Artículo de sección
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 10, N^o 2. Marzo 2010

Una propuesta para la enseñanza de los Elementos de Análisis Combinatorio.

Giovanni Sanabria B.
gsanabria@itcr.ac.cr
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica−Universidad de Costa Rica

Resumen

La presente propuesta intenta enfrentar el problema de enseñanza de los elementos de Análisis Combinatorio por medio de la utilización sistemática de casos y etapas. La propuesta aborda los fundamentos, principios y técnicas de conteo principales del Análisis Combinatorio, de una manera muy comprensiva y sistemática. Se espera que el lector desarrolle habilidades de manera progresiva que le permitan resolver problemas de conteo cada vez más complejos.

Palabras claves: Didáctica, Análisis Combinatorio, Conteo.

1.1 Introducción

¿Por qué los problemas de combinatoria son difíciles?. Al respecto André Antibí ([1]) señala que,

> “Ahora bien en este tipo de problema, por pura tradición, en mi opinión, se indica rara vez los pasos a seguir y evidentemente, esto contribuye a hacer las cosas más difíciles... Se trabaja sobre conjuntos finitos, ciertamente, pero raramente se está en capacidad, en este tipo de problema, de especificar y de contar uno a uno los elementos del conjunto del cual se quiere calcular el cardinal”

Durante varios semestres se ha notado que para muchos estudiantes universitarios, en cursos de probabilidad, les es difícil aplicar las técnicas de combinatoria, esto dio origen a la siguiente interrogante ¿Cómo abordar la enseñanza de la combinatoria?

Se plantea dar respuesta a estas interrogantes, por medio de dos creaciones didácticas: CASOS y ETAPAS, derivadas de los principios de la suma y el producto del análisis combinatorio. La compresión adecuada de estos principios y su aplicación sistemática por medio de esquemas de casos y etapas, permiten hacerle frente con éxito a los problemas de combinatoria.

La propuesta, explícita en un texto, va dirigida a estudiantes universitarios de matemática, enseñanza de la matemática y computación. Sin embargo, ignorando algunos desarrollos teóricos, este texto puede ser utilizado por estudiantes de olimpiadas matemáticas y de otras carreras universitarias.

Se espera que el lector obtenga una concepción más sólida y comprensiva del los elementos del análisis combinatorio por medio del presente material.

1.2 Resumen de la propuesta

La propuesta consta de un texto de dos capítulos. El primer capítulo hace un breve recorrido por algunos tópicos de Matemática Discreta necesarios para abordar el estudio de los principales elementos del análisis combinatorio. Dicho recorrido es orientado a su posterior utilización.

El segundo capítulo aborda los fundamentos, principios y técnicas de conteo principales del Análisis Combinatorio.

1.3 Fundamentos del Análisis combinatorio

El conteo cotidiano es una asociación entre un conjunto de números y un conjunto de objetos, donde un número es asignado a cada objeto. Cuando se aprende a contar, se cometen algunos errores: se repiten números (no hay inyectividad en las asignaciones) o se saltan números (no hay sobreyectividad en las asignaciones). Así, la propuesta inicial con la primera técnica de conteo de seres humanos modelada por las funciones biyectivas:

Definición 1.1 *Dado un conjunto finito A, se dice que la cardinalidad de A es n y se escribe $|A| = n$, si y solo si existe una biyección entre A y $S_n\{1,2,3,...,n\}$, es decir, A posee n elementos.*

A partir de esta definición se realiza una justificación formal de los siguientes resultados, los cuales también se puede justificar intuitivamente.

Teorema 1.1 *Sean A y B dos conjuntos finitos, se tiene que,*

1. *Si A y B son excluyentes entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.*
2. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
3. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Teorema 1.2 *Sean A y B dos conjuntos finitos, se tiene que,*

1. $|A| \geqslant 0$.
2. $|A| = 0 \Leftrightarrow A = \phi$.
3. *Si $A \subseteq B$ entonces $|A| \leqslant |B|$.*
4. *Si B es el universo de A, entonces $|A| = |B| - |A|$.*
5. *Sea $f : A \longrightarrow B$, si f es inyectiva, entonces $|A| \leqslant |B|$, si f es sobreyectiva, entonces $|A| \geqslant |B|$.*

1.4 Los principios elementales de conteo

La idea central de la propuesta se centra en la compresión y aplicación sistemática del principio de la suma y el producto

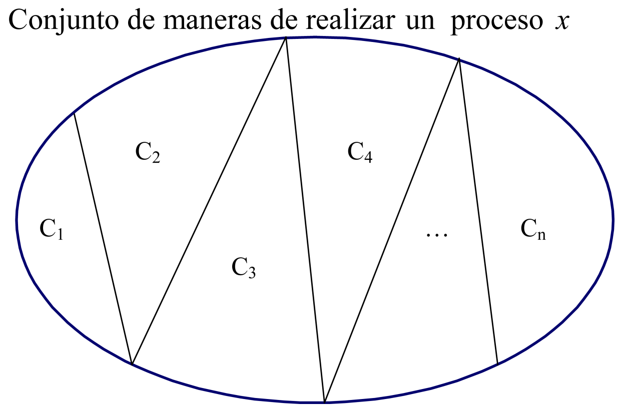


Figura 1.1

Teorema 1.3 (Principio de la suma) *Si las maneras de realizar un proceso se clasifican en k casos, y C_i es el conjunto de maneras de realizar el proceso ubicadas en el caso i, con $i = 1,2,3...,k;$ se tiene que en el*

Caso 1*: hay $n_1 = |C_1|$ maneras de realizar el proceso.*

Caso 2*: hay $n_2 = |C_2|$ maneras de realizar el proceso.*

...

Caso k*: hay $n_k = |C_k|$ maneras de realizar el proceso.*

Entonces el número total de maneras de realizar el proceso es $n_1 + n_2 + ... + n_k$. Matemáticamente, si $C_1, C_2, ..., C_k$ son conjuntos excluyentes dos a dos, entonces

$$|C_1 \cup C_2 \cup ... \cdots \cup C_n| = |C_1| + |C_2| + ... \cdots + |C_n|$$

Teorema 1.4 (Principio del Producto) *La realización de un proceso se divide en k etapas. Sea E_i el conjunto de maneras de realizar la etapa i, con $i = 1,2,3... \ldots, k;$ suponga que*

Etapa 1*: hay $n_1 = |E_1|$ maneras de realizarla,*

Etapa 2*: hay $n_2 = |E_2|$ maneras de realizarla,*

...

Etapa k*: hay $n_k = |E_k|$ maneras de realizarla.*

Entonces el número total de manera de realizar el proceso es $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot \cdots \cdot n_k$. *Matemáticamente,*

$$|E_1 \times E_2 \times ... \cdots \times E_k| = |E_1| \cdot |E_2| \cdots |E_n|$$

Para aplicar la regla del producto, es importante que tome en cuenta las siguientes observaciones:

1. Para determinar las maneras de realizar la etapa enésima, se asume que se realizaron las etapas anteriores (etapa 1, etapa 2,..., etapa $(n-1)-$ésima).
2. El orden en que se cuentan las maneras de realizar cada etapa no influye en el resultado.

Otros principios que se abordan son:

Teorema 1.5 (Principio de Exclusión) *Sean* $A_1, A_2, ... \dots, A_n$ *conjuntos finitos, entonces*

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cdots \cup A_n| = (-1)^2 \sum_{i=1}^{n} |A_i| + (-1)^3 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + ... \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cdots \cap A_n|$$

En particular, si $n = 3$,

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| \; - \; (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \; + \; |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Teorema 1.6 (Principio del palomar) *Si se tienen* n *palomas ubicadas en* m *palomares, y* $n > m$, *entonces hay por lo menos un palomar con dos o más palomas.*

1.4.1 Técnicas de Conteo

Las creaciones didácticas CASOS y ETAPAS permiten abordar la demostración de una serie de técnicas de conteo y su aplicación en la resolución de problemas. Las técnicas abordadas son:

1. Conteo de Permutaciones de objetos distintos ("maneras de ordenar")
2. Conteo de arreglos tomados de objetos distintos ("maneras de escoger ordenadamente")
3. Conteo de Combinaciones tomados de objetos distintos ("maneras de escoger")
4. Cardinalidad del conjunto de funciones sobre conjuntos finitos
5. Cardinalidad del conjunto potencia y el binomio de Newton
6. Conteo de Permutaciones con objetos repetidos
7. Conteo de combinaciones con repetición
8. Conteo de distribuciones

Seguidamente se presentan algunos ejemplos de aplicación de las técnicas incluidos en la propuesta

EJEMPLO 1.1 Cuántas permutaciones se pueden formar con los números $0, 1, 3, 5, 6, 9$ si el número 3 esta después de la segunda posición y el número 6 debe ir en cualquier lugar que este posterior al lugar del número 3.

Solución: Las posibles permutaciones se clasifican en dos casos:

Caso I: Permutaciones en las cuales el 3 está en la tercer posición $\_, \_, 3, \_, \_, \_$.

Etapa I. Colocar el 3: hay una manera.
Etapa II. Colocar el 6: hay 3 maneras (puede ir en 4^{ta}, 5^{ta} o 6^{ta} posición).
Etapa III. Colocar el resto : hay 4! maneras (quedan 4 lugares y 4 números).

Total: $1 \cdot 3 \cdot 4! = 72$

Caso II: Permutaciones en las cuales el 3 está en la cuarta posición: $\_, \_, \_, 3, \_, \_$

Etapa I. Colocar el 3: hay 1 manera.
Etapa II. Colocar el 6: hay 2 maneras.
Etapa III. Colocar el resto: 4! maneras.

Total: $1 \cdot 2 \cdot 4! = 48$

Caso III: Permutaciones en las que el 3 está en la quinta posición: $\_, \_, \_, \_, 3, \_$

Etapa I. Colocar el 3: hay 1 manera.
Etapa II. Colocar el 6: hay 1 manera.
Etapa III. Colocar el resto: 4! maneras.
Total: $1 \cdot 1 \cdot 4! = 24$

Respuesta: $72 + 48 + 24 = 144$.

EJEMPLO 1.2 En la final de la Olimpiada Matemática 2007 de cierto país se premiaron a 12 estudiantes: 2 con medalla de Oro, 4 con medalla de Plata y 6 con medalla de Bronce. De cuántas maneras se pueden colocar en fila para tomarles la Foto Anual de Medallistas 2007 si: los estudiantes que obtuvieron medalla de Oro debe ir juntos en el centro y los demás puede ir en cualquier otra posición de manera que a la derecha de los estudiantes con medalla de Oro queden exactamente 2 estudiantes con medalla de Plata y 3 con medalla de Bronce.

Solución:

Opción #1. El proceso de colocación se divide en las siguientes etapas:

Etapa I. Se colocan los estudiantes con medalla de oro. Hay 2 maneras
Etapa II. Se eligen los de plata que van a la izquierda. Hay $C(4, 2)$ maneras
Etapa III. Se colocan los de plata que van a la izquierda. Hay $P(4, 2)$ maneras
Etapa IV. Se colocan los de plata restantes a la derecha. Hay $P(4, 2)$ maneras
Etapa V. Se eligen los de bronce que van a la izquierda. Hay $C(6, 3)$ maneras
Etapa VI. Se colocan los de bronce que van a la izquierda. Hay 3! maneras
Etapa VII. Se colocan los de bronce restantes a la derecha. Hay 3! maneras

TOTAL $2!C(4,2)[C(5,2)\cdot 2!]^2C(6,3)[3!]^2 = 3456000$

Opción #2. El proceso de colocación se divide en las siguientes etapas:

Etapa I. Se colocan los estudiantes con medalla de oro. Hay 2 maneras
Etapa II. Se eligen los de plata que van a la izquierda. Hay $C(4,2)$ maneras
Etapa III. Se eligen los de bronce que van a la izquierda. Hay $C(6,3)$ maneras
Etapa IV. Se colocan los que van a la derecha. Hay 5! maneras
Etapa V. Se colocan los que van a la izquierda. Hay 5! maneras

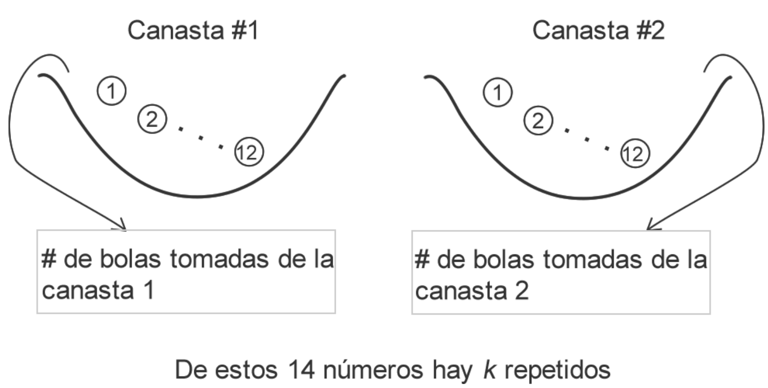
TOTAL $2C(4,2)C(6,3)5!^2 = 3456000$

Opción #3. El proceso de colocación se divide en las siguientes etapas:

Etapa I. Se colocan los estudiantes con medalla de oro. Hay 2 maneras
Etapa II. Se eligen los lugares de los de plata que van a la izq. Hay $C(5,2)$ maneras
Etapa III. Se eligen los lugares de los de plata que van a la der. Hay $C(5,2)$ maneras
Etapa IV. Se colocan los que plata. Hay 4! maneras
Etapa V. Se colocan los de bronce. Hay 6! maneras

TOTAL: $2C(5,2)C(5,2)4!6! = 3456000$

EJEMPLO 1.3 Se tiene dos canastas, cada una tiene 12 bolas enumeradas del 1 al 12. De cada canasta se sacan 7 bolas y se anotan los números de las 14 bolas extraídas, determine una fórmula que indique de cuántas maneras se puede obtener k números repetidos con $k \in \{2,3,4,5,6,7\}$.



Solución: Dado que los números se anotan, se desea contar las maneras en las cuales de 14 números anotados del 1 al 12, hay k repetidos. El proceso de anotación de estos números se puede dividir en etapas:

Etapa I. Se anotan el número de las 7 bolas de la canasta 1. Hay C(12,7)=792 maneras.

Etapa II. Se anotan los k números que son iguales a los ya anotados y que corresponden a las k bolas seleccionadas de la canasta 2. Hay $C(7,k)$ maneras.

Etapa III. Se anotan los $7-k$ números que hacen falta de las bolas seleccionadas de la canasta 2 (estos números son distintos a los anotados). Hay $C(12-7,7-k)$

Por el principio del producto hay $f(k) = 792 \cdot C(7,k) \cdot C(12-7, 7-k)$ maneras de obtener k números repetidos.

EJEMPLO 1.4 Sea A un conjunto de n elementos y B un conjunto de $n-1$ elementos. ¿Cuántas funciones sobreyectivas existen de A a B?

Solución: En este caso, una función sobreyectiva de A en B, es aquella que toma dos elementos de A y les asigna un elemento de B, y luego entre los elementos restantes de A y B (sobran $n-2$) se forma una biyección, el conteo de estas funciones se puede realizar por etapas:

Etapa I. Se seleccionan 2 elementos de A: hay $C(n,2)$ maneras

Etapa II. Se selecciona un elemento de B: hay $C(n-1,1)$ maneras
Hasta aquí, se asume que los dos elementos de A son asociados a un elemento de B.

Etapa III. Se realiza una biyección entre conjuntos de $n-2$ elementos: Hay $P(n-2)$ maneras

Por el principio del producto, el número de funciones sobreyectivas de A en B es

$$C(n,2) \cdot C(n-1,1) \cdot P(n-2)$$

EJEMPLO 1.5 Cuántos anagramas se pueden hacer con las letras de la palabra "ENSEÑANZA" si las letras "E,S,E" deben ir juntas en cualquier orden.

Solución: En este caso, el proceso de formación de un anagrama se divide en dos etapas:

Etapa I. Ordenar los siete objetos N,(ESE),N,A,N,Z y A: Hay $\dfrac{7!}{2!2!}$ maneras.

Etapa II. Permutar los números dentro del objeto (ESE): Hay $\dfrac{3!}{2!}$. maneras.

Por lo tanto, el número de maneras de formar un anagrama bajo las condiciones dadas es

$$\frac{7!}{2!2!} \cdot 3 = 3780.$$

EJEMPLO 1.6 ¿Cuántos anagramas existen de la palabra "Matemático", en los cuales las dos "a" no estén juntas, ni las dos "m", ni las dos "t"?.

Solución: Sea U el conjunto de todos los anagramas de la palabra "Matemático", que se considera el universo, note que $|U| = \dfrac{10!}{2!2!2!} = 453600$. Considere los siguientes conjuntos:

$A = \{x \in U \mid x$ es un anagrama con las dos "a" juntas $\}$

$B = \{x \in U \mid x$ es un anagrama con las dos "m" juntas $\}$

$C = \{x \in U \mid x$ es un anagrama con las dos "t" juntas $\}$

Se debe averiguar el valor de $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |U| - |A \cup B \cup C|$. Dado que

$|A| = |B| = |C| = P(9; 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1) = 90720.$

$|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = P(8; 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = 20160$

$|A \cap B \cap C| = P(7) = 7! = 5040$

Aplicando el principio de inclusión-exclusión se obtiene que

$$|A \cup B \cup C| = 3 \cdot 90720 - 3 \cdot 20160 + 5040 = 216720$$

Por lo tanto, el número de anagramas de la palabra "Matemático", en los cuales las dos "a",las dos "m" y las dos "t" no estén juntas es $453600 - 216720 = 236880$.

EJEMPLO 1.7 En un concurso, Mario, Lucia y Sandra han ganado 12 premios: 7 viajes para una persona a orlando y 5 premios sorpresa distintos. Sin embargo dichos premios van a ser distribuidos aleatoriamente entre los participantes mencionados. De cuántas maneras se puede distribuir dichos premios si a Mario le toque por lo menos 2 viajes y solamente 2 premios sorpresa.

Solución: Considere las siguientes etapas del proceso de distribución

Etapa I. Se asignan dos viajes a Mario: Hay 1 manera (Los viajes son idénticos)

Etapa II. Se distribuyen los 5 viajes restantes: hay $C(3 + 5 - 1, 5)$ maneras.

Etapa III. Se seleccionan dos premios sorpresa para Mario: Hay $C(5, 2)$ maneras (los premios sorpresa son objetos distinguibles).

Etapa IV. Se distribuyen los premios 3 premios sorpresa restantes entre Sandra y Lucia: Hay 2^3 maneras.

EJEMPLO 1.8 ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 5 libros distintos de probabilidad entre Jorge, Karla y Anthony si a cada uno le corresponde al menos un libro?

Solución:

Opción #1. Sería un error ver el proceso en dos etapas: darle un libro a cada uno y luego repartir el resto (¿Por qué?). Una manera de proceder es por medio de casos:

Caso I. A Jorge le corresponden 3 libros

Etapa I. Se selecciona 3 libros para Jorge: hay C(5,3) maneras.
Etapa II. Se selecciona 1 libro para Karla: hay C(2,1) maneras
Etapa II. Se selecciona 1 libro para Anthony: hay 1 manera

Caso II. A Jorge le corresponden 2 libros

Etapa I. Se selecciona 2 libros para Jorge: hay C(5,2) maneras.
Etapa II. Se distribuyen los 3 libros restantes entre Karla y Anthony
Caso I. A Karla le corresponden 2 libros: hay C(3,2) maneras
Caso II. A Karla le corresponden 1 libro: hay C(3,1) maneras

Caso III. A Jorge le corresponden 1 libro

Etapa I. Se selecciona 1 libro para Jorge: hay C(5,1) maneras.
Etapa II. Etapa II. Se distribuyen los 4 libros restantes entre Karla y Anthony
Caso I. A Karla le corresponden 3 libros: hay C(4,3) maneras
Caso II. A Karla le corresponden 2 libros: hay C(4,2) maneras
Caso III. A Karla le corresponden 1 libro: hay C(4,1) maneras

Así, el número de maneras de distribuir los libros es

$$C(5,3)C(2,1)+C(5,2)(C(3,2)+C(3,1))+C(5,1)(C(4,3)+C(4,2)+C(4,1))=150.$$

Opción #2. Una mejor manera de resolver el problema es por medio del principio de inclusión-exclusión. Sean

U: conjunto de maneras de distribuir los libros

$A_1 = \{x \in U|$ en x a Jorge le corresponde al menos un libro $\}$
$A_2 = \{x \in U|$ en x a Karla le corresponde al menos un libro $\}$
$A_3 = \{x \in U|$ en x a Anthony le corresponde al menos un $libro\}$

Así, queremos averiguar la cardinalidad del conjunto $A_1 \cap A_2 \cap A_3$:

$$\begin{aligned}
|A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= |U| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&= |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\
&= |U| - (C(3,1)|A_1| - C(3,2)|A_1 \cap A2| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\
&= 3^5 - (C(3,1) + 2^5 - C(3,2) \cdot 1 + 0) = 150
\end{aligned}$$

Al igual que la opción 1 se obtiene que, el número de maneras de distribuir los libros 150.

El ejemplo anterior, opción 2, nos brinda una manera de contar las funciones sobreyectivas.

EJEMPLO 1.9 Dados dos conjunto A y B tales que $|A| = n$, $|B| = m$ con $n > m$, determine el número de funciones sobreyectivas de A en B.

Supongamos que $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots, b_m\}$. Considere los siguientes conjuntos

U : conjunto de todas las funciones de A en B
$F_1 = \{f \in U \mid$ en f a b_1 le corresponde al menos una preimagen$\}$
$F_2 = \{f \in U \mid$ en f a b_2 le corresponde al menos una preimagen $\}$

$\vdots$

$F_m = \{f \in U \mid$ en f a b_m le corresponde al menos una preimagen$\}$

Así, el número de funciones sobreyectivas de A en B es igual a la cardinalidad del conjunto $F_1 \cap F_2 \cap ... \cdots \cap F_m$, la cual utilizando el teorema de De Morgan, es equivalente a

$$|F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_m| = |U| - \left|\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap \cdots \cap \overline{F}_m\right|$$

Aplicando el principio de inclusión-exclusión se obtiene que $\left|\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap ... \cap \overline{F}_m\right|$ es

$$\begin{aligned}
&C\,(m,1)\,|F_1| - C\,(m,2)\,|F_1 \cap F_2| + C\,(m,3)\,|F_1 \cap F_2 \cap F_3| - \ \ldots\ + (-1)^{m+1}\,|F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_m| \\
&\quad = C\,(m,1)\,(m-1)^n - C\,(m,2)\,(m-2)^n + C\,(m,3)\,(m-3)^n - \ \ldots\ + (-1)^{m+1} \cdot 0 \\
&\quad = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1}\, C\,(m,k)\,(m-k)^n
\end{aligned}$$

Por lo tanto el número de funciones sobreyectivas de A en B es igual a

$$|U| - \left|\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap ... \cap \overline{F}_m\right| = m^n - \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1}\, C\,(m,k)\,(m-k)^n = m^n + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k}\, C\,(m,k)\,(m-k)^n$$

EJEMPLO 1.10 El programa “TV GANADORES”, el día domingo eligió a 15 finalistas (7 son del área metropolitana), de estos, 5 serán los ganadores de un viaje a Cancún. ¿De cuántas maneras se pueden elegir los ganadores de manera que se seleccione al menos un finalista que no sea del área metropolitana?

Solución: Seguidamente se presentan tres maneras diferentes de resolver este ejercicio.

Opción #1. Utilizando el principio de inclusión-exclusión

Considere los siguientes conjuntos

U : conjunto de maneras de elegir los ganadores
$A_i = \{x \in U|$ en x se elige al finalista i no del área metropolitana $\}$, con $i = 1,2,3,..,8$.

El número de maneras de elegir los ganadores de forma que se seleccione al menos un finalista que no sea del área metropolitana es

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_8| &= C(8,1)|A_1| - C(8,2)|A_1 \cap A_2| \\
&\quad + C(8,3)|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&\quad - C(8,4)|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&\quad + C(8,5)|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| \\
&= C(8,1)C(14,4) - C(8,2)C(13,3) \\
&\quad + C(8,3)C(12,2) - C(8,4)C(11,1) + C(8,5) \\
&= 8008 - 8008 + 3696 - 770 + 56 = 2982
\end{aligned}$$

Opción #2. Utilizando casos

Caso I. Elegir un finalista del área metropolitana: hay $C(8,1)C(7,4)$ maneras.
Caso II. Elegir 2 finalistas del área metropolitana: hay $C(8,2)C(7,3)$ maneras.

Caso III. Elegir 3 finalistas del área metropolitana: hay $C(8,3)C(7,2)$ maneras.
Caso VI. Elegir 4 finalistas del área metropolitana: hay $C(8,4)C(7,1)$ maneras.
Caso V. Elegir 5 finalistas del área metropolitana: hay $C(8,5)$ maneras.
El número de maneras de elegir los ganadores de forma que se seleccione al menos un finalista que no sea del área metropolitana es

$$C(8,1)C(7,4) + C(8,2)C(7,3) + C(8,3)C(7,2) + C(8,4)C(7,1) + C(8,5) = 2982$$

Opción #3. Por Complemento.

El número de maneras de elegir los ganadores de forma que se seleccione al menos un finalista que no sea del área metropolitana, es igual a restarle al total de maneras de elegir los ganadores, aquellas en las que no se eligen finalistas del área no metropolitana: $C(15,5) - C(7,5) = 2982$

Bibliografía

[1] Antibí, A. "Didáctica de las Matemáticas: Métodos de Resolución de problemas". Serie Cabecar, Costa Rica 2000.

[2] Calderón, S; Morales, M. "Análisis Combinatorio". Editorial Tecnológica de Costa Rica, 1992.

[3] Devore, J.,"Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias" 4a ed. International Thomson Editores, México, 1998.

[4] Marín, M., "Notas del Curso Probabilidades," Publicaciones ITCR.

[5] Mora, E. "Curso Intermedio de Probabilidades". Universidad de Costa Rica, 2001.

[6] Murrillo, M. "Introducción a la matemática Discreta". Editorial Tecnológica de Costa Rica, 2004.

[7] Piza, E. "Combinatorio esencial con ejercicios resueltos". Universidad de Costa Rica, 2000.

[8] Walpole, R; Myers, R; Myers, S. "Probabilidad y estadistica para ingenieros", 6a ed, Prentice-Hall Hispanoamericana. S.A., 1999.

[9] Sanabria, G. (2006). "Tópicos precedentes al estudio de las probabilidades". Costa Rica: Publicaciones Instituto Tecnológico de Costa Rica.