Sistemas Dinámicos Elementales

José Rosales Ortega
jrosales@math.cinvestav.mx
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Resumen

El principal objetivo del siguiente trabajo es dar una breve descripción de un área de investigación en matemática: los sistemas dinámicos. Para tal efecto se presentan ejemplos que tienen relación con otros campos de la ciencia: Economía, Física, Demografía, etc.

Palabras clave: punto fijo, punto de equilibrio, órbitas, sistema dinámico discreto, espacio fase.

Revista Digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr), volumen 7, número 2.

1. Introducción

Se podría decir que los sistemas dinámicos son un área "joven"de las matemáticas, aunque se remontan a Newton con sus estudios de Mecánica Celeste, y a Henri Poincaré, quien inició el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, fue hace apenas unos 40 años que los sistemas dinámicos se establecieron como un área propiamente dicha, gracias al trabajo destacado de matemáticos e ingenieros como: S. Smale, V. Arnold, Lyapunov, etc.

Si tratamos de precisar el concepto de sistemas dinámicos, podríamos decir burdamente que se trata del estudio de sistemas deterministas, es decir, consideramos situaciones que dependan de algún parámetro dado, que frecuentemente suponemos es el tiempo, y que varían de acuerdo a leyes establecidas. De manera que el conocimiento de la situación en un momento dado, nos permite reconstruir el pasado y predecir el futuro.

Siendo un poco más formales, se prodría decir que un sistema dinámico es un modo de describir el recorrido a lo largo del tiempo de todos los puntos de un espacio dado $\mathcal{S}$. El espacio $\mathcal{S}$ puede imaginarse, por ejemplo, como el espacio de estados[1] de cierto sistema físico.

Matemáticamente, $\mathcal{S}$ puede ser un espacio euclideano o un subconjunto abierto de un espacio euclideano. Un sistema dinámico para $\mathcal{S}$ nos dice para cada $x \in \mathcal{S}$, dónde está x una unidad de tiempo más tarde, dos unidades de tiempo más tarde, y así sucesivamente. Denotamos estas nuevas posiciones de x por x_1, x_2 respectivamente. En el instante cero, x está en x o x_0. Una unidad antes del instante cero, x estaba en x_{-1}. Si se extrapola para cubrir todos los números reales, se obtiene una trayectoria x_t para todo tiempo t. La aplicación $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{S}$, que envía t a x_t, es una curva en $\mathcal{S}$ que representa la historia de x cuando t va de $-\infty$ a $+\infty$.

Un **sistema dinámico** es una aplicación $\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$, de clase $\mathcal{C}^\infty$, donde $\mathcal{S}$ es un conjunto abierto de un espacio euclídeo, tal que, escribiendo $\phi(t, x) = \phi_t(x)$, la aplicación $\phi_t : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ satisface

- $\phi_0 : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ es la función identidad.
- La composición $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$.

En lo que sigue se darán algunos ejemplos que ayudarán a precisar la definición de sistemas dinámicos y la manera en que estos nos ayudan a entender el mundo que nos rodea.

2. Aplicaciones

2.1. Ejemplo 1

Supongamos que, extrañamente, nos encontramos en una “crisis económica” y algún banco ofrece prestarnos dinero. La tasa de interés que cobra el banco es de 2 % mensual, y nuestra capacidad

[1] Un estado de un sistema físico es información que lo caracteriza en un instante dado. Por ejemplo, un estado para el oscilador armónico de la posisción y la velocidad de la partícula. El espacio de estados es el producto cartesiano $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ de pares (x, v), donde $x, v \in \mathbb{R}^3$ denotan la posición y la velocidad que tenga la partícula en un instante dado.

de pago real es de veinte mil colones mensuales máximo. ¿Cuánto dinero queremos que nos preste el banco? Ingenuamente podríamos responder “pues todo lo que se pueda”, pero vamos a analizar este sencillo ejemplo un poco más. Denotemos por A_0 la cantidad de dinero que queremos pedir prestado al banco, y por A_n nuestra deuda después de n meses. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
A_1 &= A_0 + 0{,}02A_0 - 20,000 \\
\\
A_2 &= (1,02)A_1 - 20,000 \\
&= (1{,}02)^2 A_0 - 20,000(1{,}02) - 20,000 \\
&\vdots \\
A_n &= (1{,}02)^n A_0 - 20,000(1{,}02^{n-1} + \cdots + 1{,}02 + 1).
\end{aligned}$$

Observemos que si A_0, el préstamo inicial, es de un millón de colones, entonces

$$\begin{aligned}
A_1 &= (1{,}02) \cdot 1,000,000 - 20,000 = A_0 \\
A_2 &= (1{,}02)^2 \cdot 1,000,000 - 20,000 = A_0
\end{aligned}$$

etc., es decir que $A_0 = \$1,000,000$ es un punto fijo, o un punto de equilibrio, del sistema dinámico en cuestión. Podemos entonces concluir:

- Si el banco nos presta menos de un millón, algún día terminaremos de pagarle.
- Si el banco nos presta más de un millón, algún día tendremos que venderle el alma al diablo, o hacer algo para poder pagar.
- Si el banco nos presta exactamente un millón, simplemente le pagaremos 20 mil colones mensuales de interés por el resto de nuestra vida.

Así que conocer las leyes que rigen el sistema, nos permite predecir el futuro. Ustedes tienen la palabra, ¿cuánto quieren que les preste el banco?

Expresiones del tipo presentado, donde tenemos una sucesión de valores $\{A_n\}$, n un entero, tales que el valor de A_n está determinado por los valores anteriores A_{n-1}, A_{n-2}, etc., se llaman ecuaciones en diferencias, y dan ejemplos de sistemas dinámicos discretos, donde la palabra discreto significa que el parámetro "tiempo"lo consideraremos así: cada mes, cada año, cada hora, etc. Las ecuaciones en diferencias, o sistemas dinámicos discretos, más "sencillosz tal vez más importantes, surgen mediante la iteración de funciones.

2.2. Ejemplo 2

Se sabe que ciertas especies animales se multiplican, en condiciones ideales (comida en abundancia, sin luchas internas, etc.), de manera tal que el crecimiento de la población es proporcional a la cantidad de miembros de la especie. Es decir que si $P(t)$ denota la población en el tiempo t, y $P'(t)$ es la velocidad con que varía la población, entonces existe una constante $a > 0$, tal que

$$P'(t) \;=\; a\,P(t), \tag{1}$$

para todo $t > 0$, donde 0 denota el tiempo a partir del cual comenzamos a hacer nuestra observavión, y la constante a depende de la población en cuestión y del medio ambiente. Esta ecuación es el ejemplo más sencillo e importante de lo que es una ecuación diferencial. Es fácil ver que cualquier función que satisface la ecuación diferencial (1) necesariamente es de la forma

$$Y(t) \;=\; Ke^{at}, \tag{2}$$

donde K es una constante, determinada por la "condición inicial". En nuestro caso K es la población inicial en $t = 0$. La ley de crecimiento de la población dada por la ecuación (1) se conoce como la Ley Malthusiana de crecimiento, y la ecuación (2) nos dice que si la especie en cuestión se rige por esta ley de crecimiento, entonces, independientemente de la población inicial, si $P(0) > 0$, la población tenderá a infinito exponencialmente. La experiencia nos enseña que esto no sucede en la realidad por tiempo prolongado, así que debe haber otros factores a considerar. Una vez que la población sobrepasa un cierto número, comienza a haber escasez de alimentos, se producen luchas internas, desechos contaminantes, etc. Esto nos lleva a considerar la "Ley logística"de crecimiento de poblaciones:

$$P'(t) \;=\; aP(t) \,-\, bP^2(t),$$

donde a y b son constantes positivas y a es mucho mayor que b. Las constantes a y b son los *coeficientes vitales* de la especie. Obsérvese que si la población $P(t)$ es "pequeña", el término

$b^2P(t)$ es despreciable, pues b es muy pequeña en relación a a., por lo que el crecimiento asemeja al regido por la ley malthusiana. Sin embargo, al aumentar $P(t)$ la contribución bP^2 crece en forma cuadrática, por lo que juega un papel importante.

Esta ecuación diferencial es de primer orden, del tipo “separablez por tanto es fácil de resolver; si $P(0)$ es la población inicial en $t = 0$, entonces (por el teorema de existencia y unicidad de soluciones con condiciones iniciales) existe una única función de t que satisface la ecuación diferencial y toma el valor $P(0)$ en $t = 0$. La solución buscada es

$$P(t) \;=\; \frac{aP(0)}{bP(0) \,+\, (a - P(0))e^{-at}}\;.$$

Si hacemos $L = a/b$, observamos que $P(t)$ tiende a L cuando t tiende a ∞, independientemente de la población inicial, pues e^{-at} tiende a 0 cuando t tiende a ∞. Además, $P(t)$ es una función monótona creciente para $t > 0$. Más aún, dado que

$$P''(t) \;=\; aP'(t) \,-\, 2bP(t)\cdot P'(t),$$

se ve que P' es creciente para $P(t) < L/2$ y es decreciente para $P(t) > L/2$, con un punto de inflexión en $P(t) = L/2$. Por tanto la gráfica de P es del tipo:

A partir de esta información concluimos que el período de tiempo antes de que la población alcance la mitad de su límite L, es un período de crecimiento acelerado, semejante al crecimiento regido por la ley malthusiana. Después de este punto, la tasa de crecimiento disminuye hasta llegar a cero.

De esta forma la ley logística nos permite hacer predicciones sobre el crecimiento de las especies, prediciones que se han comprobado en diversos estudios y experimentos.

Observése que la ley logística

$$P'(t) \;=\; aP(t) \,-\, bP^2(t),$$

puede escribirse en la forma

$$P'(t) \;=\; aP(t)\left(\frac{L - P(t)}{L}\right),$$

donde $L = a/b$ es el límite de la población. El término $aP(t)$ es el potencial biótico de la especie, es decir, la tasa potencial de crecimiento en condiciones ideales, y el término $(L - P/L)$ es la resistencia ambiental al crecimiento.

Ahora bien, supongamos que tenemos dos especies P_1 y P_2, cuyo crecimiento se rige por la ley logística cuando las especies están aisladas de otras. ¿ Qué sucede si ahora juntamos a las especies P_1 y P_2, de manera que tienen que competir entre sí por el alimento, espacio, etc.? En este caso las ecuaciones se transforman en

$$P_1'(t) \;=\; aP_1(t)\left(\frac{L_1 - P_1(t) - \alpha_2 P_2(t)}{L_1}\right),$$

$$P_2'(t) \;=\; aP_2(t)\left(\frac{L_2 - P_2(t) - \alpha_1 P_1(t)}{L_2}\right),$$

donde α_1 y α_2 son constantes que indican el grado de influencia de una especie en la otra. Nos interesan preguntas como las siguiente:

- ¿ Existen constantes c_1 y c_2 tales que $P_1(t) \equiv c_1$ y $P_2(t) \equiv c_2$ satisfacen el sistema de ecuaciones anterior? Si tales valores existen, se les llama puntos de equilibrio del sistema.

- Supongamos que (c_1, c_2) es un punto de equilibrio del sistema, y que súbitamente agregamos algunos miembros de la primera especie, ¿ permanecerán P_1 y P_2 cerca cerca del valor (c_1, c_2), para todo tiempo futuro? Puede suceder, por ejemplo, que los miembros adicionales de la primera especie le den a ésta una ventaja sobre la segunda especie, de manera que ésta tienda a la extinción, mientras que P_1 tiende a un valor límite L_1 Si esto sucede diremos que el punto (c_1, c_2) es inestable. Mientras que si P_1 y P_2 permanecen cerca de (c_1, c_2) para todo tiempo futuro, diremos que este punto de equilibrio estable. Más aún, puede suceder que si agregamos algunos miembros de cualquiera de las dos especies, al pasar el tiempo las dos poblaciones P_1 y P_2 tienden otra vez a la solución de equilibrio (c_1, c_2). En este caso se dice que (c_1, c_2) es un atractor.

- Supongamos que P_1 y P_2 tienen valores arbitrarios para $t = 0$. ¿Qué ocurre cuando el tiempo tiende a infinito? ¿Triunfará alguna de las dos especies, tenderán a una solución de equilibrio?

Si en vez de dos especies en competencia, consideramos tres especies, o n especies en competencia, lo que obtendremos es un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} P_1' &= f_1(P_1, P_2, \ldots, P_n, t) \\ P_2' &= f_2(P_1, P_2, \ldots, P_n, t) \\ &\vdots \\ P_n' &= f_n(P_1, P_2, \ldots, P_n, t) \end{aligned}$$

donde $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funciones de $n+1$ variables. Esto es lo que se concoce como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden. A un conjunto de funciones que satisfagan este sistema, se les llama una solución. Parte fundamental de estos sistemas dinámicos es el estudio de las propiedades cualitativas de las soluciones, donde por propiedades cualitativas entenderemos propiedades del tipo de las mencionadas en las preguntas del ejemplo 2.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), t) \\ x_2'(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), t) \end{aligned}$$

una solución del sistema es un n-ada $(\phi, \ldots, \phi_n)$ de funciones de t que satisfacen el sistema. Es decir, $\Phi = (\phi, \ldots, \phi_n)$ satisface

$$\begin{aligned} \phi_1'(t) &= f_1(\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t), t) \\ \phi_2'(t) &= f_2(\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t), t) \\ &\vdots \\ \phi_n'(t) &= f_n(\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t), t) \end{aligned}$$

Por ejemplo, la pareja $(e^{2t}+e^{-3t}, 2e^{2t}-3e^{-3t})$ es una solución del sistema lineal de primer orden

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = 6x_1 - x_2$$

Obsérvese que para cada t, la n-ada $(\phi(t), \ldots, \phi_n(t))$ es un punto de $I\!R^n$. Así, al variar el tiempo, la solución $(\phi, \ldots, \phi_n)$ describe una curva, o trayectoria en $I\!R^n$. En este caso a $I\!R^n$ se le llama el espacio fase, y la curva que describe la solución en $I\!R^n$ se llama una órbita del sistema. Las soluciones de equilibrio corresponden al caso donde las derivadas $x_1', \ldots, x_n'$ son cero para todo t, así que la órbita consiste de solamente un punto en el equilibrio. El teorema fundamental de ecuaciones diferenciales es el teorema de existencia y unicidad de soluciones, el cual nos dice que si las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funciones diferenciables, entonces

- Las órbitas son curvas simples, es decir, sin auto-intersecciones.
- Las órbitas son ajenas dos a dos: si dos órbitas se intersecan en un punto son idénticas. Por cada punto del espacio fase pasa una y solamente una órbita del sistema.
- Las órbitas llenan todo el espacio $I\!R^n$.

Luego, dado un sistema de ecuaciones como el anterior, sus órbitas descomponen al espacio fase en unión disjunta de curvas simples y puntos de equilibrio. A esta descomposisción de $I\!R^n$ se le conoce como el retrato fase del sistema dinámico. Nos preguntamos cuestiones como: ¿ Existen puntos de equilibirio? ¿ Cuántos hay ? ¿Existen órbitas periódica? ¿ Cuáles son los conjuntos límites de esas órbitas?, o en otras palabras, ¿ dónde se acumulan o dónde nacen y dónde mueren las órbitas?, etc. El estudio de estas y otras preguntas relacionadas, constituye el estudio central de los sistemas dinámicos.

Referencias

[1] M. Braun, (1990) *Ecuaciones diferenciales y sus Aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

[2] J. Hale and H.Koçak, (1991) *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New York.

[3] Morris Hirsch and Stephen Smale, (1983) *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*, Alianza Universidad Textos, España.

[4] Lawrence Perko, (1991) *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York.

[5] José Seade, (1994) *Una introducción a los sistemas dinámicos*, Ciencia, México, Abril-Junio.