



Sólidos de Revolución y suma de Riemann en GeoGebra

| Revolution solids and Riemann sum in GeoGebra |

 José L. Vergara Ibarra

ingjosevergaraibarra@gmail.com

Instituto GeoGebra de la Universidad Técnica de Manabí

Colegio Veintitrés de Octubre

Manabí - Ecuador

Recibido: 8 abril 2021

Aceptado: 30 agosto 2021

Resumen: Una forma de aproximar el volumen de sólidos de revolución, es el método de los discos. Este método requiere encontrar la suma de los volúmenes de discos representativos para acercarse al volumen del sólido. Cuando se incrementa el número de discos, la aproximación tiende a ser más precisa. En este artículo se muestra este método diseñado de forma dinámica mediante GeoGebra, además de otras formas conocidas de aproximar el volumen, tal es el caso del método de las arandelas y el método de las capas. Otra de las utilidades didácticas que se muestra a través de este trabajo es calcular el volumen con GeoGebra por sumas de Riemann y la integral definida bajo la definición formal de cada método.

Palabras Clave: suma de Riemann, volumen de sólidos de revolución, método de los discos, recurso dinámico

Abstract: One way to approximate the volume of solids of revolution is the method of disks. This method requires finding the sum of the representative disk volumes to approach the volume of the solid. When the number of discs is increased, the approximation tends to be more accurate. This paper shows this dynamically designed method using GeoGebra, as well as other known ways to approximate the volume, such as the washer method and the layer method. Another didactic utility that is shown through this work is to calculate the volume with GeoGebra by Riemann sums and the integral defined under the formal definition of each method.

Keywords: Riemann sum, Volume of revolution solids, disc method, dynamic resource

1. Introducción

Los avances del cálculo empezaron a tomar forma a fines de los años 1660, cuando Isaac Newton creó su teoría de las fluxiones e inventó el método de las tangentes inversas para encontrar áreas bajo la curva; este último método también fue descubierto en la década de 1680 por Gottfried Leibniz, después con el desarrollo y perfeccionamiento de técnicas en 1850 Bernhard Riemann adoptó una perspectiva nueva y diferente que consistió en el análisis del interesante proceso de sumas y límites

para encontrar áreas el cual separa el concepto de integración de su contraparte, la diferenciación. (Bartle y Sherbert 2011 p. 198)

Estas sumas toman su nombre del matemático Bernhard Riemann. Su valor, por ejemplo, en el cálculo de áreas bajo la curva, puede obtenerse dividiendo la región plana en formas geométricas como cuadrados, rectángulos, trapezoides, parábolas, entre otras. Los sólidos de revolución son producidos por estas regiones planas acotadas cuando son giradas alrededor de un eje L por lo que se puede extender esta idea dividiendo el sólido en \mathbf{R}^3 en otras formas geométricas (discos, anillos y capas cilíndricas) que están relacionadas a las formas elaboradas en dos dimensiones, las cuales permiten definir y medir el volumen de los sólidos por los diferentes métodos conocidos.

La comprensión de sólidos de revolución o la rotación de figuras planas es compleja ya que no solo involucra la comprensión de saberes matemáticos, sino aspectos visuales. (Molina y Montecino 2011, p. 3)

Molina y Montecino (2013) explican que los sólidos o cuerpos son graficados en dos dimensiones y no en el espacio (3D), es decir, que son dibujados en el pizarrón haciendo uso de la perspectiva.

De acuerdo con Lupiáñez y Moreno (2001) el uso de las representaciones que suministran las calculadoras graficadoras poseen ciertas cualidades que las hacen especialmente productivas para el aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido, GeoGebra posee algunos registros de representación como la vista algebraica, la vista de cálculo simbólico CAS, las vistas gráficas en dos y tres dimensiones, entre otras. Todas estas vistas se relacionan entre sí para producir y dinamizar objetos algebraicos y gráficos que pueden transformarse conjuntamente pasando de una dimensión a otra. Estas representaciones optimizan el tiempo y permiten mostrar una variedad de comportamientos del objeto en estudio lo que será difícil de obtener por medio de la representación gráfica con lápiz y papel.

Debido a las complicaciones que pueden surgir en el estudio de objetos tridimensionales sin el apoyo de una herramienta tecnológica, GeoGebra es el preferido para el estudio de sólidos de revolución, por ejemplo, autores como Del Río (2016) y León (2018) han elaborado sólidos de revolución a través del rastro de curvas cerradas, Dantas (2015) genera sólidos a partir de secuencia de polígonos; con una idea similar Dantas y Vieira (2017) elaboran sólidos de revolución a partir de secuencias de curvas planas y además modelan formas de revolución del entorno, y Vergara (2021) construye sólidos de revolución dinámicos a través de parametrizaciones de curvas y superficies, rotación de superficies y el desarrollo de superficies de revolución. Sin embargo, en estos trabajos los métodos de construcción y el enfoque didáctico ha sido abordado mediante conceptos aislados a la teoría que los sustenta.

Una de las problemáticas que presenta la literatura relacionada a este tema en los libros de cálculo en una variable Bruce y Larson (2010), Edwards y Penney (1997), Stewart (2018), Smith y Minton (2012), Thomas (2010), Zill y Wright (2011) es mostrar gráficos estáticos para abordar la definición de las sumas de Riemann y las definiciones subyacentes para definir el volumen de sólidos de revolución como el límite de las sumas de Riemann (integral definida). Por otro lado, cuentan con pocos ejemplos en los que se puede apreciar el sólido de revolución que se está analizando.

Otra de las dificultades observadas como mencionan Zaragoza, López y Díaz (2006) que herramientas comerciales de tipo SAC (Sistemas Aritméticos Computacionales) tales como MathCAD, MatLab, Mathematica, entre otros, también permiten generar sólidos de revolución, pero su fin no es claramente didáctico. Estos programas también requieren conocimientos básicos de programación; más aún si lo que se quiere es mostrar que a medida que las formas geométricas son cada vez más pequeñas, la suma se aproxima a la integral de Riemann.

Villa y Báez (2017) elaboran sólidos de revolución y calculan su volumen con AutoCAD en la que se requiere la descarga e instalación de software y complementos necesarios para su correcto funcionamiento. Este último trabajo presenta limitaciones porque no todas las computadoras y dispositivos móviles cuentan con tales especificaciones para el diseño y análisis de este tema. Por el contrario Geo-

Gebra es un software libre y gratis, además está escrito en Java lo que garantiza su portabilidad. Por último es conveniente acotar que GeoGebra no solo es un software libre de matemáticas dinámicas sino que adicionalmente representa un conjunto de herramientas para la creación y la gestión de recursos educativos en ambientes digitales, las cuales se denominan Herramientas de Autor, a saber: Actividad, Libro, Grupo, Notas y Classroom (Pizzorno y Montiel 2021).

A raíz de todo lo expuesto, se plantea desarrollar en GeoGebra registros de representación o modelos tanto geométricos como analíticos y numéricos en los que se garanticen la aplicación del concepto de sumas de Riemann sobre los métodos de discos, anillos y capas cilíndricas. El desarrollo geométrico analítico y numérico de estos métodos están bajo los sustentos teóricos del tema a desarrollar y actúan de la siguiente forma:

El modelo geométrico representado en la vista gráfica 3D de GeoGebra permite obtener la construcción de un sólido de revolución modificable. El modelo analítico y numérico integra las definiciones con sus ecuaciones en el software para hacer dinámicas y manipulables las formas geométricas (región de la vista gráfica 2D y 3D) y el valor de las aproximaciones del volumen del sólido. Además de manera conjunta se va apreciar que a medida que el sólido de revolución se aproxima a su forma real la aproximación del volumen tiende a ser más exacta.

Antes de realizar todo este diseño y cálculo se dan las definiciones pertinentes en cada caso. La versión a utilizar para el diseño de los modelos es GeoGebra clásico 5, pues trae integrada las vistas: cálculo simbólico (CAS) y las vistas gráficas 2D y 3D. Este diseño se puede trabajar también sobre las versiones en línea y en las aplicaciones para dispositivos móviles.

Las construcciones generadas a lo largo del presente artículo se dejan al lector a través de enlaces para su exploración y utilización. Todas las imágenes que ilustran los conceptos o definiciones son elaboradas por el autor utilizando GeoGebra.

2. Marco teórico

Lupiáñez y Moreno (2001) afirman que las representaciones analíticas tradicionales se han completado y enriquecido con las nuevas tecnologías dando vida a las representaciones de carácter estático permitiendo actuar sobre ellas, además destacan que los conceptos abstractos de las matemáticas se convierten en reales con el uso de la calculadora, en el sentido de ser manipuladas y transformadas. En otras palabras, se hace posible intervenirlos matemáticamente. Con respecto a esto, GeoGebra juega un rol importante sobre las matemáticas y las matemáticas sobre GeoGebra. Según Carrillo (2012) afirma que GeoGebra no es solo geometría también es álgebra, cálculo, análisis y estadística; en definitiva, GeoGebra ofrece una buena oportunidad para hacer matemáticas dinámicas sobre todo en niveles educativos de primaria, secundaria y también de bachillerato; más aún el uso de GeoGebra se da también en la educación superior de acuerdo con Del Río (2016).

Hohenwarter (2014) explica que las manipulaciones y transformaciones visuales con software matemático dinámico como GeoGebra puede apoyar el desarrollo de las propias imágenes internas del estudiante. Paralelamente el modelo de aprendizaje asistido con GeoGebra desarrolla la capacidad del pensamiento visual, actividad importante en el aprendizaje de las matemáticas. (Juandi y Priatna 2018, p. 6)

Brzenzinski (2021) menciona que la manipulación de applets disponibles en la red de GeoGebra es significativa, pero es más poderoso que los estudiantes los construyan pues van aplicar conocimientos matemáticos ya aprendidos.

De acuerdo con Moreno y Lupiáñez (2001) actividades en las que se lleva al lenguaje máquina el concepto matemático inciden en la formación matemática de los estudiantes, pues ofrecen representaciones y relaciones entre objetos matemáticos con las que ellos pueden interactuar, dando una nueva dimensión a la construcción del conocimiento matemático.

2.1. Limitaciones de la geometría básica

Smith y Minton (2012) explican que para analizar los sistemas de calefacción y refrigeración de un edificio, los ingenieros deben calcular el volumen de aire que se está procesando y que probablemente solo haya unos pocos sólidos cuyo volumen se pueda calcular usando geometría básica. Por ejemplo, los edificios que se muestran en la Figura 1 son una caja rectangular y dos cilindros. Observe en cada caso que el edificio tiene una sección transversal familiar (rectángulo y un círculo).

El volumen de un cilindro circular está dado $\pi \cdot r^2 \cdot h$ mientras el volumen de una caja es $V = l \cdot w \cdot h$, en donde r es el radio, w es el ancho, l el largo y h la altura. En general, el volumen de cualquier cilindro se encuentra por $V = (\text{área de la sección transversal}) \times h$. Sin embargo, existen muchas formas de sólidos de revolución en la que se requiere utilizar el cálculo integral para obtener su volumen pues sus secciones transversales dejan de ser constantes.

A continuación, extendemos esta idea de forma más general.



Figura 1: Edificios cilíndricos. *Nota.* Adaptado de Calculus (p. 324), por R. Smith y R. Minton , 2012, McGraw-Hill Companies.

2.2. Volumen aproximado

Para un sólido de revolución que se extiende de $x = a$ hasta $x = b$, comenzamos dividiendo el intervalo $[a, b]$ en el eje x en n subintervalos (ver Figura 2), cada uno de ancho

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}, \tag{1}$$

denotamos $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$ y así sucesivamente, de modo que $x_i = a + i\Delta x$, para $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

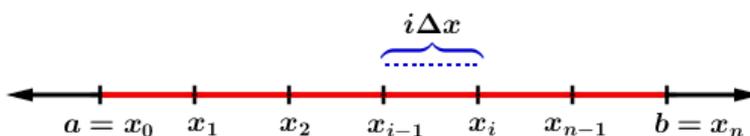


Figura 2: División del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales.

Luego hacemos un corte al sólido perpendicular al eje x en cada uno de los $(n-1)$ puntos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$. Observe que si n es grande, entonces cada rebanada del sólido será más delgada con un área de sección transversal casi constante (Smith y Minton, 2012). Stewart (2018) afirma que si se eligen puntos muestra x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$, se puede tener un valor aproximado de la i -ésima rebanada de S_i por un cilindro cuya base tiene área $A(x_i^*)$ y altura Δx . Por lo tanto, el volumen de la i -ésima rebanada es aproximadamente $V(S_i) \approx A(x_i^*) \Delta x$ y al sumar los volúmenes de estas rebanadas (Ver Figura 3), se obtiene un valor aproximado del volumen total del sólido de revolución mediante la expresión:

$$V \approx \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x \quad (2)$$

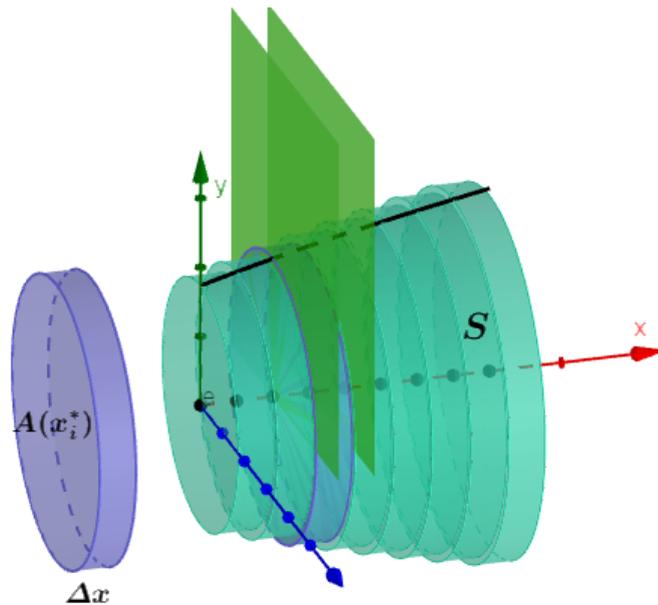


Figura 3: i -ésima rebanada de S .

2.3. Volumen del sólido

La forma real del sólido y la aproximación del volumen es cada vez mejor cuando el número de cortes aumenta (ver Figura 4). Por tanto, se define al volumen como el límite de estas sumas cuando n tiende al infinito

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x_i \quad (3)$$

siempre que el límite exista se puede dar la siguiente definición:

Definición 1 (Thomas, 2010)

El volumen de un sólido de área de sección transversal integrable conocida $A(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ es la integral de A de a a b ,

$$V = \int_a^b A(x) dx. \quad (4)$$

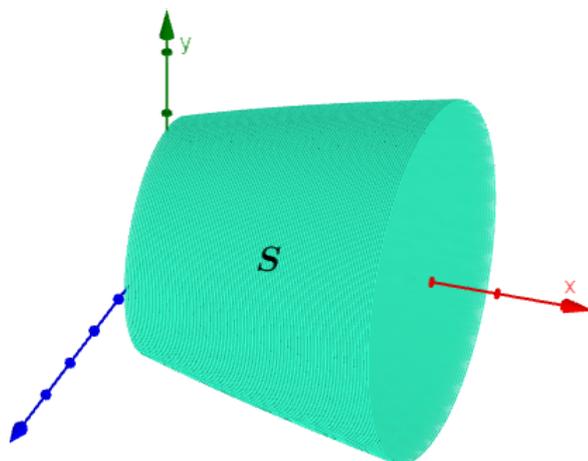


Figura 4: Aumento de cortes en el intervalo $[a, b]$.

La definición es general, es decir, sirve también para calcular sólidos que no son de revolución; en nuestro estudio se toma esta definición para sólidos de revolución.

A continuación, se definen cada uno de los métodos (discos, anillos o arandelas y capas cilíndricas), después se van diseñando estos modelos que se complementan con el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución por cada método a través de ejemplos con un comportamiento distinto.

2.4. Método de los discos

Suponga que $f(x) \geq 0$ y f es continua en el intervalo $[a, b]$. Tome la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y el eje x , para $a \leq x \leq b$, y gírelo alrededor del eje x , esto genera un sólido. Podemos encontrar el volumen de este sólido cortándolo de forma perpendicular al eje x y reconociendo que cada sección transversal es un disco circular (ver figura 3 y 5) de radio $R = f(x)$, entonces el volumen V está dado por (Smith y Minton, 2012, p.328).

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx \quad (5)$$

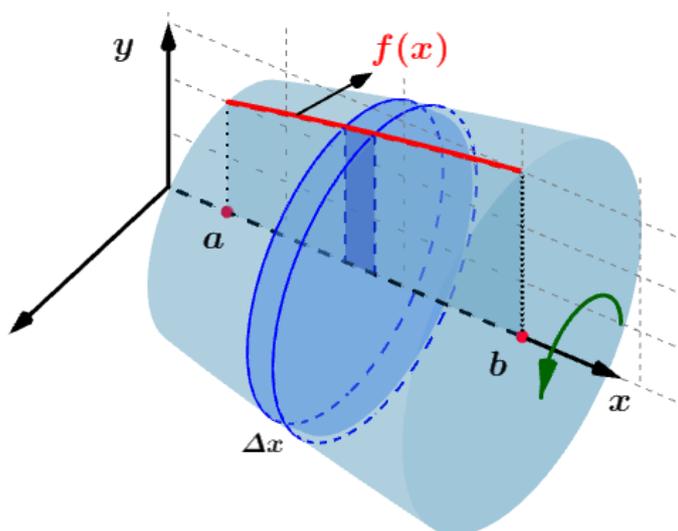


Figura 5: Sólido de revolución compuesto por discos.

Y se define en otro intervalo $[c, d]$ por ejemplo si el eje de revolución L es el eje y se tiene de forma

análoga la siguiente ecuación

$$V = \int_c^d \pi [f(y)]^2 dy. \quad (6)$$

2.5. Método de las arandelas

El método de los discos puede extenderse para cubrir sólidos de revolución huecos reemplazando el disco con una arandela (anillos, Figura 6).

Si r y R son los radios interiores y exteriores de la arandela y w es la anchura, su volumen está dado por $V = \pi(R^2 - r^2) \cdot w$ (Bruce y Larson, 2010).

Por lo tanto si $f(x) > g(x)$ se tienen las expresiones (7) y (8):

$$V = \int_a^b \pi [f(x)^2 - g(x)^2] dx \quad (7)$$

$$V = \int_c^d \pi [f(y)^2 - g(y)^2] dy \quad (8)$$

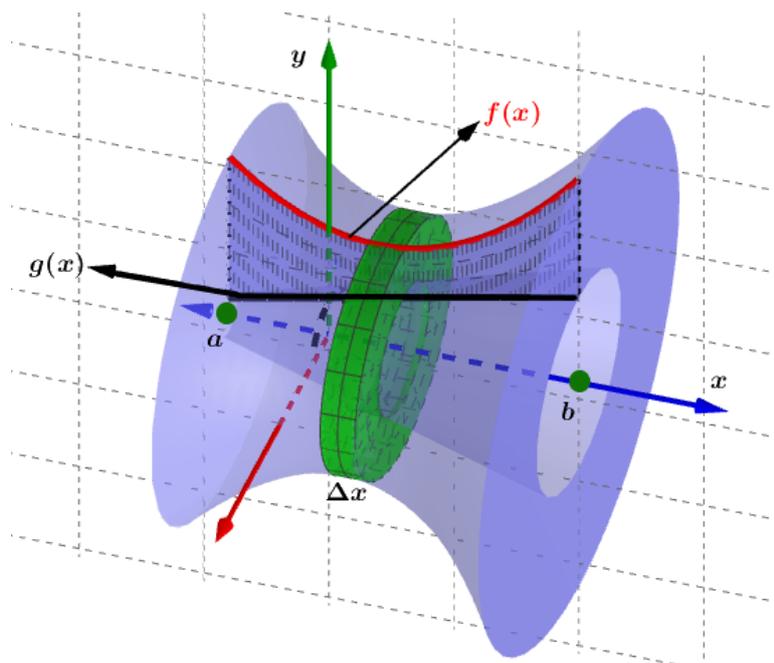


Figura 6: Sólido de revolución compuesto por anillos.

2.6. Método de las capas cilíndricas

Este método se presenta como una alternativa con respecto al método de las arandelas. Esto se debe porque existen una gran cantidad de sólidos de revolución que al emplear el método de las arandelas se debe dividir la región en varias secciones convenientes para determinar su volumen. Puede ocurrir también que al despejar x en términos de y para los respectivos radios esto nos conduzca a fórmulas complicadas (Thomas, 2010, Ejemplo 1, p. 319) y (Stewart, 2018, p. 449).

Edwards y Penney (1997) afirman que este método es una técnica de aproximación de un sólido mediante una colección de delgadas capas cilíndricas, y que con frecuencia conduce a cálculos más sencillos que el método de secciones transversales.

La región delimitada por la gráfica de $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$, donde $0 \leq a < b$ y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, produce un sólido de revolución cuando es rotado alrededor del eje y , tal como se muestra en la Figura 7.

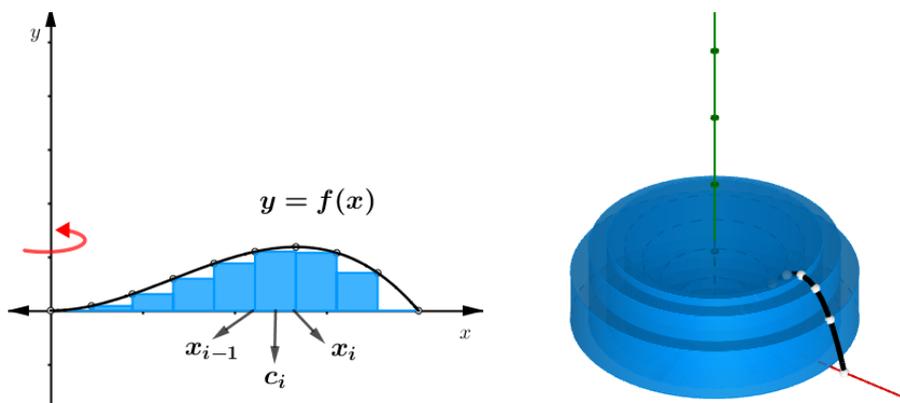


Figura 7: Sólido de revolución (derecho) generado por una región acotada (izquierda).

Para el cálculo del volumen por este método usaremos la siguiente ecuación

$$\int_a^b 2\pi x f(x) dx. \quad (9)$$

Esta integral se obtiene al sumar las capas cilíndricas cuyo número tiende al infinito. Para un estudio detallado puede consultar en (Edwards y Penney, 1997, pp. 360-362) y (Smith y Minton, 2012, pp. 338-339).

3. Volumen y diseño geométrico del método de los discos

Para realizar esta construcción se activa la vista gráfica 2D y 3D y se crean tres deslizadores de nombre a , b y n con el comando **Deslizador**(<Mín>, <Máx>, <Incremento>, <Velocidad>, <Longitud>, <ángulo o no (true/false)>, <Horizontal o no (true/false)>, <Animado o no (true/false)>, <Aleatorio o no (true/false)>) con las siguientes entradas:

$$a = \text{Deslizador}(-10, 10, 0.5, 3, 100, \text{false}, \text{true}, \text{false}, \text{false})$$

$$b = \text{Deslizador}(a, 10, 0.5, 3, 100, \text{false}, \text{true}, \text{false}, \text{false})$$

$$n = \text{Deslizador}(1, 100, 1, 3, 100, \text{false}, \text{true}, \text{false}, \text{false})$$

Los deslizadores a y b representan los extremos del intervalo $[a, b]$, con $a < b$. El deslizador n representa el número de subintervalos y de discos.

Luego se crean los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (b, 0)$ y elegimos una función en particular, por ejemplo, $f(x) = \sqrt{x + 3}$ y con el comando **Si**(<Condición>, <Entonces>) se ingresa en la entrada esta sintaxis $g(x) = \text{Si}(a \leq x \leq b, f)$; ocultamos $f(x)$ y se obtiene la Figura 8.

El dominio de la función g de la Figura 8 puede modificarse animando los deslizadores a y b , para ello tome en cuenta que g está definida en ese intervalo.

Ahora utilizando la ecuación (1) y el comando **Secuencia**(<expresión>, <Variable>, <Valor inicial>, <Valor final>) se tiene:

$$P = \text{Secuencia}(A + k(B - A)/n, k, 0, n) \quad (10)$$

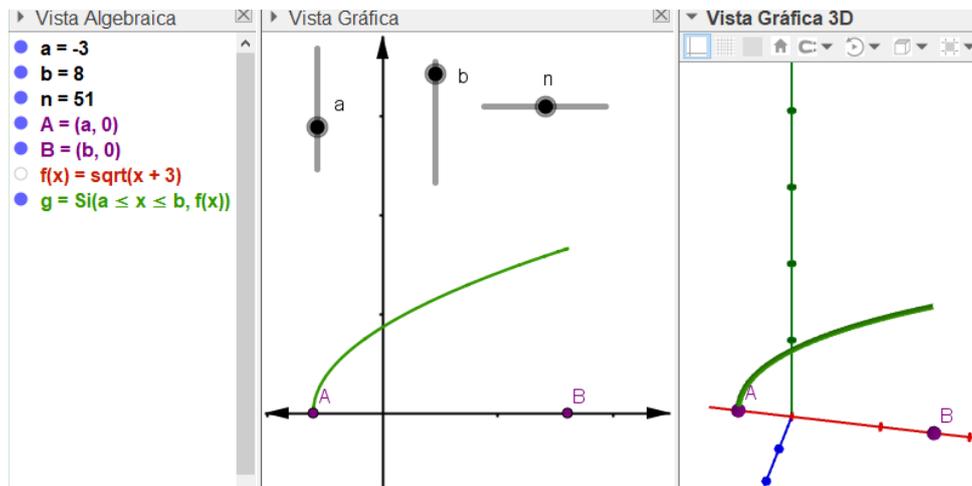


Figura 8: Deslizadores y funciones.

El primer argumento de la expresión P es igual a $(b - a)/n$, esto es posible porque GeoGebra interpreta los puntos como vectores.

Escribiendo en la entrada la secuencia P se obtiene una lista o conjunto de puntos sobre el eje x de modo que se tienen los puntos $x_i = a + i\Delta x$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Estos puntos se etiquetan con el comando **Secuencia**(**Texto**(;**Objeto**_i; ;**Punto**_i), ;**Variable**_i; ;**Valor inicial**_i; ;**Valor final**_i) registrando en la entrada la siguiente expresión:

$$E = \text{Secuencia}(\text{Texto}(\text{"x_{"} + (\text{FórmulaTexto}(k)) + \text{"}"}", A + k(B - A)/n + (0, -0.4)), k, 0, n)$$

De esta manera se obtiene la Figura 9.

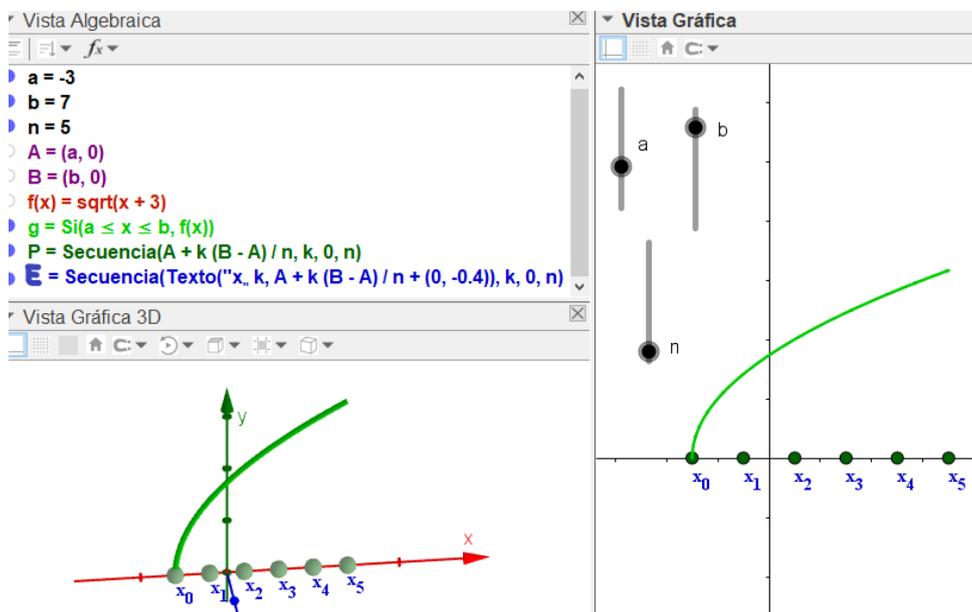


Figura 9: División del intervalo $[a, b]$ en partes iguales.

Para visualizar la forma geométrica en la vista 2D utilizamos el comando **SumaInferior**(;**función**_i; ;**Extremo inferior del intervalo**_i; ;**Extremo superior del intervalo**_i; ;**número de rectángulos**_i) y escribimos en la entrada $R = \text{SumaInferior}(g, a, b, n)$. Asimismo para observar esta forma en tres dimensiones creamos las listas l1 y C:

$$l1 = \text{Secuencia}(x(A) + k(x(B) - x(A))/n, k, 0, n) \tag{11}$$

$$C = \text{Secuencia}(\text{Cilindro}(\text{Elemento}(P, k), \text{Elemento}(P, k + 1), f(\text{Elemento}(l1, k))), k, 1, n) \tag{12}$$

Los elementos de la lista C son los volúmenes de cada disco que forman el sólido. C es conseguido anidando el comando **Cilindro**(;Punto₁; ;Punto₂; ;Radio₁) en el comando secuencia. Los dos primeros argumentos del comando cilindro son obtenidos tomando cada punto de P (10) a través del comando **Elemento**(;Lista₁; ;número (posición)₁), asimismo el tercer argumento es alcanzado evaluando cada elemento de l1 (coordenada x de los puntos de P) en f. Escribimos (11) y (12) en este orden en la entrada y se obtiene la Figura 10.

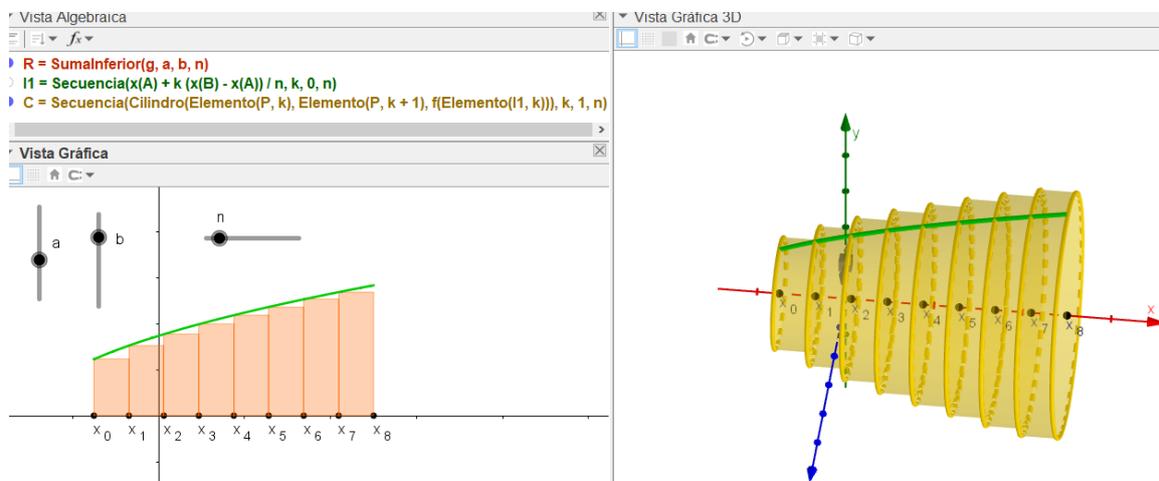


Figura 10: Formas geométricas 2D y 3D.

A continuación, tomamos este problema para obtener el valor de las sumas de Riemann en la vista 3D y determinar el volumen del sólido mediante integración.

Para obtener la suma de los discos en la vista 3D de la Figura 10 utilizamos el comando **Suma**(;Lista₁) y sustituimos C que es el nombre de la lista de los discos y a través del deslizador le damos el valor de $n = 100$. El deslizador fue creado con $n = 100$ pero podemos configurarlo y darle más valores para obtener una mejor aproximación. Registrando en la entrada $S = \text{Suma}(C)$ se obtiene el valor de la suma en la vista algebraica de la Figura 11.

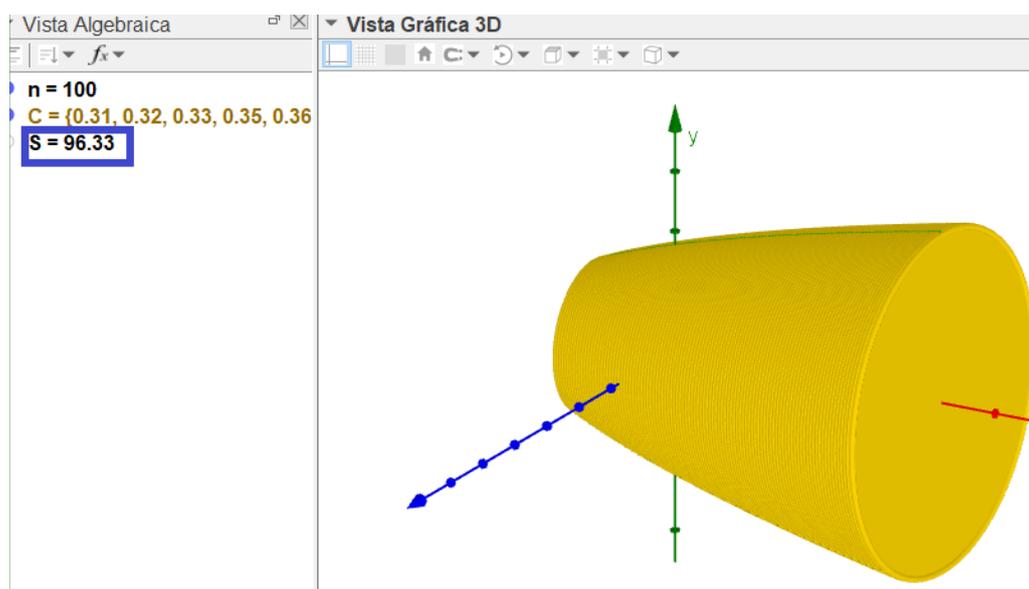


Figura 11: Valor de las sumas de Riemann y sólido.

Luego para calcular el volumen del sólido de revolución tomamos la ecuación (5) y adaptándola al comando **Integral**(;función₁; ;Extremo inferior del intervalo₁; ;Extremo superior del intervalo₁) se obtiene el volumen del sólido de este problema; en el primer argumento se sustituye el integrando de (5) y en los otros dos argumentos los límites de integración inferior (deslizador a) y superior

(deslizador b) respectivamente. Escribimos en la entrada $V = \text{Integral}(\pi f(x)^2, a, b)$ y se obtiene el volumen, tal como se muestra en la Figura 12a de la vista algebraica el volumen V.

Comparando los resultados S y V vemos que si n es más grande; S tiende a V y cuando n tiende al infinito S es V (ver subsección 2.2 y 2.3).

Para obtener el volumen exacto (Figura 12b) activamos la vista CAS y escribimos también el comando $\text{Integral}(\pi f(x)^2, a, b)$.

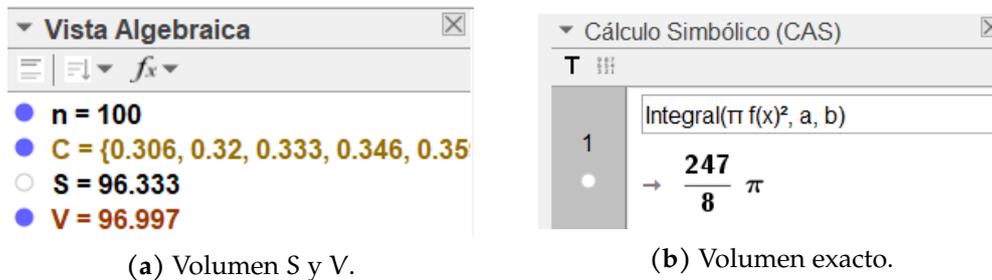


Figura 12: Volumen S, V y valor exacto.

El ejemplo mostrado es un caso particular donde el eje de rotación es la recta $y = 0$ (Eje x). Para otros casos con eje de rotación de la forma $y = c$ con $c \in \mathbf{R}$, a y b definidos por deslizadores se tienen las siguientes expresiones:

$$L = \text{Secuencia}(x((a, c)) + k(x((b, c)) - x((a, c)))/n, k, 0, n) \tag{13}$$

$$P_1 = \text{Secuencia}((a, c) + k((b, c) - (a, c))/n, k, 0, n) \tag{14}$$

$$C_1 = \text{Secuencia}(\text{Cilindro}(\text{Elemento}(P_1, k), \text{Elemento}(P_1, k + 1), f(\text{Elemento}(L, k)) - c), k, 1, n) \tag{15}$$

Observación: Dados dos puntos $C = (a_1, a_1)$ y $D = (b_1, b_1)$ sobre el eje y a partir de 11 análogamente se obtiene:

$$l_2 = \text{Secuencia}(y(C) + k(y(D) - y(C))/n, k, 0, n) \tag{16}$$

A continuación, en el Ejemplo 1 se crea un deslizador c que varía de -7 a 7 con incremento 0.5. Este ejemplo muestra otro caso particular cuyo eje de rotación es $y = 1$. Variando este eje por medio del deslizador se pueden obtener otros sólidos con volúmenes distintos.

Ejemplo 1

Calcule el volumen a través de las sumas de Riemann para $n = 100$ y la integral definida del sólido de revolución obtenido al rotar la región acotada por las funciones $f(x) = -x^2 + 2$ y $g(x) = 1$ alrededor del eje $y = 1$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución:

Creando los deslizadores a, b c y n, definiendo f(x) en el intervalo [a, b], es decir, $f(x) = \text{Si}(a \leq x \leq b, -x^2 + 2)$ como en el ejemplo anterior y por último a partir de (13), (14) y (15) se obtienen las tres listas l_1, p_1 y c_1 :

$$l_1 = \text{Secuencia}(x((a, 3)) + k(x((b, 3)) - x((a, 3)))/n, k, 0, n)$$

$$p_1 = \text{Secuencia}((a, 3) + k((b, 3) - (a, 3))/n, k, 0, n)$$

$$c_1 = \text{Secuencia}(\text{Cilindro}(\text{Elemento}(p_1, k), \text{Elemento}(p_1, k + 1), f(\text{Elemento}(l_1, k)) - 3), k, 1, n)$$

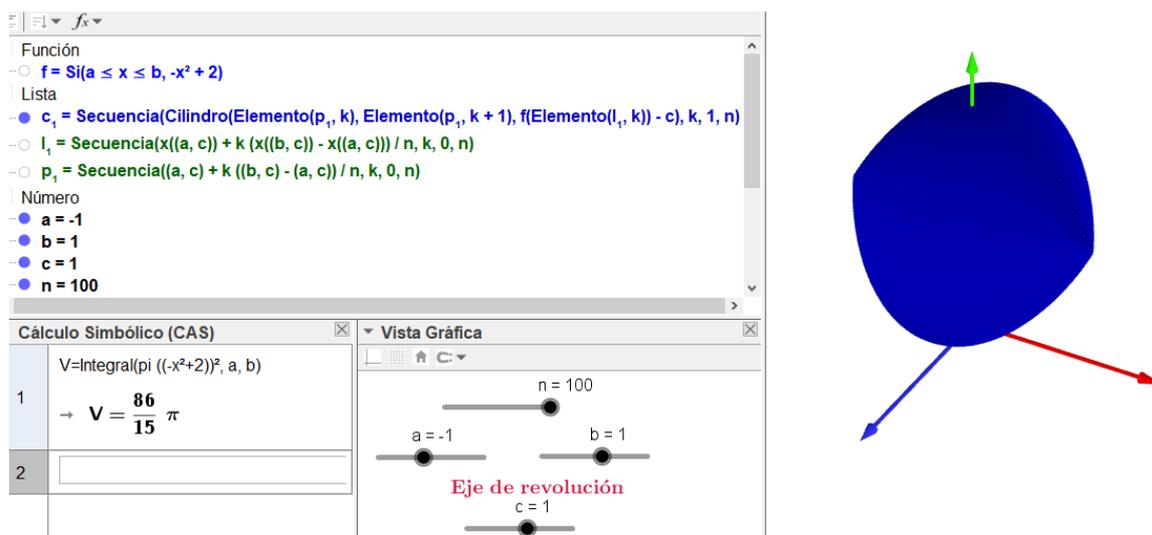


Figura 13: Volumen exacto.

Registrando en la entrada todos estos datos y adecuando las vistas gráficas 2D, 3D, algebraica y CAS se tiene la Figura 13.

La suma de Riemann con $n = 100$ es $S_1 = 18.01$ y el volumen mediante la integral definida es $V = \frac{86}{15}\pi$ de la vista CAS.

Para obtener la representación geométrica que se relaciona con las sumas de Riemann y el volumen del sólido cuyo eje de revolución del sólido es de la forma $x = d$, donde d es una constante real se procede de la siguiente forma: en este caso la función obtenida para los cálculos y gráficos en GeoGebra depende de y , pero y es una variable reservada del software, es decir, es interpretada solo como variable dependiente. Para corregir este primer detalle sacamos la inversa de la función; esta función inversa será el radio del disco representativo para obtener el volumen a través de la integral (6). La función inversa también se utiliza para obtener el sólido de revolución cuyos cilindros o discos (formas geométricas) son paralelos al eje x . Esto aplica también para los métodos de las arandelas y de las capas, veamos un ejemplo para el método de los discos.

Ejemplo 2

Calcule el volumen mediante la integral definida y por sumas de Riemann para $n = 200$ del sólido de revolución obtenido al rotar la región acotada por las curvas $y = \frac{1}{8}x^2$, $x = 0$ y $y = 8$ alrededor del eje y , para $y \in [0, 8]$.

Solución:

Definimos el número de discos a través de un deslizador que varíe desde 0 a 200 con incremento 1, ingresamos la función con la sintaxis $f(x) = \text{Si}(0 \leq x \leq 8, (1/4) \cdot x^2)$ enseguida le sacamos la inversa a esta función con el comando **Inversa(¡función!)** sustituimos f en el argumento de este comando, luego creamos las listas l_2 , P_2 y C_2 :

$$l_2 = \text{Secuencia}(y((0,0)) + k(y((0,8)) - y((0,0)))/n, k, 0, n)$$

$$P_2 = \text{Secuencia}((0,0) + k((0,8) - (0,0))/n, k, 0, n)$$

$$C_2 = \text{Secuencia}(\text{Cilindro}(\text{Elemento}(P_2, k), \text{Elemento}(P_2, k + 1), g(\text{Elemento}(l_2, k))), k, 1, n)$$

que son obtenidas a través de (16), (14) y (15) en este orden. Como la división en partes iguales es sobre el eje y los puntos de l_2 y P_2 son modificados y en C_2 se evalúa los elementos de l_2 en la inversa de f la cual es g por lo que se obtiene la Figura 14.

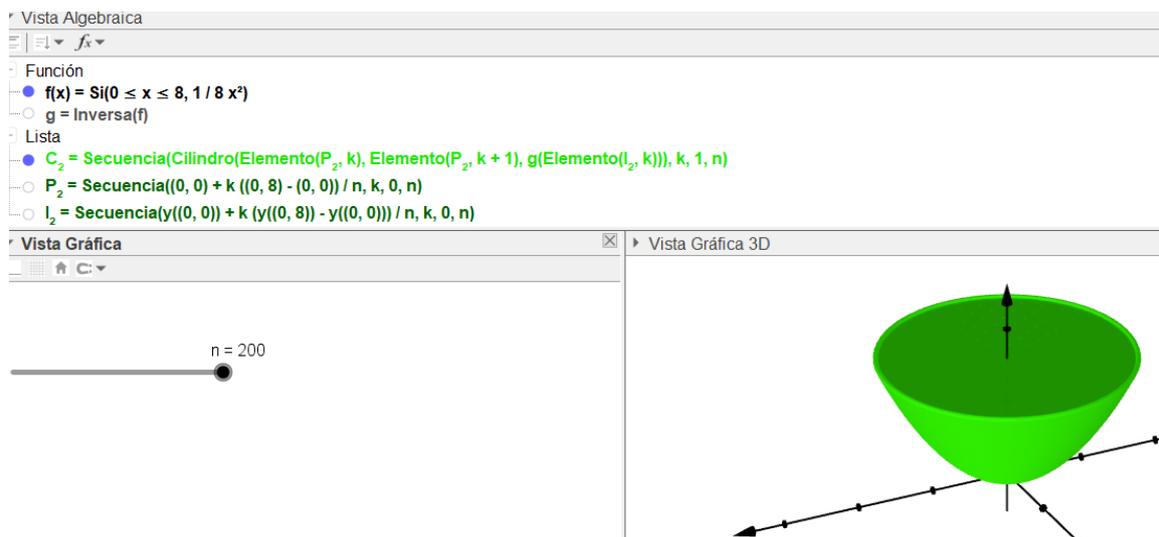


Figura 14: Eje de rotación: eje y.

Para obtener el valor de las sumas de los 200 discos se introduce en la entrada $S_2 = \text{Suma}(C_2)$ y para obtener el volumen exacto mediante (6) se ingresa en la vista CAS $V_2 = \text{Integral}(\pi(\sqrt{8x}, 0, 8))$ y se tiene la Figura 15, donde S_2 es el volumen aproximado por sumas de Riemann y V_2 es el volumen del sólido de revolución.

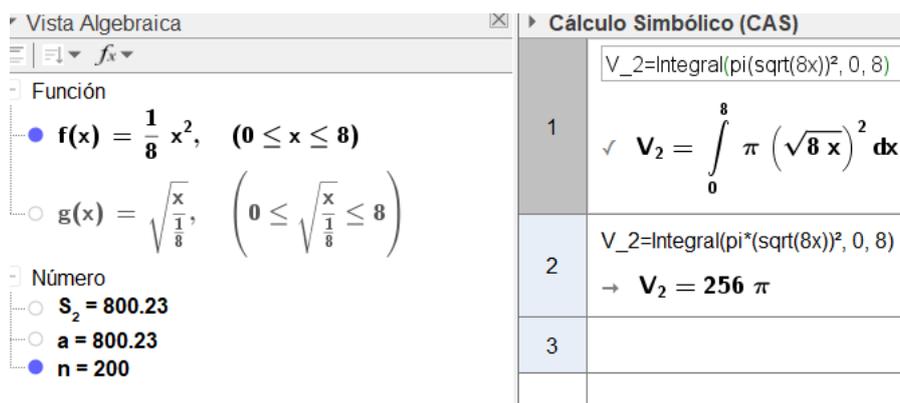


Figura 15: Volumen S_2 y V_2 .

4. Cálculo del volumen y diseño geométrico del método de las arandelas

Este método es una generalización del método de los discos por lo que usaremos la información de la sección 3. La idea es obtener las sumas de Riemann de cada función (ver Figura 10 para una función) respecto del eje de revolución. Para el valor numérico de las sumas de Riemann lo que se hace es una resta y para el volumen del sólido a través de la integral (7). Veamos un ejemplo para ilustrarlo.

Ejemplo 3

La región acotada por las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = -x + 3$, girada alrededor de la recta $y = 0$; genera un sólido de revolución definido en el intervalo $[-2, 1]$. Calcule su volumen a través de sumas de Riemann (para $n = 150$) y la integral definida.

Solución:

Ingresamos en la entrada las dos funciones definidas en el intervalo $[-2, 1]$, es decir, $f(x) = \text{función}(x^2 + 1, -2, 1)$ y $g(x) = \text{función}(-x + 3, -2, 1)$. Creamos un deslizador n que varíe de 1 a 150 con incremento 1 y escribimos los puntos $A = (-2, 0)$ y $B = (1, 0)$.

Las sumas de Riemann en la vista gráfica 2D (Figura 16) se obtienen ingresando en la entrada $S_1 = \text{SumaInferior}(f, -2, 1, n)$ y $S_2 = \text{SumaInferior}(g, -2, 1, n)$. Finalmente usamos (10), (11) y (12) para obtener e ingresar en la entrada las listas P_a , l_a , C_R y C_T :

$$P_a = \text{Secuencia}(A + k(B - A)/n, k, 0, n)$$

$$l_a = \text{Secuencia}(x(A) + k(x(B) - x(A))/n, k, 0, n)$$

$$C_R = \text{Secuencia}(\text{Cilindro}(\text{Elemento}(P_a, k), \text{Elemento}(P_a, k + 1), g(\text{Elemento}(l_a, k))), k, 1, n)$$

$$C_T = \text{Secuencia}(\text{Cilindro}(\text{Elemento}(P_a, k), \text{Elemento}(P_a, k + 1), f(\text{Elemento}(l_a, k))), k, 1, n)$$

donde C_R y C_T representan el conjunto de cilindros (vista 3D) bajo g y f respectivamente. La región verde entre f y g de la vista 2D genera el sólido verde de la vista 3D al rotarla respecto a la recta $y = 0$, asimismo la región azul al girarla alrededor de este eje representa el sólido interno color azul de la vista 3D, tal como se muestra en la Figura 16.

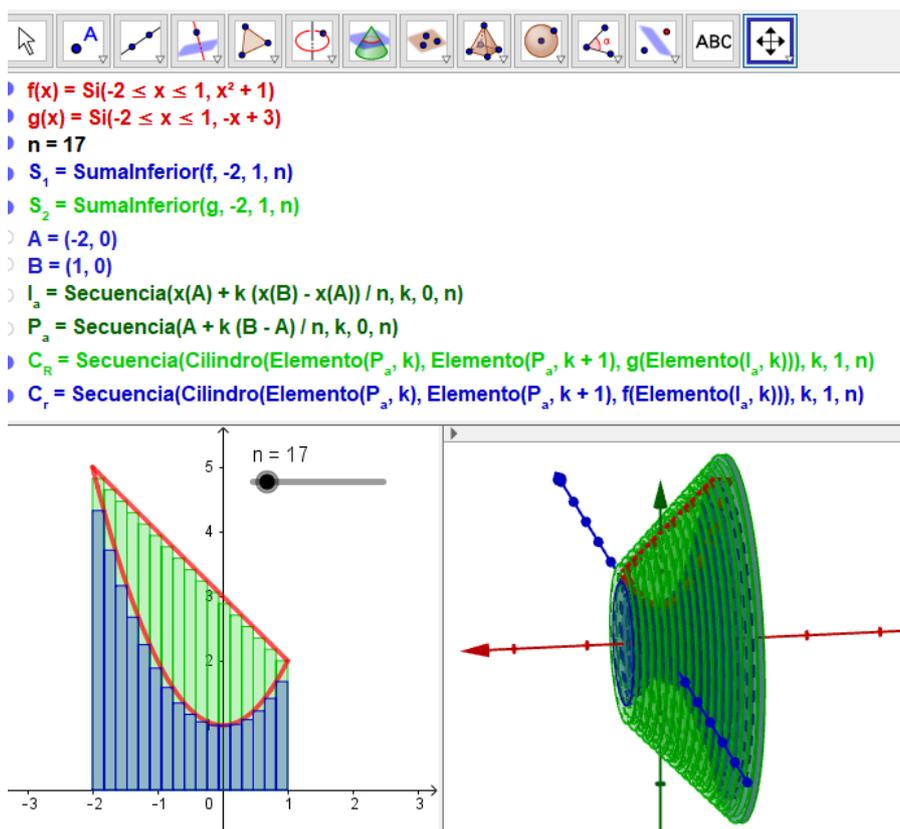


Figura 16: Sumas de Riemann geométricas en 2D y 3D.

Para obtener el volumen aproximado a través de las sumas, variamos n hasta 150 e ingresamos $S_a = \text{Suma}(C_R - C_T)$ en la entrada obteniendo este valor en la vista algebraica. El volumen del sólido de revolución mediante la integral (7) se obtiene escribiendo en la entrada de la vista CAS la siguiente sintaxis $V_a = \text{Integral}(\pi[(-x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2], -2, 1)$. Estos dos valores se ilustran en la Figura 17.

En la Figura 18 se muestra otro acabado del sólido revolución del Ejemplo 3 mediante un applet desarrollado en GeoGebra por (Vergara, 2020).

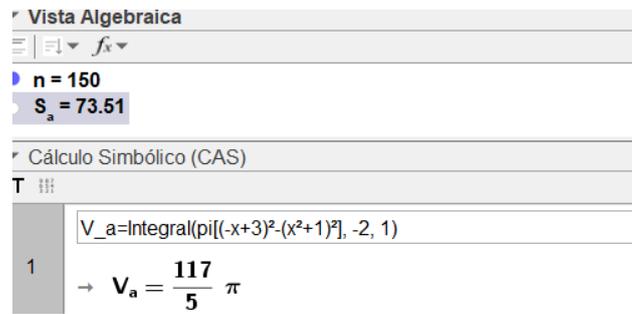


Figura 17: Volumen S_a y V_a .

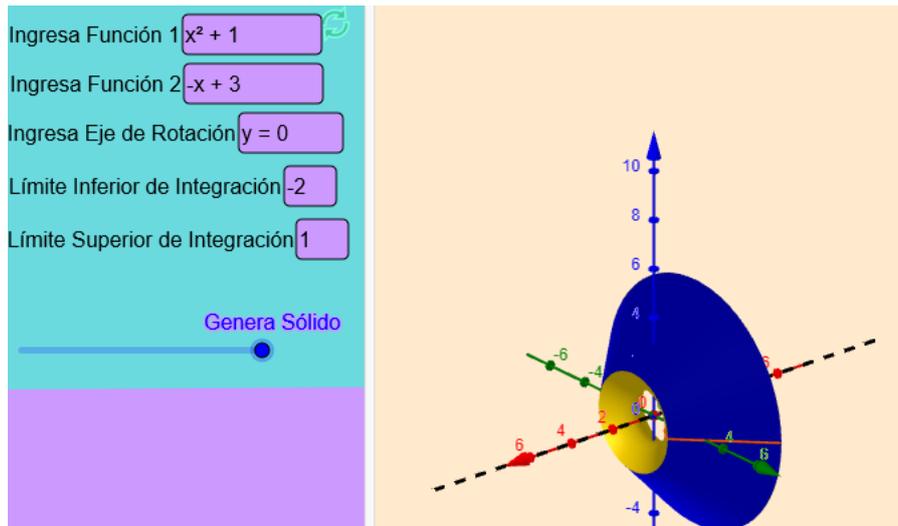


Figura 18: Sólido del Ejemplo 3.

5. Cálculo del volumen y diseño geométrico del método de las capas

El diseño geométrico de las capas cilíndricas requiere crear los deslizadores a , b y n como en la sección 3, luego se toma la lista l_1 (11) y se le añade un elemento. La distancia de este elemento a x_0 de P (10) es el radio de la primera capa cilíndrica del sólido de revolución y su valor depende del eje de revolución. Para los ejes de revolución de la forma $x = r$; r es el elemento a añadir. La lista con el nuevo elemento le llamaremos l_x , es decir, utilizaremos:

$$l_x = \text{Secuencia}(r, l_1) \tag{17}$$

$$l_y = \text{Secuencia}(f(a + k(b - a)/n), k, 0, n) \tag{18}$$

Esta última lista contiene los elementos de la coordenada y de los puntos $(x_n, f(x_n))$ que pertenecen a f y la lista l_x es la coordenada x de los puntos que pertenecen a P unido al elemento r .

Una vez registradas las listas l_x y l_y ingresamos esta última lista

$$C_c = \text{Secuencia}(\text{Cilindro}((\text{Elemento}(l_x, 1), 0), (\text{Elemento}(l_x, 1), \text{Elemento}(l_y, k))), r - (a + (k - 1)(b - a)/n)), k, 1, n), \tag{19}$$

C_c contiene los elementos (cilindros) que simulan las capas cilíndricas de un sólido de revolución.

A continuación, en cada uno de los ejemplos primero se realiza la representación gráfica y luego se calcula el volumen.

Ejemplo 4

Grafique y calcule el volumen V_c del sólido S que se genera al girar alrededor del eje y la región bajo la curva $f(x) = x(x - 1)^2$ en el intervalo $x \in [0, 1]$. Ejemplo tomado y adaptado de (Stewart, 2018, Ejercicio 1, p. 453).

Solución:

Girar una región R alrededor del eje y es equivalente a decir que la región gira alrededor de la recta $x = 0$ por lo que el elemento a añadir en l_1 (11) es el cero.

Una vez creados los deslizadores a , b y n ingresamos en la entrada la sintaxis $f(x) = \text{Si}(a \leq x \leq b, x(x - 1)^2)$, para $a = 0$, $b = 1$ y un valor de n conveniente, por ejemplo, $n = 15$; creamos los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (b, 0)$. Ahora ingresamos la lista $l_c = \text{Secuencia}(x(A) + k(x(B) - x(A))/n, k, 0, n)$ (ver (11)) y añadimos el cero mediante el comando **añade(;Objeto; ;Lista;)**, es decir, registramos en la entrada $l_{cx} = \text{añade}(0, l_c)$. Luego ingresamos las listas l_{cy} y Capas1 :

$$l_{cy} = \text{Secuencia}(f(a + k(b - a)/n), k, 0, n)$$

$$\text{Capas1} = \text{Secuencia}(\text{Cilindro}((\text{Elemento}(l_{cx}, 1), 0), (\text{Elemento}(l_{cx}, 1), \text{Elemento}(l_{cy}, k)), a + (k - 1)(b - a)/n), k, 1, n) \quad (20)$$

que se derivan de (18) y (19); Capas1 representa una aproximación del sólido S de la vista gráfica 3D donde el radio de cada capa cilíndrica concéntrica es $a + (k - 1)(b - a)/n$ (tercer argumento del comando cilindro anidado en la secuencia C_c).

La región R de la vista gráfica 2D se obtiene ingresando en entrada la sintaxis $R = \text{SumaInferior}(f, a, b, n)$. Estas dos representaciones se muestran en la Figura 19.

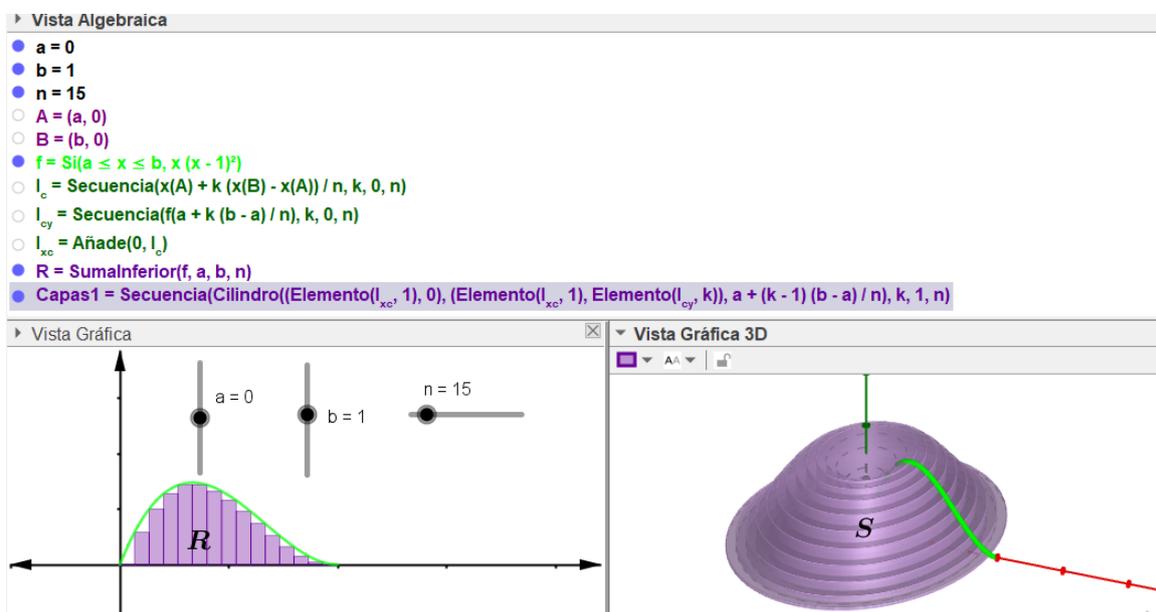


Figura 19: Capas cilíndricas 1.

Al incrementar el valor de n la región R (vista gráfica 2D) se aproxima cada vez más al área bajo la curva y al mismo tiempo la región S (vista gráfica 3D) toma la forma del sólido requerido.

El volumen del sólido S se obtiene utilizando (9). Considerando $f(x) = x(x - 1)^2$ como la altura, el radio x y los límites de integración $a = 0$ y $b = 1$ ingresamos en la vista CAS la sintaxis $V_c = \text{Integral}(2\pi x^2(x - 1)^2, a, b)$ y se tiene el volumen V_c de la Figura 20.

Cálculo Simbólico (CAS)
 T III
 1 $V_c = \text{Integral}(2 \pi x^2 (x-1)^2, a, b)$
 $\rightarrow V_c = \frac{1}{15} \pi$

Figura 20: Volumen V_c .**Ejemplo 5**

Graficar y encontrar el volumen del sólido formado por la revolución de la región acotada por la función $f(x) = 4 - x^2$ sobre el intervalo $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ alrededor de la recta $x = 3$.

Solución:

Partiendo del problema anterior, es decir, creados los deslizadores (ubicados en $a = -1.5$, $b = 1.5$ y $n = 100$), los puntos y la función del problema registramos las listas L_{xc} , L_{yc} y $Capas2$:

$$L_{xc} = \text{añade}(3, \text{Secuencia}(x(A) + k(x(B) - x(A))/n, k, 0, n)) \quad (21)$$

$$L_{yc} = \text{Secuencia}(f(a + k(b - a)/n), k, 0, n) \quad (22)$$

$$\text{Capas2} = \text{Secuencia}(\text{Cilindro}((\text{Elemento}(L_{xc}, 1), 0), (\text{Elemento}(L_{xc}, 1), \text{Elemento}(L_{yc}, k)), 3 - (a + (k - 1)(b - a)/n)), k, 1, n). \quad (23)$$

En la lista L_{xc} se ha añadido el elemento tres porque el eje de rotación es $x = 3$ y el radio de cada capa cilíndrica en la lista $Capas2$ es $3 - (a + (k - 1)(b - a)/n)$. Para calcular el volumen ingresamos en la vista CAS

$$V_{c2} = \text{Integral}(2\pi(3 - x)(4 - x^2), a, b)$$

cuyo valor es $117\pi/2$.

En la Figura 21 se muestran los resultados en las vistas CAS, 2D y 3D.

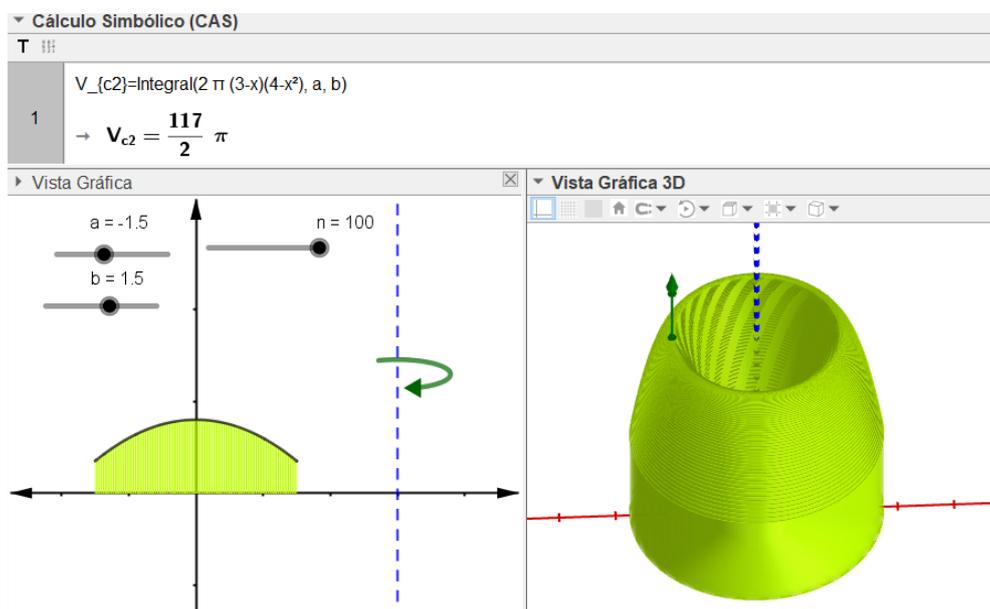


Figura 21: Vistas: CAS, 2D y 3D.

6. Limitaciones

En los Ejemplos 1 y 2 el valor de n (número de iteraciones, rectángulos y discos) no es muy alto y aún así el valor de las sumas de Riemann es aceptable con respecto al volumen exacto de los sólidos, pero en general podemos aumentar el valor de n hasta un valor no mayor de 500 para así asegurar un buen rendimiento del software de lo contrario se puede colgar o borrar parte la construcción. Otro dato muy importante con referencia al Ejemplo 2 es comprobar bajo un enfoque algebraico que la función tenga inversa ya que de no ser así GeoGebra no calcula nada y no deja comentarios del error.

El valor de las sumas de Riemann para el método de las capas cilíndricas requiere un tratamiento profundo; pues GeoGebra no crea capas cilíndricas ni discos huecos mediante un solo comando o herramienta y que a la vez nos otorgue el volumen por defecto lo que complica calcular de manera sencilla esta aproximación, aunque para fines didácticos se dejan dos ejemplos que simulan dinámicamente estas capas cilíndricas con el cálculo del volumen por definición. La obtención de más sólidos de revolución mediante capas cilíndricas es limitada especialmente cuando hay involucradas dos funciones o el eje de revolución es paralelo al eje x .

No obstante, estos sólidos y la aproximación del volumen se puede generar por los métodos de los discos y anillos.

7. Implicaciones

El método de cálculo del volumen mediante sumas finitas de Riemann con GeoGebra puede aplicarse para obtener el volumen aproximado de sólidos de revolución cuyos radios al cuadrado o la diferencia de estos no tienen primitiva. El estudio de este tipo de problemas da lugar a medir sólidos que surgen en el entorno porque este volumen en muchos casos no se puede obtener a través de la integral definida. El presente estudio proporciona posibles extensiones sobre el modelado dinámico de otras aplicaciones de la integral y el análisis numérico.

8. Conclusiones

Los tres métodos abordados en el cálculo del volumen y diseño del sólido de revolución en \mathbf{R}^3 están en conexión con las vistas 2D, algebraica y cálculo simbólico CAS. Esto aporta en la visualización y exploración de todas las propiedades y elementos matemáticos que componen al sólido desde una perspectiva gráfica, analítica y numérica.

Como los objetos gráficos, algebraicos y numéricos son dinámicos es posible generar más sólidos y nuevos volúmenes a través de la variación de los deslizadores a y b o cambiando las funciones y curvas que acotan la región que produce el sólido. Estos últimos cambios o acciones permiten observar en qué intervalo las funciones están definidas o son integrables.

Mediante la variación en aumento de la cantidad de las formas geométricas como son los rectángulos, discos, anillos y capas cilíndricas se puede analizar y comprender de manera intuitiva la idea de límite como el área bajo la curva o volumen de un sólido.

El valor del volumen por medio de las sumas de Riemann es obtenido a la vez que se suman las formas geométricas que modelan el sólido; esto permite pensar y entender la aplicación de las sumas de Riemann en dos y tres dimensiones.

Todas estas construcciones posibilitan modificar los radios, el eje de revolución, alturas y anchos de los elementos representativos cuyas medidas son aplicadas en el cálculo del volumen optimizando

procesos y facilitando de esta manera el análisis y síntesis de las definiciones dadas.

Las interacciones dinámicas sobre los objetos mejoran la capacidad creativa y experimental. Asimismo ofrecen oportunidades de descubrir patrones, relaciones y principios matemáticos, y la confirmación de resultados analíticos.

Adicionalmente se destaca el potencial que posee el comando *Secuencia* para incorporar patrones matemáticos y reproducirlos a objetos geométricos, simbólicos y numéricos. Los problemas tratados en secuencia promueven la incorporación de GeoGebra para el tratamiento de este tema, además potencian el pensamiento computacional o algorítmico para afrontar nuevos desafíos bajo su respaldo teórico. Esto sugiere su aplicación en la enseñanza y aprendizaje de sólidos de revolución y otras aplicaciones de la integral.

Las construcciones desarrolladas en este artículo y otras adicionales están disponibles en la web de recursos de GeoGebra, en las direcciones:

- <https://www.geogebra.org/m/mdcrjera>
- <https://www.geogebra.org/m/hzufkbnv>
- <https://www.geogebra.org/m/prbeqzkd>
- <https://www.geogebra.org/m/gvnsemyy>

9. Bibliografía

- [1] Bartle, R. y Sherbert, D. (2011). *Introduction to real analysis*. México, D.F: Jhon Wiley & Sons, Inc.
- [2] Bruce, E. y Larson, R. (2010). *Cálculo 1 de una variable*. México, D.F: McGraw-Hill/Interamericana.
- [3] Brzenzinski, T. [Brzezinski Math] (marzo 2021). *How to Build Surfaces with Specific Cross Sections in GeoGebra 3D*. [Archivo de Video]. Youtube. <https://youtu.be/Nr-Stsd-01o>
- [4] Carrillo, A. (2012). *El dinamismo de GeoGebra*. Revista Unión: Revista Iberoamericana de Educación matemática, 29: 9-22.
- [5] Dantas, S. [O Geogebra] (20 de noviembre de 2015). *Formas de revolução a partir de polígonos*. [Archivo de Video]. Youtube. <https://youtu.be/Apd-xOo-jQs>
- [6] Dantas, S. y Vieira, C. (2017). *Formas de revolução e cálculo de volume*. Revista : Centro de Ciências Naturais, 39(1): 142-155. <https://doi.org/10.5902/2179460X24428>
- [7] Del Río, L. (2016). *Enseñar y aprender cálculo con ayuda de la vista gráfica 3D de GeoGebra*. Revista Digital: matemática, Educación e Internet, 17(1): 1-13.
- [8] Edwards, C. y Penney, D. (1997). *Cálculo Diferencial e Integral*. México, C.P:Prentice-Hall.
- [9] Hohenwarter, M. (2014). *Multiple representations and GeoGebra-based learning environments*. Revista Unión: Revista Iberoamericana de Educación matemática, 39: 8-11.
- [10] Juandi, D. y Priatna, N. (2018). *Discovery learning model with geogebra assisted for improvement mathematical visual thinking ability*. Revista : Journal of Physics: Conference Series, 1013:012209. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1013/1/012209>

- [11] León, J., Sánchez, L. y Córdova, R. (2018). *Sólidos de revolución haciendo uso de la vista gráfica 3D del GeoGebra*. Revista : Acta Latinoamericana de matemática Educativa, 31(2): 1827-1823.
- [12] Lupiáñez, J. y Moreno, L. (2001). *Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas*. <https://www.researchgate.net/publication/277819206>
- [13] Molina, M. y Montecino, A. (2011). *La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano*. XIII Conferencia Interamericana de Educación matemática; Recife, Brasil: Comité Interamericano de Educación matemática.
- [14] Molina, M. y Montecino, A. (2013). *Conversión de registros en el cálculo integral: la problemática de los sólidos de revolución*. Revista : Acta Latinoamericana de matemática Educativa, 26:473-9.
- [15] Pizzorno, S y Montiel, G. (2021). *Ambientes Virtuales de Aprendizaje contruidos socialmente con Herramientas de Autor de GeoGebra*. Revista: Innovaciones Educativas, 23(34): 213-227.
- [16] Smith, R. & Minton, R. (2012). *Calculus*. New York,: The McGraw-Hill Companies.
- [17] Stewart, J. (2018). *Cálculo. Trascendentes tempranas*. México, D.R: Cengage Learning Editores.
- [18] Thomas, G. (2010). *Cálculo una variable*. México, D.R: Pearson Education-Addison-Wesley.
- [19] Vergara, J. (21 de noviembre de 2020). [GeoGebra] *Construcción de sólidos de revolución con GeoGebra*. Recuperado el 2 de abril de 2021 de <https://www.geogebra.org/m/jxkmyeax>
- [20] Vergara, J. (2021). *Sólidos de revolución con GeoGebra*. Revista digital Matemática, Educación e Internet, 22(1). https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/Secciones/Didactica_y_Software/RevistaDigital.V22_n1_2021_JVergara/
- [21] Villa, M. y Báez, J. (2018). *Aplicación para la representación de sólidos de revolución*. Proyecto: Universidad de las Fuerzas Armadas del Ecuador.
- [22] Zaragoza, G., López, S. y Díaz, R. (2006). *Construyendo modelos didácticos virtuales de sólidos de revolución utilizando SolRev*. Revista Académica : Ingeniería, 10(3): 53-59.
- [23] Zill, D. y Wright, W (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas*. México, D.F: McGraw-Hill/Interamericana editores.