



Revista digital

Matemática, Educación e Internet

(<http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/>).

Vol 14, No 1. Setiembre – Febrero 2014.

Artículo de sección

ISSN 1659 -0643

Georg Cantor (1845-1918): la locura del infinito o el infinito de la locura

Vernor Arguedas

vernor.arguedas@ucr.ac.cr

Escuela de Matemática

Universidad de Costa Rica

Resumen. Georg Cantor es uno de los más distinguidos matemáticos de mediados del siglo XIX y comienzos del XX, en este artículo tocamos algunos aspectos de su vida y su quehacer matemático.

Palabras clave: Cantor, teoría de conjuntos, infinito, números transfinitos.

Abstract. Georg Cantor is one of the most distinguished mathematicians of the mid-nineteenth century and early twentieth century. This article refers to some aspects of his life and his mathematical work.

KeyWords: Cantor, set theory, infinite, transfinite numbers.

"In re mathematica ars proponendi pluris facienda est quam solvendi"
(En matemática preguntar bien es más importante que resolver problemas).

G. Cantor.

Sobre Cantor se ha escrito muchísimo, es una figura central en el desarrollo de las matemáticas del siglo XIX y comienzo del XX. Sin duda uno de los más grandes matemáticos de la historia.

Como Ramanujan, Cantor decía que Dios le hablaba, recordemos que en caso de Ramanujan la Diosa Namakkal le hablaba en sueños. Tal vez por eso se sentía obligado a hacer una matemática para la teología o una teología para la matemática ([3]).



Cantor, 1917.
Un poco antes de su muerte.

Cantor como Cusa, Galileo o Grassmann trataron de entender lo que para muchos, matemáticos incluidos, se escapa de nuestra capacidad de comprensión: el concepto de infinito. Un análisis ligero de este gran personaje en video se encuentra en VIMEO: "Dangerous Knowledge" ([4]) con subtítulos en castellano. Los primeros 30 minutos se dedican a Cantor y el resto a Boltzmann. Aparecen en el video entre otros: Dauben y Chaitin. La página oficial de Gregory Chaitin es: <http://www.umcs.maine.edu/~chaitin/>.

La lectura de un texto fundamental de Cantor : "Fundamentos para una Teoría General de Conjuntos. Una Investigación Matemática-Filosófica sobre la Teoría del Infinito", 1882; se puede consultar en la dirección [15]

Este libro le permite al lector o lectora seguir el proceso inventivo del autor, los dilemas, las divagaciones, los aspectos religiosos. Dedicar el libro a matemáticos y filósofos, siempre y cuando los filósofos entiendan los conceptos involucrados y los matemáticos los aspectos filosóficos.

Cantor debe presentar conceptos nuevos: infinito impropio, infinito propio, potencia de un conjunto, conjunto bien ordenado, números de la primera clase, números de la segunda clase o tercera y así sucesivamente., números transfinitos. Descubre que hay varios infinitos y lo extraordinario es que puede manipularlos.



Cantor at Halle university,
1894

La discusión sobre el concepto de continuo le toma varias páginas y recurre a sus vastos conocimientos de historia y sobre todo a los problemas que enfrentó cuando estudiaba series trigonométricas y la convergencia puntual de ellas. Creo que en estos estudios está parte de la génesis del pensamiento cantoriano. Para algunos, dice él, el concepto de continuo es un dogma religioso. Califica como errónea la definición de continuo de Bolzano, dando ejemplos de esta afirmación; el concepto de conjunto conexo aparece en el artículo, posiblemente por primera vez, si algún paciente lector o lectora tiene referencias al respecto en otro sentido, les agradecería la información.

Una nota sobre Bolzano. Matemático y filósofo checo (1781-1848), también fue sacerdote católico. Nació en Praga y se ordenó sacerdote en 1805; ese año fue designado profesor de filosofía de la religión en la Universidad de Praga. Apartado de su cargo por su pensamiento liberal, continuó publicando obras tan importantes como "Teoría de la ciencia" (1837) y "Paradojas del infinito" (1851). Su trabajo sirvió de base e influyó en el desarrollo de la teoría de conjuntos de Georg Cantor en matemáticas y en el desarrollo de la fenomenología de Edmund Husserl en filosofía.

En Wikipedia hay una biografía de este matemático: [6]. La versión en inglés tiene más información, [7].

Zermelo (1871–1953) editó las obras completas matemáticas y filosóficas de Cantor que se pueden leer en [8]. Este material fue digitalizado por la Universidad de Göttingen, contiene el intercambio de las cartas de entre Cantor y Dedekind y una biografía que escribe Fraenkel. No podemos dejar pasar el hecho de que la teoría desarrollada por Cantor requería algunos grados de formalización, cosa que hicieron entre otros precisamente Zermelo y Fraenkel en donde se precisan de manera axiomática las ideas que de manera intuitiva manejaba Cantor y se agrega el axioma de escogencia.

La teoría intuitiva de conjuntos plantea paradojas no resolubles, como la famosa sobre el conjunto de todos los conjuntos (Bertrand Russell 1901 y posiblemente antes Zermelo). Los lógicos de la época de Zermelo desarrollaron los lenguajes de primer orden y de esa manera obtuvieron modelos para los conceptos intuitivos. En http://es.wikipedia.org/wiki/Axiomas_de_Zermelo-Fraenkel se pueden leer los axiomas de Zermelo-Fraenkel.

En su niñez y juventud Cantor quería dedicarse a la música, pero el susurro divino le indicó otro camino, algunos creen que fue el camino a la locura, él siempre estuvo convencido de que estos susurros abrían la llave para la comprensión de lo Divino, el gran infinito, el infinito absoluto, desafortunadamente no se puede plantear de manera satisfactoria este concepto dentro de la teoría intuitiva de conjuntos.

Como matemático estudió y publicó sobre muchos temas: Teoría de números y álgebra, teoría de funciones (análisis complejo), teoría de conjuntos, historia de la matemática, filosofía del infinito.

Cantor varias veces se refirió a él mismo. En una carta escrita por Georg Cantor a Paul Tannery en 1896, Cantor afirma que sus abuelos paternos eran miembros de la comunidad judía sefardí de Copenhague. Específicamente, Cantor afirma en la descripción de su padre: "Er ist aber in Kopenhagen geboren, von israelitischen Eltern, die der dortigen portugisischen Judengemeinde ..."

"El nació en Copenhague de padres israelitas, provenientes de la comunidad portuguesa judía."

Además, el tío abuelo materno de Cantor, el violinista húngaro Josef Boehm (famoso violinista, colaborador de Beethoven), ha sido descrito como judío, lo que puede implicar que la madre de Cantor fue al menos en parte descendiente de la comunidad judía húngara.

En una carta a Bertrand Russell, Cantor describió su ascendencia y su autopercepción de la siguiente manera:

Mi padre y mi madre no tenían sangre alemana. Mi padre era danés de Copenhague y mi madre provenía de húngaros radicados en Austria. Usted debe saber señor, que yo no soy alemán, nací el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo, capital de Rusia, con once años de edad, en 1865, todos juntos nos fuimos para Alemania.

Adolf Fraenkel, en su biografía de Cantor, distingue 5 grandes temas:

1. Periodo del desarrollo (1845-1871)
2. Periodo de gran creación (1871-1884)
3. Periodo de productividad disminuida (1884-1897)
4. Periodo de la vejez y el reconocimiento.
5. Cantor como maestro y personaje.

Una de las mejores biografías de Cantor la escribió Dauben: "Georg Cantor His Mathematicy and Philosophy of the Infinite", Princeton University Press, 1979. Se puede leer en [9].

Cantor mantuvo una correspondencia con mucha gente, entre otros Dedekind, Gösta Mittag-Leffler y algunos teólogos. Al Papa Leon XIII le envió algunas de sus disquisiciones, Dauben escribió un artículo al respecto que se puede bajar de la dirección [9]

Como es frecuente Cantor tuvo detractores, entre ellos matemáticos, filósofos y teólogos que no compartían sus puntos de vista.

Kronecker y Poincaré usaron epítetos groseros para referirse a la aparición de los números transfinitos, cuya existencia no podían aceptar.

Me voy a permitir citar un artículo excelente sobre el tema de la profesora María Cristina Solache Galera: "La Controversia entre L. Kronecker y G. Cantor acerca del Infinito", 1995 ([10]).

Escribe en el prefacio del artículo:

En este artículo se expone la Controversia del Infinito suscitada entre L. Kronecker y G. Cantor. El infinito perturbó a la Grecia Antigua que intentó someterlo a la intuición natural: el ápeiron de Pitágoras y Platón, las aporías de Zenón y las antinomias de Demócrito y Aristóteles. Rechazado por Galileo. De carácter pluralista y mensurable para Leibniz. Soporte del Análisis Infinitesimal de Newton en tiempos de la Ilustración. Desvanecedor de todo finitismo en el materialismo de Spinoza. Idea central del idealismo trascendental de Kant, Fichte, Hegel y Schelling en época de revoluciones. Tema de Bolzano en sus paradojas del infinito. "Repugna el sentido común" según Du Bois-Reymond fundador de la moderna Electrofisiología. Cuestionado exhaustivamente en el siglo de las tecnologías por Klein, Poincaré, Gödel y Cohen. Fervientemente defendido por Hilbert y Russell. La polémica ha recogido argumentos matemáticos, lógicos, metafísicos y teológicos, pero ninguno tan envuelto en un denso fanatismo como el de L. Kronecker. A todo ello, Cantor especificó exactamente lo que se debe hacer para definir el infinito.

Cantor le tenía un profundo respeto y amistad con Dedekind. En 1877 le envía una carta a Dedekind en alemán, este se atrasa en contestarle unos días y de nuevo le escribe Cantor esta vez en francés pidiéndole que necesita el criterio de Dedekind sobre la validez de los resultados. "Mientras Usted no lo apruebe, no me queda más que decir lo veo pero no lo creo".

Cantor se obsesionó con la hipótesis del continuo (el primero de los 23 problemas de Hilbert) y varias veces proclamó que la había resuelto para luego encontrar algún error, esto sucedió de manera recurrente de 1882 hasta el final de su vida y lo llevó al rompimiento con Mittag-Leffler cuando este le rechazó un artículo para la revista Acta Mathematica en 1885.

La nota de Mittag-Leffler dice así:

I am convinced that the publication of your new work, before you have been able to explain new positive results, will greatly damage your reputation among mathematicians. I know very well that basically this is all the same to you. But if once your theory is discredited in this way it will be a long time before it will again command the attention of the mathematical world. It may well be that you and your theory will never be given the justice you deserve in our lifetime. Then the theory will be rediscovered in a hundred years or so by someone else, and then it will subsequently be found that you already had it all. Then, at least, you will be given justice. But in this way (i.e. by publishing the article) you will exercise no significant influence, which you naturally desire as does everyone who carries out scientific research.

El texto anterior fue publicado por Kareem Carr en [11].

En 1884 Cantor sufre un gran ataque depresivo y termina internado en un manicomio. Había pasado dos intensos años tratando de resolver la hipótesis del continuo. Después de este episodio él solicita a la Universidad de Halles que le permitan enseñar filosofía en vez de matemáticas.

Los episodios depresivos de Cantor aumentaron después de la muerte de su hijo menor Rudolph (1886-1899) de quien se dice que tenía grandes aptitudes musicales.

El matemático argentino Gustavo Piñero mantiene un interesante blog divulgativo hecho con rigor y claridad, [12].

Dedica 19 secciones a la teoría de Cantor la primera es [13]

y escribe esto:

La teoría de los transfinitos de Georg Cantor involucra principalmente dos conceptos: la noción de *cardinal de un conjunto* y la noción de *ordinal de un conjunto*. De estas dos nociones, la de los cardinales es la más conocida; los legendarios $\aleph_0$, $\aleph_1$,... son cardinales y es también dentro del contexto de los cardinales que se enuncia la famosa "Hipótesis del Continuo". Los ordinales, por el contrario, han sido tal vez menos difundidos y es probable que muchos de quienes conocen la existencia de los famosos aleph casi no hayan oído hablar, por ejemplo, del Omegón, el primer ordinal no numerable.

En la parte 11 de sus notas ([14]) destaco lo siguiente:

La idea básica de los cardinales es generalizar la noción de "cantidad de elementos de un conjunto". La primera observación es que dos conjuntos finitos tienen la misma cantidad de elementos si y sólo si es posible emparejar cada elemento de uno de los conjuntos con exactamente uno de los elementos del otro. Por ejemplo, si en un gran salón cada persona está sentada en una silla de modo que nadie está parado ni hay sillas vacías, entonces podemos asegurar que hay la misma cantidad de personas que de sillas.

Generalizando esta idea, si A y B son dos conjuntos (que ahora pueden ser infinitos) diremos que A y B tienen el mismo cardinal (o que son coordinables, Cantor decía: tienen la misma potencia) si existe una función biyectiva $f : A \rightarrow B$. Esta función biyectiva es la que empareja cada elemento de A con un elemento de B .

Cantor creía que el cardinal de $\mathbb{R}$ es $\aleph_1$ y que no existe un conjunto cuyo cardinal esté estrictamente ubicado entre el de $\mathbb{N}$ y el de $\mathbb{R}$. A esta conjetura se la suele llamar la "Hipótesis del Continuo" (HC) y Cantor pasó muchos años de su vida intentando demostrarla, aunque sin éxito.

El concepto de infinito es muy complejo como lo hemos visto en esta nota y lo planteamos en el artículo sobre Cusa ([1])

David Hilbert escribe:

Sin embargo, por sí solo el análisis resulta insuficiente para proporcionarnos una visión de la más profunda esencia del infinito. Esta visión la encontramos más bien en la teoría de conjuntos de Georg Cantor, una disciplina más cercana a un enfoque filosófico general que ubica todo el complejo de problemas relativo al infinito en una nueva perspectiva. Lo que aquí nos importa de ella es precisamente aquello que en verdad constituye su núcleo fundamental, esto es, LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS TRANSFINITOS. En mi opinión, el sistema de Cantor constituye no sólo la flor más admirable que

el espíritu matemático ha producido, sino igualmente uno de los logros más elevados de la actividad intelectual humana en general.

Esta carta ([2]) de Cantor a Hermite (de 1895) es muy esclarecedora de la mezcla de matemática con teología

Dice usted (Hermite) muy bellamente en su carta del 27 de Nov.: " Los números (enteros) me parecen constituir un mundo de realidades que existen más allá de nosotros con el mismo carácter de absoluta necesidad que las realidades de la naturaleza, cuyo conocimiento nos es dado por los sentidos, etc". Permitame, sin embargo, el comentario de que en mi opinión la realidad y absoluta legalidad de los números enteros es MUCHO MAYOR que la del mundo sensorial. Y el que así sea, tiene una única y muy simple razón, a saber, que los números enteros existen en el grado sumo de realidad, tanto separados como en su totalidad actualmente infinita, en la forma de ideas eternas in intellectu Divino"



Lápida mortuaria de Cantor.
Giebichenstein cemetery, Halle.

Cantor nos abrió un camino sobre el cual cabalgamos, de los sistemas más simples surgen cosas extremadamente complejas. La intuición no basta, posiblemente hubiera sido un gran músico, por suerte los rumores divinos lo llevaron a la matemática.

Bibliografía

- [1] V. Arguedas. "Nicolás de Cusa. La coincidencia de los opuestos" http://www.tecdigital.itcr.ac.cr/revistamatematica/Secciones/Historia/RevistaDigital_Arguedas_V13_n1_2012/RevistaDigital_Arguedas_V13_n1_2012.pdf
- [2] José Ferreirós. "Matemáticas y platonismo(s)". La Gaceta de la Real Sociedad Española de Matemáticas 2 (1999), 446-473.
- [3] V. Arguedas. "Ramanujan o él extasis de la intuición". <http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/HistoriaMatematica/Ramanujan/Ramanujan.html>
- [4] "Dangerous Knowledge". <http://vimeo.com/30482156>
- [5] Georg Cantor *"Teoría General de Conjuntos. Una Investigación Matemática-Filosófica sobre la Teoría del Infinito"*. 1882 <http://es.scribd.com/doc/38135632/12/GEORG-CANTOR>
- [6] http://es.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor
- [7] http://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor
- [8] E. Zermelo *"Cantor Gesammelte Werke"*. <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN237853094&IDDOC=49439>
- [9] Dauben "George Cantor and Pope Leo XIII". Mathematics, Theology and the Infinite, Journal of the History of Ideas. Vol. 38, No. 1, Jan.-Mar., 1977. <http://www.jstor.org/discover/10.2307/2708842?uid=2&uid=4&sid=21102522107097>
- [10] María C. Solaeche. "La Controversia entre L. Kronecker y G. Cantor acerca del Infinito" (1995). <http://www.emis.de/journals/DM/v3/art6.pdf>
- [11] Kareem Carr. <http://blogs.ams.org/mathgradblog/2010/12/12/mittag-leffler-to-cantor/>
- [12] G. Piñeiro. "El Topo lógico" [Blog]. <http://eltopologico.blogspot.com/>
- [13] G. Piñeiro "El Omegón y todo eso...(Parte 1)". En "El Topo lógico" [Blog]. <http://eltopologico.blogspot.com/2007/11/el-omegn-y-todo-eso-parte-1.html>

- [14] G. Piñeiro "El Omegón y todo eso...(Parte 11)". En "El Topo lógico" [Blog]. <http://eltopologico.blogspot.com/2008/08/el-omegn-y-todo-eso-parte-11.html>
- [15] Scribd. "Georg Cantor". <http://es.scribd.com/doc/38135632/12/GEORG-CANTOR>