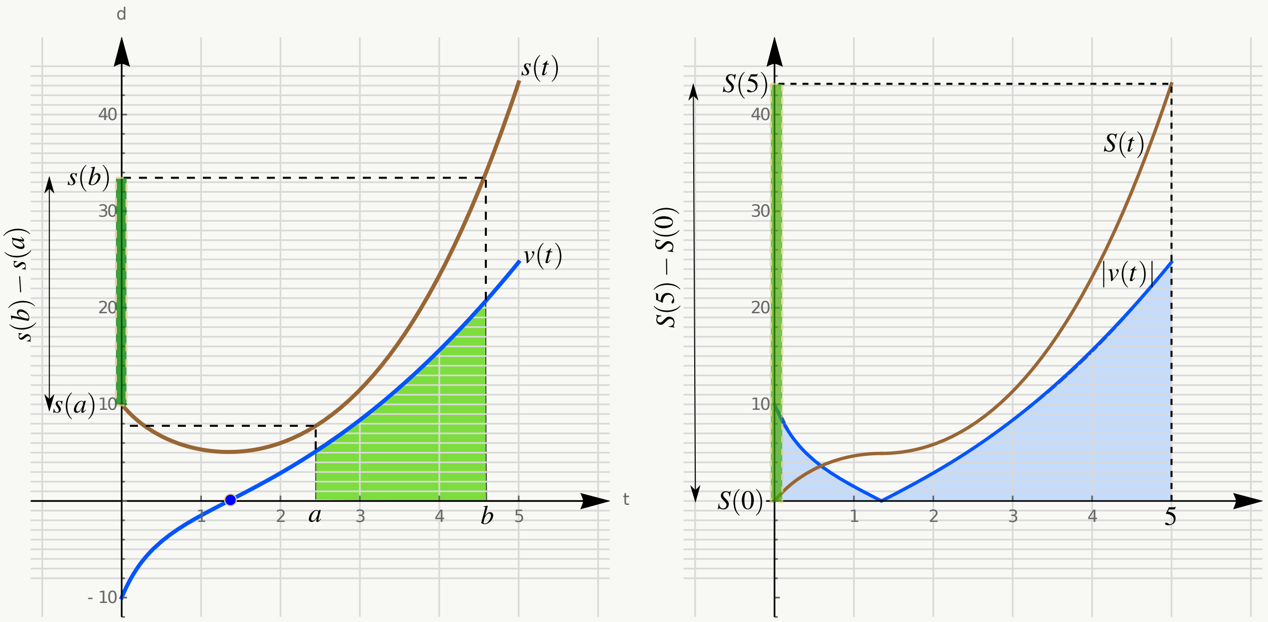


Figura 8.3: $\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$ y $\int_0^5 |v(t)|\,dt = S(5) - S(0)$

Ejemplo 8.10

$f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ no tiene una primitiva en $[0,4]$ pero si tiene primitiva $F(x) = \sqrt{x}$ en $[1,4]$. Como f es continua en $[1,4]$, es R-integrable y

$$\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \;=\; \sqrt{x}\Big|_1^4 = 1$$

Ejemplo 8.11

Como $f(x) = |x|$, es continua en $[-2,1]$, podemos usar la parte b.) del TFC para calcular una primitiva F para f en $[-2,1]$

- Si $-2 \leq x \leq 0 \implies F(x) = \int_{-2}^{x} -t\,dt = 2 - \dfrac{x^2}{2}$
- Si $0 < x \leq 1 \implies F(x) = \int_{-2}^{x} |t|\,dt = \int_{-2}^{0} -t\,dt + \int_{0}^{x} t\,dt = 2 + \dfrac{x^2}{2}$

$F(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{x^2}{2} & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ 2 + \dfrac{x^2}{2} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$ En particular, $\int_{-2}^{1} |x|\,dx = F(1) - F(-2) = \dfrac{5}{2}$

Ejemplo 8.12

Sean $f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 1 + \cos(x) & \text{si} \quad \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$ y $P(x) = \begin{cases} -\cos(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi/2 \\ x + \text{sen}(x) & \text{si} \quad \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$

Observe que f es continua en $[0,\pi]$ y por tanto R-integrable y que P no es una primitiva de f en $[0,\pi]$ pues $P'(\pi/2) \neq f(\pi/2)$ pues $P'(\pi/2)$ ni siquiera existe. Pero como f es continua, debe tener una primitiva.

Sea $F(x) = \begin{cases} -\cos(x) + K_1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi/2 \\ x + \text{sen}(x) + K_2 & \text{si} \quad \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$ Determine el valor de las constantes K_1 y K_2 de tal manera que F sea una primitiva de f y calcule $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

Solución: Como f es continua en $[0,\pi]$, usando el TFC tenemos que una primitiva de f en $[0,\pi]$ es

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx = \begin{cases} -\cos(x) + 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi/2 \\ x + \text{sen}(x) - \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

y , en particular, $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \pi/2$

Observe que evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$ en términos de la primitiva en $[a,b]$ es posible si f es R-integrable en $[a,b]$ y si f no tiene discontinuidades "de salto" en este intervalo. En particular, si f es continua en $[a,b]$, f tiene primitiva y se puede aplicar el TFC.

Ejemplo 8.13 **(Funciones R-integrables pero sin primitiva).**

Sean $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$ y $P(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x^3}{3} & \text{si} \quad 1 < x \leq 2. \end{cases}$

Entonces f no es continua pero si es R-integrable en $[0,2]$, pero f no tiene primitiva en este intervalo.

Tenemos los siguientes hechos:

a.) f es R-integrable en $[0,2]$ pues es acotada y continua en $[0,2]$, excepto en $x = 1$

b.) Como f tiene una discontinuidad de salto en $x = 1$, entonces f no tiene primitiva en $[0,2]$ (por el teorema de valores intermedios para derivadas)

c.) Usando sumas de Riemann: $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{10}{3}$

d.) $P(x)$ no es primitiva de f en $[0,2]$ y observe que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{10}{3} \neq P(2) - P(0) = \frac{8}{3}$

e.) Podemos calcular G, pero como no se cumplen las hipótesis del TFC, no se puede garantizar nada:

- Si $0 \leq x \leq 1 \implies G(x) = \displaystyle\int_0^x 2t\,dt = x^2$
- Si $1 < x \leq 2 \implies G(x) = \displaystyle\int_0^1 2t\,dt + \int_1^x t^2\,dt = 1 + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}$

$$G(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3} & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Observe que, G no puede ser primitiva de f, y además $G(2) - G(0) = \dfrac{11}{3}$

No todo esta perdido con las funciones que tiene discontinuidades “de salto”.

Teorema 8.15 (Extensión del TFC).

Si f es R-integrable en $[a,b]$ y si existe una función ϕ continua en $[a,b]$ y tal que $\phi'(x) = f(x)$ en $[a,b]$, excepto en un número finito de puntos de $[a,b]$ entonces (aunque ϕ no es primitiva de f en $[a,b]$) se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a)$$

Ejemplo 8.14

Sea $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \in [-2,-1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in]-1,-1] \\ 2 & \text{si} \quad x \in]1,2] \end{cases}$ y sea $\phi(x) = \begin{cases} -2x + K_1 & \text{si} \quad x \in [-2,-1] \\ 0 + K_2 & \text{si} \quad x \in]-1,-1] \\ 2x + K_3 & \text{si} \quad x \in]1,2] \end{cases}$

Como $\phi'(x) = f(x)$ en $[-2,2]$ excepto en $x=-1$ y $x=1$, si encontramos constantes K_1, K_2 y K_3 de tal manera que ϕ se a continua en $[-2,2]$, entonces podemos aplicar el teorema 8.15.

En efecto: Si $K_1 = K_3 = 0$ y $K_2 = 2$, entonces ϕ es continua en $[-2,2]$ y, por el teorema 8.15 tenemos

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \phi(2) - \phi(-2) = 0.$$

Teorema 8.16 (Derivar bajo el signo de integral).

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $u : [c,d] \to \mathbb{R}$, $v : [c,d] \to \mathbb{R}$ derivables en $[c,d]$ tal que $v([c,d]) \subset [a,b]$ y $u([c,d]) \subset [a,b]$. Si

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt, \;\; x \in [a,b]$$

entonces F es derivable en $[c,d]$ y

$$F'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x), \;\; x \in [c,d]$$

Ejemplo 8.15

Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{\sqrt{1+t}}\,dt$. Como se cumplen las condiciones del teorema 8.16 en $\mathbb{R}$, entonces si $u(x) = 0$ y $v(x) = x^2$,

$$F'(x) = -2xe^{\sqrt{1+x^2}}$$

A. Teoremas de valor medio para integrales

Si f es R-integrable en $[a,b]$, entonces $\dfrac{1}{b-a}\cdot\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ es la *media* o el *promedio* de la función en el intervalo $[a,b]$.

Teorema 8.17 (del valor medio para integrales)

Sea f continua en $[a,b]$. entonces existe $c\in[a,b]$ tal que

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 8.16 (Temperatura promedio)

Este ejemplo nos da una idea intuitiva del teorema del valor medio para integrales.

Supongamos que $T(t)$ es la temperatura en el tiempo t, medida en horas desde medianoche, y que queremos calcular la temperatura promedio en un período de 24 horas. Si $P=\{t_0,t_1,...,t_n\}$ corresponde a intervalos de tiempo igualmente espaciados en el día, entonces

$$\text{Temperatura promedio}\approx\frac{T(t_0)+T(t_1)+...+T(t_n)}{n}$$

Ahora, reescribimos esta expresión como sumas de Riemman sobre el intervalo $0\le t\le 24$. Usamos $\Delta t=\dfrac{24}{n}$, es decir, $n=\dfrac{24}{\Delta t}$

$$\begin{aligned}\text{Temperatura promedio}&\approx\frac{T(t_0)+T(t_1)+...+T(t_n)}{n}\\&=\frac{T(t_0)+T(t_1)+...+T(t_n)}{24/\Delta t}\\&=\frac{T(t_0)\Delta t+T(t_1)\Delta t+...+T(t_n)\Delta t}{24}\\&=\frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n}T(t_k)\Delta t\end{aligned}$$

Entonces, si T es integrable en $[0,24]$,

$$\begin{aligned}\text{Temperatura promedio}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n}T(t_k)\Delta t\\&=\frac{1}{24}\int_0^{24}T(t)\,dt\end{aligned}$$

8.6 Cálculo de Integrales definidas. Área

Podemos aplicar los métodos de sustitución y "partes" a las intgerales definidas.

A. Método de integración "por partes" en la integral definida

Teorema 8.18 (Integración por partes).

Sean f, g derivables en $[a,b]$ y f', g', ambas R-integrables en $[a,b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Si hacemos $u = f(x)$ y $dv = g'(x)\,dx$ entonces

$$\int u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Ejemplo 8.17

Calcule $\displaystyle\int_a^b 2xe^x\,dx$, con $b > 0$

Solución: Integramos "por partes": Sea $u = x$ y $dv = e^x dx$.

$$\begin{aligned} 2\int_a^b xe^x\,dx &= 2x\cdot e^x\Big|_a^b - 2\int_a^b e^x dx \\ &= 2e^x\Big(x-1\Big)\Big|_a^b = 2e^b(b-1) - 2e^a(a-1) \end{aligned}$$

B. Método de sustitución en la integral definida

En el siguiente teorema se establece cómo se puede usar una sustitución $t = g(x)$

Teorema 8.19 (Sustitución. Versión 1).

Sea $t = g(x)$ y g' continua en $I = [a,b]$ y f continua en $J = g([a,b])$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Ejemplo 8.18

Calcule $\displaystyle\int_2^5 e^{\sqrt{x}}dx.$

Solución: Si $t = \sqrt{x} \implies dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$. Entonces

$$\int_2^5 e^{\sqrt{x}}dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} 2te^t\,dt$$

Ahora integramos "por partes": Sea $u = t$ y $dv = e^t dt$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_2^5 e^{\sqrt{x}}dx &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} 2ue^u\,du \\
&= 2t\cdot e^t\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} - 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} e^t dt \\
&= 2e^t\Big(t-1\Big)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = 2e^{\sqrt{5}}(\sqrt{5}-1) - 2e^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)
\end{aligned}$$

A veces se enuncia otra versión del "teorema de sustitución", adecuada si la sustitución es $x = g(t)$.

Teorema 8.20 (Sustitución. Versión 2).

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $g:[c,d] \to [a,b]$ continua y derivable en $]a,b[$ y con $g(]c,d[) =]a,b[$ y $g(c) = a$ y $g(d) = b$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

(N) La condición $g(]c,d[) =]a,b[$ la cumplen funciones que son continuas y estrictamente monótonas (hay otras versiones de este teorema con condiciones adicionales, [12, pp. 167]).

Ejemplo 8.19

Calcule $\displaystyle\int_2^5 e^{\sqrt{x}}dx.$

Solución: Una buena escogencia para simplificar la integral es $x = g(t) = \ln^2 t$. Ahora, como $e^{\sqrt{g(t)}} =$

t, $g\left(e^{\sqrt{2}}\right) = 2$ y $g\left(e^{\sqrt{5}}\right) = 5$, entonces, como g *cumple las condiciones del teorema* 8.20,

$$\begin{aligned} \int_2^5 e^{\sqrt{x}} dx &= \int_{e^{\sqrt{2}}}^{e^{\sqrt{5}}} t \cdot 2\frac{\ln t}{t}\, dt \\ &= \int_{e^{\sqrt{2}}}^{e^{\sqrt{5}}} 2\ln t\, dt \\ &= 2e^{\sqrt{5}}(\sqrt{5}-1) - 2e^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

pues $\displaystyle\int \ln t\, dt = t\ln t - t + K$

8.7 Área

Definición 8.3

Si f y g son continuas en $[a,b]$ y $f(x) \geq g(x)$ en $[a,b]$, entonces el área de la región entres las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ es

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Ejemplo 8.20

Considere la región sombreada entre las curvas $y = \frac{1}{4}(x+1)^2 + 2$, $y = 3 - x$, $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$ y $x = 0$, desde $x = -2$ hasta $x = 2$, tal y como se muestra en la figura 8.4. Calcular el área de la región sombreada.

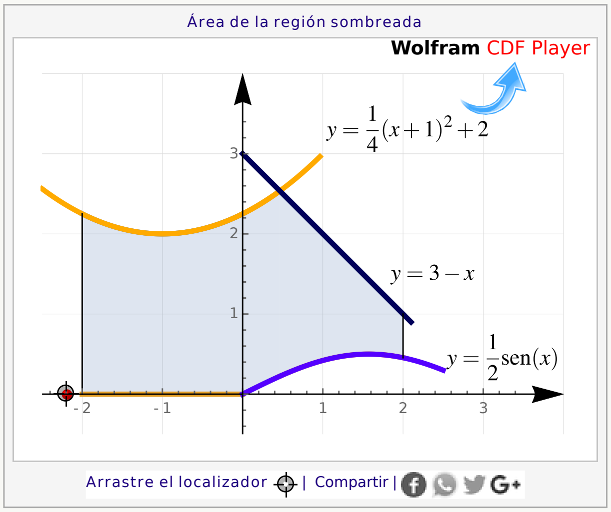


Figura 8.4: Área de la región R

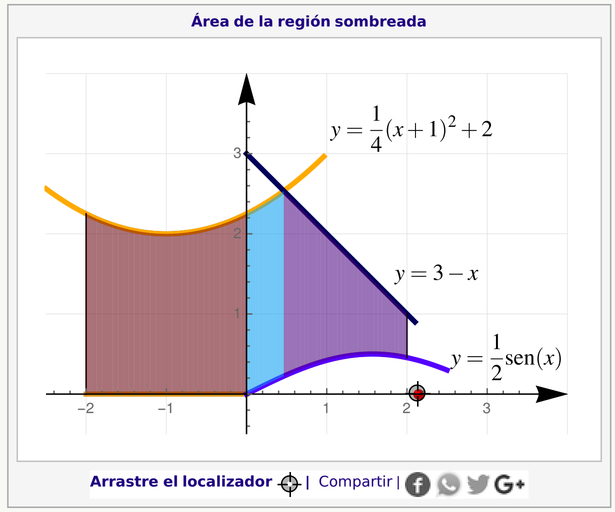


Figura 8.5: Región $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$

Solución: La fórmula del área de la región requiere que la región debe estar entre dos curvas. Por lo tanto la región R se debe partir en tres regiones (asumimos la aditividad del área) R_1, R_2 y $\mathbb{R}_3$; como se muestra en la figura 8.5

$$\begin{aligned}
A_R &= A_{R_1} + A_{R_2} + A_{R_3} \\
&= \int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{4}(x+1)^2 + 2 \,-\, 0\right) dx \,+\, \int_{0}^{2\sqrt{3}-3} \left(\frac{1}{4}(x+1)^2 + 2 \,-\, \frac{1}{2}\,\text{sen}\, x\right) dx \\
&+ \int_{2\sqrt{3}-3}^{2} \left(3 - x \,-\, \frac{1}{2}\,\text{sen}\, x\right) dx
\end{aligned}$$

8.8 Ejercicios

A. Integral de Riemann

Ⓡ **8.8.1** En la siguiente lista de integrales definidas $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, verifique que f es R-integrable y calcule el valor de la integral, usando sumas de Riemann

1) $\displaystyle\int_{-2}^{2} 5x - 2\,dx.$

2) $\displaystyle\int_{-3}^{2} |x|\,dx.$

3) $\displaystyle\int_{-2}^{2} |5x-2|\,dx.$

4) $\displaystyle\int_{-3}^{3} |1-x^2|\,dx.$

5) $\displaystyle\int_{1}^{4} (2x^3 - x + 3)\,dx.$

6) $\displaystyle\int_{-2}^{2} h(x)\,dx$ si $h(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 1000 & \text{si } x = 2 \\ -5000 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

7) $\displaystyle\int_{-5}^{5} x^3\,dx.$

8) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \text{sgn}(x)\,dx$ si $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

R **8.8.2** Verifique (puede usar el teorema 8.8), las siguientes desigualdades.

1) $0 \leq \displaystyle\int_{0}^{1} \text{sen}(t^2)\,dt \leq \text{sen}(1)$

2) $-6 \leq \displaystyle\int_{-3}^{3} \cos(t^2)\,dt \leq 6$

3) $4e \leq \displaystyle\int_{1}^{5} \frac{e^x}{x}\,dx \leq \frac{4e^5}{5}$

4) $2 \leq \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{t^2}\,dt \leq 2e$

5) $\dfrac{\pi^2}{9} \leq \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi 2} \frac{x}{\text{sen}(x)}\,dx \leq \frac{2\pi^2}{9}$

R **8.8.3** Sea $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\,x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ g es continua y por tanto R-integrable.

a.) Verifique que $h(x) = x - \text{sen}(x)$ es una función creciente en $[0,\infty[$

b.) Use el hecho de que la función h es creciente para verificar que si $0 < x$, entonces $\dfrac{\text{sen}\,x}{x} \leq 1$

c.) Verifique que $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\text{sen}\,x}{x}\,dx \leq \frac{\pi}{2}$

B. Primitivas y Teorema fundamental del Cálculo

Ⓡ **8.8.4** Verifique que $\displaystyle\int \frac{e^x(1+x\ln x)}{x}\,dx \;=\; e^x\ln x + C.$

Ⓡ **8.8.5** Verifique que $\displaystyle\int \frac{3}{1+2\sqrt{e^{-x}}}\,dx \;=\; 6\ln|e^{x/2}+2|+C.$

Ⓡ **8.8.6** Verifique que formalmente $\displaystyle\int |x|\,dx = \frac{x|x|}{2}+K.$ Sug. $|x|=\sqrt{x^2}$, derive y luego racionalice

Ⓡ **8.8.7** Verifique que $\displaystyle\int |x|\,dx = \begin{cases} -x^2/2 & \text{si} \quad x\leq 0 \\ x^2/2 & \text{si} \quad x>0 \end{cases} + K$

Ⓡ **8.8.8** Sea $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad 0\leq x\leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}(x+1) & \text{si} \quad \dfrac{1}{2}<x\leq 1, \end{cases}$

Verifique que f debe tener una primitiva F en $[0,1]$. Calcule una primitiva F de f en este intervalo y calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx.$

Ⓡ **8.8.9** Sea $f(x)=|x^2-1|$. Verifique que f debe tener una primitiva F en $[-2,3]$. Calcule una primitiva F de f en este intervalo y calcule $\displaystyle\int_{-2}^3 f(x)\,dx.$

Ⓡ **8.8.10** Calcule una primitiva (en $\mathbb{R}$) de $f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x & 0\leq x\leq 1 \\ 2-x & 1\leq x\leq 2 \\ 0 & x>2 \end{cases}$

Ⓡ **8.8.11** Sea $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si} \quad 0\leq x\leq \pi/2 \\ 1+\cos(x) & \text{si} \quad \pi/2<x\leq \pi \end{cases}$

Verifique que f debe tener una primitiva de F en $[0,\pi]$. Calcule esta primitiva F de f en este intervalo y calcule $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx.$

R **8.8.12** Sea $f(x)=\begin{cases} 3x^2\cos(\pi/x^2)+2\pi\,\text{sen}(\pi/x^2) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0. \end{cases}$

a.) Explique por qué f es acotada en $[-2,2]$ y f es continua en $[-2,2]$ excepto en $x=0$

b.) Verifique $P(x)=\begin{cases} x^3\cos(\pi/x^2) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0. \end{cases}$

es primitiva de f en $[-2,2]$ (En $x=0$, debe calcular $P'(0)$ usando el límite)

c.) Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ usando el TFC

R **8.8.13** Sea $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x<0. \end{cases}$ y sea $P(x)=\begin{cases} x+K_1 & \text{si} \quad x\geq 0 \\ -x+K_2 & \text{si} \quad x<0. \end{cases}$

a.) Justifique por qué P *no* es primitiva de f en $\mathbb{R}$.

b.) Determine las constantes K_1,K_2 tal que se pueda aplicar el teorema 8.15 y calcule $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$ usando este teorema.

R **8.8.14** Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} e^{\sqrt{1+t}}\,dt}{x^2}$. (Sug. Usar el ejemplo 8.15 y la regla de L'Hospital)

R **8.8.15** Calcule $\displaystyle I=\lim_{x\to 2}\frac{\int_2^{x} e^{\sqrt{1+t^2}}\,dt}{x-2}$.

R **8.8.16** Calcule $\displaystyle I=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} \text{sen}(\sqrt{t})\,dt}{x^3}$.

R **8.8.17** Sea f continua en $\mathbb{R}$ con $f(1)\neq 0$. Verifique que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x} f(t)\,dt}{\int_0^{2x} f(t+1)\,dt}=\frac{f(0)}{f(1)}$.

R **8.8.18** **(*)** Sea $f(x) = \begin{cases} 2x\,\text{sen}\left(1/x^2\right) - \dfrac{2}{x}\cos\left(1/x^2\right) & \text{si } \ 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$

y

$$F(x) = \begin{cases} x^2\,\text{sen}\left(1/x^2\right) & \text{si } \ 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}.$$

a.) Verifique que $F'(x) = f(x)$ en $[0,1]$, es decir, F es primitiva de f en $[0,1]$

b.) Verifique que f no es acotada en $[0,1]$ y por tanto, no es R-integrable!

R **8.8.19** **(*)** Sea $F(x) = x^2\,\text{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $F(0) = 0$. Verifique que la función $f(x) = F'(x)$ existe para todo x, pero que f no es continua en $x = 0$. (Observe que *no* se trata de de aquel teorema que dice que si f es derivable, entonces es continua!)

Teoremas de valor medio para integrales

R **8.8.20** Si f es continua en $[0,1]$ y si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$, verifique que $f(c) = 1$ para algún $c \in [0,1]$

R **8.8.21** Verifique que $f(t) = -2t^2 + 10t$ es una función que satisface las condiciones del teorema del "valor medio para integrales" en $[-2,3]$ y halle todos los valores de $c \in [-2,3]$ que satisfacen la conclusión del teorema.

R **8.8.22** Verifique que $f(t) = \cos(2t)$ es una función que satisface las condiciones del teorema del "valor medio para integrales" en $[-\pi,\pi]$ y halle todos los valores de $c \in [-\pi,\pi]$ que satisfacen la conclusión del teorema.

R **8.8.23** Si se conoce que la población P en México podría ser modelada con la función $P(t) = 67.38(1.026)^t$, en millones de personas y t en años, use esta función para estimar la población promedio de México entre el año 2000 y el año 2020.

R **8.8.24** Calcule el valor promedio de la función $f(x) = \text{sen}\,x$ en $[0,\pi]$

R **8.8.25** El número H de horas de sol en Madrid, en función de la fecha, es aproximada por la fórmula $H(t) = 12 + 2.4\,\text{sen}(0.0172(t-80))$, donde t es el número de días desde que empezó el año. Determine el número promedio de horas de sol en Enero y el número promedio de horas de sol durante todo el año

Cálculo: Integrales básicas y sustitución

R **8.8.26** Calcule las siguientes integrales indefinidas

1) $\displaystyle\int \frac{(w^2-2)(w^2+2)}{4w^3}\,dw$

2) $\displaystyle\int \frac{6^x-4\cdot 15^x}{3^{2x}}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{(e^q-1)(e^q+1)}{e^q}\,dq$

4) $\displaystyle\int \frac{2^t-1}{5+t\ln 2-2^t}\,dt$

5) $\displaystyle\int \left(e^{u/2}+e^{-u/2}\right)^2\,du$

6) $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(u^2+1)\sqrt{1+\ln(u^2+1)}}$

7) $\displaystyle\int (5r^2+\csc(r)\cot(r))\,dr$

8) $\displaystyle\int \frac{(2v-1)^2}{3\sqrt{v^3}}\,dv$

9) $\displaystyle\int \frac{(w^2-2)^2(w^2+2)}{3w^3}\,dw$

10) $\displaystyle\int \frac{24q}{4q^2+7}\,dq$

11) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{z^2}-\frac{3z}{z^2+1}\right)\,dz$

12) $\displaystyle\int 3\sec^2(u)(\tan(u+5))\,du$

13) $\displaystyle\int \sec^2(\alpha)\sqrt{5+2\tan(\alpha)}\,d\alpha$

14) $\displaystyle\int \tan^2(\alpha)\sec^2(\alpha)\,\mathrm{sen}(\alpha)\,d\alpha$

15) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x-1}\,dx$

16) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx$

17) $\displaystyle\int \mathrm{sen}(2x)\cos(2x)\,dx$

18) $\displaystyle\int \tan(x)\ln(\cos x)\,dx$

19) $\displaystyle\int x^x(1+\ln x)\,dx$

20) $\displaystyle\int \frac{x+1}{1+x^2}\,dx$

21) $\displaystyle\int x\cos(x^2)\,dx$

22) $\displaystyle\int \frac{r^2+1}{\sqrt{4-r^2}}\,dr$

23) $\displaystyle\int \mathrm{sen}\,x\sqrt{1+\cos x}\,dx$

24) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\mathrm{sen}\,x}$

(Sug: Multiplique por $\dfrac{1+\mathrm{sen}\,x}{1+\mathrm{sen}\,x}$ y separe)

25) $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{3+u^2}}$

26) $\displaystyle\int \frac{x+3}{2x+1}\,dx$

27) $\displaystyle\int \frac{2x^2+4x+5}{x-1}\,dx$

28) $\displaystyle\int \frac{z}{z+1-\sqrt{z+1}}\,dz$

29) $\displaystyle\int \frac{\cos x-\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}\,x+\cos x}\,dx$

30) $\displaystyle\int \frac{\ln(\tan x)}{\mathrm{sen}\,x\cos x}\,dx$

31) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

(Sug. $\dfrac{2}{u^2-1} = \dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u+1}$)

32) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+2}\,dx$

33) $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt[3]{x}}\,dx$

Cálculo: Integración por partes

Ⓡ **8.8.27** Calcule las siguientes integrales indefinidas

1) $\displaystyle\int \frac{w+1}{e^w}\,dw$

2) $\displaystyle\int \log(5y^2-4y)\,dy$

3) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}(2y)\,dy$

4) $\displaystyle\int (p-1)^3 e^{p^2-p}\,dp$

5) $\displaystyle\int \frac{te^t}{(t+1)^2}\,dt$

6) $\displaystyle\int \sec^3 x\,dx$

7) $\displaystyle\int \cos(\ln r)\,dr$

8) $\displaystyle\int (3y^2+1)\ln(y^2-1)\,dy$

9) $\displaystyle\int \frac{w+1}{e^w}\,dw$

10) $\displaystyle\int w^3 8^{w^2+1}\,dw$

11) $\displaystyle\int \frac{\ln z}{(z+1)^2}\,dz$

12) $\displaystyle\int \ln(\sqrt{x})\,dx$

13) $\displaystyle\int x\sec(x)\tan(x)\,dx$

14) $\displaystyle\int x\arctan(x)\,dx$

15) $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2}\,dx$

16) $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arcsen}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

17) $\displaystyle\int e^{2\theta}\operatorname{sen}(3\theta)\,d\theta$

18) $\displaystyle\int w^2 e^{-w}\,dw$

19) $\displaystyle\int \cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x))\,dx$

20) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,dx$

Ⓡ **8.8.28** Calcule, usando integración por partes, $\displaystyle\int |x|\,dx$. (Sug: Use $|x| = \sqrt{x^2}$ y eventualmente hay que racionalizar)

Ⓡ **8.8.29** $(*)$ Verifique, utilizando integración por partes, las siguientes fórmulas de reducción:

1) $\displaystyle\int x^n \ln x\, dx \;=\; \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\,((n+1)\ln x - 1) + C$ con $n \neq -1$

2) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\, dx \;=\; -\frac{1}{n}\cos(x)\cdot\operatorname{sen}^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\, dx$ (Suger: $u = \operatorname{sen}^{n-1}(x)$ y $dv = \operatorname{sen} x dx$)

3) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)\, dx \;=\; \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x\cdot\cos x) + C$ (Suger: Aplicar fórmulas anteriores)

Ⓡ **8.8.30** Calcule las funciones que cumplen con las condiciones dadas

1) $p'(w) = 2w+1,\;\; p(1) = 4$

2) $z''(r) = 6r^2 + 2 + r^{-2},\;\; z'(-1) = -1,\;\; z(1) = \dfrac{1}{2}$

3) $q''(t) = 12t^2 - 12t - e^t,\;\; q'(1) = -1-e,\;\; q(1) = 0$

Ⓡ **8.8.31** $(*)$ Determine una función f tal que $f(-1) = -3,\;\; f'(-1) = -10$ y $f''(x) = 24 + 4e^{2(x+1)}$

Ⓡ **8.8.32** $(*)$ Sea f una función cuya gráfica contiene el punto $(1,\,6)$ y que una ecuación de su recta tangente en $(x,\,f(x))$ es $y = 2x+1$. Encuentre $f(2)$.

C. Cálculo: Integración definida

Ⓡ **8.8.33** Calcule las siguientes integrales

1) $\displaystyle\int_0^1 e^x(e^x-1)^4\, dx$

2) $\displaystyle\int_{-2}^{3} (p^3(p-4p^{-2}))\, dp$

3) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi} \left[4\cos r + \operatorname{sen}\left(r - \frac{\pi}{2}\right)\right] dr$

4) $\displaystyle\int_{-2}^{-2/\sqrt{3}} \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$

5) $\displaystyle\int_1^5 |6-4u|\, du$

6) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(2-x^3)^2}\, dx$

7) $\displaystyle\int_2^7 q\sqrt{q+2}\, dq$

8) $\displaystyle\int_1^2 \frac{v^2+3}{2v^3+18v-5}\, dv$

9) $\displaystyle\int_0^{-1} \frac{x+1}{x+2}\, dx$

10) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 8} e^r\sqrt{1+e^r}\, dr$

11) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} 3\sec^2 u(\tan u) + 5\,du$

12) $\displaystyle\int_{1}^{9} \sqrt{s}\ln s\,ds$

13) $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} z\cos 2z\,dz$

14) $\displaystyle\int_{-1}^{0} w^3 8^{w^2+1}\,dw$

15) $\displaystyle\int_{1}^{e} (1+\ln u)^2\,du$

16) $\displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{\ln(4-7x)}{\sqrt{(4-7x)^3}}\,dx$

17) $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,dx \text{ si } f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{si } -4 \leq x < 1 \\ x^5 & \text{si } 1 \leq x \leq 10 \end{cases}$

18) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \text{ si } f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

19) $\displaystyle\int_{-3}^{3} (|2-x| + x^2)\,dx$

20) $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{5}{4x^2+4x+5}\,dx$

21) $\displaystyle\int_{0}^{4} |x^2-4x+3|\,dx$

22) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$

23) $\displaystyle\int_{5/3}^{7/3} \frac{dx}{\sqrt{4-9(x-2)^2}}$

24) $\displaystyle\int_{0}^{\pi^2} \cos\sqrt{r}\,dr$

R **8.8.34** Encuentre la fórmula para $g(u)$, dado que $g(0)=1$ y que $g'(u) = \dfrac{1-u}{\sqrt{4-u^2}}$

R **8.8.35** Verifique que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = b-c$ si $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq x < c \\ k & \text{si } a \leq x \leq c \\ 1 & \text{si } c < x \leq b \end{cases}$

R **8.8.36** Verifique que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen}(t)}\,dt = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$

R **8.8.37** Realice el cambio de variable $s = at$ para mostrar que

$$\int_0^x \frac{ds}{a^2+s^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{z}\right) \quad \text{con } a \neq 0$$

D. Cálculo de áreas

8.8.38 Determine el área de la región limitada por:

1) $f(x) = x^3 + 2x$ y el eje X, desde $x = -1$ hasta $x = 3$.

2) $x = y + 5$ y $x = \dfrac{y^2+2}{2}$.

3) $y = 0$ y $y = 1 - x^2$ desde $x = -1$ hasta $x = 1$. Realice la representación gráfica de la región.

4) $y = 0$ y $y = 2 - |x|$ desde $x = -2$ hasta $x = 2$. Realice la representación gráfica de la región.

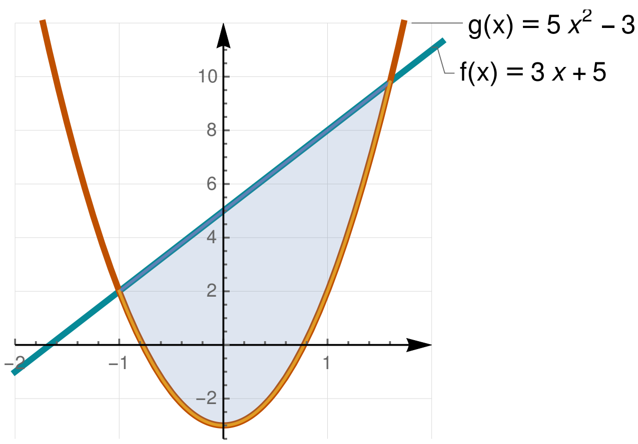
5) $y = x^2 - 4x + 3$ y $y = -x^2 + 2x + 3$. Realice la representación gráfica de la región.

8.8.39 Considere la función f definida por $\begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 16 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

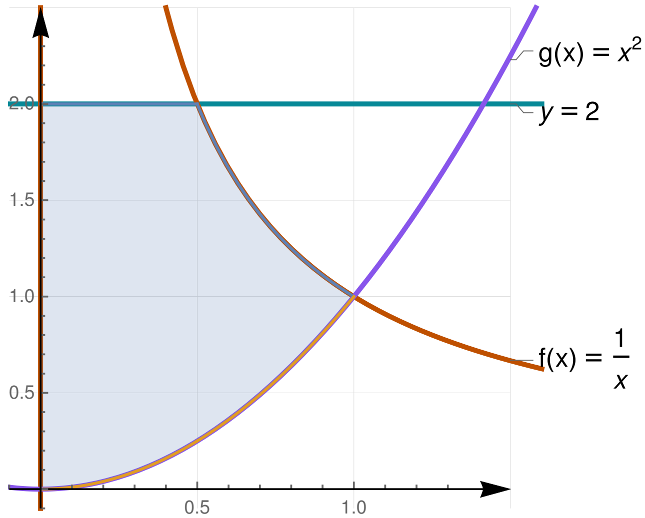
Determine el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje X y la recta $x = 3$. Incluya un esbozo de la región.

8.8.40 En las siguientes figuras, calcule el área de la región sombreada.

1)

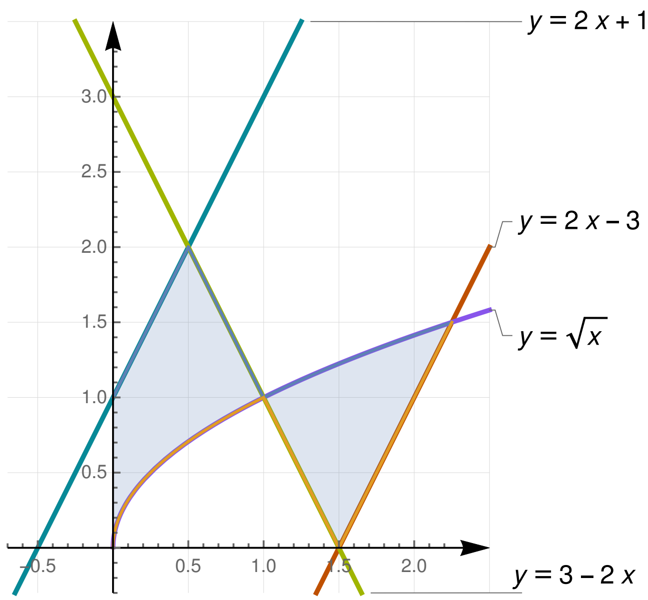


2)



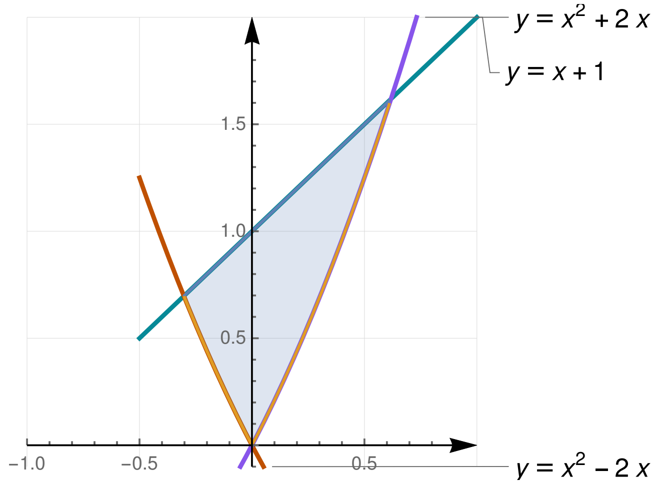
$g(x) = x^2$
$y = 2$
$f(x) = \frac{1}{x}$
2.0
1.5
1.0
0.5
0.5
1.0

3)

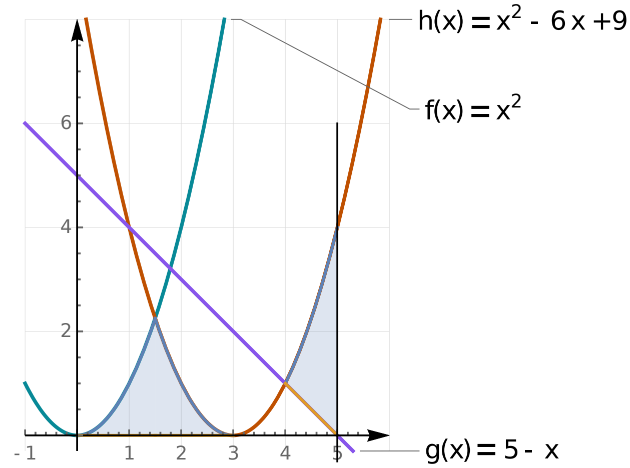


$y = 2x + 1$
$y = 2x - 3$
$y = \sqrt{x}$
$y = 3 - 2x$
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
-0.5
0.5
1.0
1.5
2.0

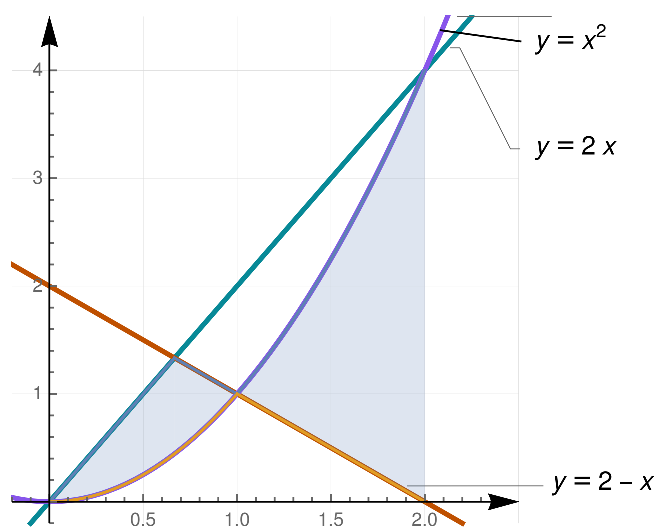
4)


$y = x^2 + 2x$
$y = x + 1$
$y = x^2 - 2x$
1.5
1.0
0.5
−1.0
−0.5
0.5

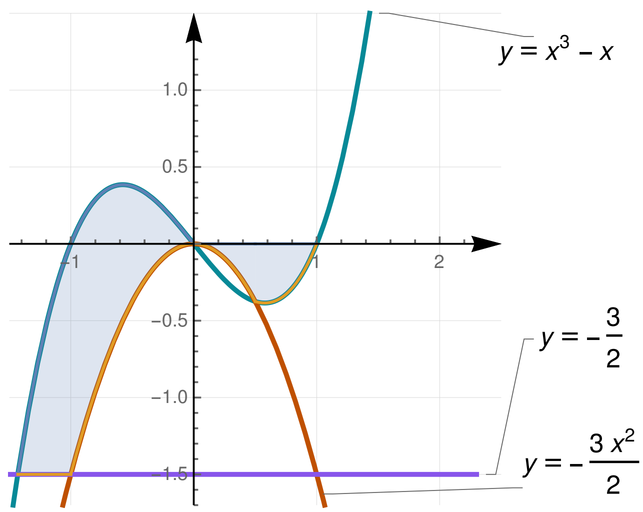
5) ______


$h(x) = x^2 - 6x + 9$
$f(x) = x^2$
$g(x) = 5 - x$
6
4
2
-1
1
2
3
4
5

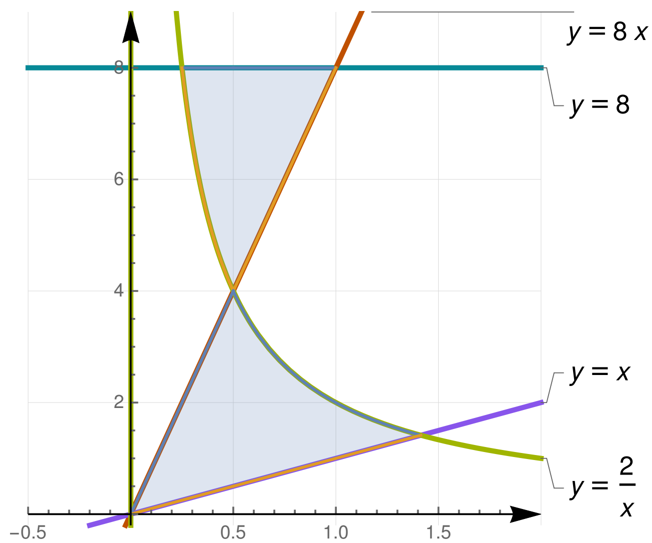
6) ______


$y = x^2$
$y = 2x$
$y = 2 - x$
4
3
2
1
0.5
1.0
1.5
2.0

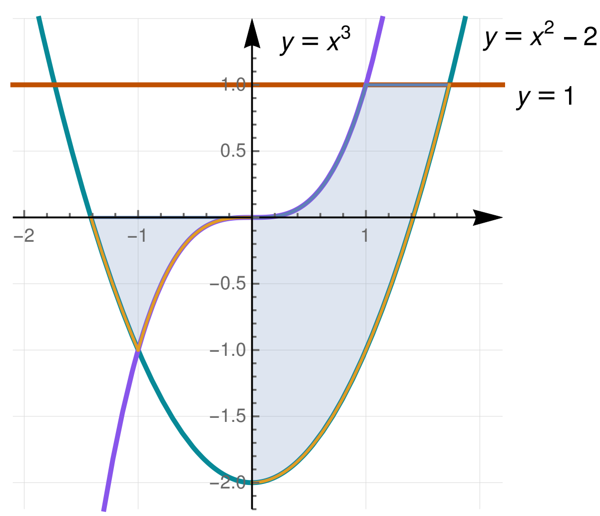
7) ______



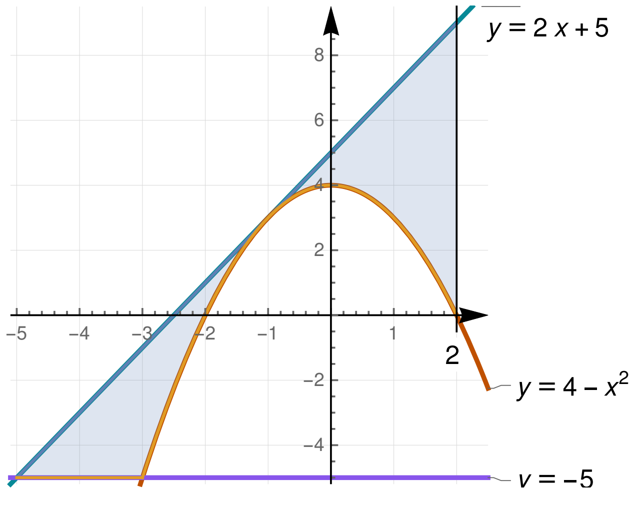
8)



9)



10)



Bibliografía

[1] Robert Bartle y otros. "An Open Letter to Authors of Calculus Books". https://math.vanderbilt.edu/schectex/ccc/gauge/letter/. Consultada octubre 7 2018.

[2] I. A. Maron. *Problems in Calculus of One Variable.* CBS Publishers & Distributors.

[3] W. Kaplan, D. J. Lewis. *Calculus and Linear Algebra.* John Wiley & Sons. 1971

[4] Boas, R. P. "Indeterminate Forms Revisited". The calculus Collection. MAA. 2010

[5] M. Botsko. "A Fundamental Theorem of Calculus that Applies to All Riemann Integrable Functions". Mathematics Magazine, Vol 64, N 5. 1991.

[6] Charles G. Denlinger. *Elements of Real Analysis.* Jones & Bartlett Learning; (2010) p. 378

[7] Jingcheng Ton. "Partitions of the interval in the definition of Riemann's integral". Journal of Math. Educ. in Sc. and Tech. 32 (2001), pp. 788-793.

[8] D. Hughes-Hallett et al. *Calculus: Single and Multivariable.* John Wiley & Sons Inc. 2012.

[9] D. J. Jeffrey, G. Labahn, A. D. Rich. "Integration of the Signum, Piecewise and Related Functions". Proceedings of the 1997 international symposium on Symbolic and algebraic computation.

[10] Kestelman, H., *Modern Theory of Integration.* New York. Dover Publications, 1960.

[11] Sadhan Kumar Mapa. *Introduction to Real Analysis.* Sarat Book House. 2014

[12] Omar Hijab. *Introduction to Calculus and Classical Analysis.* Spinger. Undergraduate Texts in Mathematics. 2010

[13] Utpal Chatterjee. *Advanced Mathematical Analysis: Theory & Problems.* Academic Publishers. 2016

[14] E. Hernández S. *Cálculo Diferencial e Integral con Aplicaciones*. Revista digital Matemáticas, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/Libros/

[15] S. Schmidt et al. "Práctica del curso Cálculo Diferencial e Integral. Selección de ejercicios." Revista digital, Matemática, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/Libros/practicas/

[16] G. Sanabria B. "Guía del curso de Cálculo: Límites". Folleto ITCR.

[17] E. Agüero, J. Chavarría, J.J. Fallas. "Folleto de prácticas de Cálculo Diferencial e Integral" ITCR, 2011

[18] L. Acuña P. "Cálculo diferencial e integral". Folleto, ITCR, 2016.

[19] C. Páez P. "Práctica General de CDI". ITCR. 2015.

[20] S. Meneses R. "Prácticas para Cálculo diferencial e integral". Folleto. ITCR.

[21] P. García D. "Prácticas para Cálculo diferencial e integral". ITCR.

[22] M. Gutiérrez M. "Prácticas para Cálculo diferencial e integral". ITCR.

Capítulo 9

Solución de los ejercicios

Soluciones del Capítulo 1

1.1.1

Usamos los axiomas de orden:

$$\begin{aligned} y<x &\implies y+x<x+x \\ &\implies \tfrac{1}{2}\cdot(y+x)<\tfrac{1}{2}\cdot(x+x) \\ &\implies \frac{x+y}{2}<x \end{aligned}$$

1.1.2

Por contradicción: Si $x>y$ entonces podemos tomar $\epsilon=\dfrac{x-y}{2}>0$. Pero, por hipótesis $x\leq y+\epsilon$, entonces

$$x\leq y+\epsilon=y+\frac{x-y}{2}=\frac{x+y}{2}<x \implies x<x$$

Contradicción.

1.1.3

Usamos la defición y la unicidad de los inversos aditivos.

a.) $-(-x)+(-x)=0 \implies -(-x)=x$

b.) $(-x)y+(xy)=(-x+x)y=0$
$\implies (-x)y=-(xy)$

c.)
$$\begin{aligned} (-x)(-y)-xy &= (-x)(-y)+(-x)y \\ &= -x(-y+y)=0 \\ &\implies (-x)(-y)=xy \end{aligned}$$

1.1.4

Como $z\neq 0$, entonces $\dfrac{1}{z}xz=\dfrac{1}{z}yz \implies x=y$

1.1.5

Usamos los axiomas y las propiedades de la relación de orden.

a.) $x\neq 0 \implies x^2>0$ por la regla de los signos.

b.) $x>1 \implies x\cdot x>x\cdot 1=x \;\therefore\; x^2>x$

c.) $0<x<1 \implies x\cdot x<x<1 \;\therefore\; x^2<1$

d.) Podemos multiplicar por $1/y$ y por $1/x$,

$$0<x<y \implies 0<\frac{x}{y}<1 \implies 0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$$

e.) Use inducción...

f.) Racionalizando: $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}<0$

pues $x-y<0$ y $\sqrt{x},\sqrt{y}>0$. $\therefore\; \sqrt{x}<\sqrt{y}$

1.1.6

Podría analizar los tres casos: $0<x<y$, $x<y<0$ y $x<0<y$. La conlusión es:

$$|x|<|y| \implies x^2<y^2,\ \text{sino}\ x^2\geq y^2$$

1.1.7

Por contradicción: Si $x>0$, podemos tomar $\epsilon=\dfrac{x}{2}>0$ y por hipótesis

$$x\leq\epsilon \implies 0<x\leq\frac{x}{2}$$

lo cual es una contradicción pues $1\not<1/2$.

1.1.8 R

Use la definición de valor absoluto.

1.1.9 R

a.) Tenemos

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$
$$|y| = |y - x + x| \leq |x - y| + |x|$$

Por tanto

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

esto último es equivalente a lo que estamos buscando.

b.) $|x| - |y| \leq \big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y| < c$

$$\therefore \ |x| - |y| < c$$

c.) Si $x \neq y \implies |x - y| > 0$, entonces podemos y tomar $\epsilon = |x - y|/2$. Aplicando la hipótesis,

$$|x - y| < \epsilon$$

llegamos a una contradicción

1.1.10 R

Observe que $b > 0$, entonces

$$-b < 0 < x - a < b \implies |x - a| < b$$

1.1.11 R

$$\begin{aligned} |x - 3| < 1 &\implies 2 < x < 4 \\ &\implies 0 < x - 2 < 2 \\ &\implies |x - 2| < 2 \end{aligned}$$

1.1.12 R

1.1.13 R

$$\begin{aligned} 0 < |x - 2| < \frac{1}{2} &\implies \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \\ &\implies \frac{1}{2} < x - 1 < \frac{3}{2} \\ &\implies \frac{1}{2} < |x - 1| < \frac{3}{2} \\ &\implies \frac{1}{|x - 1|} < 2 \end{aligned}$$

1.1.14 R

$$\begin{aligned} 0 < |x - 2| < \frac{1}{2} &\implies \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \\ &\implies -\frac{9}{2} < x - 6 < -\frac{7}{2} \\ &\implies \frac{7}{2} < |x - 6| < \frac{9}{2} \end{aligned}$$

1.1.15 R

$$0 < |x - 2| < \frac{1}{2} \implies \left\{ \begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & < & |x - 1| & < & \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} & < & |x - 6| & < & \frac{9}{2} \end{array} \right.$$

de donde $\dfrac{|x - 6|}{|x - 1|} < 2 \cdot \dfrac{9}{2} = 9$

1.1.16 R

Este es un cálculo algebraíco con desigualdades:

$$\begin{aligned} |x - 3| < \frac{\epsilon}{5} &\iff 5|x - 3| < \epsilon \\ &\iff |5x - 15| < \epsilon \end{aligned}$$

1.1.17 R

Usamos el hecho de que $|\operatorname{sen} x| < 1$,

$$\begin{aligned}|2\operatorname{sen}(x)(x-2)| &< |2(x-2)|\\ &< 2\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

1.1.18

Observe que $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, entonces

$$\begin{aligned}|x^2-5x+6| &= |(x-2)(x-3)|\\ &= |x-2|\,|x-3|\\ &< |x-2|\delta\end{aligned}$$

Ahora debemos *acotar* la expresión $|x-2|$.

$|x-3|<\delta=\text{mín}\left\{1,\dfrac{\epsilon}{2}\right\}<1$, entonces

$$\begin{aligned}|x-3|<1 &\Longrightarrow 2<x<4\\ &\Longrightarrow 0<x-2<2\\ &\Longrightarrow |x-2|<2\end{aligned}$$

Ahora completamos el razonamiento:

$|x-3|<\delta=\text{mín}\left\{1,\dfrac{\epsilon}{2}\right\}<\dfrac{\epsilon}{2}$, entonces

$$\begin{aligned}|x^2-5x+6| &< |x-2|\delta\\ &< 2\delta<2\cdot\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

1.1.19

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^2+3x+1}{x-1}-11\right| &= \frac{|x-2||x-6|}{|x-1|}\\ &< \frac{\delta\,|x-6|}{|x-1|}\end{aligned}$$

Ahora debemos *acotar* las expresiones $|x-1|$ y $|x-6|$

$$0<|x-2|<\delta<\frac{1}{2}\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}<|x-1|<\dfrac{3}{2}\\[2ex] \dfrac{7}{2}<|x-6|<\dfrac{9}{2}\end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^2+3x+1}{x-1}-11\right| &< \frac{\delta\,|x-6|}{|x-1|}\\ &< \frac{1}{|x-1|}\cdot\delta\cdot\frac{9}{2}\\ &< 2\cdot\delta\cdot\frac{9}{2}=9\delta\\ &< 9\cdot\frac{\epsilon}{9}=\epsilon\end{aligned}$$

1.1.20

$$\begin{aligned}|x-6| &< \delta=\sqrt{\frac{2}{N}}\\ |x-6| &< \sqrt{\frac{2}{N}}\\ (x-6)^2 &< \frac{2}{N}\\ \frac{2}{(x-6)^2} &> N\end{aligned}$$

1.1.21

1.1.22

1.1.23

a.) $\delta=1/6$

b.) $\delta=1/(6n)$

c.) $\delta=\text{mín}\{1,\epsilon/6\}$

Soluciones del Capítulo 2

2.1.1

Analizamos $|5x-3\ -\ 7|$

$$\begin{aligned}|5x-3\ -\ 7| &= |5x-10|\\ &= 5|x-1|\ <\ \epsilon\end{aligned}$$

Estos nos dice que debemos tomar $\delta = \dfrac{\epsilon}{5}$.

Formalmente: Si $0<|x-2|<\dfrac{\epsilon}{5}$,

$$\begin{aligned}|5x-3\ -\ 7| &= 2|x-2|\\ &< 5\,\frac{\epsilon}{5}\ <\ \epsilon\end{aligned}$$

2.1.2

Analizamos $|mx+b\ -\ (m\cdot a+b)|$.

$$|mx+b\ -\ (m\cdot a+b)| = m|x-a|\ <\ \epsilon$$

Estos nos dice que si $m\neq 0,\ \delta=\dfrac{\epsilon}{m}$

Formalmente: Si $0<|x-a|<\dfrac{\epsilon}{m}$,

$$\begin{aligned}|mx+b\ -\ (m\cdot a+b)| &= m|x-a|\\ &< m\,\frac{\epsilon}{m}\ <\ \epsilon\end{aligned}$$

Si $m=0$, dado $\epsilon>0$, tomamos cualquier $\delta>0$, la definición se cumple trivialmente:

$$|x-a|<\delta \implies |b-b|<\epsilon.$$

2.1.3

Analizamos $|5\cos(x)(x-1)+2\ -\ 2|$

$$\begin{aligned}|5\cos(x)(x-1)+2\ -\ 2| &= 5|\cos(x)||x-1|\\ &< 5|x-1|\ <\ \epsilon\end{aligned}$$

Estos nos dice que $\delta = \dfrac{\epsilon}{5}$

Formalmente: Si $0<|x-a|<\dfrac{\epsilon}{5}$,

$$\begin{aligned}|5\cos(x)(x-1)+2\ -\ 2| &= 5|\cos(x)||x-1|\\ &< 5|x-1|\\ &< 5\,\frac{\epsilon}{5}\ <\ \epsilon\end{aligned}$$

2.1.4

Analizamos $\left|\dfrac{5x^2+11x+2}{x+2}\ -\ 1\right|$

$$\begin{aligned}\left|\frac{5x^2+11x+2}{x+2}\ -\ 1\right| &= \left|\frac{(5x+1)(x+2)}{x+2}\ -\ 1\right|\\ &= 5|x|\ <\ \epsilon\end{aligned}$$

Estos nos dice que $\delta = \dfrac{\epsilon}{5}$

Formalmente: Si $0<|x-0|<\dfrac{\epsilon}{5}$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{5x^2+11x+2}{x+2}\ -\ 1\right| &= |5x|\\ &< 5\,\frac{\epsilon}{5}\ <\ \epsilon\end{aligned}$$

2.1.5

Analizamos $\left|\dfrac{2x^2-8x+6}{x-1}+4\right|$

$$\left|\frac{2x^2-8x+6}{x-1}+4\right| = |2(x-1)|\ <\ \epsilon$$

Estos nos dice que $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$

Formalmente: Si $0<|x-1|<\dfrac{\epsilon}{2}$,

$$\left|\frac{2x^2-8x+6}{x-1}+4\right| = 2|x-1|\ <\ 2\,\frac{\epsilon}{2}\ =\ \epsilon$$

2.1.6 Justifique por qué se debería tomar $\delta=\dfrac{\epsilon}{3}$ y luego haga la prueba formal.

2.1.7 Ⓡ

Analizamos $|x^2-4|$ si $|x-2|<\delta$

$$\begin{aligned} |x^2-4| &= |x-2||x+2| \\ &< \delta|x+2| < \epsilon \end{aligned}$$

Para acotar $|x+2|$, acotamos δ.

Por ejemplo, si $\delta<1 \implies |x+2|<5$. Entonces se debería tomar

$$\delta=\text{mín}\left\{1,\frac{\epsilon}{5}\right\}$$

Formalmente: Si $|x-2|<\delta$,
El estudiante debe completar la prueba

2.1.8 Ⓡ

Observe que

$$\left|\frac{x^3-2x^2}{x-2}-4\right|=x^2-4$$

Ahora ya puede completar la prueba (puede mirar el ejemplo anterior)

2.1.9 Ⓡ

$$\begin{aligned} \left|\frac{x^2+3x+1}{x-1}-11\right| &= \frac{|x-2||x-6|}{|x-1|} \\ &< \frac{\delta|x-6|}{|x-1|} \end{aligned}$$

Acotamos: Sea $\delta<\frac{1}{2}$. Ahora debemos, con la información que tenemos, *acotar* las expresiones $|x-1|$ y $|x-6|$

$$0<|x-2|<\delta<\frac{1}{2}\implies\begin{cases} \frac{1}{2} < |x-1| < \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} < |x-6| < \frac{9}{2} \end{cases}$$

Por tanto, tomamos $\delta=\text{mín}\left\{\frac{1}{2},\frac{\epsilon}{9}\right\}$ ¿por qué? (debe justificar)

Formalmente: Si $|x-2|<\delta$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{x^2+3x+1}{x-1}-11\right| &< \frac{\delta|x-6|}{|x-1|} \\ &< 2\cdot\delta\cdot\frac{9}{2} \text{ pues...} \\ &< 9\cdot\frac{\epsilon}{9}=\epsilon \text{ pues...} \end{aligned}$$

2.1.10 Ⓡ

Justifique por qué se puede tomar

$$\delta=\text{mín}\left\{1,\frac{\epsilon}{9}\right\}$$

Luego haga la prueba formal.
El estudiante debe completar la prueba

2.1.11 Ⓡ

Observe que

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)-11| &= |f(x)-4+g(x)-7| \\ &\leq |f(x)-4|+|g(x)-7| \end{aligned}$$

Ahora utilizamos la hipótesis para hacer una prueba formal.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=4$, entonces, dado $\epsilon>0$ también $\epsilon/2>0$, por lo que para esta cantidad existe $\delta_1>0$ tal que

$$\text{si } 0<|x-a|<\delta_1 \implies |f(x)-4|<\frac{\epsilon}{2}$$

Si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=7$, entonces...

El estudiante debe completar la prueba

2.1.12 Ⓡ

Como $L>0$, tome $\epsilon=L/3$. El estudiante debe completar la prueba

Soluciones del Capítulo 3

Inmediatos, forma "$\frac{0}{0}$" y otros

3.2.1

1) $\dfrac{1}{2}$
2) 0
3) $\frac{5}{4}$
4) $\dfrac{-a-1}{1-2a}$
5) $L = \lim\limits_{w\to a} -\dfrac{2(a-w)}{w(2a+w)} = 0$
6) $\dfrac{-1}{8}$
7) -20
8) $-\frac{1}{3}$
9) 1
10) $\frac{4}{3}$
11) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$
12) 0
13) 2.1^{-1}
14) $-\dfrac{3}{4}$
15) $\dfrac{1}{2}$

Cambio de variable

3.2.2

1)
Sugerencia: $u^6 = 1 + x$.
El límite es $\dfrac{3}{2}$
2)
Sugerencia: $u^6 = 5z + 1$.
El límite es: $\dfrac{5}{12}$
3) $\dfrac{-1}{320}$
4)
Sugerencia: $u = \sqrt[5]{y}$.
El límite es: $\dfrac{1}{32}$
5) $\dfrac{-1}{2}$
6) $\dfrac{c}{3}$
7) $-\dfrac{5}{2}$

Trigonométricos

3.2.3

1) -4
2) Sugerencia: $\operatorname{sen}(2t) = \dfrac{\operatorname{sen}(2t)}{2t}\cdot 2t$ y aplique el límite especial. El resultado es $\dfrac{-1}{4}$
3) $\dfrac{3}{2}$
4) 2
5) $\dfrac{1}{2}$
6) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$
7) $\dfrac{3}{4}$
8) $\dfrac{1}{2}$
9) 2
10) $\dfrac{3}{8}$
11) $\dfrac{-1}{4}$
12) $\dfrac{-3\sqrt{3}}{8\pi} \approx -0{,}206748$
13) $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$
14) 2
15) 5
16) $\dfrac{45}{2}$
17) $\dfrac{-2}{\pi} \approx -0{,}636620$
18) 0
19) 0
20) $\dfrac{1}{6}$
21) $\dfrac{3}{2} + \sqrt{3} \approx 3{,}23205$
22) $\cos a$
23) $-\operatorname{sen} a$
24) Multiplique "arriba y abajo" por $1-\sqrt{\cos x}$ y por $1+\cos x$. Luego use $\operatorname{sen}(7x) = \dfrac{\operatorname{sen}(7x)}{7x}\cdot 7x$. El resultado es 28

3.2.4

1) No. $\sqrt{x^4 - 16x^2} = |x|\sqrt{x^2-16}$, es decir f no está definida en los alrededores de $x = 0$, por lo que

$x=0$ no es un punto de acumulación. Por lo tanto, el límite $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^4-16x^2}$ no existe

2) $x\neq 3$.
3) $x\neq 3$.
4) Sí.
5) Se omite.
6) $a=15$.
7) $a=b=4$.
8) $\frac{3}{4}$.

Soluciones del Capítulo 4

4.2. Límites unilaterales

4.2.1

1) 3
2) 2
3) 3
4) 1
5) 2
6) 0
7) 1
8) 2

4.2.1

1) 1
2) 0
3) 1
4) 2

4.2.1

1) Existe por la derecha y es 1.
2) No existe.
3) 4
4) 3
5) Existe por la izquierda y es -3.

4.2.2

1) $\forall a, a\in\mathbb{R}-\{-1,-3\}$
2) Se omite.

4.2.3

1) -4
2) -4
3) -1
4) No existe.
5) 6
6) 5
7) 6
8) No existe.
9) 2
10) 2
11) 2
12) 2

Conceptos Básicos

4.5.1

1)
   (a) 1
   (b) No existe
   (c) 2
   (d) 1;1
   (e) ∞
2)
   (a) ∞
   (b) No existe
   (c) No existe
   (d) 3
   (e) 3
3)
   (a) -1
   (b) 0
   (c) 2
   (d) 1
   (e) 0
   (f) No existe

(g) 0

4)

(a) 2

(b) No existe

(c) -2

(d) No existe

(e) 2.5

(f) 2

5)

(a) $-\infty$

(b) 1

(c) No existe

(d) No existe

(e) -2

(f) ∞

(g) ∞

6)

(a) 1

(b) ∞

(c) 2

(d) 1

(e) ∞

(f) $-\infty$

(g) 1

(h) 2

4.5.2

1) Se omite.
2) Se omite.
3) Se omite.
4) Se omite.

Cálculo de límites

4.5.3

1) ∞ izq, $-\infty$ der
2) $-\infty$ izq, ∞ der
3) $-\infty$
4) ∞ izq , $-\infty$ der
5) ∞
6) ∞ izq, $-\infty$ der
7) ∞
8) ∞
9) 0
10) 0
11) ∞
12) $-\infty$

4.5.4

1) 0
2) ∞
3) $-\frac{3}{2}$
4) ∞
5) $-\ln 4$
6) -7
7) 1
8) 0
9) 3
10) $-\frac{x}{9}$
11) $-\frac{9}{2}$
12) $-\frac{1}{4}$
13) 0
14) 1
15) 1
16) 0
17) 1
18) 5

Teorema del emparedado

4.5.5

1)
Como $-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x}$, entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

2) 0
3) 2
4)
Observe que $\frac{2x}{x^2 + \cos x} = \frac{2x}{x\left(x + \frac{\cos x}{x}\right)}$
5) 0
6) Observe que

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2(4 - x) \leq 2$$

Cálculo de límites

4.5.6

1)
Sugerencia: Analizando $\frac{1}{x^2+1} < \varepsilon$, obtenemos $x > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, pero eso solo es válido si $\varepsilon < 1$. Lo que sirve para $\varepsilon > 0$ es $M = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} > 0$ (¿por qué?).

Ahora construya una prueba formal.

2)
Sugerencia: Verifique que

$$\frac{1}{(x-2)^2} > M \implies |x - 2| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Ahora construya una prueba formal.
3)
4)

4.5.7

Puede tomar $\varepsilon = \frac{3L}{2}$ y deducir B. Observe que se requiere $0 < \varepsilon - L$ (¿por qué?)

4.5.8

Usando la definición: dado $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \implies f(x) \geq g(x) > M$$

Por lo tanto se cumple la definición que justifica que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

4.5.9

Soluciones del Capítulo 5

5.1.1 No, los límites laterales son distintos.

5.1.2

1) $\mathbb{R} - \{1\}$
2) $\mathbb{R} - \{-1, 2, 3, 4\}$

5.1.3

1) $a = -1, b = 1$
2) $a = 1, b = 2$

5.1.4

1) Falso.
2) Verdadero.
3) Verdadero.
4) Falso.
5) i) Verdadero. ii) Falso.

5.1.5 f no es continua en -1 y $m = \frac{3}{2}$.

5.1.6 $k = 2$ ó $k = -2$

5.1.7 $b = 1$ y $k = 3$.

5.1.8

a. $(a = 2$ y $b = 1)$ ó $(a = -2$ y $b = -1)$

b. $a = 2$ y $b = 1$.

5.1.9 R $a=0,\ b=2$ y $c=\dfrac{-1}{15}.$

5.1.10 R $a=1$ y $b=6$

5.1.11 R

1) No en 1.
2) No en 1.
3) No en 1.
4) No en 0

5.1.12 R

1) $a=\dfrac{1}{2},\ c=\dfrac{-1}{4}$
2) No es posible.
3) $a=\dfrac{-3}{2},\ c=\dfrac{3}{2}$

Teorema del valor intermedio

5.1.13 R

$P(-1)P(1)<0$, como hay cambio de signo en $[-1,1]$ y P es continua, existe $c\in[-1,1]$ tal que $P(c)=0$

5.1.14 R

$P(1)P(3)<0$ y $P(3)P(4)<0$. Como hay cambio de signo en $[1,3]$ y $[3,4]$ y P es continua, existe $c_1\in[1,3]$ y $c_2\in[3,4]$ tal que $P(c_1)=0$ y $P(c_2)=0$.

5.1.15 R

Sugerencia: Cuando $x<a_1$, $f(x)<0$, así que no hay ceros a la izquierda de a_1. Observe que

$$\lim_{x\to a_1^+} f(x)=+\infty \text{ y } \lim_{x\to a_1^-} f(x)=-\infty$$

Luego analice el signo entre a_i y a_{i+1} y aplique el TVI (f solo es discontinua en $x=a_1,...,x=a_n$).

5.1.16 R

5.1.17 R

Considere $g(x)=f(x+\pi)-f(x)$. Evalúe g en $x=0$ y $x=\pi$ y use el teorema del valor intermedio para concluir. Observe que hay dos casos: $g(0)=0$ y $g(0)\neq 0$.

Soluciones del Capítulo 6

6.3. Derivadas por definición

6.3.1 R

1) $-15.$
2) $-11.$
3) $\dfrac{1}{4}.$
4) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}.$
5) $0.$
6) $\dfrac{\left(1+3\sqrt{3}\right)}{2}.$
7) $g'(x)=2cx+b.$
8) $h'(x)=\dfrac{1}{2(x+1)^{3/2}}.$
9) $g'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$
10) $h'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}.$

6.3. Cálculo de derivadas

6.3.2 R

1) $f'(x)=16x^7-15x^4.$
2) $f'(x)=4x^{1/3}-4x^{-1/3}.$
3) $g'(z)=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}+\dfrac{1}{2z\sqrt{z}}.$
4) $h'(z)=3-z^{-2}+4z^{-3}-z^{-4/3}.$
5) $f'(s)=4s^3+3s^2+6s+2.$
6) $f'(v)=3v^2-6v+2.$
7) $f'(y)=2+3y^{-2}.$
8) $f'(t)=20t^{3/2}-\dfrac{1}{5}.$
9) $f'(x)=\dfrac{(ad-bc)}{(cx+d)^2}.$
10) $f'(t)=2t+\left(\dfrac{1}{3-t}\right)^2.$
11) $f'(r)=\dfrac{[(1+r)\cos r-\operatorname{sen} r]}{(1+r)^2}-$

$\dfrac{[-\operatorname{sen} r(1-r) - \cos r]}{(1-r)^2}.$

12) $f'(u) = \dfrac{12u^2 + 8u - 1}{(u+2)^2}.$

13) $f'(p) = -24p^3 - 3p^2 - 8p - 1.$

14) $f'(x) = \dfrac{10 - 2x}{(x+1)^3}.$

15) $f'(t) = \dfrac{-4t^2 + 6t - 1}{(1-t)^2(t-2)^2}.$

16) $f'(u) = \dfrac{u^4 + 8u^3 - 13u^2 - 14u - 18}{(u-1)^2(5+u)^2}.$

17) $f'(r) = \dfrac{64r^2 + 48r - 12}{r^2(1-2r)^2}.$

18) $g'(x) = -4x^{-3}\arctan x + \dfrac{2x^{-2}}{x^2+1}.$

19) $g'(x) = \dfrac{\arccos x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$

20) $h'(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}.$

21) $f'(u) = \dfrac{2}{u(1-\ln u)^2}.$

22) $f'(u) = \dfrac{1 + \ln u + e^u(u\ln u - \ln u - 1)}{(1-e^u)^2}.$

23) $f'(z) = z^{-2/3}\left(1 + \dfrac{\ln z}{3}\right).$

24) $g'(t) = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}.$

25) $g'(t) = \dfrac{1 + t - t\ln t}{t(t+1)^2}.$

26) $h'(x) = \cos x + \operatorname{sen} x.$

27) $h'(z) = \dfrac{e^z\left(\sqrt{1-z^2}\arccos z + 1\right)}{\sqrt{1-z^2}(\arccos z)^2}.$

28) $h'(z) = \dfrac{-1}{\sqrt{z}(1+z^2)} - \dfrac{\operatorname{arc}\cot z}{2z\sqrt{z}}.$

6.3. Regla de la cadena

6.3.3

1) $f'(y) = 24\left[(y^2+3)^4 - 1\right]^2 \cdot (y^2+3)^3 \cdot y.$

2) $f'(\theta) = 5\sec(5\theta) + 10\operatorname{sen}^2(5\theta)\sec^3(5\theta).$

3) $f'(x) = 27(x-7)^2/(x+2)^4.$

4) $f'(t) = \dfrac{18t^5 - 105t^4}{2\sqrt{t^2 - 5t^3}}.$

5) $f'(x) = \dfrac{(3\tan^2 x \cdot \sec^2 x)(\csc x + 2) + (\tan^3 x - 1)\csc x \cdot \cot x}{(\csc x + 2)^2}$

6) $f'(x) = (4x-5)\,e^{2x^2-5x+3}.$

7) $f'(q) = 5\left(q - 3e^{\frac{q}{3}}\right)^4\left(1 - e^{\frac{q}{3}}\right).$

8) $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}.$

9) $f'(x) = t^{-1} + t\left(t^2+1\right)^{-1}.$

10) $f'(p) = 3p^2\left(p^3-1\right)^{-1} - 2p + 5(2-10p)^{-1}.$

11) $f'(z) = \frac{1}{2}z^{-1}(1+\ln z)^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{2}z^{\frac{-1}{2}}(1+\sqrt{z})^{-1}.$

12) $f'(x) = 3e^{3x}g\left(\ln^2 x\right) + 2e^{3x}g'\left(\ln^2 x\right)\dfrac{\ln x}{x}.$

13) $f'(y) = \dfrac{2\ln(2y+6)}{(y+3)}.$

14)

$f'(z) = \dfrac{2\ln\left(\ln\left(2z^3-8z\right)\right)\left(6z^2-8\right)}{\left[\left(2z^3-8z\right)\ln\left(2z^3-8z\right)\right]}.$

15) $f'(x) = \dfrac{\left[\ln 5 \cdot e^{5^x} \cdot 5^x - \sec^2(x+1)\right] \cdot \operatorname{sen}(2x) - 6\left[e^{5^x} + \tan(x+1)\right] \cdot c}{\operatorname{sen}^4(2x)}$

16) $f'(w) = \dfrac{1}{2(w-1)} - \dfrac{3}{w} + \dfrac{\operatorname{sen}(w^2)\cdot 2w}{\cos(w^2)}.$

17) $h'(z) \;=\; 2\arccos\left(\frac{e^{-z}}{z}\right) \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{e^{-z}}{z}\right)^2}} \cdot$

$\dfrac{-ze^{-z} - e^{-z}}{z^2}.$

18) $f'(x) = \dfrac{3\arctan^2(\ln(x^2+e^x)) \cdot (2x+e^x)}{(x^2+e^x)\cdot(1+\ln^2(x^2+e^x))}.$

19) $h'(x) = \dfrac{3\ln 3 \cdot 3^{g(x^3+4)} \cdot g'(x^3+4) \cdot x^2}{3^{g(x^3+4)} + 1}.$

20) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1-2x^2}(x+3)}{(4x-1)^2}\left(\dfrac{-2x}{1-2x^2} + \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{8}{4x-1}\right)$

.

21) $f'(v) = \sqrt{\dfrac{(v-1)^3}{(2v+7)(5-v)^2}}\left(\dfrac{3}{2v-2} - \dfrac{1}{2v+7} + \dfrac{1}{5-v}\right)$

.

22) $f'(t) = 2t^{\ln t - 1}\ln t.$

23) $f'(w) = e^w w^{1-w}\left(w^{-1} - \ln w\right).$

24) $g'(z) = -2e^{1-2z}\sec\left(e^{1-2z}\right)\tan\left(e^{1-2z}\right).$

25) $h'(u) = e^{u\operatorname{sen} u}(\operatorname{sen} u + u\cos u) - \dfrac{12u\ln^2\left(3-2u^2\right)}{3-2u^2}$

.

26) $h'(u) = -12ku^2\cos^3\lfloor\operatorname{sen}(ku^3)\rfloor\operatorname{sen}\lfloor\operatorname{sen}(ku^3)\rfloor\cos(ku^3)$

.

27) $g'(u) = 2\cot u\ln(\operatorname{sen} u) - \dfrac{2e^{2u}}{1-e^{2u}}.$

28) $g'(u) = 3u^2\sec\left(u^3\right).$

6.3.4

1) $y' = \dfrac{f'(\ln z) - (1+z)f(\ln z)}{z^2 e^z}.$

2) $y' = e^{f(u)}\left[f\left(e^{-u}\right)f'(u) - e^{-u}f'\left(e^{-u}\right)\right]$.

3) $y' = 2nw^{2n-1}f'\left(w^{2n}\right) - n\left[f(w)\right]^{n-1}f'(w)$.

4) $y' = e^{4w}\left[4f(\ln^3 w) + \dfrac{3\ln^2 w}{w}f'(\ln^3 w)\right]$.

6.3. Valor Numérico

6.3.5

1) $(f \cdot g)'(2) = 5$.

2) $h'(-1) = -6$.

3) $(f/g)'(5) = 8$.

4) $q'(4) = \dfrac{3}{16}$.

5)

a) $(f+g)'(5) = -1$.

b) $f \cdot g)'(5) = 8$.

c) $(f/g)'(5) = -8$.

d) $g/f)'(5) = 2$.

e) $\left(\dfrac{f}{f-g}\right)'(5) = 8$.

6) $(p \circ q)'(6) = -4$.

7) $h'(2) = -\dfrac{1}{4}$.

8) $h'(0) = -\dfrac{3}{2}$.

9) $g'(0) = -3$.

10) $H'(3) = 28$.

11) $H'(3) = \dfrac{e-12}{e}$.

12)

a) $F'(0) = -a$.

b) $H'(0) = 3\ln 2$.

13)

a) $f'(3) = \dfrac{-1}{6}$.

b) $g'(4) = \dfrac{21}{2}$.

14) $(f \cdot g)'(5) = 8$ y $\left(\dfrac{f}{f-g}\right)'(5) = 8$.

15) $f'(1) = \dfrac{3}{5}$.

16) $f'(3) = \dfrac{-1}{6}$.

6.3. Conceptos teóricos

6.3.6

1) Se omite.

2) Se omite.

3) $a = 2$ y $f(x) = x^6$.

4) $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ Y $f'(0) = x^2 + 1$.

5) Se omite.

6) Se omite.

7)

a) Se omite.

b) $a = c, \quad b = 0.$

8) Se omite.

9) $f'(x) = \dfrac{x^2}{8}$.

6.3. Derivación implícita

6.3.7 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y-2}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2y}{(y-2)^2}$.

6.3.8

1) $y' = \dfrac{2y^2e^{2x} - 3x^2y - y\ln^2 y}{2x\ln y - y\cos y - ye^{2x}}$.

2) $y' = \dfrac{\operatorname{sen} x - y^2 - 1}{2xy - e^y}$.

3) $y' = \dfrac{ye^{xy} + 1}{1 + 3y^2 - xe^{xy}}$.

6.3.9

1) $f'(x) = x^x\left(\ln(x) + 1\right)$

2) $f'(x) = \left(2x\ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1}\right)(x+1)^{x^2}$

3) $g'(x) = \dfrac{2^{x-1}x^x\left(\ln(2x) + 1\right)}{\sqrt{(2x)^x}}$

4) $h'(x) = \left(3\ln\left(x^3 + x\right) + \dfrac{\left(3x^2+1\right)(3x-2)}{x^3+x}\right)\left(x^3+x\right)^{3x-2}$

5) $y' = \dfrac{(x+3)\left[\operatorname{sen}(x)\cdot(x+3) - \cos(x)\cdot(x+1)\right]}{e^x\cos^2(x)}$

6) $h'(x) = -\dfrac{39x^3 - 14x^2 + 51x - 6}{4x^{\frac{1}{4}}(3x+2)^6\sqrt{x^2+1}}$

7) $f'(x) = -\dfrac{x\left(5x^6 - 45x^3 + 4\right)}{\left(5x^3+1\right)^3}$

6.3. Derivadas de orden superior

6.3.10

1) $z''' = -64e^{1-4q}$.
2) $x'' = 16(1+2s)^{-3}$.
3) $y'' = 10$.
4) $y''' = -12(x+1)^{-4}$.
5) $y'' = \dfrac{2y}{(2-y^2)^3}$.
6) $y'' = \dfrac{9}{y(1-\ln y)^3}$.

6.3. Otros ejercicios

6.3.11

1) Se omite.
2) A = B = $\dfrac{-1}{2}$ y C = $\dfrac{-3}{4}$.

6.3.12

1) Se omite.
2) $F'''(x) = f'''(x)\cdot g(x) + 3f''(x)\cdot g'(x) + 3f'(x)\cdot g'' + f(x)\cdot g'''$.

$F^{(4)}(x) = f^{(4)}(x)\cdot g(x) + 4f'''(x)\cdot g' + 6f''(x)\cdot g''(x) + 4f'(x)\cdot g'''(x) + f(x)\cdot g^4(x)$.

6.3.13 Se omite.

6.3.14 Se omite.

6.3.15 Se omite.

6.3.16 Se omite.

6.3.17 $Q(2) = 6$.

Soluciones del Capítulo 7

7.5. Teorema Rolle y TVM para derivadas

7.5.1

Se cumplen las concdiones del TVM para derivadas.

a.) $c = -1/2 \in [-2,1]$

b.) $c = 3 \in [2,6]$

7.5.2

Por el teorema de Bolzano, $x^5+4x-1=0$ tiene una solución en $[0,1]$.
Si $f(x) = x^5+4x \implies f'(x) > 0$, por tanto, por el Teorema de Rolle, no puede pasar que

$f(c_1) = f(c_2) = 1$ (sino $f'(c) = 0$ para algún c...).

Por tanto, $x^5+4x-1=0$ tiene una única solución y además esa solución está en $[0,1]$!

7.5.3

Usamos el hecho de que $|\cos x| \le 1$. Por el TVM para derivadas, existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{|\,\text{sen}(a)-\text{sen}(b)\,|}{|b-a|} \le |\cos(x)| \le 1$$

7.5.4

Observe que $h(0) = h(2)$. Ahora aplique el TVM para derivadas.

$$\frac{|\,\text{sen}(a)-\text{sen}(b)\,|}{|b-a|} \le |\cos(x)| \le 1$$

7.5. Recta tangente, recta normal

7.5.5 Recta tangent: $y = -4x+5$. Recta normal: $4y = x-14$.

7.5.6 $f(x) = 2x^2 - x$.

7.5.7 Parábola: $f(x) = \frac{-x^2}{2}$. Recta tangente: $2x+y=2$.

7.5.8 Hay dos puntos de tangencia para la recta dada: $P(3-3)$ y $Q(1,3)$. Las rectas normales, respectivamente son: $y = x-6$ y $y = x+2$. La recta tangente en Q es: $y = -x+4$.

7.5.9 Recta normal: $y = x-3e^{-2}$. Recta tangente horizontal en: $P(e^{-1}, -e^{-1})$.

7.5.10 $w-1 = -(u+2)$.

7.5.11

1) $y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{18}(x-8)$.
2) $y - 1 = -2(x - \frac{\pi}{2})$.

7.5.12 $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$.

7.5.13 $(2,4)$.

7.5.14 $(-1, e^{-1})$.

7.5.15 $y - 3 = \frac{1}{5}(x+1)$.

7.5.16 $y + 2 = \frac{9}{4}(x-3)$.

7.5.17 La recta tangente es perpendicular a la recta $y = -\frac{x}{9}$ en $(-2,3)$ y $(2,7)$. Posee rectas tangentes horizontales en $(1,3)$ y $(-1,7)$.

7.5.18 5.

7.5.19 236.

7.5.20 $y = x + 3\ln 3$.

La segunda recta tangente:$y = x + \frac{35}{4} - \ln 8$.

7.5.21 $y = -\frac{x}{4} + \frac{5}{16}$.

7.5.22 $y = 3$ y $y = \frac{2}{3}x - 5$.

7.5.23 $f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$.

7.5. L'Hôpital y formas indeterminadas

7.5.24

1) $\frac{-1}{6}$.
2) $-\sqrt{2}$.
3) 1.
4) 0.
5) -1.
6) e^3.
7) 1.
8) 1.
9) e^{rt}.
10) $\frac{1}{4}$.
11) $\frac{1}{2}$.
12) 1.
13) 1.
14) e^{-1}.
15) 0.
16) $\frac{1}{2}$.
17) 1.
18) $\frac{1}{2}$.
19) 0.
20) e^{-2}.
21) $+\infty$.
22) -2.
23) $\frac{k+n}{n}$.
24) $\frac{-3}{4}$.
25) e.
26) $\frac{-1}{4}$.
27) $-\pi$.
28)

a) Si n = 1 entonces $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-(1+x)}{x^n} = 0$.

b) Si n = 2 entonces $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-(1+x)}{x^n} = \frac{1}{2}$.

c) Si n $\geq$ 3 entonces $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-(1+x)}{x^n} = +\infty$.

7.5. Conceptos teóricos

7.5.25

a.) Derivando directamente se obtiene $f'(x) = 0$, verifíquelo.

b.) $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$ pero $f(2) \approx -2.356 \neq \dfrac{\pi}{4}$

c.) Aunque $f'(x) = 0$, no se cumple la hipótesis de que el dominio de f sea conexo (de una sola pieza, como un intevalo $]a,b[$). Por tanto no podemos deducir que f sea constante con solo que la derivada se anule.

7.5.26

El teorema de L'Hospital no se aplica por que falla la hipótesis de que $g(x) \neq 0$ en un entorno $]a,\infty[$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

7.5.27

7.5.28 $a+b+c+d = 24.$

7.5.29 $a = \dfrac{4}{3}$ y $b = -2.$

7.5.30 $a = \dfrac{1}{2}.$

7.5. Extremos locales, crecimiento, decrecimiento y concavidad.

7.5.31 $a = -2$ y $b = 4$. Es valor mínimo.

7.5.32 $a = \dfrac{2}{3}$ y $b = -1.$

7.5.33 $f(x) = \dfrac{2}{9}x^3 + \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{-4}{3}x + \dfrac{7}{9}.$

7.5.34

1) F.
2) F.
3) V.
4) F.
5) F.
6) V.
7) V.

7.5.35

1) $c \in \left(\left]-\infty,-\frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3},+\infty\right[\right)$
2) $c = \dfrac{1}{3}$ o $c = -\dfrac{1}{3}$
3) $c \in \left]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right[$

7.5.36 $a \in \left]\dfrac{-7}{2},-\dfrac{5}{2}\right[$

7.5.37

1) $x = \dfrac{1}{2},\ x = 0,\ x = 1.$
2) $x = -\dfrac{1}{2}.$

7.5.38

1) Máx en $(-3,297)$; mín en $(0,0)$.
2) Máx en $(2,1)$; mín en $(-2,-\frac{1}{3})$.
3) Máx en $(1,-2)$; mín en $(e,-e)$.
4) Máx en $(-\frac{\pi}{2},1)$, $(0,1)$ y $(\frac{\pi}{2},1)$; mín en $(-\frac{\pi}{4},-1)$ y $(\frac{\pi}{4},-1)$.

7.5.39

1) Crece en $]-\infty,-2[$ y en $[0,\infty[$; decrece en $[-2,0]$; máx en $\left(-2,3\sqrt[3]{4}\right)$; mín en $(0,0)$.
2) Crece en $[-2,0]$; decrece en $]-\infty,-2]$ y en $[0,\infty[$; máx en $(0,1)$; mín en $(-2,frac13)$.
3) Máx en $(0,-2)$; mín en $(2,2)$.
4) Máx en $(0,e^4)$; mín en $(-2,5)$ y en $(2,5)$.
5) Mín en $(0,\ln 5)$.

7.5.40 $k = 1$. Se trata de un mínimo.

7.5.41 $a = -3, b = 3, c = 0.$

7.5. Trazo de curvas

7.5.42

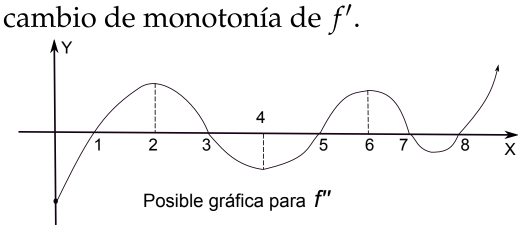
1) $z = -\dfrac{3}{2}, y = \dfrac{-1}{2}.$
2) $x = 3, y = 1.$
3) $w = 0, y = -1$ en $-\infty$, $y = 1$ en ∞.
4) $u = -2, y = 2u - 4.$
5) $x = 0, y = -1$ en $-\infty$, $y = x$ en ∞.

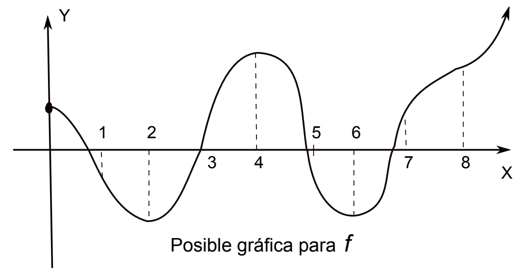
7.5.43

1) f crece en los intervalos: $]2,4[$ y $]6,+\infty[$ pues es donde $f'(x) > 0$.
2) Sólo en$x = 4$; pues $f'(x) = 0$. Alrededor de este punto f' cambia de signo.
3) En $x = 2$ y $x = 6$; pues $f'(x) = 0$. Alrededor de estos puntos, f' cambia de signo.
4) f es cóncava hacia arriba en los intervalos $]1,3[$; $]5;7[$ y $]8,+\infty[$; pues f' crece.
5) En $x = 1; x = 3; x = 5; x = 7$ y $x = 8$; puesf' alcanza máx. o mín. relativos, o bien, f' no existe y hay cambio de monotonía de f'.

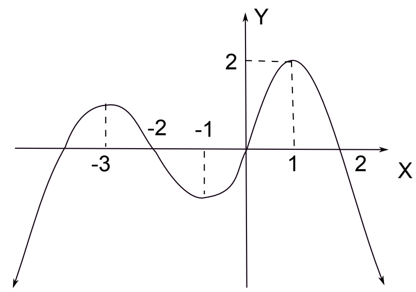
7.5.44

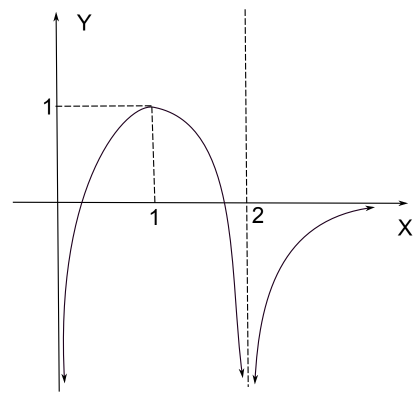
1) La gráfica de f decrece en los intervalos: $]-\infty,-4,5[$, $]-3,5,-2,5[$, $]-2,0[$ y $]1,+\infty[$, pues es donde $f'(x)$ es negativa.
2) En $x = -3,5$, $x = -2$ y $x = 1$, pues es donde $f'(x)$ es cero y, alrededor de estos puntos, hay cambio de signo de f' de positivo a negativo.
3) En $x = -4,5$, $x = -2,5$ y $x = 0$; pues es donde $f'(x)$ es cero y, alrededor de estos puntos, hsy csmbio de signo de f' de negativo a positivo.
4) f es cóncava hacia abajo en los intervalos $]-4,-3[$ y $]1,+\infty[$, pues f' es decreciente y por lo tanto $f''(x)$ es negativa.
5) En: $x = -4$, $x = -3$ y $x = 1$, pues es donde f' alcanza máximos o mínimos, o bien, f' no existe y hay cambio de monotonía de f'.

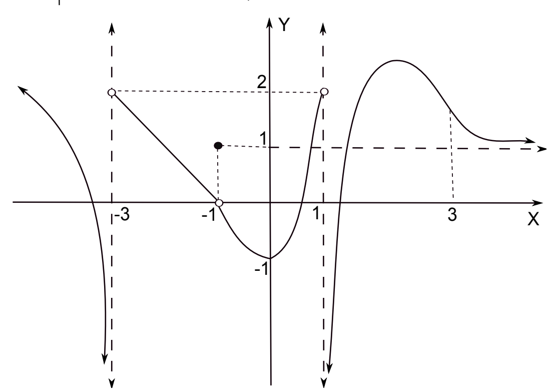
6) 

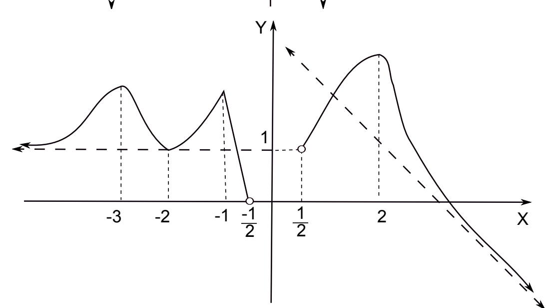
7) 

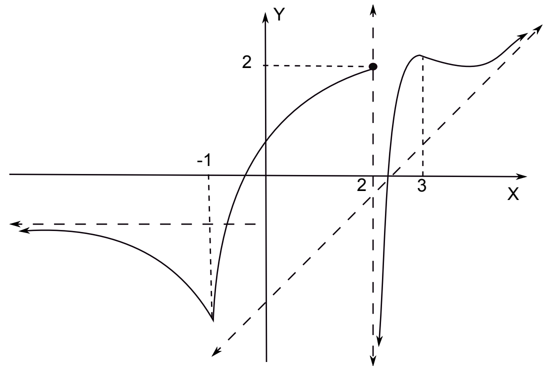
7.5.45

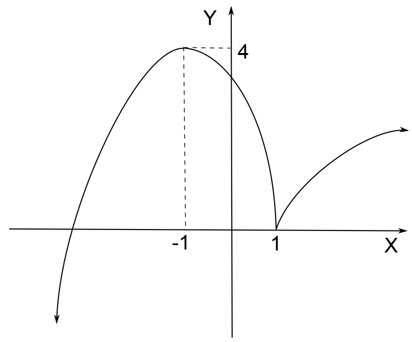
1) 

2) 

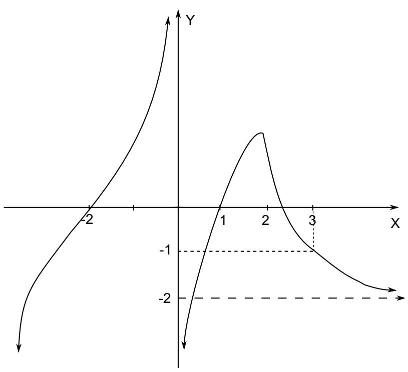
3) 

2) 

5) 

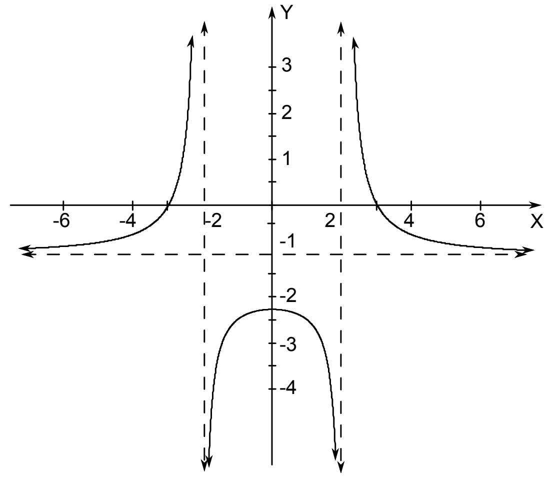
6) 

7.5.46

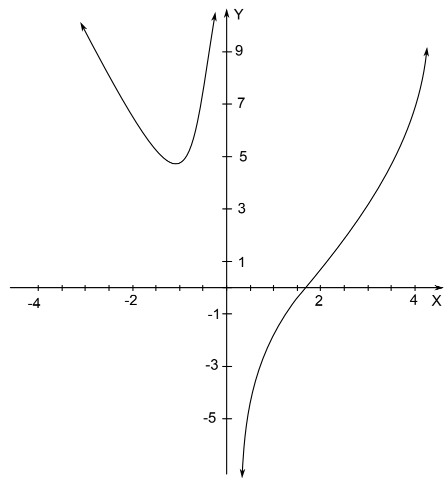


7.5.47

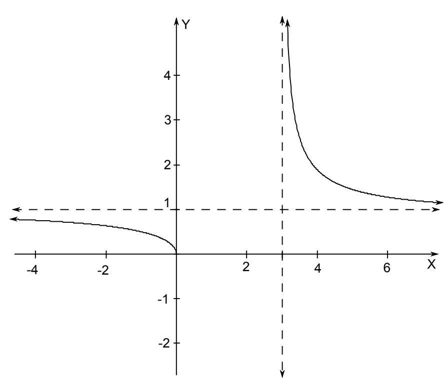
1) $f'(x) = -\frac{10x}{(4-x^2)^2},\quad f''(x) = -\frac{10\left(3x^2+4\right)}{(-x^2+4)^3}$



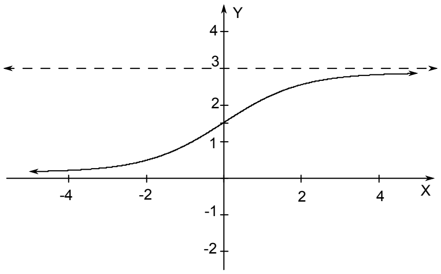
2) $f'(u) = \frac{2u^3+4}{u^2},\quad f''(u) = \frac{2\left(u^3-4\right)}{u^3}$



3) $g'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}(x-3)^{\frac{3}{2}}},\quad g''(x) = \frac{3\left((x-3)^{\frac{3}{2}}+3x\sqrt{x-3}\right)}{4x^{\frac{3}{2}}(x-3)^3}$



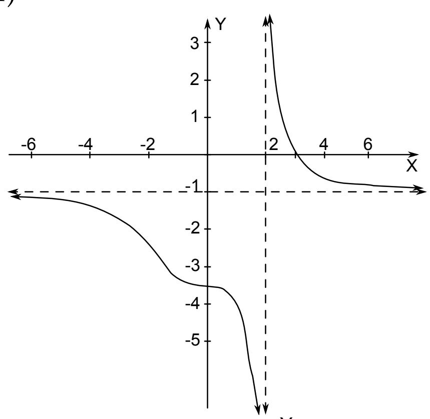
4) $h'(x) = \frac{3e^{-x}}{(1+e^{-x})^2},\quad h''(x) = \frac{3e^{-2x}(-e^x+1)}{(e^{-x}+1)^3}$



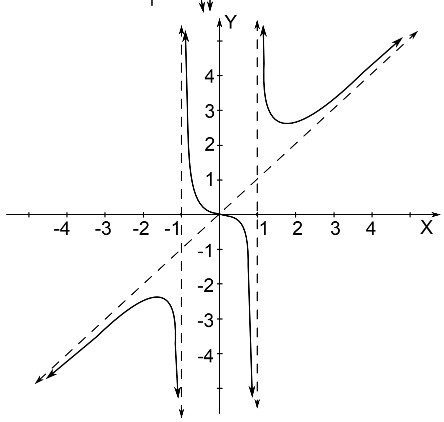
7.5.48 A.H cuando $x \to +\infty : y = \dfrac{-\pi}{4}$, A.V: $x = -3$, A.O: cuando $x \to -\infty : y = 4x$.

7.5.49

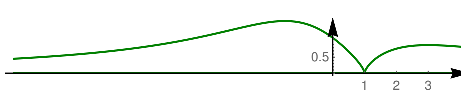
1)



2)



7.5.50

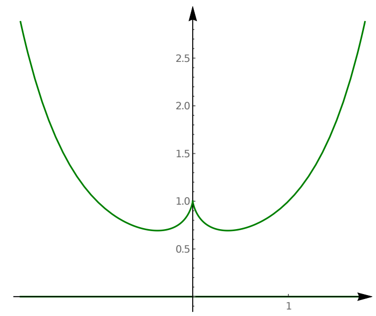


7.5.51

Como tenemos una función par, solo debemos analizar el caso $x \geq 0$.

$f'(x) = 0 \implies x = \dfrac{1}{e}$ y f'' es positiva, es decir, tenemos dos mínimos locales y la función siempre es cóncava hacia arriba. Observe que es continua en $x = 0$.

El gráfico es



7.5. Problemas de Optimización

7.5.52

1) 2 dm de largo, 2 dm de ancho y $\dfrac{4}{3}$ dm de alto.

2) $\left(\dfrac{45}{37}, \dfrac{63}{37}\right)$

3) A las $2:21:36$ p.m.

4) $y = \dfrac{-5}{3}x + 10$.

5) La base mayor 8 unid, la menor 4 unid y la altura $2\sqrt{3}$ unid.

6) Correr 68,956 m; nadar 50,364 m; 1,955 min.

7) Correr 68,956 m, nadar 50,364 m; 1,955 min.

8) 2.5 cm $\times$ 6 cm.

9) 200 m $\times$ 300 m, con la división paralela al lado de 200 m.

10) 63.66 m el radio de los semicírculos, 200 m los lados rectos.

11) 2.8794 cm el radio de la base, 8.6382 cm la altura; costo 23.44 colones.

12) 7.00527 cm el radio del cilindro, 7.00527 cm la altura del cilindro.

13) $A = 9$ cuando $x = 3$.

14) 18.

15) $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$, entre $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ y $\left(\dfrac{7}{8}, \dfrac{-1}{8}\right)$.

16) Ancho y largo iguales: 25 metros.

17) Los números son: 55 y 55.

18) En el círculo hay que emplear 10 metros.

19) 4 dm el lado de la base, 2 dm la altura.

20) Ancho: $\dfrac{3}{2}$; largo: 3.

21) Ancho y largo iguales: aproximadamente 3,54.

22) Vol=2750 m^2.

23) $\left(\frac{45}{37}, \frac{63}{37}\right)$.

24) Largo 26 cm y ancho 24 cm.

25) 14:21’36” (14 h, 21 min y 26 s).

Soluciones del Capítulo 8

Sumas de Riemann

8.8.1

1) $f(x) = 5x - 2$ es continua en $[-2,2]$ y por tanto R-integrable.

Podemos usar $\xi_k = -2 + \dfrac{4k}{n} \in [x_{k-1}, x_k]$.

$$\int_{-2}^{2} 5x - 2\,dx = 4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{5\left(-2+\dfrac{4k}{n}\right)-2}{n} = -8$$

2) $f(x) = |x|$ es continua en $[0,1]$, por tanto R-integrable en $[0,1]$.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [-3,0] \\ -x & \text{si} \quad x \in]0,2] \end{cases}$$

$\displaystyle\int_{-3}^{2} |x|\,dx = \int_{-3}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx.$

En $\displaystyle\int_{-3}^{0} -x\,dx$ usamos $\xi_k = -3 + \dfrac{3k}{n} \in [x_{k-1}, x_k]$.

En $\displaystyle\int_{0}^{2} x\,dx$ usamos $\xi_k = \dfrac{2k}{n} \in [x_{k-1}, x_k]$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} |x|\,dx &= 3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{-\left(-3+\dfrac{3k}{n}\right)}{n} \\ &+ 2\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{9}{2}+2\end{aligned}$$

3) $f(x) = |5x - 2|$ es continua en $[-2,2]$ y por tanto R-integrable.

Podemos separar la integral y usar sumas de Riemann:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} |5x-2|\,dx &= \int_{-2}^{2/5} -(5x-2)\,dx \\ &+ \int_{2/5}^{2} (5x-2)\,dx\end{aligned}$$

4) $f(x) = |1 - x^2|$ es continua en $[-3,3]$ y por tanto R-integrable.

Podemos separar la integral y usar sumas de Riemann:

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{-1} -(1-x^2)\,dx &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx \\ &+ \int_{1}^{-3} -(1-x^2)\,dx\end{aligned}$$

5) $f(x) = 2x^3 - x + 3$ es continua en $[1,4]$, por tanto es R-integrable en este intervalo. Usamos una partición regular (igualmente espaciada). Como $a = 1$ y $b = 4$, tomamos $\Delta x = \dfrac{4-1}{n} = \dfrac{3}{n}$

Usando $\xi_k = 1 + \dfrac{3k}{n} \in [x_{k-1}, x_k]$, entonces

$$\int_{1}^{4} (2x^3 - x + 3)\,dx = 3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)}{n}$$

$$= 3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\left(2\left(\dfrac{3k}{n}+1\right)^3 - \dfrac{3k}{n}+2\right)}{n}\right]$$

$$= 3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{54}{n^4}\cdot k^3 + \frac{54}{n^3}\cdot k^2 + \frac{15}{n^2}\cdot k + \frac{4}{n}\cdot 1\right] = 129$$

6) Podemos usar el teorema 8.4. La función con-

tinua $g(x) = x+2$ si $-2 \leq x \leq 2$, cumple las condiciones del teorema 8.4, por tanto

$$\int_{-2}^{2} h(x)\,dx = \int_{-2}^{2} g(x)\,dx$$

$\Delta x = \dfrac{4}{n}$. Usando $\xi_k = -2 + \dfrac{4k}{n} \in [x_{k-1},\, x_k]$, entonces

$$\int_{-2}^{2} h(x)\,dx = 4 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{g(\xi_k)}{n}$$

$$= 4 \lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(-2 + \frac{4k}{n} + 2\right)}{n} = 8$$

También podemos proceder así:

$h(x)$ es acotada $[-2,2]$ y tiene solo dos discontinuidades en $[-2,2]$, por tanto es R-integrable en $[-2,2]$.

$\Delta x = \dfrac{4}{n}$. Usando $\xi_k = -2 + \dfrac{4k}{n} \in [x_{k-1},\, x_k]$, entonces

$$\int_{-2}^{2} h(x)\,dx = 4 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{h(\xi_k)}{n}$$

$$= 4 \lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(-2 + \frac{4k}{n} + 2\right) - 5000}{n} = 8$$

7) $\displaystyle\int_{-5}^{5} x^3\,dx = 0$

8) Similar al ejemplo 8.5

$$\int_{-2}^{1} \operatorname{sgn}(x)\,dx = \int_{-2}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{1} 1\,dx$$

En al primera integral use $\xi_k = -2 + \dfrac{k}{n}$ y en la segunda integral use $\xi_k = \dfrac{k}{n}$

$$\int_{-2}^{1} \operatorname{sgn}(x)\,dx = -1$$

8.8.2

1) La función $g(t) = \operatorname{sen}(t^2)$ tiene mínimo absoluto $m = 0$ y máximo absoluto en $M = \operatorname{sen}(1)$ en el intervalo $[0,1]$

2) $-1 \leq \cos(t^2) \leq 1$ en $[-3,3]$

3) $m = e$ y $M = e^5/5$ son los extremos absolutos de esta función en $[1,5]$

4) $m = 1$ y $M = e$ son los extremos absolutos de esta función en $[-1,1]$

5)

Verifique que $1 \leq \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)} \leq 2$ en $[\pi/6, \pi/2]$. Luego use la desigualdad $x \leq \dfrac{x}{\operatorname{sen}(x)} \leq 2x$ en $[\pi/6, \pi/2]$.

8.8.3

a.) $h'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0 \implies h \nearrow$

b.) $0 < x \implies h(0) \leq h(x) \implies 0 \leq x - \operatorname{sen} x$,

$$\therefore \ \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$$

c.) Ya puede concluir lo que le piden...

Primitivas y Teorema fundamental del Cálculo

8.8.4 Se omite.

8.8.5 Se omite.Observe que $6\ln|e^{x/2} + 2| + C = 6\ln(e^{x/2} + 2) + C$ pues $e^{x/2} + 2 > 0$ para toda x en $\mathbb{R}$. Ahora derive y simplifique.

8.8.6 Como $|x| = \sqrt{x^2}$, entonces

$$\left(\frac{x|x|}{2} + K\right)' = \left(\frac{x\sqrt{x^2}}{2}\right)' = \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{x^2} = |x|$$

8.8.7 Si $F(x) = \begin{cases} -x^2/2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2/2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

entonces se verifica que

$$F'(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} = |x| \ \text{ excepto tal vez}$$

en $x = 0$.

Pero, analizando el siguiente límite por la izquierda y al derecha,

$$F'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(0+h)-F(0)}{h} = 0 = |0|$$

Así que $F'(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

8.8.8 R

Usando el TFC

$$F(x) = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3} & \text{si} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{7}{48} & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0)$$

8.8.9 R Usando el TFC

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-2}^{x} f(x)dx \ \text{ si } x \in [-2,-1] \\ \displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{x} f(x)dx \ \text{ si } x \in]-1,1[\\ \displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{x} f(x)dx \ \text{ si } x \in [1,3] \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3} & \text{si} \quad x \in [-2,1] \\ -\frac{x^3}{3} + x + 2 & \text{si} \quad x \in]-1,1[\\ \frac{x^3}{3} - x + \frac{10}{3} & \text{si} \quad x \in [1,3] \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = F(3) - F(-2) = \frac{28}{3}$$

8.8.10 R Usando el TFC

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2/2 & 0 \le x \le 1 \\ 2x - x^2/2 - 1 & 1 \le x \le 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

8.8.11 R

Como f es continua en $[0,\pi]$, usando el TFC tenemos que una primitiva de f en $[0,\pi]$ es

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$$
$$= \begin{cases} -\cos(x) + 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le \pi/2 \\ x + \operatorname{sen}(x) - \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

y, en particular, $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \pi/2$

8.8.12 R

a.) Si $x \neq 0$,

$$-1 \le \cos(\pi/x^2) \le 1 \ \text{ y } \ -1 \le \operatorname{sen}(\pi/x^2) \le 1$$

Ahora determine m, M tal que

$$m \le f(x) \le M \ \text{ en } \ [-2,2]$$

f es continua excepto en $x = 0$, por lo que f es R-integrable.

b.) Se verifica que $P'(x) = f(x)$ si $x \neq 0$. Debemos analizar el caso $x = 0$ por separado. Si $x = 0$, usando el teorema del emparedado se tiene

$$\begin{aligned} P'(0^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{P(0+h)-P(0)}{h} \\ &= P'(0^-) = 0 = f(0) \end{aligned}$$

Entonces P es primitiva de f en $[-2,2]$

c.) $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = P(2) - P(-2) = 8\sqrt{2}$

8.8.13 R Si f tiene primitiva P, entonces $P' = f$ no puede tener discontinuidades de salto por el teorema de valores intermedios para derivadas, pero f tiene una discontinuidad de salto en $[-1,1]$

Si $K_1 = K_2 = 0$, entonces P es continua en $\mathbb{R}$ y $P' = f$ excepto en $x = 0$, por lo que se puede aplicar el teorema 8.15

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = P(3) - P(-2)$$

8.8.14

Del ejemplo 8.15 verificamos que el límite es de la forma "0/0". Usando L'Hospital tenemos,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{\sqrt{1+t}}\,dt}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{\sqrt{1+x^2}}}{2x} = e$$

8.8.15 Se omite

8.8.16 Se omite

8.8.17 Se omite

8.8.18

a.) Se verifica directamente que $F'(x) = f(x)$ en $]0,1]$.
Ahora, usando el *teorema del emparedado* se puede verificar que

$$F'(0+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{h^2\,\text{sen}(1/h^2)}{h} = 0 = f(0)$$

pues $-h \leq h\,\text{sen}(1/h^2) \leq h$ en $]0,1]$

b.) Se puede verificar que $2x\,\text{sen}\left(1/x^2\right)$ permanece acotada. Pero $\frac{2}{x}\cos\left(1/x^2\right)$ no permanece acotado: Para ver esto, sea $n \in \mathbb{N}$, entonces

si $x = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}} \to 0^+$ si $n \to \infty$,

$\text{sen}(2n\pi) = 0$ y $\cos(2n\pi) = 1$

Ahora: $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) = 2\sqrt{n\pi} \to \infty$ si $n \to \infty$

8.8.19

8.8. Teoremas de valor medio para integrales

8.8.20 Por el TVM para integrales, existe $c \in [0,1]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{1-0}\cdot\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

8.8.21 Como $f(t) = -2t^2 + 10t$ es continua en $[-2,3]$ entonces existe $c \in [-2,3]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{5}\int_{-2}^{3}(-2t^2+10t)\,dt = \frac{5}{3}$$

$$\therefore\ c = \frac{1}{6}\left(15 - \sqrt{195}\right) \in [-2,5]$$

8.8.22 Como $f(t) = \cos(2t)$ es continua en $[-\pi,\pi]$ entonces existe $c \in [-\pi,\pi]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{pi}\cos(2t)\,dt = 0$$

$$\therefore\ \cos(2c) = 0 \implies c = \frac{(2k-1)\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$c \in \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\} \in [-\pi,\pi]$$

8.8.23 La problación promedio es

$$\frac{1}{40-20}\int_{20}^{40} P(t)\,dt \approx 147.1 \text{ millones}$$

8.8.24

8.8.25

Enero: $\frac{1}{31}\int_0^{31}(12+2.4\,\text{sen}(0.0172(t-80)))dt \approx 9.87$

Anual: $\frac{1}{365}\int_0^{365}(12+2.4\,\text{sen}(0.0172(t-80)))dt \approx 12.0019$

8.8. Integrales básicas y sustitución

8.8.26

1) $\frac{1}{8}w^2 + \frac{1}{2}w^{-2} + C.$
2) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} - \dfrac{4\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{5}{3}\right)} + C.$
3) $e^q + e^{-q} + C.$
4) $-\log_2\left|5 + t\ln 2 - 2^t\right| + C.$
5) $e^u + 2u - e^{-u} + C.$
6) $\sqrt{1+\ln\left(u^2+1\right)} + C.$
7) $r^5 - \csc r + C.$

8) $\frac{8}{9}v^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}v^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}v^{\frac{-1}{2}} + C.$

9) $\frac{1}{8}w^2 + \frac{1}{2}w^{-2} + C.$

10) $3\ln\left(4q^2+7\right) + C.$

11) $-3z^{-1} - \frac{3}{2}\ln\left(z^2+1\right) + C.$

12) $\frac{2}{3}\sec^2 u + 15\tan u + C.$

13) $\frac{1}{3}\left(5\tan\alpha\right)^{3/2} + C.$

14) $\frac{1}{3}\sec^3\alpha - \sec\alpha + C.$

15) $x - 1 + 2\ln|x-1| + C.$

16) $\ln\left(e^x+1\right) + C.$

17) $\frac{1}{12}\operatorname{sen}^6(2x) + C.$

18) $-\frac{1}{2}\ln^2(\cos x) + C.$

19) $x^x + C.$

20) $\arctan x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$

21) $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + C.$

22) $\ln\left|r + \sqrt{1+r^2}\right| + C.$

23) $-\frac{2}{3}(1+\cos x)^{3/2} + C.$

24) $\dfrac{2\cos x + 2}{\operatorname{sen} x - \cos x - 1} + C.$

25) $\sqrt{3+u^2} + C.$

26) $\frac{5}{4}\ln|2x+1|\,\frac{x}{2} + C.$

27) $11\ln|x-1| + x^2 + 6x + C.$

28) $2\sqrt{z+1} + z + 1 + C.$

29) $-\ln|\operatorname{sen} x + \cos x| + C.$

30) $\frac{1}{2}(\tan x)^2 + C.$

31) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C.$

32) $3\sqrt[3]{x+1} + \ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right| +$
$+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2\sqrt[3]{x+1}-1}{2\sqrt{3}}\right) + C.$

33) $\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x^2}-1\right| + C.$

8.8. Integración por partes

8.8.27

1) $-we^{-w} - 2e^{-w} + C.$

2) $y\log\left(5y^2-4y\right) - \dfrac{\left(2y + \frac{4}{5}\ln|5y-4|\right)}{\ln 10} + C.$

3) $y \operatorname{arcsen} 2y + \frac{1}{2}\sqrt{1-4y^2} + C.$

4) $\frac{1}{2}e^{p^2-2p}\left(p^2-2p\right) + C.$

5) $\dfrac{e^t}{(t+1)} + C.$

6) $\frac{1}{2}\left(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right) + C.$

7) $\frac{1}{2}r\left[\cos(\ln r) + \operatorname{sen}(\ln r)\right] + C.$

8) $\left(y^3+y\right)\ln\left(y^2-1\right) - \frac{2}{3}y^3 - 4y + 2\ln|y+1| -$
$2\ln|y-1| + C.$

9) $-e^{-x}(x+2) + C.$

10) $\dfrac{w^2 8^{w^2+1}}{2\ln 8} - \dfrac{8^{w^2+1}}{2\ln^2 8} + C.$

11) $\dfrac{-\ln z}{(z+1)} + \ln z - \ln|z+1| + C.$

12) $x\ln\sqrt{x} - \frac{x}{2} + C.$

13) $x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C.$

14) $\frac{x^2}{2}\arctan x + \dfrac{\arctan x}{2} - \frac{x}{2} + C.$

15) $-\dfrac{x^2e^{-x^2}}{2} - \dfrac{e^{-x^2}}{2} + C.$

16) $x - \sqrt{1-x^2}\cdot\operatorname{arcsen} x + C.$

17) $\frac{1}{13}e^{2\theta}\left(2\operatorname{sen} 3\theta - 3\cos 3\theta\right) + C.$

18) $-e^{-x}(x^2+2x+2) + C.$

19) $\operatorname{sen} x\cdot\ln|\operatorname{sen} x| - \operatorname{sen} x + C.$

20) $\frac{1}{2}e^{x^2}x^2 - \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

8.8.28 Como $|x| = \sqrt{x^2}$ entonces

$$\int |x|\,dx = \int \sqrt{x^2}\,dx$$

Ahora si $u = \sqrt{x^2}$ y $dv = dx$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2}\,dx &= x\sqrt{x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2}}\,dx\\ &= x\sqrt{x^2} - \int \sqrt{x^2}\,dx\end{aligned}$$

$$\therefore\ 2\int \sqrt{x^2}\,dx = x\sqrt{x^2}$$

Es decir, $\therefore \int \sqrt{x^2}\,dx = \dfrac{x|x|}{2} + K$

8.8.29 ↰ R

1) Se omite.
2) Se omite.
3) Se omite.

8.8.30 ↰ R

1) $p(w) = w^2 + w + 2.$
2) $z'(r) = 2r^3 + 2r - \dfrac{1}{r} + 2.$
$z(r) = \dfrac{r^4}{2} + r^2 - \ln|r| + 2r - 3$
3) $q'(t) = 4t^3 - 6t^2 - e^t - 4.$
$q(t) = t^4 - 2t^3 - e^t - 4t + 7 + e.$

8.8.31 ↰ R $f(x) = 12x^2 + e^{2(x+1)} + 12x - 4$

8.8.32 ↰ R $f(2) = 10,\ f(x) = x^2 + x + 4.$

8.8. Cálculo: Integración definida

8.8.33 ↰ R

1) $\dfrac{(e-1)^5}{5}$
2) 45
3) 3
4) $\dfrac{-\pi}{6}$
5) 25
6) $\dfrac{2}{9}$
7) $\dfrac{886}{15}$
8) $\dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{47}{15}\right)$
9) $\ln 2 - 1$
10) $\dfrac{38}{3}$
11) $16 - 5\sqrt{3}$
12) $36\ln 3 - \dfrac{104}{9}$
13) 0
14) $\dfrac{28 - 32\ln 8}{\ln^2 8}$
15) $2e - 1$
16) $\dfrac{2\ln 4 - 4}{14} - \dfrac{2\ln 25 + 4}{35}$
17) $\dfrac{107}{10}$
18) $2 - \dfrac{\pi^2}{2}$
19) 31
20) $\dfrac{5}{4}\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$
21) 4
22) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$
23) $\dfrac{\pi}{9}$
24) -4

8.8.34 ↰ R $g(u) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{u}{2}\right) + \sqrt{4-u^2} - 1$

8.8.35 ↰ R Se omite.

8.8.36 ↰ R Se omite.

8.8.37 ↰ R Se omite.

8.8. Cálculo de áreas

8.8.38 ↰ R

1) $A = 28\,(ul)^2$
2) $A = 18(ul)^2$. Observe que:

$$A = \int_{-2}^{4} \left(y + 5 - \frac{y^2+2}{2}\right) dy\,.$$

O bien:

$$A = \int_1^3 2\sqrt{2x-2}\ dx\ + \int_3^9 \left(\sqrt{2x-2} - (x-5)\right) dx$$

3) $A = \dfrac{4}{3}\,(ul)^2$
4) $A = 4\,(ul)^2$
5) $A = 9\,(ul)^2$

8.8.39 ↰ R $A = 19\,(ul)^2$

8.8.40 ↰ R

1) $A = \dfrac{2197}{150}\,(ul)^2$
2) $A = \dfrac{2}{3}\,(ul)^2$
3) $A \approx 1{,}6042\,(ul)^2$
4) $A = \dfrac{13\sqrt{13} + 5\sqrt{5}}{12}\,(ul)^2$

5) $A = \dfrac{49}{12}\,(ul)^2$

6) $A = \dfrac{7}{3}\,(ul)^2$

7) $A \approx 1{,}325\,(ul)^2$

8) $A \approx 3{,}6931\,(ul)^2$

9) $A \approx 3{,}1831\,(ul)^2$

10) $A = \dfrac{47}{3}\,(ul)^2$