Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 11, Nº 2. Enero – Agosto 2011.

Los porismas de Euclides, un viaje a lo desconocido.

Vernor Arguedas T.
vernor.arguedas@ucr.ac.cr
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

Palabras claves: porismas, teoremas, lemas, Euclides, Pappus, geometría proyectiva.

Volvemos sobre el tema de esa figura mítica de la historia de la humanidad: Euclides. Muchos de sus obras se perdieron y tenemos referencias a las mismas por otros autores. Los 3 libros que contenían los porismas de Euclides se conocen por autores como: Pappus de Alejandría `http://es.wikipedia.org/wiki/Pappus_de_Alejandr%C3%ADa`. En "El Tesoro del Análisis" o "El Arte de resolver problemas" , Pappus retoma la idea de porisma de Euclides. Esta obra también se perdió salvo algunas versiones recopiladas por los matemáticos persas y árabes. Otras referencias de Pappus se encuentran en `http://www.xtec.es/~jdomen28/biografiapappus.htm` O bien por Proclus o Proclo quien también nos remite a esa parte de la obra de Euclides.

¿Qué es un porisma? Hay una cierta discrepancia sobre el significado de la palabra porisma. Un uso frecuente de porisma viene dada por la frase en griego: εἰς πορισμὸναὐτο υτο υπροτεινομένου que el traductor de Google traduce como: "ilícito en esta propuesta". πορισμὸν porisma se traduce como "ilícito, algo no permitido".

Pappus no usa es significado sino la expresión τὸλε ιπονὑποθέσειτοπικο υθεωρήματος que gracias a la traducción automática podemos entender como: "aquellos resultados que no se encuentran en los teoremas", e incluye dos significados:

a. Un corolario no buscado.

b. Un resultado que no agrega nada significativo. Podemos extender la definición de porisma a:

c. Una afirmación que puede ser falsa o verdadera y cuya validez o invalidez se obtiene por medio de ejemplos. Por ejemplo la afirmación: "todos los números enteros son divisibles por 3 es un porisma en este sentido."

A veces en nuestras clases decimos o escribimos cosas como: "demuestre que el siguiente resultado es válido o falso. Esa sería la redacción típica de un porisma." Otro ejemplo cotidiano es el siguiente: ¿en que casos es la siguiente expresión válida? O bien: ¿en que casos es la siguiente expresión falsa?

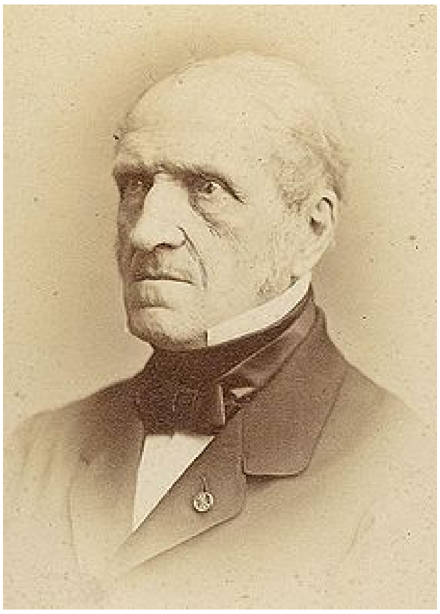
Para otros autores, como Chasles (1793-1880), un porisma era una proposición en la que se anuncia la posibilidad de determinar ciertas cosas –y se hallan efectivamente– que tienen cierta relación con otras fijas y conocidas y con otras variables indeterminadas, estableciéndose una ley de variación, quizá una ligera aproximación al concepto de función en la Grecia clásica.

Para otros autores , la doctrina de los porismas de Euclides sería una aproximación helénica a un cierto tipo de incipiente Geometría Analítica y proyectiva donde el discurso retórico equivaldría al simbolismo y la construcción geométrica a las técnicas algebraicas.

¿Geometría no Euclídea en Euclides?. No lo sabemos, pero no se puede descartar que algún manuscrito aparezca y nos de luz sobre estos elementos, como sucedió con Arquímedes y el palimpsesto, como narramos en "El Palimpsesto de Arquímedes".

En latín porisma significa deducción.

El gran geómetra francés Michel Chasles (`http://es.wikipedia.org/wiki/Michel_Chasles`) escribió: M. Chasles. *Les trois livres de Porismes d'Euclide*. Paris 1860. La versión digitalizada de este libro se puede consultar en `http://www.archive.org/details/lestroislivresde00eucl`. M. Chasles es uno de los fundadores de la geometría proyectiva moderna, también es muy conocido por la extraordinaria estafa de la cual fue objeto.



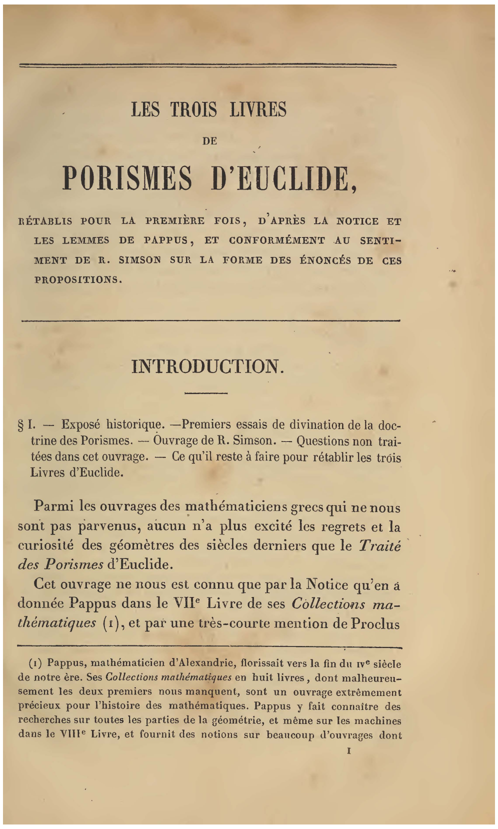
Cito:

> Michel Chasles, miembro de la Academia de Ciencias desde 1851, era un reputado matemático, sobre todo en el campo de la geometría, y un apasionado de la historia de las matemáticas. Su pasión por la historia le llevó a conocer a Vrain-Denis Lucas que le ofreció una espectacular colección de cartas y escritos varios de Pascal, Newton, Cleopatra, Julio César, Aristóteles, Alejandro Magno, Lázaro (el resucitado), María Magdalena ... . La colección estaba formada por más de 27.000 documentos y el matemático pagó 140.000 francos de la época (una fortuna). Por ingenuidad, por su amor a la patria (según las cartas toda la cultura giraba en torno a Francia), por imposibilidad de leerlas todas, por el tipo de letra ..., el caso es que Vrain-Denis Lucas (falsificador profesional) se la coló. El pobre Michel, orgulloso de su descubrimiento y de su patria, los presentó en la Academia de Ciencias? Todavía se deben estar riendo. En febrero de 1870, el Tribunal Correccional de París condenó a Vrain-Lucas a dos años de cárcel, una multa de 500 francos y el pago de todas las costas. *Fuentes: Claudi Alsina. "El club de la hipotenusa" y* *`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PrintHT/Forgery_1.html`*

Prof. Claudi Alsina

El falsificador Vrain-Denis Lucas tiene un lugar en `http://en.wikipedia.org/wiki/Denis_Vrain-Lucas`.
El libro del profesor Alsina está en libros de Google en: `http://books.google.com/books?id=2cwMTxLbE_AC&printsec=frontcover&dq=El+club+de+la+hipotenusa`

Dos páginas del libro de Chasles:



LES TROIS LIVRES

DE

PORISMES D'EUCLIDE,

RÉTABLIS POUR LA PREMIÈRE FOIS, D'APRÈS LA NOTICE ET LES LEMMES DE PAPPUS, ET CONFORMÉMENT AU SENTIMENT DE R. SIMSON SUR LA FORME DES ÉNONCÉS DE CES PROPOSITIONS.

INTRODUCTION.

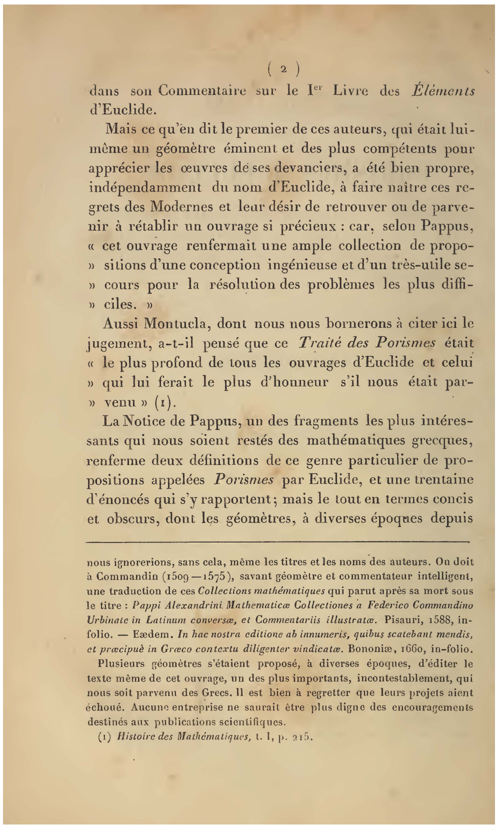
§ I. — Exposé historique. —Premiers essais de divination de la doctrine des Porismes. — Ouvrage de R. Simson. — Questions non traitées dans cet ouvrage. — Ce qu'il reste à faire pour rétablir les trois Livres d'Euclide.

Parmi les ouvrages des mathématiciens grecs qui ne nous sont pas parvenus, aucun n'a plus excité les regrets et la curiosité des géomètres des siècles derniers que le *Traité des Porismes* d'Euclide.

Cet ouvrage ne nous est connu que par la Notice qu'en a donnée Pappus dans le VII^{e} Livre de ses *Collections mathématiques* (1), et par une très-courte mention de Proclus

(1) Pappus, mathématicien d'Alexandrie, florissait vers la fin du IV^{e} siècle de notre ère. Ses *Collections mathématiques* en huit livres, dont malheureusement les deux premiers nous manquent, sont un ouvrage extrêmement précieux pour l'histoire des mathématiques. Pappus y fait connaître des recherches sur toutes les parties de la géométrie, et même sur les machines dans le VIII^{e} Livre, et fournit des notions sur beaucoup d'ouvrages dont

I



(2)

dans son Commentaire sur le I^{er} Livre des *Éléments* d'Euclide.

Mais ce qu'en dit le premier de ces auteurs, qui était lui-même un géomètre éminent et des plus compétents pour apprécier les œuvres de ses devanciers, a été bien propre, indépendamment du nom d'Euclide, à faire naître ces regrets des Modernes et leur désir de retrouver ou de parvenir à rétablir un ouvrage si précieux : car, selon Pappus, « cet ouvrage renfermait une ample collection de propositions d'une conception ingénieuse et d'un très-utile secours pour la résolution des problèmes les plus difficiles. »

Aussi Montucla, dont nous nous bornerons à citer ici le jugement, a-t-il pensé que ce *Traité des Porismes* était « le plus profond de tous les ouvrages d'Euclide et celui qui lui ferait le plus d'honneur s'il nous était parvenu » (1).

La Notice de Pappus, un des fragments les plus intéressants qui nous soient restés des mathématiques grecques, renferme deux définitions de ce genre particulier de propositions appelées *Porismes* par Euclide, et une trentaine d'énoncés qui s'y rapportent; mais le tout en termes concis et obscurs, dont les géomètres, à diverses époques depuis

nous ignorerions, sans cela, même les titres et les noms des auteurs. On doit à Commandin (1509—1575), savant géomètre et commentateur intelligent, une traduction de ces *Collections mathématiques* qui parut après sa mort sous le titre : *Pappi Alexandrini Mathematicæ Collectiones a Federico Commandino Urbinate in Latinum conversæ, et Commentariis illustratæ.* Pisauri, 1588, in-folio. — Eædem. *In hac nostra editione ab innumeris, quibus scatebant mendis, et præcipuè in Græco contextu diligenter vindicatæ.* Bononiæ, 1660, in-folio.

Plusieurs géomètres s'étaient proposé, à diverses époques, d'éditer le texte même de cet ouvrage, un des plus importants, incontestablement, qui nous soit parvenu des Grecs. Il est bien à regretter que leurs projets aient échoué. Aucune entreprise ne saurait être plus digne des encouragements destinés aux publications scientifiques.

(1) *Histoire des Mathématiques*, t. I, p. 215.

El matemático escocés Robert Simson (1687-1768) también se ocupó del tema que estamos tratando en `http://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Simson`, hay algunas referencias biográficas, desafortunadamente no existe la página en castellano. En 1723 se publicó su trabajo en "Philosophical Transactions" sobre 3 proposiciones de Pappus sobre porismas euclídeos, posteriormente de manera póstuma se publica: *"De porismatibus traclatus; quo doctrinam porisrnatum satis explicatam, et in posterum ab oblivion tutam fore sperat auctor Roberti Simson opera quaedam reliqua"*, (Glasgow, 1776).

> La definición de porisma que da Simson es la siguiente: "Porisma est propositio in qua proponitur demonstrate rem aliquam vel plures Batas ease, cui vel quibus, ut et cuilibet ex rebus innumeris non quidem datis, sed quae ad ea quae data sunt eandem habent relationem, convenire ostendendum est affectionem quandam communem in propositione descriptam. Porisma etiam in forma problematis enuntiari potest, si nimirum ex quibus data demonstranda aunt, invenienda proponantur."

Cuya traducción libre de manera abreviada es más o menos la siguiente: "Un porisma es una proposición en la que se indica cualquier cosa o bien problemas entrelazados. Un porisma también puede ser el enunciado de un problema que se debe resolver".

En las páginas de Chasles que presentamos se lee :"de acuerdo a los lemas de Pappus y de las opiniones de Simson". Es decir supuestamente reconstruyó los porismas euclídeos con esas fuentes.

Nos indica el profesor Jose Javier Etayo Miqueo en su artículo "El Reinado de la Geometría Proyectiva" (se puede bajar el artículo completo de `http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/HISTORIADELAMATEMATICA_1992_00_00_04.pdf`), "De acuerdo a Pappus, los libros perdidos de Euclides contenían 171 teoremas que él clasifica en 29 géneros. Sólo el primero tiene un enunciado completo: 'Si por dos puntos dados se trazan dos rectas que se cortan sobre otra recta dada en posición, y una de ellas intercepta sobre una recta dada un segmento, a partir del punto dado en ella, la otra formará también sobre otra recta un segmento que tenga con el primero una razón dada.' Para explicar los porismas Pappus enuncia 38 lemas, de los cuales el número 13 es el celebérrimo de la configuración que lleva su nombre y el 12 el de la misma configuración sobre dos rectas paralelas; en casi todos los restantes puede apreciarse también el carácter proyectivo que los informa. Uno de ellos, que condensa diez porismas de Euclides, hace presentir ya la configuración de Desargues.

La curiosidad que siempre despertaron los porismas y los esfuerzos que realizaron muchos geómetras para adivinar y reconstruir los enunciados originales sirvieron de poco: la concisión de Pappus al no dar las proposiciones completas y la índole de la materia, que se resistía a los métodos imperantes, hace muy poco fecunda la investigación y Halley, por ejemplo, después de haberse dedicado al estudio del enigma, ha de confesar paladinamente no haber comprendido nada".

El mayor éxito en el intento de desentrañar el misterio corresponde a Robert Simson (1687-1768), cuyos primeros ensayos fructuosos datan de 1720 y se refieren a la explicación de tres proposiciones de Pappus, dos de ellas las ya enunciadas aquí y la tercera, una generalización a n rectas de una de ellas, la [11]. El resultado final del trabajo de Simson se resume en diez porismas que corresponden a siete de los géneros de Pappus, dejando intactos los otros 22, y añadiendo: "I believe it will be extremely difficult for any body to restore them".

"Chasles restaura los porismas enunciando 221 proposiciones que corresponden a los 29 géneros de Pappus. La mayoría de ellos, fieles al espíritu de la época en que nacieron, hacen referencia a relaciones métricas, casi siempre de razones dobles o de proporcionalidad de longitudes o áreas. Es en esta geometría donde se aprecian aquellas fisuras que presagian la posterior creación de un método y de una axiomatización que den forma a la geometría proyectiva. Muy bien lo percibe Chasles cuando dice en la presentación de su libro: 'Tal vez no se verá sin asombro que la obra tan célebre de Euclides, de la que una oscuridad tan profunda ocultaba la forma, no menos que los puntos de contacto que podía tener con nuestros métodos actuales, encerraba precisamente los gérmenes de estos mismos métodos y varias de las proposiciones que forman sus aplicaciones más inmediatas y naturales'. Y añade, siguiendo este pensamiento: 'Esto explica, creo yo, cómo pareció siempre tan difícil, podría decir que casi imposible, hasta estos últimos tiempos dar una interpretación de gran parte de los enunciados de los porismas dejados por Pappus, puesto que la mayor parte de las proposiciones que satisfacen a estos enunciados se refieren a un género de relaciones que, salvo para los casos más simples, no habían entrado todavía en la geometría moderna y que en la antigua no se han reencontrado quizá más que en la obra perdida de Euclides'.

'Chasles ha elaborado una ingeniosa reconstrucción de la obra de Euclides llevando a sus lógicas conclusiones los 38 porismas dados por Pappus', dice Coolidge que se muestra sin embargo escéptico de esa labor, 'deporte favorito', dice, para los geómetras. Piensa, no obstante, que Pappus y probablemente Euclides, que escribió 600 años antes, conocían la invariancia de la razón doble. Ello hace creer, como algunos han indicado, que la geometría proyectiva habría alcanzado antes su madurez de no haberse perdido los libros de los porismas.

Sea como fuere, Chasles decidió colgar en nuestra galería de retratos el de aquel primer antepasado cuyo rostro se desconocía y que ha querido reproducir, acaso convencionalmente, como casi siempre se hace, a partir de las descripciones incompletas que de él quedaban. Y ha logrado sobre todo llegar —podría decir Baudelaire— 'al fondo de lo desconocido para encontrar lo nuevo.' "

Cerramos nuestro periplo acerca de los porismas de Euclides con un comentario tal vez equivocado, los geómetras griegos Euclides, Pappus, Apolonio sabían que existían otras formas de razonamiento geométrico y posiblemente otras formas de demostración diferentes a las construcciones geométricas. Algunos enunciados fueron referidos como porismas. Desafortunadamente Pappus no escribió todos los enunciados y los porismas se convierten en un misterio.

Hemos comentado —en un artículo anterior— siguiendo al maestro Miguel de Guzmán lo colosal de la obra de Apolonio http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/HistoriaMatematica/apolonio/pag1.htm y la presencia de elementos de la geometría proyectiva en esa obra. Tal vez en Euclides había algo de eso en la forma de porismas, pero esto es sólo un porisma sobre Euclides.