



## Volumen de una pirámide recta y oblicua

| Volume of a straight and oblique pyramid |

 **Javier González Mendieta**  
jg\_mendieta@hotmail.com  
Universidad Autónoma de Guerrero  
Guerrero, México

 **David García Nava**  
davidgn05@hotmail.com  
Universidad Autónoma de Guerrero  
Guerrero, México

Recibido: 24 Setiembre 2020

Aceptado: 18 enero 2022

**Resumen:** El objetivo principal de este trabajo es obtener una fórmula para el volumen de la pirámide oblicua con base poligonal regular y altura  $h$ , iniciando el proceso lógico mediante la obtención del volumen de la pirámide recta, con la misma base y altura. Se empieza por determinar el volumen de la pirámide recta, la cual se basa en la idea de aproximar la pirámide mediante dos torres de prismas, de base poligonal regular y altura  $h$ , una interior y otra exterior a la pirámide; esta aproximación permite establecer una expresión algebraica que delimita el volumen de la pirámide para luego, mediante los procesos infinitos, llevarla a una situación límite. Luego, se considera la generalización para obtener el volumen de la pirámide oblicua, por medio de los procesos infinitos de aproximación utilizando torres de prismas interiores y exteriores para llevarlo a la situación límite que determina su volumen. Finalmente, mediante estos resultados se obtiene el volumen de un cono y el cilindro.

**Palabras Clave:** Pirámide recta y oblicua, prismas interno y externo, torre interna y externa factor de semejanza, proceso infinito y situación límite.

**Abstract:** The main objective of this work is to obtain a formula for the volume of the oblique pyramid with regular polygonal base and height  $h$ , starting the logical process by obtaining the volume of the straight pyramid, with the same base and height. It begins by determining the volume of the straight pyramid, which is based on the idea of approximating the pyramid by means of two towers of prisms, with a regular polygonal base and height  $h$ , one inside and the other outside the pyramid; This approach allows establishing an algebraic expression that delimits the volume of the pyramid and then, through infinite processes, bring it to a limit situation. Then, the generalization is considered to obtain the volume of the oblique pyramid, through the infinite processes of approximation using towers of interior and exterior prisms to bring it to the limit situation that determines its volume. Finally, through these results, the volume of a cone and the cylinder, both straight and oblique, is obtained.

**Keywords:** Straight and oblique pyramid, internal and external prisms, internal and external tower, similarity factor, infinite process and limit situation.

## 1. Introducción

La obtención y demostración de una fórmula para el volumen de una pirámide recta quizá tenga miles de años, desde los tiempos de Demócrito de Abdera, no obstante su formalización se desarrolló bajo los aspectos de darle un sentido físico a los conceptos matemáticos de Arquímedes. Sin embargo, una deducción del volumen de la pirámide oblicua de base poligonal y altura  $h$  no es tan fácil de encontrar, sin utilizar los métodos del Cálculo, requiere de generalizar las ideas involucradas en la obtención del volumen de una pirámide recta, esta es una característica del pensamiento matemático que puede resultar muy útil en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos involucrados, estos son, volumen, aproximación mediante torres, proceso infinito, situación límite, y generalización de los conceptos para la pirámide oblicua.

## 2. Pirámide recta $\Xi_k$

### 2.1. Volumen de una Pirámide recta $\Xi_k$

Considérese un polígono regular  $P_k$  de  $k$  lados,  $3 \leq k \in \mathbb{N}$  y longitud de lado  $L$ , mediante este polígono se puede construir una pirámide recta,  $\Xi_k$ , de base poligonal  $P_k$ , altura  $h$ , cúspide  $C$  y centro de la base  $O$  (Figura 1). Para determinar el volumen,  $V(\Xi_k)$ , de la pirámide  $\Xi_k$ , se realizan dos aproximaciones, una con prismas internos y otra con externos, estos prismas constituyen dos torres, una interna y otra externa, que delimitan el volumen de la pirámide, luego, se calcula el factor de semejanza por medio de triángulos semejantes que son construidos al trazar la diagonal entre dos vértices opuestos de los polígonos tapa o base junto con las aristas de la pirámide y se comparan las bases de los triángulos con la base del triángulo más grande, iniciando con casos particulares hasta generalizar el factor de semejanza, veamos cómo puede ser esto con más detalle.

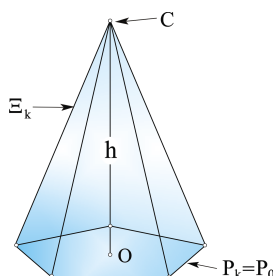


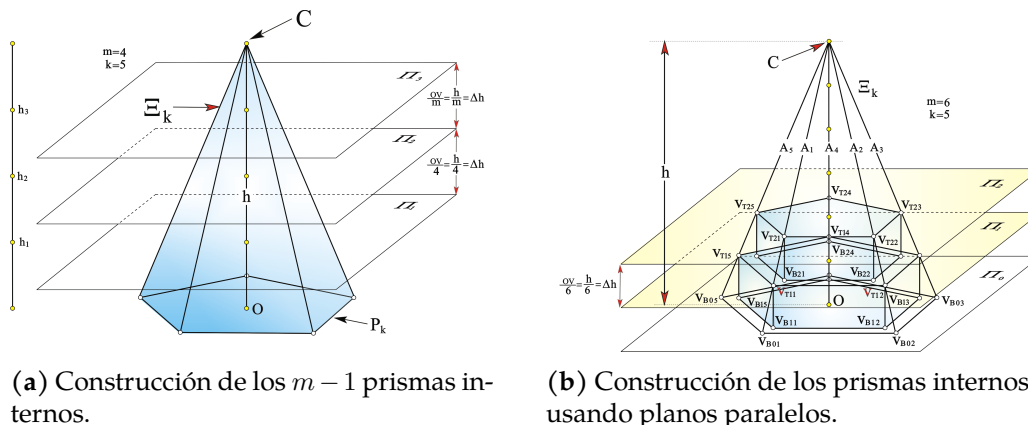
Figura 1: Ejemplo de un polígono regular  $P_5$ . Elaboración propia.

### 2.2. Construcción de los prismas internos de la torre interna recta

Pensemos en la pirámide  $\Xi_k^R = \Xi_k$  a la cual se le divide la altura  $h = OC$  en  $m$  partes iguales,  $2 \leq m \in \mathbb{N}$ , mediante los puntos:  $h_1, h_2, \dots, h_{m-1}$ , entonces, para construir los  $m - 1$  prismas internos,  $\Psi_{k,j}^{Int}$ , que aproximan a la pirámide, siendo  $k$  el número de lados del polígono base  $P_k$  y  $j$  el número del prisma contados de  $O$  a  $C$ ,  $1 \leq j \leq m - 1$ ,  $3 \leq k$ , todos de la misma altura  $h/m = \Delta h$ , se construyen los  $m - 1$  planos,  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{m-1}$ , pasando por los puntos  $h_1, h_2, \dots, h_{m-1}$ , paralelos al plano  $\Pi_0$  de la base (Figura 2a), y se determinan las interrupciones con las  $k$  aristas,  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , de la pirámide  $\Xi_k$ ; que en el caso del primer prisma,  $\Psi_{k,j}^{Int}$ , resultan ser los puntos:  $v_{T11}, v_{T12}, v_{T13}, v_{T14}, v_{T15}$ , vértices de un polígono semejante al de la base, los vértices de su tapa,  $P_{T,k,1}^{Int}$ , observe que para los vértices  $v_{Tjk}$ ,  $T$  indica que los puntos se encuentran en la tapa,  $j$  el número de polígono y  $k$  el número correspondiente a cada vértice. Luego, los puntos,  $v_{T1k}$ , se proyectan ortogonalmente al plano base,  $\Pi_0$ , donde determinan los puntos  $v_{B11}, v_{B12}, v_{B13}, v_{B14}, v_{B15}$ , estos, conjuntamente con los puntos

$v_{T1k}$ , delimitan las aristas verticales del prisma  $\Psi_{k,1}^{Int}$ , siendo su base,  $P_{B,k,1}^{Int}$ , el polígono de vértices,  $v_{B11}, v_{B12}, v_{B13}, v_{B14}$  y  $v_{B15}$ .

Para el caso del segundo prisma,  $\Psi_{k,2}^{Int}$ , se procede en forma análoga, es decir, se encuentran las intersecciones del segundo plano,  $\Pi_2$ , con las aristas,  $A_k$ , estos puntos son:  $v_{T21}, v_{T22}, v_{T23}, v_{T24}, v_{T25}$ , que determinan un polígono semejante al de la base de  $\Xi_k$ , obteniendo la tapa del segundo prisma, esto es:  $v_{T21}v_{T22}v_{T23}v_{T24}v_{T25} = P_{T,k,2}^{Int}$ . Luego, estos puntos se proyectan ortogonalmente sobre el plano anterior que resulta ser  $\Pi_1$ , así se determinan los  $k$  vértices de un nuevo polígono,  $P_{B,k,2}^{Int}$ , que resultan los vértices del polígono base, estos dos polígonos determinan al prisma  $\Psi_{k,2}^{Int}$ . En forma similar se construyen los demás prismas interiores,  $\Psi_{k,j}^{Int}, 1 \leq j \leq m - 1, 3 \leq k$ , utilizando los planos paralelos  $\Pi_{m-1}$  (Figura 2b).

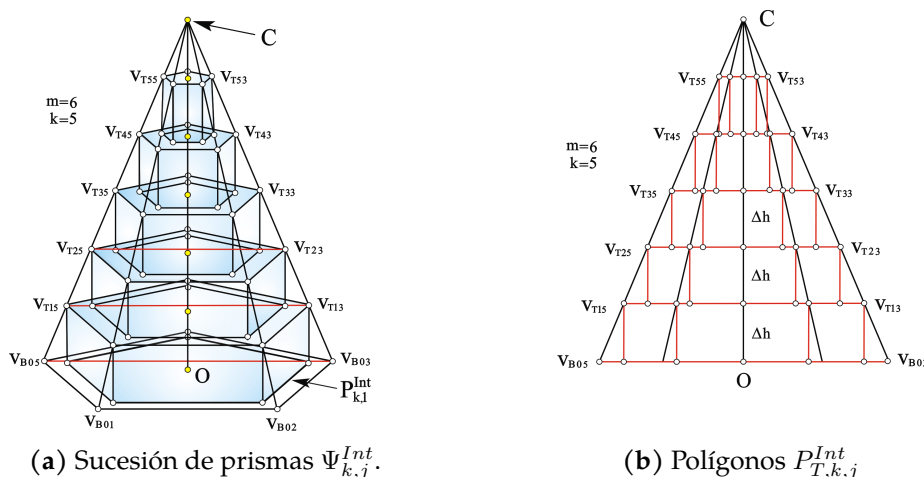


(a) Construcción de los  $m - 1$  prismas internos.

(b) Construcción de los prismas internos usando planos paralelos.

**Figura 2:** Construcción de los prismas interiores en una pirámide recta  $\Xi_k$  de base poligonal regular  $P_k$  y altura  $h$ . Elaboración propia.

La sucesión de prismas,  $\Psi_{k,j}^{Int}$ , se constituye en una torre,  $T_R^{Int}$ , que aproxima interiormente a la pirámide  $\Xi_k$  ya que todos los polígonos, tanto  $P_{T,k,j}^{Int}$ , como  $P_{B,k,j}^{Int}$ , determinados por los planos  $\Pi_{m-1}$ , tienen menor área que el polígono base  $P_k$  y, por ello, cada prisma interior está dentro de la pirámide y tienen altura  $h/m$ , siendo además en número  $m - 1$ . De ello se deduce que el volumen de la torre,  $V(T_R^{Int})$ , es menor que el volumen de la pirámide, es decir:  $V(T_R^{Int}) < V(\Xi_k)$  (Figura 3a).



(a) Sucesión de prismas  $\Psi_{k,j}^{Int}$ .

(b) Polígonos  $P_{T,k,j}^{Int}$ .

**Figura 3:** Construcción de la Torre  $T_R^{Int}$  mediante los prismas interiores  $\Psi_{k,j}^{Int}$  que aproxima interiormente a una pirámide recta  $\Xi_k$  de base poligonal regular  $P_k$  y altura  $h$ . Elaboración propia.

### 2.3. Factor de semejanza de los prismas internos en la torre interna recta

Ahora bien, ¿qué proporción guardan los polígonos  $P_{T,k,j}^{Int}$  con relación al polígono base  $P_k$  de la pirámide? Para responder esta cuestión considérense las diagonales de los polígonos tapa de cada uno de los prismas, estas son:  $v_{T15}v_{T13}$ ,  $v_{T25}v_{T23}$ ,  $v_{T35}v_{T33}$ ,  $v_{T45}v_{T43}$ ,  $v_{T55}v_{T53}$ , si  $m = 6$ , y la diagonal del polígono base  $P_k = P_0$ , esta es:  $v_{B05}v_{B03}$  (Figura 3b). Entonces, comparando las diagonales de los polígonos interiores con la diagonal del polígono original, que es la más grande, y considerando que los triángulos  $v_{T15}v_{T13}C$ ,  $v_{T25}v_{T23}C$ ,  $v_{T35}v_{T33}C$ ,  $v_{T45}v_{T43}C$ ,  $v_{T55}v_{T53}C$  y  $v_{B05}v_{B03}C$  son semejantes se obtienen los factores de semejanza,  $F_{S_j}$ , esto es:  $F_{S_1} = \frac{v_{T15}v_{T13}}{v_{B05}v_{B03}} = \frac{5(h/6)}{h} = \frac{5}{6}$ ; es decir, hay que multiplicar las dimensiones de  $P_k$  por  $5/6$  para obtener las de  $P_{T,k,1}^{Int}$ . Luego se tiene:  $F_{S_2} = \frac{v_{T25}v_{T23}}{v_{B05}v_{B03}} = \frac{4(h/6)}{h} = \frac{4}{6}$ ;  $F_{S_3} = \frac{v_{T35}v_{T33}}{v_{B05}v_{B03}} = \frac{3(h/6)}{h} = \frac{3}{6}$ ;  $F_{S_4} = \frac{v_{T45}v_{T43}}{v_{B05}v_{B03}} = \frac{2(h/6)}{h} = \frac{2}{6}$ ;  $F_{S_5} = \frac{v_{T55}v_{T53}}{v_{B05}v_{B03}} = \frac{(h/6)}{h} = \frac{1}{6}$ . Y, en el caso general, si se divide  $h$  en  $m$  partes iguales, se tiene para el primer prisma,  $j = 1$ , que el factor de semejanza, es:  $F_{S_1} = \frac{v_{T15}v_{T13}}{v_{B05}v_{B03}} = \frac{(m-1)(h/m)}{h} = \frac{m-1}{m}$ , para el segunda prisma es:  $F_{S_2} = \frac{v_{T25}v_{T23}}{v_{B05}v_{B03}} = \frac{(m-2)(h/m)}{h} = \frac{m-2}{m}$ , y así, hasta llegar al prisma  $j$ -ésimo, para el cual se tiene:

$$F_{S_j} = \frac{v_{Tj5}v_{Tj3}}{v_{B05}v_{B03}} = \frac{(m-j)(h/m)}{h} = \frac{m-j}{m}, \quad 1 \leq j \leq m-1 \quad (1)$$

Se puede observar que el conjunto de números, factores de semejanza:

$$F_{S_j} = \left\{ \frac{m-j}{m} \right\} = \left\{ \frac{m-1}{m}, \frac{m-2}{m}, \frac{m-3}{m}, \dots, \frac{m-(m-2)}{m}, \frac{m-(m-1)}{m} \right\} \\ = \left\{ \frac{m-1}{m}, \frac{m-2}{m}, \frac{m-3}{m}, \dots, \frac{2}{m}, \frac{1}{m} \right\}, \quad 1 \leq j \leq m-1$$

es igual al conjunto:  $F_{S_j} = \left\{ \frac{j}{m} \right\} = \left\{ \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \dots, \frac{m-2}{m}, \frac{m-1}{m} \right\}$ , con  $1 \leq j \leq m-1$ , si se consideran los prismas contados de  $C$  a  $O$ . Los conjuntos de factores de semejanza  $\left\{ \frac{m-j}{m} \right\}$  y  $\left\{ \frac{j}{m} \right\}$ , con  $1 \leq j \leq m-1$ , son iguales, pero algebraicamente no, es decir,  $\left( \frac{m-j}{m} \right) \neq \left( \frac{j}{m} \right)$ ,  $1 \leq j \leq m-1$ .

Pero no solo eso, todas las partes lineales de un prisma a otro guardan la proporción del factor de semejanza, mientras que las áreas de las bases o tapas aumentan en el cuadrado del factor de semejanza, esto es:  $A(P_{T,k,1}^{Int}) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 A(P_k)$ , para el primer polígono tapa interno y, en general se tiene que:

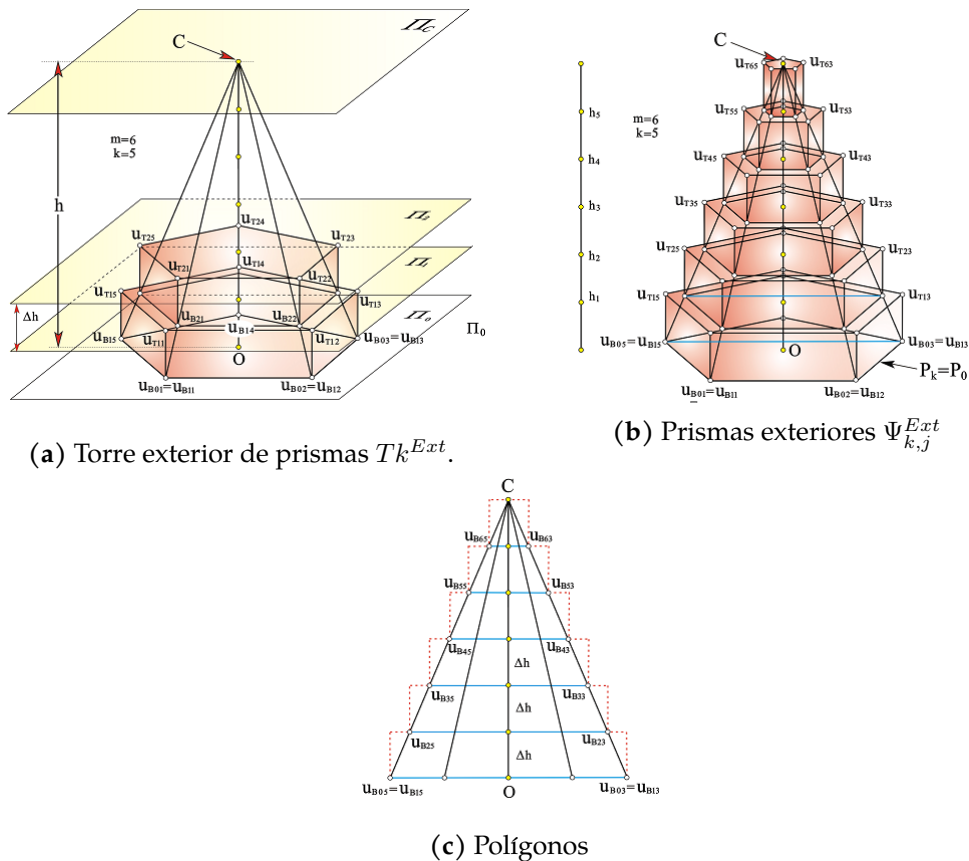
$$A(P_{T,k,j}^{Int}) = \left(\frac{m-j}{m}\right)^2 A(P_k), \quad 1 \leq j \leq m-1 \quad (2)$$

### 2.4. Construcción de los prismas externos de la torre externa recta

Ahora, para construir una torre exterior de prismas,  $T_R^{Ext}$ , que aproxime a la pirámide  $\Xi_k$  exteriormente se divide la altura  $h$  en  $m$  partes iguales,  $2 \leq m \in \mathbb{N}$ , y se consideran los  $m$  planos  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m-1}, \Pi_c$ , paralelos al plano  $\Pi_0$  de la base de  $\Xi_k$ , espaciados la longitud  $\Delta h = h/m$  (Figura 4a). Para construir el primer prisma exterior,  $\Psi_{k,1}^{Ext}$ , se consideran los vértices:  $u_{B01}, u_{B02}, u_{B03}, u_{B04}$  y  $u_{B05}$ , del polígono base  $P_k$  de la pirámide y se proyectan ortogonalmente sobre el plano  $\Pi_1$ , esto determina los puntos:

$u_{T11}, u_{T12}, u_{T13}, u_{T14}$  y  $u_{T15}$ , estos diez puntos determinan al prisma  $\Psi_{k,1}^{Ext}$  (Figura 4b), que tiene su base y su tapa constituidas de polígonos congruentes y, por ello, el polígono tapa sobresale de la pirámide  $\Xi_k$ , que tiene un ángulo agudo en  $C$ .

Para construir el segundo prisma exterior,  $\Psi_{k,2}^{Ext}$ , se consideran las intersecciones del plano  $\Pi_1$  con las  $k$  aristas,  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ , de la pirámide  $\Xi_k$ , esto fija a los puntos;  $u_{B21}, u_{B22}, u_{B23}, u_{B24}$  y  $u_{B25}$ , que se proyectan ortogonalmente sobre el plano  $\Pi_2$ , esto determina a los puntos:  $u_{T21}, u_{T22}, u_{T23}, u_{T24}$  y  $u_{T25}$ , que delimitan un polígono congruente al que constituyen los puntos:  $u_{B2k}$ . Estos diez puntos constituyen un prisma que nuevamente, la tapa, queda por fuera de la pirámide. Este proceso se repite para la construcción de los  $m$  prismas exteriores,  $\Psi_{k,j}^{Ext}, 1 \leq j \leq m$ , siendo que las tapas se encuentran a alturas  $j(h/m)$ , del plano  $\Pi_0$  de la base de la pirámide, donde  $j$  indica el número del prisma, contados de  $O$  a  $C$  (Figura 4b).



**Figura 4:** Construcción de la Torre  $T_R^{Int}$  mediante los prismas interiores  $\Psi_{k,j}^{Int}$  que aproxima interiormente a una pirámide recta  $\Xi_k$  de base polígono regular  $P_k$  y altura  $h$ . Elaboración propia.

### 2.5. Factor de semejanza de los prismas externos de la torre externa recta

Para determinar el factor de semejanza,  $F_{S_j}, 1 \leq j \leq m$ , de esta familia de prismas exteriores se consideran las diagonales de sus polígonos base, estas son:  $u_{B15}u_{B13}, u_{B25}u_{B23}, u_{B35}u_{B33}, u_{B45}u_{B43}, u_{B55}u_{B53}$  y  $u_{B65}u_{B63}$  (Figura 4c), y se comparan con la diagonal del polígono base  $P_k$  que es:  $u_{B15}u_{B13} = u_{B05}u_{B03}$ , notando, además que los triángulos  $u_{B15}u_{B13}C, u_{B25}u_{B23}C, u_{B35}u_{B33}C, u_{B45}u_{B43}C, u_{B55}u_{B53}C$  y  $u_{B65}u_{B63}C$  son semejantes, esto es:

$$F_{S_1} = \frac{u_{B15}u_{B13}}{u_{B05}u_{B03}} = \frac{6(h/6)}{h} = 1; F_{S_2} = \frac{u_{B25}u_{B23}}{u_{B05}u_{B03}} = \frac{5(h/6)}{h} = \frac{5}{6};$$

es decir, hay que multiplicar las dimensiones de  $P_k$  por  $5/6$  para obtener las de  $P_{T,k,2}^{Int}$ ; luego;

$$F_{S_3} = \frac{u_{B35}u_{B33}}{u_{B05}u_{B03}} = \frac{4(h/6)}{h} = \frac{4}{6}; F_{S_4} = \frac{u_{B45}u_{B43}}{u_{B05}u_{B03}} = \frac{3(h/6)}{h} = \frac{3}{6}; F_{S_5} = \frac{u_{B55}u_{B53}}{u_{B05}u_{B03}} = \frac{2(h/6)}{h} = \frac{2}{6};$$

$$F_{S_6} = \frac{u_{B65}u_{B63}}{u_{B05}u_{B03}} = \frac{(h/6)}{h} = \frac{1}{6}, \text{ si } m = 6.$$

En el caso general, si se divide  $h$  en  $m$  partes iguales, se tiene para el primer prisma,  $j = 1$ , que el factor de semejanza es:  $F_{S_1} = 1$ , si  $j = 2$ , es:  $F_{S_2} = \frac{u_{B25}u_{B23}}{u_{B15}u_{B13}} = \frac{(m-1)(h/m)}{h} = \frac{m-1}{m}$ .

Para la tercera diagonal es:  $F_{S_3} = \frac{u_{B35}u_{B33}}{u_{B15}u_{B13}} = \frac{(m-2)(h/m)}{h} = \frac{m-2}{m}$ , y en general, para el polígono  $j$ -ésimo se tiene:

$$F_{S_j} = \frac{u_{Bj5}u_{Bj3}}{u_{B15}u_{B13}} = \frac{(m-(j-1))(h/m)}{h} = \frac{m+1-j}{m}, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (3)$$

Este conjunto de factores de escala resulta ser:

$$F_{S_j} = \left\{ \frac{m+1-j}{m} \right\} = \left\{ 1, \frac{m-1}{m}, \frac{m-2}{m}, \frac{m-3}{m}, \dots, \frac{2}{m}, \frac{1}{m} \right\},$$

que es el mismo conjunto que:  $F_{S_j} = \left\{ \frac{j}{m} \right\} = \left\{ \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \dots, \frac{m-2}{m}, \frac{m-1}{m}, \frac{m}{m} = 1 \right\}$ ,  $1 \leq j \leq m$ ; estos factores de semejanza como conjuntos son iguales, algebraicamente no, es decir,

$$\left( \frac{m+1-j}{m} \right) \neq \left( \frac{j}{m} \right), \quad 1 \leq j \leq m.$$

## 2.6. Cálculo del volumen de la pirámide recta $V(\Xi_k)$ como un proceso infinito.

Ahora, si se denota la suma de los volúmenes de los prismas interiores  $\Psi_{k,j}^{Int}$ , es decir, de la torre

interna  $T_R^{Int}$  por  $V(T_R^{Int}) = \sum_{j=1}^{m-1} V(\Psi_{k,j}^{Int})$  y la suma de los volúmenes de los prismas exteriores  $\Psi_{k,j}^{Ext}$

por  $V(T_R^{Ext}) = \sum_{j=1}^m V(\Psi_{k,j}^{Ext})$ , se tiene una forma de aproximar el volumen de la pirámide  $\Xi_k$ , sin dejar

de observar que  $V(T_R^{Int}) < V(\Xi_k)$ , mientras que:  $V(\Xi_k) < V(T_R^{Ext})$ , lo que establece la relación:

$$\sum_{j=1}^{m-1} V(\Psi_{k,j}^{Int}) < V(\Xi_k) < \sum_{j=1}^m V(\Psi_{k,j}^{Ext}). \quad (4)$$

El volumen de cada uno de los prismas solo depende del área de su base ya que todos tienen la misma altura, entonces, considerando los factores de semejanza entre prismas internos, relación 2, se tiene:

$$A(P_{B,k,j}^{Int}) = A(P_k) \left( \frac{m-j}{m} \right)^2, \quad 1 \leq j \leq m-1,$$

mientras que para los polígonos exteriores se tiene, utilizando la relación 3 que:

$$A(P_{B,k,j}^{Ext}) = A(P_k) \left( \frac{m+1-j}{m} \right)^2, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Así se tiene que el volumen  $V(\Psi_{k,j}^{Int})$  del  $j$ -ésimo prisma interior es:

$$V(\Psi_{k,j}^{Int}) = A(P_k) \left( \frac{m-j}{m} \right)^2 \Delta h, \quad 1 \leq j \leq m-1, \quad \Delta h = \frac{h}{m}. \quad (5)$$

Y el volumen  $V(\Psi_{k,j}^{Ext})$  del  $j$ -ésimo prisma externo  $\Psi_{k,j}^{Ext}$  es:

$$V(\Psi_{k,j}^{Ext}) = A(P_k) \left( \frac{m+1-j}{m} \right)^2 \Delta h, \quad 1 \leq j \leq m, \quad \Delta h = \frac{h}{m}. \quad (6)$$

Entonces, sustituyendo estos valores en la relación 4, se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{m-1} A(P_k) \left( \frac{m-j}{m} \right)^2 \left( \frac{h}{m} \right) < V(\Xi_k) < \sum_{j=1}^m A(P_k) \left( \frac{m+1-j}{m} \right)^2 \left( \frac{h}{m} \right). \quad (7)$$

Pero resulta que el conjunto de valores  $\left\{ \frac{m-j}{m} \right\}$  es igual al conjunto  $\left\{ \frac{j}{m} \right\}$ ,  $1 \leq j \leq m-1$ ; y lo mismo hay que tomar en cuenta con los conjuntos  $\left\{ \frac{m+1-j}{m} \right\}$  y  $\left\{ \frac{j}{m} \right\}$ ,  $1 \leq j \leq m$ , lo que permite considerar que la ecuación 7 se pueda escribir en la forma:

$$\sum_{j=1}^{m-1} A(P_k) \left( \frac{j}{m} \right)^2 \left( \frac{h}{m} \right) < V(\Xi_k) < \sum_{j=1}^m A(P_k) \left( \frac{j}{m} \right)^2 \left( \frac{h}{m} \right). \quad (8)$$

Simplemente lo que se ha hecho es sumar los volúmenes de los prismas de  $C$  a  $O$ . Eso equivale a considerar las sumas comenzando del último prisma al primero; esta propiedad se puede entender en la forma de escribir la suma al revés, donde precisamente se ha hecho el mismo cambio de índices:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m-1} \left( \frac{m-j}{m} \right)^2 &= \left( \frac{m-1}{m} \right)^2 + \left( \frac{m-2}{m} \right)^2 + \cdots + \left( \frac{1}{m} \right)^2 \\ &= \left( \frac{1}{m} \right)^2 + \left( \frac{2}{m} \right)^2 + \cdots + \left( \frac{m-2}{m} \right)^2 + \left( \frac{m-1}{m} \right)^2 = \sum_{j=1}^{m-1} \left( \frac{j}{m} \right)^2 \\ \sum_{j=1}^m \left( \frac{m+1-j}{m} \right)^2 &= 1^2 + \left( \frac{m-1}{m} \right)^2 + \cdots + \left( \frac{2}{m} \right)^2 + \left( \frac{1}{m} \right)^2 \\ &= \left( \frac{1}{m} \right)^2 + \left( \frac{2}{m} \right)^2 + \cdots + \left( \frac{m-2}{m} \right)^2 + \left( \frac{m-1}{m} \right)^2 + 1^2 = \sum_{j=1}^m \left( \frac{j}{m} \right)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Tomando en consideración esto se puede simplificar la ecuación 8 para llegar a que:

$$A(P_k) \left( \frac{h}{m^3} \right) \sum_{j=1}^{m-1} j^2 < A(P_k) \left( \frac{h}{m^3} \right) \sum_{j=1}^m j^2 \quad (10)$$

Ahora, a la suma  $A(P_k) \left( \frac{h}{m^3} \right) \sum_{j=1}^{m-1} j^2$  se le agrega y resta un término, el  $m^2$ , con la finalidad de hacerla semejante, en índice, a la suma derecha de la desigualdad 10, y así se tiene que:

$$\begin{aligned} &A(P_k) \left( \frac{h}{m^3} \right) \sum_{j=1}^m j^2 - A(P_k) \left( \frac{h}{m^3} \right) m^2 \\ &= A(P_k) \left( \frac{h}{m^3} \right) (1^2 + 2^2 + \cdots + (m-1)^2 + m^2) - A(P_k) \left( \frac{h}{m^3} \right) m^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Con ello, y considerando que:

$$\sum_{j=1}^m j^2 = \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6}, \quad (12)$$

se obtiene, en la ecuación 10:

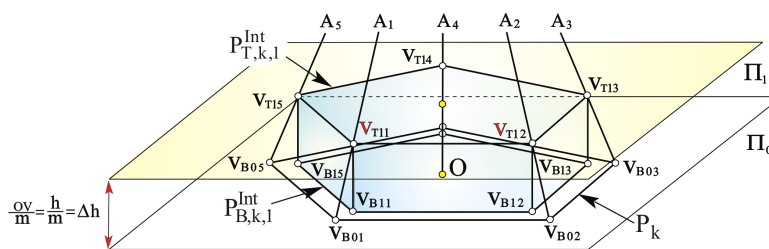
$$A(P_k) \left( \frac{h}{m^3} \right) \left( \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6} \right) - A(P_k) \left( \frac{h}{m} \right) < V(\Xi_k) < A(P_k) \left( \frac{h}{m^3} \right) \left( \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6} \right) \quad (13)$$

Simplificando se llega a:

$$A(P_k) \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{6m^2} \right) - \frac{A(P_k)}{m} < \frac{V(\Xi_k)}{h} < A(P_k) \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{6m^2} \right) \quad (14)$$

### 2.7. Procesos infinitos y situación límite en el volumen de la pirámide $\Xi_k$

Ahora, si el número  $m$  de divisiones de la altura  $h$  se hace muy grande la cantidad de planos paralelos a la base  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-1}$  aumenta, es de esperarse, entonces, que la distancia  $h/m$  entre ellos disminuya, lo que conduce a considerar que la distancia del primer plano  $\Pi_1$  a  $\Pi_0$  sea cada vez más chica. Pero es precisamente el plano  $\Pi_1$  el que determina, en el caso de los prismas interiores, al polígono tapa  $P_{T,k,1}^{Int}$ , y este, según el proceso de construcción descrito al inicio de 2.1 es igual al polígono  $P_{B,k,1}^{Int}$ ; si los planos reducen su distancia entonces la sección determinada por las aristas y los planos no pueden llegar a ser más grandes que el polígono base  $P_k$ , de ahí que cuando  $m$  es muy grande la diferencia entre sus factores de semejanza de los polígonos  $P_{T,k,1}^{Int}$  y  $P_k$  puede llegar a ser tan pequeña como se quiera, según el principio de Exhaustión de Eudoxio, es decir:  $|P_{S_1} - P_k| < \epsilon, \forall \epsilon > 0$  (Figura 5).



**Figura 5:** El polígono base,  $P_{B,k,1}^{Int}$ , del primer prisma  $\Psi_{k,1}^{Int}$  de la torre interna  $T_R^{Int}$ , que es igual al de la tapa  $P_{T,k,1}^{Int}$ , está cada vez más cerca del polígono base  $P_k$  si el número  $m$  de subdivisiones de  $h$  tiende a ser muy grande. Elaboración propia.

### 2.8. Calculo del volumen de la pirámide recta $V(\Xi_k)$ como una situación límite.

Ahora, hay que considerar dos procesos infinitos que suceden simultáneamente cuando  $m \rightarrow \infty$ ; el primero es el aumento de prismas, tanto interiores  $\Psi_{k,j}^{Int}$  como exteriores  $\Psi_{k,j}^{Ext}$ , el segundo es el hecho de que el área  $A(P_{B,k,1}^{Int})$ , del polígono base del primer prisma  $\Psi_{k,1}^{Int}$ , tiende al área  $A(P_k)$  del polígono base de la pirámide  $\Xi_k$ , mientras que  $A(P_{B,k,1}^{Ext})$  es siempre igual a  $A(P_k)$ , ya que:  $P_{B,k,1}^{Ext} = P_k, \forall k > 3$ ; o dicho de otra forma:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A(P_{B,k,1}^{Int}) = \lim_{m \rightarrow \infty} A(P_{B,k,1}^{Ext}) = A(P_k). \quad (15)$$

Una vez considerando lo anterior se calcula el límite de toda la desigualdad 14, si  $m \rightarrow \infty$ , esto es:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A(P_k) \left[ \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{6m^2} \right) - \frac{1}{m} \right] \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{V(\Xi_k)}{h} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} A(P_k) \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{6m^2} \right). \quad (16)$$

$$A(P_k) \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{6m^2} \right) - \frac{1}{m} \right] \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{V(\Xi_k)}{h} \leq A(P_k) \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{6m^2} \right). \quad (17)$$



Lo que conduce a:  $\frac{A(P_k)}{3} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{V(\Xi_k)}{h} \leq \frac{A(P_k)}{3}$ ; pero esto es cierto siempre que:

$$\left| V(\Xi_k) - \frac{A(P_k)h}{3} \right| < \epsilon, \forall \epsilon > 0, \text{ es decir}$$

$$V(\Xi_k) = \frac{A(P_k)h}{3}. \tag{18}$$

En otras palabras:

El volumen de una pirámide recta,  $\Xi_k$ , de altura  $h$  y base el polígono regular  $P_k$  es un tercio del área de la base  $A(P_k)$  por la altura  $h$ .

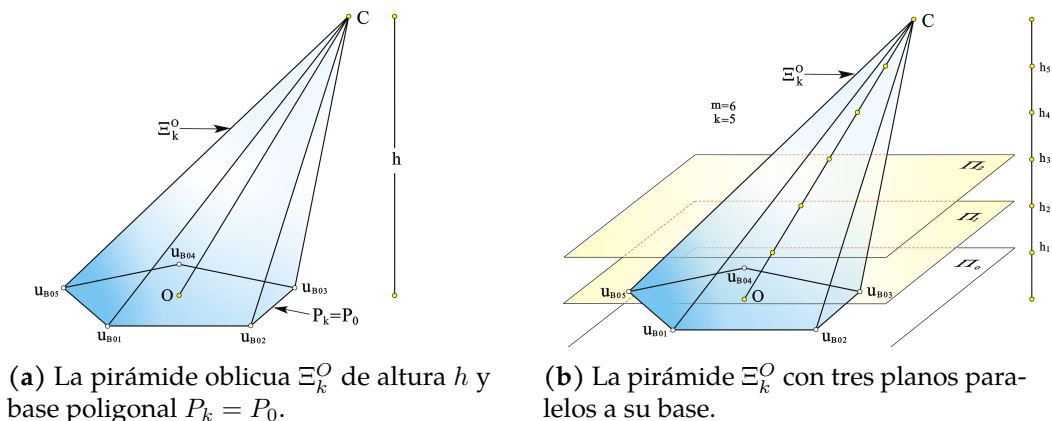
Existe una primera aproximación a la demostración de este teorema, sin detalles de por qué surge o se encuentran los factores de semejanza, en el Pogorélov (1974, p.192-194).

### 3. Pirámide oblicua $\Xi_k^O$

#### 3.1. Volumen de una pirámide oblicua $\Xi_k^O$

Para el caso de encontrar una expresión matemática para el volumen,  $V(\Xi_k^O)$ , de una pirámide oblicua,  $\Xi_k^O$ , de base poligonal  $P_k$ , altura  $h$  y aristas  $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_k$ , se procede, en forma análoga, a como se hizo con la pirámide recta  $\Xi_k$ ; no obstante, ahora las dificultades estriban en la forma en cómo se construyen los prismas, tanto internos como externos, que aproximan a la pirámide.

Para comenzar, considérese una pirámide oblicua,  $\Xi_k^O$ , de altura  $h$ , base el polígono regular  $P_k$ ,  $3 \leq k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , cúspide  $C$  y centro de la base  $O$  (Figura 6a). Al considerar la altura  $h$  de la pirámide se ve que si se divide en  $m$  partes iguales,  $2 \leq m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , esto es:  $h/m = \Delta h$ , entonces la línea  $OC$ , tanto como las aristas  $A_k$  también quedan divididas en el mismo número de partes, según el teorema de Tales, aunque no de longitud  $\Delta h$  (Figura 6b). Bajo esta nueva perspectiva la idea es aproximar la pirámide oblicua  $\Xi_k^O$  mediante una torre,  $T_O^{Int}$  de prismas,  $\Psi_{k,j}^{Int}$ , que llamaremos prismas internos, y cuya suma de volúmenes es menor que el de la pirámide, y de otra torre,  $T_O^{Ext}$ , que exceda a  $\Xi_k^O$  en volumen, constituida de prismas  $\Psi_{k,j}^{Ext}$ , que llamaremos *prismas externos*, donde nuevamente  $j$  representa el número de prismas contados de  $O$  a  $C$ ;  $1 \leq j \leq m - 1$ , para la torre interna y  $1 \leq j \leq m$  para la externa, siendo  $k$  es el número de lados del polígono base  $P_k$ ,  $3 \leq k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .



(a) La pirámide oblicua  $\Xi_k^O$  de altura  $h$  y base poligonal  $P_k = P_0$ .

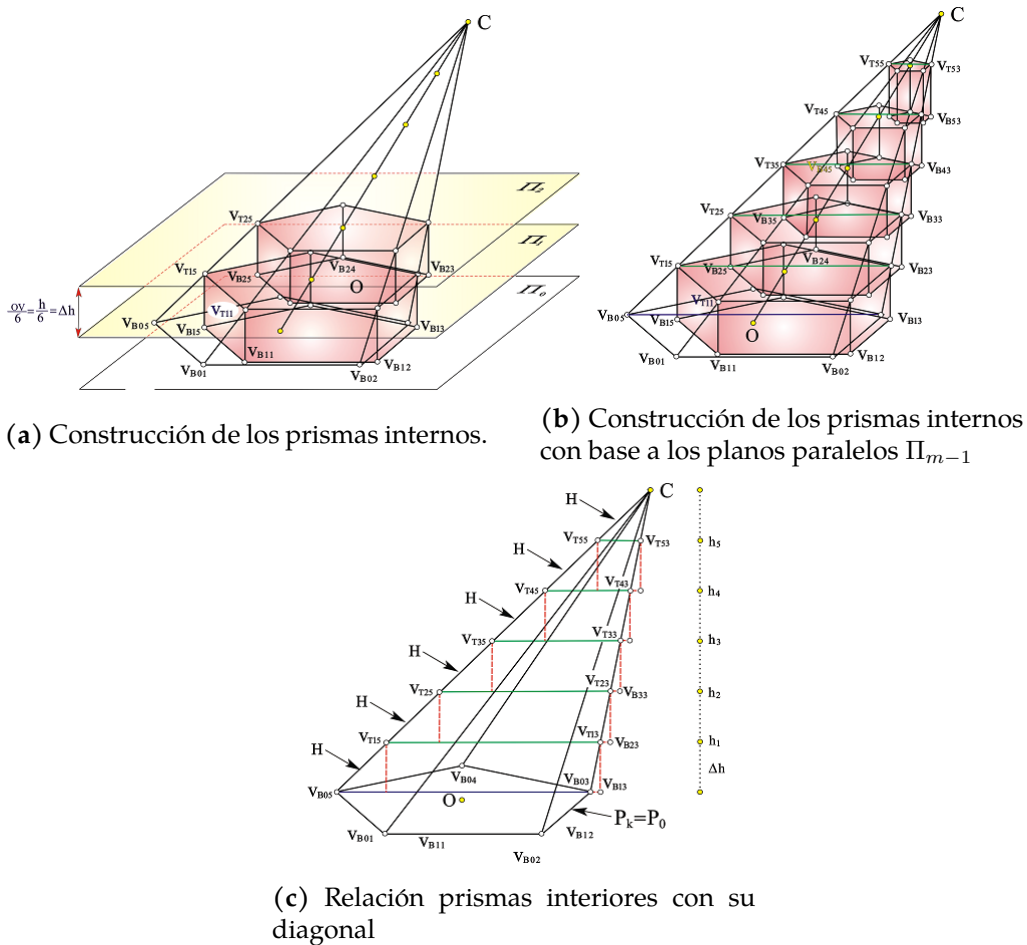
(b) La pirámide  $\Xi_k^O$  con tres planos paralelos a su base.

**Figura 6:** Pirámide oblicua  $\Xi_k^O$ . Elaboración propia.

### 3.2. Construcción de los prismas internos de la torre interna oblicua

Para construir los prismas, tanto internos como externos, se utilizan los  $m-1$  planos,  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m-1}$ , paralelos al plano  $\Pi_0$  de la base y que pasan por los puntos  $h_1, h_2, \dots, h_{m-1}$ , que dividen a  $h$  en  $m$  partes iguales. En el caso del primer prisma interno,  $\Psi_{k,1}^{Int}$ , se determinan las intercepciones del primer plano,  $\Pi_1$ , con las  $k$  aristas de la pirámide, esto fija los puntos:  $v_{T11}, v_{T12}, v_{T13}, v_{T14}, v_{T15}$ , si es que  $m = 6$ , configurando el polígono tapa,  $P_{T,k,1}^{Int}$ , del prisma,  $\Psi_{k,1}^{Int}$ . Después, los puntos,  $v_{T1k}$ ,  $1 \leq j \leq m - 1$ , se proyectan ortogonalmente al plano base,  $\Pi_0$ , donde determinan los puntos  $v_{B11}, v_{B12}, v_{B13}, v_{B14}, v_{B15}$ , de la base,  $P_{B,k,1}^{Int}$ , del primer prisma, estos puntos, conjuntamente con los vértices  $v_{T1k}$ , delimitan al primer prisma  $\Psi_{k,1}^{Int}$  (Figura 7a).

Para el caso del segundo prisma,  $\Psi_{k,2}^{Int}$ , se procede en forma análoga, es decir, se encuentran las intersecciones del segundo plano,  $\Pi_2$ , con las aristas,  $A_k$ ,  $1 \leq j \leq m - 1$ , estos puntos son:  $v_{T21}, v_{T22}, v_{T23}, v_{T24}, v_{T25}$ , que determinan un polígono semejante al de la base de la pirámide  $\Xi_k^O$ , obteniendo la tapa del segundo prisma, esto es:  $v_{T21}v_{T22}v_{T23}v_{T24}v_{T25} = P_{T,k,2}^{Int}$ . Luego, estos puntos se proyectan ortogonalmente sobre el plano anterior que resulta ser  $\Pi_1$ , así se determinan los  $k$  vértices de un nuevo polígono,  $P_{B,k,2}^{Int}$ , los polígonos, tapa,  $P_{T,k,2}^{Int}$ , y base,  $P_{B,k,2}^{Int}$ , determinan al segundo prisma interior,  $\Psi_{k,2}^{Int}$ ; en forma similar se construyen los demás prismas interiores,  $\Psi_{k,j}^{Int}$ ,  $1 \leq j \leq m - 1, 3 \leq k$ , utilizando los planos paralelos  $\Pi_{m-1}$  (Figura 7b).



**Figura 7:** Construcción de los prismas interiores en una pirámide recta  $\Xi_k$  de base poligonal regular  $P_k$  y altura  $h$ . Elaboración propia.

### 3.3. Factor de semejanza de los prismas internos de la torre interna oblicua

Una vez construidos los prismas internos se presenta la cuestión ¿cuál es la proporción de semejanza que guardan todos los prismas interiores con relación a la diagonal de la base de  $\Xi_k^O$ ? Para ello hay que observar la Figura 7c, ahí se ve que todas las diagonales de los polígonos tapa  $P_{T,k,j}^{Int}$  que resultan ser;  $v_{T15}v_{T13}$ ,  $v_{T25}v_{T23}$ ,  $v_{T35}v_{T33}$ ,  $v_{T45}v_{T43}$ ,  $v_{T55}v_{T53}$ , si  $m = 6$ , conjuntamente con el punto  $C$ , cúspide de la pirámide, forman triángulos semejantes al formado por la diagonal,  $v_{B05}v_{B03}$ , de la base de  $\Xi_k^O$  y el punto  $C$ , estos triángulos son:  $v_{T15}v_{T13}C$ ,  $v_{T25}v_{T23}C$ ,  $v_{T35}v_{T33}C$ ,  $v_{T45}v_{T43}C$ ,  $v_{T55}v_{T53}C$  y  $v_{B05}v_{B03}C$ . Ahora, por el Teorema de Tales se sabe que si todas las diagonales están separadas la distancia  $h/m$  entonces la arista  $A_5 = v_{B05}C$  que contiene a los vértices  $v_{T15}$ ,  $v_{T25}$ ,  $v_{T35}$ ,  $v_{T45}$ ,  $v_{T55}$ , si  $m = 6$ , está dividida en 6 partes iguales de longitud  $H/6$ , que no es necesario determinar; con ello se tiene que el factor de semejanza,  $F_{S_j}$ , entre diagonales de las tapas es, para el primer polígono,  $F_{S_1} = \frac{v_{T15}v_{T13}}{v_{B05}v_{B03}} = \frac{5(H/6)}{H} = \frac{5}{6}$ ; es decir, hay que multiplicar las dimensiones de  $P_k$  por  $5/6$  para obtener las de  $P_{T,k,1}^{Int}$ . Luego se tiene, para la segunda diagonal:

$$F_{S_2} = \frac{v_{T25}v_{T23}}{v_{B05}v_{B03}} = \frac{4(H/6)}{H} = \frac{4}{6}; F_{S_3} = \frac{v_{T35}v_{T33}}{v_{B05}v_{B03}} = \frac{3(H/6)}{H} = \frac{3}{6}; F_{S_4} = \frac{v_{T45}v_{T43}}{v_{B05}v_{B03}} = \frac{2(H/6)}{H} = \frac{2}{6};$$

$$F_{S_5} = \frac{v_{T55}v_{T53}}{v_{B05}v_{B03}} = \frac{(H/6)}{H} = \frac{1}{6}.$$

Y, en el caso general, si es que se divide  $h$  en  $m$  partes iguales entonces  $H = v_{B05}C$  también queda dividida en  $m$  partes iguales, se encuentra que, si  $j = 1$ , para la primera diagonal del polígono  $P_{T,k,1}^{Int}$  el factor de semejanza:  $F_{S_1} = \frac{v_{T15}v_{T13}}{v_{B05}v_{B03}} = \frac{(m-1)(H/m)}{H} = \frac{m-1}{m}$ , para la segunda diagonal es:  $F_{S_2} = \frac{v_{T25}v_{T23}}{v_{B05}v_{B03}} = \frac{(m-2)(H/m)}{H} = \frac{m-2}{m}$ , y en general, para la  $j$ -ésima diagonal de los polígonos tapa:

$$F_{S_j} = \frac{v_{Tj5}v_{Tj3}}{v_{B05}v_{B03}} = \frac{(m-j)(H/m)}{H} = \frac{m-j}{m}, \quad 1 \leq j \leq m-1; \quad m \geq 2. \quad (19)$$

Si se sabe el factor de semejanza de las diagonales de los polígonos tapa, entonces se deduce que es el mismo para las bases,  $P_{B,k,j}^{Int}$  y prismas,  $\Psi_{k,j}^{Int}$ , no así para sus áreas o volúmenes.

Ahora, dando valores a  $j$  en  $F_{S_j} = \frac{m-j}{m}$ ,  $1 \leq j \leq m-1$ , se puede encontrar el conjunto de factores de semejanza:  $F_{S_j} = \left\{ \frac{m-j}{m} \right\} = \left\{ \frac{m-1}{m}, \frac{m-2}{m}, \frac{m-3}{m}, \dots, \frac{m-(m-2)}{m}, \frac{m-(m-1)}{m} \right\} = \left\{ \frac{m-1}{m}, \frac{m-2}{m}, \frac{m-3}{m}, \dots, \frac{2}{m}, \frac{1}{m} \right\}$ ,  $1 \leq j \leq m-1$ .

Este conjunto, como en el caso de la torre interna recta, es igual al conjunto:

$$F_{S_j} = \left\{ \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \dots, \frac{m-2}{m}, \frac{m-1}{m} \right\}, \quad \text{con } 1 \leq j \leq m-1,$$

al considerar las diagonales o polígonos tapa, sí se cuentan los prismas de  $C$  a  $O$ . Y, como ya se ha dicho, los factores de semejanza  $\left\{ \frac{m-j}{m} \right\}$  y  $\left\{ \frac{j}{m} \right\}$ , como conjuntos son iguales, pero algebraicamente no, es decir,  $\left( \frac{m-j}{m} \right) \neq \left( \frac{j}{m} \right)$ ,  $1 \leq j \leq m-1$ .

Ahora, a pesar de que se habla aquí de una torre interna,  $T_O^{Int}$ , formada por prismas internos,  $\Psi_{k,j}^{Int}$ , no es posible decir que tal torre está en el interior de la pirámide oblicua  $\Xi_k^O$ , ya que hay partes de los prismas que quedan fuera, no obstante, si es posible asegurar que tal torre aproxima a la pirámide en

volumen por defecto, esto es:  $V(T_O^{Int}) < V(\Xi_k^O)$ , ya que según los factores de escala para los prismas,  $F_{S_j} = \frac{m-j}{m}$ , y considerando que el área de las tapas crece en el cuadrado del factor de semejanza, se tiene que, la suma de los volumen de los cinco prismas, si  $m = 6$ , es:

$$V(T_O^{Int}) = V\left(\sum_{j=1}^{m-1} \Psi_{k,j}^{Int}\right) = A(P_k) \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{h}{6}\right) + A(P_k) \left(\frac{4}{6}\right)^2 \left(\frac{h}{6}\right) + A(P_k) \left(\frac{3}{6}\right)^2 \left(\frac{h}{6}\right) + A(P_k) \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{h}{6}\right) + A(P_k) \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{h}{6}\right), \quad (20)$$

$$V(T_O^{Int}) = V\left(\sum_{j=1}^{m-1} \Psi_{k,j}^{Int}\right) = A(P_k) \left(\frac{25}{6^2} + \frac{16}{6^2} + \frac{9}{6^2} + \frac{4}{6^2} + \frac{1}{6^2}\right) \left(\frac{h}{6}\right) = A(P_k) \frac{55}{36} \left(\frac{h}{6}\right) = A(P_k) \left(\frac{55}{216}\right) h, \text{ si } m = 6, \quad (21)$$

que resulta mucho menor que el volumen de la pirámide, es decir, en este caso:  $V(T_O^{Int}) < V(\Xi_k^O)$ .

Y en el caso general, si  $h$  se divide en  $m$  partes iguales, utilizando la fórmula 12 para la suma los cuadrados y considerando que  $y$  son conjuntos iguales, se tiene que:

$$\begin{aligned} V(T_O^{Int}) &= \sum_{j=1}^{m-1} A(P_k) \left(\frac{m-j}{m}\right)^2 \left(\frac{h}{m}\right) = \frac{A(P_k)h}{m^3} \sum_{j=1}^{m-1} j^2 \\ &= \frac{A(P_k)h}{m^3} \left(\frac{(m-1)^3}{3} + \frac{(m-1)^2}{2} + \frac{m-1}{6}\right), 1 \leq j \leq m-1 \\ &= \frac{A(P_k)h}{m^3} (m-1) \left(\frac{(m-1)^2}{3} + \frac{(m-1)}{2} + \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{A(P_k)h}{m^3} (m-1) \left(\frac{2m^2 - 4m + 2 + 3m - 3 + 1}{6}\right) \\ &= \frac{A(P_k)h}{m^3} (m-1) \left(\frac{2m^2 - m}{6}\right) \\ &= \frac{A(P_k)h}{m^3} (m-1) \left(\frac{m(2m-1)}{6}\right) \\ &= \frac{A(P_k)h}{m^2} (m-1) \left(\frac{2m-1}{6}\right) \end{aligned} \quad (22)$$

Pero resulta que:  $\frac{m-1}{m} < 1$  y, por ello se puede establecer la desigualdad:

$$\frac{A(P_k)h}{m} \left(\frac{m-1}{m}\right) \left(\frac{2m-1}{6}\right) < \frac{A(P_k)h}{m} \left(\frac{2m-1}{6}\right) = A(P_k)h \left(\frac{2m}{6m} - \frac{1}{6m}\right) < \frac{A(P_k)h}{3} \quad (23)$$

Esto es lo que intuitivamente se esperaba, es decir que:

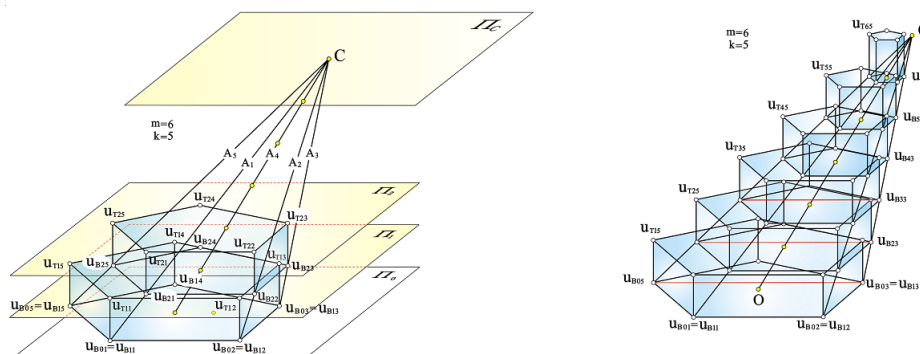
$$V(T_O^{Int}) < \frac{A(P_k)}{3} h = V(\Xi_k^O), 1 \leq j \leq m-1, m \geq 2. \quad (24)$$

### 3.4. Construcción de los prismas externos de la torre externa oblicua

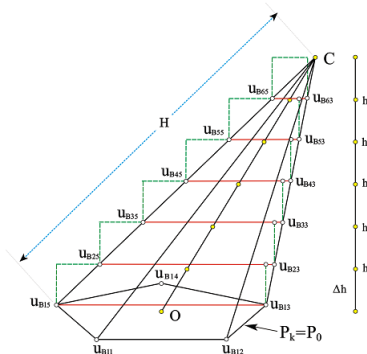
Para construir los prismas externos,  $\Psi_{k,j}^{Ext}$ , de la torre oblicua externa,  $T_O^{Ext}$ , que aproxime a la pirámide por exceso se consideran los  $m$  planos paralelos a la base que pasan por los puntos  $h_1, h_2, \dots, h_{m-1}$ ,

que dividen la altura  $h$  en  $m$  partes iguales y al plano que pasa por  $C$ ; estos planos son:  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m-1}, \Pi_C$ , con  $2 \leq m \in \mathbb{N}$ . Para el primer prisma externo,  $\Psi_{k,1}^{Ext}$ , se consideran los vértices del polígono base  $P_k$  de la pirámide,  $\Xi_k^O$ , estos resultan ser los puntos  $u_{B01}, u_{B02}, u_{B03}, u_{B04}$  y  $u_{B05}$ , que son también los vértices del polígono base del primer prisma. Luego, los puntos  $u_{B0k}$  se proyectan ortogonalmente en el plano  $\Pi_1$ , así se encuentran los  $k$  puntos de un polígono que es la tapa del primer prisma; es mediante los vértices de la base,  $u_{B0k}$  y de la tapa  $u_{T0k}$  que se determina el primer prisma externo,  $\Psi_{k,1}^{Ext}$  (Figura 8a).

Para construir el segundo prisma exterior,  $\Psi_{k,2}^{Ext}$ , se encuentran las intersecciones de las  $k$  aristas,  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ , de la pirámide  $\Xi_k^O$  con el plano  $\Pi_1$ , estos puntos resultan ser:  $u_{B21}, u_{B22}, u_{B23}, u_{B24}$  y  $u_{B25}$ , que determinan un polígono semejante al de la base de la pirámide y que es la base del segundo prisma,  $\Psi_{k,2}^{Ext}$ . Luego, los puntos  $u_{B2k}$ ,  $3 \leq k$ , se proyectan ortogonalmente sobre el plano  $\Pi_2$ , esto determina a los puntos:  $u_{T21}, u_{T22}, u_{T23}, u_{T24}$  y  $u_{T25}$ , que forman la tapa,  $P_{T,k,2}^{Ext}$ , del segundo prisma. Es mediante los polígonos, base,  $P_{B,k,2}^{Ext}$ , y tapa,  $P_{T,k,2}^{Ext}$ , que se determina el segundo prisma externo,  $\Psi_{k,2}^{Ext}$ . Mediante este proceso se construyen la totalidad de los  $m$  prismas externos,  $\Psi_{k,j}^{Ext}$ , encontrando las intersecciones sobre un plano, su base, y proyectando los vértices de la base sobre el plano superior siguiente para determinar su tapa (Figura 8b).



(a) Construcción de los prismas externos. (b) Construcción de los prismas externos con base a los planos paralelos  $\Pi_{m-1}$



(c) Relación prismas externos con su diagonal

Figura 8: Construcción de los prismas externos  $\Psi_{k,j}^{Ext}$  que constituyen la torre externa  $T_O^{Ext}$ . Elaboración propia.

### 3.5. Factor de semejanza de los prismas externos de la torre externa oblicua

Una vez más se presenta la necesidad de encontrar la razón de semejanza entre las diagonales de las tapas o bases de los *prismas exteriores* y la diagonal del polígono base  $P_k$  de la pirámide; para ello se consideran las diagonales de sus polígonos base,  $P_{B,k,1}^{Ext}, P_{B,k,2}^{Ext}, \dots, P_{B,k,j}^{Ext}$ ,  $1 \leq j \leq m$ ; estas diagonales, que resultan ser las rectas;  $u_{B15}u_{B13}, u_{B25}u_{B23}, u_{B35}u_{B33}, u_{B45}u_{B43}, u_{B55}u_{B53}$  y  $u_{B65}u_{B63}$ ,

conjuntamente con el punto  $C$ , cúspide de la pirámide, determinan triángulos semejantes, ya que todos los puntos  $u_{B15}, u_{B25}, u_{B35}, u_{B45}, u_{B55}$  y  $u_{B65}$  están sobre la arista  $A_5$ , lo mismo se puede decir de los puntos  $u_{B13}, u_{B23}, u_{B33}, u_{B43}, u_{B53}$  y  $u_{B63}$  que están sobre la arista  $A_3$ .

Para determinar los factores de semejanza,  $F_{S_j}$ ,  $1 \leq j \leq m$ , de los prismas  $\Psi_{k,j}^{Ext}$  de la torre oblicua externa se encuentran los cocientes de las longitudes de las diagonales de los polígonos base y la del polígono base de la pirámide, utilizando las longitudes de:  $u_{B15}C, u_{B25}C, u_{B35}C, u_{B45}C, u_{B55}C$  y  $u_{B65}C$ , tomando en cuenta que, por el teorema de Tales de Mileto, dichas longitudes son iguales; para ello se puede considerar que  $H = u_{B15}C = u_{B05}C$ , cuya longitud no es necesario determinar (Figura 8c). Para el primer factor de semejanza, se tiene:  $F_{S_1} = \frac{u_{B15}u_{B13}}{u_{B05}u_{B03}} = \frac{6(H/6)}{H} = 1$ . Eso resulta porque en el caso del primer prisma de la torre externa oblicua su base coincide con la de la pirámide  $\Xi_k^O$ . Para el segundo factor de semejanza se tiene:  $F_{S_2} = \frac{u_{B25}u_{B23}}{u_{B05}u_{B03}} = \frac{5(H/6)}{H} = \frac{5}{6}$ ; es decir, hay que multiplicar el tamaño de  $P_k$  por  $5/6$  para obtener el de  $P_{T,k,2}^{Int}$ ; luego se tiene:

$$F_{S_3} = \frac{u_{B35}u_{B33}}{u_{B05}u_{B03}} = \frac{4(H/6)}{H} = \frac{4}{6}; F_{S_4} = \frac{u_{B45}u_{B43}}{u_{B05}u_{B03}} = \frac{3(H/6)}{H} = \frac{3}{6}; F_{S_5} = \frac{u_{B55}u_{B53}}{u_{B05}u_{B03}} = \frac{2(H/6)}{H} = \frac{2}{6};$$

$$F_{S_6} = \frac{u_{B65}u_{B63}}{u_{B05}u_{B03}} = \frac{(H/6)}{H} = \frac{1}{6}, \text{ si } m = 6.$$

Y en el caso general, si es que se divide  $h$  en  $m$  partes iguales, se tiene para el primer prisma,  $j = 1$ , que el factor de semejanza es:  $F_{S_1} = 1$ , si  $j = 2$ , es:  $F_{S_2} = \frac{u_{B25}u_{B23}}{u_{B05}u_{B03}} = \frac{(m-1)(H/m)}{H} = \frac{m-1}{m}$ , para la tercera diagonal, tapa, base o prisma es:  $F_{S_3} = \frac{u_{B35}u_{B33}}{u_{B05}u_{B03}} = \frac{(m-2)(H/m)}{H} = \frac{m-2}{m}$ , y en general, para el polígono, tapa, base o prisma  $j$ -ésimo se tiene:

$$F_{S_j} = \frac{u_{Bj5}u_{Bj3}}{u_{B05}u_{B03}} = \frac{(m-(j-1))(H/m)}{H} = \frac{m+1-j}{m}, \quad 1 \leq j \leq m, m \geq 2. \quad (25)$$

El conjunto  $F_{S_j} = \left\{ \frac{m+1-j}{m} \right\} = \left\{ 1, \frac{m-1}{m}, \frac{m-2}{m}, \dots, \frac{2}{m}, \frac{1}{m} \right\}$  es igual a:

$$F_{S_j} = \left\{ \frac{j}{m} \right\} = \left\{ \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \dots, \frac{m-2}{m}, \frac{m-1}{m}, \frac{m}{m} = 1 \right\}, \quad 1 \leq j \leq m \text{ pero } \left( \frac{m+1-j}{m} \right) \neq \left( \frac{j}{m} \right),$$

$1 \leq j \leq m$ , esto es:

$$F_{S_j} = \left\{ \frac{m+1-j}{m} \right\} = \left\{ \frac{j}{m} \right\}, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (26)$$

Ahora, la torre  $T_O^{Ext}$  de prismas externos aproxima en volumen a la pirámide  $\Xi_k^O$  por exceso, es decir,  $V(T_O^{Ext}) > V(\Xi_k^O)$ , lo que significa que  $V(T_O^{Ext}) = \sum_{j=1}^m V(\Psi_{k,j}^{Ext})$  siempre supera el volumen de la pirámide si  $m \geq 2$ .

Para probar esto, si  $m = 6$ , se tienen que considerar los factores de semejanza para los prismas y calcular las áreas de los polígonos base en el cuadrado del factor de semejanza, en esa forma se tiene

que:

$$\begin{aligned}
V(T_O^{Ext}) &= \sum_{j=1}^m V(\Psi_{k,j}^{Ext}) = \sum_{j=1}^m A(P_k) \left( \frac{m+1-j}{m} \right)^2 h \\
&= A(P_k) \left( \frac{6}{6} \right)^2 \left( \frac{h}{6} \right) + A(P_k) \left( \frac{5}{6} \right)^2 \left( \frac{h}{6} \right) + A(P_k) \left( \frac{4}{6} \right)^2 \left( \frac{h}{6} \right) \\
&\quad + A(P_k) \left( \frac{3}{6} \right)^2 \left( \frac{h}{6} \right) + A(P_k) \left( \frac{2}{6} \right)^2 \left( \frac{h}{6} \right) + A(P_k) \left( \frac{1}{6} \right)^2 \left( \frac{h}{6} \right) \\
&= A(P_k) \left( \frac{1}{6^2} + \frac{4}{6^2} + \frac{9}{6^2} + \frac{16}{6^2} + \frac{25}{6^2} + \frac{36}{6^2} \right) \left( \frac{h}{6} \right) \\
&= A(P_k) \left( \frac{91}{216} \right) h, \text{ si } m = 6 \\
&= A(P_k) \left( \frac{72}{216} + \frac{19}{216} \right) h = \frac{A(P_k)}{3} h + \frac{19}{216} A(P_k) \\
&> \frac{A(P_k)}{3} h = V(\Xi_k^O)
\end{aligned} \tag{27}$$

Lo que demuestra que:  $V(T_O^{Ext}) > V(\Xi_k^O)$ , si  $m = 6$ .

Para el caso general, si  $h$  se divide en  $m$  partes iguales, se procede utilizando la fórmula 12 para la suma de cuadrados, así se tiene que:

$$V(T_O^{Ext}) = \sum_{j=1}^m V(\Psi_{k,j}^{Ext}) = \sum_{j=1}^m A(P_k) \left( \frac{m+1-j}{m} \right)^2 h. \tag{28}$$

Y utilizando el hecho de que se puede sumar invirtiendo el orden de los términos mediante el cambio de factor de semejanza en la suma, igualdad 26, se tiene:

$$V(T_O^{Ext}) = \sum_{j=1}^m A(P_k) \left( \frac{j}{m} \right)^2 \left( \frac{h}{m} \right) = \frac{A(P_k)h}{m^3} \sum_{j=1}^m j^2 \tag{29}$$

$$= \frac{A(P_k)}{m^3} \left( \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6} \right), \quad 1 \leq j \leq m-1 \tag{30}$$

$$= \frac{A(P_k)h}{m^3} m \left( \frac{m^2}{3} + \frac{m}{2} + \frac{1}{6} \right) = \frac{A(P_k)h}{m^2} \left( \frac{2m^2+1}{6} \right) \tag{31}$$

$$= A(P_k)h \left( \frac{2m^2+m}{6m^2} \right) = A(P_k)h \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{6m} \right) \tag{32}$$

$$> \frac{A(P_k)h}{3} = V(\Xi_k^O) \quad 1 \leq j \leq m, \quad m \geq 2 \tag{33}$$

Lo que era de esperarse, esto es:

$$V(T_O^{Ext}) > \frac{A(P_k)h}{3} = V(\Xi_k^O) \tag{34}$$

Tal vez pueda uno preguntarse, ¿cómo sabíamos que  $\frac{A(P_k)h}{3} = V(\Xi_k^O)$ ? Eso se sabía mucho antes de que se intentara una demostración formal; hay muchos documentos en escritura cuneiforme en arcilla de los babilonios y escritos en los papiros egipcios que atestiguan esto, fueron las demostraciones empíricas de la época. Además, se dice que Demócrito de Abdera, (460-370, a. de C) fue de los primeros en tratar de demostrar este resultado, y más el de la pirámide oblicua, quizá ensayando con pirámides que llenaba de arena para después comparar su contenido con otro previamente conocido.

### 3.6. Procesos infinitos y situación límite en el volumen de $\Xi_k^O$

Una vez establecidas las desigualdades:  $V(T_O^{Int}) < V(\Xi_k^O)$  y  $V(\Xi_k^O) < V(T_O^{Ext})$ , relaciones 24 y 34, que pueden escribirse en una sola, como:

$$V(T_O^{Int}) < V(\Xi_k^O) < V(T_O^{Ext}), \quad (35)$$

es que se puede determinar sucesiones que acotan superior e inferiormente al volumen de la pirámide oblicua y, mediante el teorema del sándwich, demostrar que el volumen de la pirámide oblicua es lo que se había establecido empíricamente.

En efecto, sustituyendo las expresiones para el cálculo de los volúmenes de los prismas, tanto en la torre oblicua interna como en la externa, se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{m-1} V(\Psi_{k,j}^{Int}) < V(\Xi_k^O) < \sum_{j=1}^m V(\Psi_{k,j}^{Ext}). \quad (36)$$

El volumen de cada uno de los prismas depende del área de su base ya que todos tienen la misma altura  $h/m$ , entonces, y considerando los factores de semejanza entre las bases o las tapas de los prismas internos y externo se llega a qué:

$$\sum_{j=1}^{m-1} A(P_k) \left( \frac{m-j}{m} \right)^2 \left( \frac{h}{m} \right) < V(\Xi_k^O) < \sum_{j=1}^m A(P_k) \left( \frac{m+1-j}{m} \right)^2 \left( \frac{h}{m} \right). \quad (37)$$

Pero resulta que los conjuntos de índices  $\left\{ \frac{m-j}{m} \right\}$  y  $\left\{ \frac{j}{m} \right\}$ ,  $1 \leq j \leq m-1$ , son iguales, lo mismo que los conjuntos  $\left\{ \frac{m+1-j}{m} \right\}$  y  $\left\{ \frac{j}{m} \right\}$ ,  $1 \leq j \leq m-1$ , lo que permite escribir las sumas en orden inverso, esto es:

$$\sum_{j=1}^{m-1} A(P_k) \left( \frac{j}{m} \right)^2 \left( \frac{h}{m} \right) < V(\Xi_k^O) < \sum_{j=1}^m A(P_k) \left( \frac{j}{m} \right)^2 \left( \frac{h}{m} \right). \quad (38)$$

Simplemente lo que se ha hecho es sumar los volúmenes de los prismas de C a O. Dicho de otra forma, las sumas se han escrito en orden inverso, lo que se aclara en la siguiente expresión, o en las ecuaciones 9.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m S_j &= S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{m-2} + S_{m-1} + S_m \\ &= S_m + S_{m-1} + S_{m-2} + \cdots + S_3 + S_2 + S_1 \\ &= \sum_{j=1}^m S_{m+1-j} \end{aligned} \quad (39)$$

No es casualidad que el conjunto de factores de semejanza  $\left\{ \frac{m+1-j}{m} \right\}$  tenga el numerador  $m+1-j$ , igual que el índice de  $S$  en la segunda suma.

Simplificando la desigualdad 38 y agregando y restando un término, el  $m^2$ , a la suma  $(P_k) \left( \frac{h}{m^3} \right) \sum_{j=1}^{m+1-j} j^2$  para igualar los índices de las sumas izquierda y derecha de la desigualdad se tiene:

$$A(P_k) \left( \frac{h}{m^3} \right) \left( \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6} \right) - A(P_k) \left( \frac{h}{m} \right) < V(\Xi_k^O) < A(P_k) \left( \frac{h}{m^3} \right) \left( \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6} \right) \quad (40)$$

Simplificando se llega a:

$$A(P_k) \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{6m^2} \right) - \frac{A(P_k)}{m} < \frac{V(\Xi_k^O)}{h} < A(P_k) \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{6m^2} \right). \quad (41)$$



### 3.7. Cálculo del volumen $V(\Xi_k^O)$ como una situación límite

Ya establecida la desigualdad 41 es que se puede pensar que, si  $m \rightarrow \infty$ , el volumen de la torre interna crece hasta convertirse en el volumen de la pirámide, mientras que el volumen de la torre externa disminuye hasta convertirse en el volumen de la pirámide.

Así se tiene, considerando el límite de la desigualdad 41, que puede ser considerado un proceso infinito, que conlleva a una situación límite, que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A(P_k) \left[ \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{6m^2} \right) - \frac{1}{m} \right] \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{V(\Xi_k^O)}{h} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} A(P_k) \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{6m^2} \right) \quad (42)$$

Esto de los procesos infinitos y situaciones límite nos lleva a considerar otra perspectiva de las desigualdades. En la ecuación 14 el signo de la desigualdad es estricto, "menor que", no obstante, al pasar a la ecuación 16 el signo de las desigualdades ya es "menor o igual", ¿por qué?, si comparamos los elementos de dos sucesiones vemos que pueden ser estrictamente desiguales, como en el caso de las sucesiones:  $y_n = 1 - \frac{1}{n}$  y  $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ , al comparar sus términos se tiene que:  $1 - \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n}$ , no hay igualdad para ningún valor de  $n$ , sin embargo, sus límites son iguales cuando  $n \rightarrow \infty$ .

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 1. \quad (43)$$

El mismo criterio se ha utilizado con las desigualdades 41 y 42. Así se ve, que el signo de desigualdad puede cambiar cuando se trata de procesos infinitos y la obtención de la situación límite.

Retornando al cálculo de la ecuación 42, y considerando la relación 43 se tiene:

$$A(P_k) \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{6m^2} \right) - \frac{1}{m} \right] \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{V(\Xi_k^O)}{h} \leq A(P_k) \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{6m^2} \right) \quad (44)$$

Y, finalmente, se simplifica la desigualdad 44 para poder escribir la relación:

$$\frac{A(P_k)}{3} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{V(\Xi_k^O)}{h} \leq \frac{A(P_k)}{3}$$

pero esto es cierto siempre que:  $\left| V(\Xi_k^O) - \frac{A(P_k)h}{3} \right| < \epsilon, \forall \epsilon > 0$  lo que pudieron argumentar Eudoxio y Arquímedes mediante el Método de Exhaustión, es decir:

$$V(\Xi_k^O) = \frac{A(P_k)h}{3} \quad (45)$$

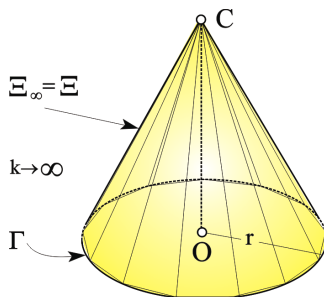
En otras palabras:

El volumen de una pirámide oblicua  $\Xi_k^O$  de altura  $h$  y base el polígono regular  $P_k$  es un tercio del área de la base  $A(P_k)$  por la altura  $h$ .

## 4. El volumen del cono como un caso límite del volumen de una pirámide

Consideremos una pirámide recta  $\Xi_k$  de base el polígono regular  $P_k$ , e imaginemos que el número de lados del polígono base se hace cada vez más grande, es decir,  $k \rightarrow \infty$ , ante esa perspectiva la

base, en su situación límite, se convierte en una circunferencia  $\Gamma$  mientras que las caras y aristas de la pirámide aumentan hasta determinar una superficie suave, un cono con su vértice en la cúspide  $C$  de la pirámide  $\Xi_k$ , que escribiremos como  $\Xi_\infty$  (Figura 9). Para entender los procesos infinitos en el cono se debe imaginar que, cuando  $k \rightarrow \infty$ , las caras de la pirámide adquieren una suavidad que conlleva a la superficie lateral del cono. Pero ante todo, no se debe confundir la situación límite con el proceso infinito, por más caras que se le agreguen a la pirámide  $\Xi_k$  nunca podría encajar en la superficie de un cono, se está todavía en el proceso infinito, mientras que la superficie del cono es la situación límite; veamos esto con más detalle.



**Figura 9:** El volumen de un cono se puede entender como la situación límite de un proceso infinito en el que una pirámide  $\Xi_k$  aumenta el número  $k$  de lados de su polígono base  $P_k$ . Elaboración propia.

En efecto, se ha considerado que durante el proceso de la obtención del volumen de una pirámide recta  $\Xi_k$  de base poligonal  $P_k$  el valor de  $k$  es constante, no obstante, ¿qué sucede si  $k \rightarrow \infty$ ? En ese caso, el polígono base de la pirámide  $\Xi_k$  se convierte en la circunferencia  $\Gamma(O, r)$  que circunscribe al polígono  $P_k$ , y las áreas  $A(P_k)$ ,  $A(P_{Bkj}^{Int})$ ,  $A(P_{Bkj}^{Ext})$ , se convierten en el área de la circunferencia  $C$ , es decir:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(P_k) = A(\Gamma) = \pi r^2 \quad (46)$$

Siendo  $r$  la distancia del centro del polígono  $P_k$  a cualquiera de sus vértices.

Aunado al proceso infinito que conlleva a que el polígono  $P_k$  se transforme en la circunferencia  $\Gamma$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ , se encuentra otro relacionado con la pirámide  $\Xi_k$ , con cúspide en  $C$ , cuando se convierte en una pirámide de base circular  $\Gamma$ , es decir, en un cono  $\Xi_\infty$  y por ello en la situación límite se debe utilizar la fórmula 47, es decir:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(\Xi_k) = V(\Xi_\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A(P_k)h}{3} = \frac{\pi r^2}{3}h. \quad (47)$$

Es decir:

El volumen de un cono circular recto,  $\Xi_\infty(O, r, h)$ , de centro de la base  $O$ , radio de la base  $r$  y altura  $h$  es el caso límite del volumen de la pirámide recta  $\Xi_k$  de base poligonal  $P_k$  y altura  $h$  y se determina mediante la relación:

$$V(\Xi_\infty) = \frac{\pi r^2}{3}h$$

## 5. El volumen del cilindro como un caso límite del volumen de una pirámide

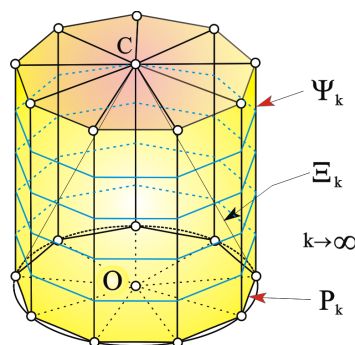
Si el factor de semejanza  $F_{S_j}$  entre los polígonos base, tanto interiores como exteriores, es siempre 1, entonces los polígonos son iguales, para cualquier valor de  $j$  y  $k$  constante, se tiene que los prismas  $\Psi_{k,j}^{Int}$  y  $\Psi_{k,j}^{Ext}$  también son iguales, así la pirámide  $\Xi_k$  debe ser considerada un prisma,  $\Psi_k$ , de base  $P_{k,j}^{Int} = P_{k,j}^{Ext} = P_k$ .

Si además, el número de lados del polígono base aumenta ilimitadamente entonces  $P_k$  se transforma en una circunferencia  $\Gamma$  de centro  $O$  y radio  $r$ ; y hay que imaginar que las caras del prisma son tantas que constituyen una superficie suave que se va ajustando a la superficie de un cilindro, en ese caso resulta que la pirámide con base  $P_k$  y  $F_{S_j} = 1$  determina un prisma  $\Psi_k$  de base  $P_k$  y altura  $h$ . Cuyo volumen resulta ser:

$$V(\Psi_k) = A(P_k)h \quad (48)$$

Si ahora se considera el proceso infinito cuando el número de lados del polígono base se hace muy grande se tiene entonces el volumen del cilindro  $\Psi_\infty = \Psi_k$  (Figura 10), esto es:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(\Psi_k) = V(\Psi_\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} A(P_k)h = \pi hr^2. \quad (49)$$



**Figura 10:** El cilindro visto como una situación límite de una pirámide recta de base poligonal. Elaboración propia.

## 6. Conclusión

No se debe olvidar que uno de los propósitos de la Matemática no es solamente conocer y saber aplicar las fórmulas, sino aprender y desarrollar las habilidades para demostrarlas de manera formal. En este trabajo se aborda el objetivo principal de demostrar cómo obtener la expresión matemática que permite calcular el volumen de una pirámide oblicua, iniciando con el caso de la pirámide recta y finalizando con el cono y cilindro rectos, como situaciones extremas.

Se ha iniciado el razonamiento lógico partiendo de la idea de aproximaciones sucesivas al volumen de una pirámide recta, de base poligonal regular, mediante la construcción de torres de prismas que la aproximan interiormente y exteriormente a la pirámide, es decir, por defecto y exceso, lo que conlleva a establecer una desigualdad que delimita el volumen de la pirámide, después se establece un proceso infinito; una vez determinado el proceso infinito se ha desarrollado un razonamiento mediante el cual es posible llegar a una situación límite. Finalmente mediante abstracciones y generalizaciones,

características esenciales del pensamiento matemático, se ha llegado a determinar el volumen de la pirámide oblicua, del cono y el cilindro rectos de altura  $h$  y radio de la base  $r$ .

Las ideas originales para la obtención de expresiones algebraicas que determinan el volumen de las pirámides y conos son muy antiguas, quizá de civilizaciones como Mesopotamia y Egipto, no obstante, los griegos fueron de los primeros en intentar una demostración u obtención rigurosa, Eudoxio de Cnido y Arquímedes fueron pioneros en dar las bases teóricas para poderlas demostrar.

No resulta fácil encontrar las demostraciones, desde el punto de vista de la geometría euclidiana, para las fórmulas del volumen de las pirámides oblicuas en los libros de Geometría, quizá se debe a que su demostración no parece aportar nada nuevo. No obstante, los siguientes libros pueden proporcionar las bases y herramientas necesarias para el esclarecimiento de las demostraciones aquí expuestas.

## 7. Bibliografía

---

- [1] Caspar, W. (1949). Introduction to Higher Geometry. New York: Ed. The Macmillan Company.
- [2] Euclides. (1985). Euclid's Elements. Ed. Dover.
- [3] MacDonald, H. S. (1971). Fundamentos de la Geometría. México: Ed. Limusa Wiley. S. A.
- [4] Mendieta, González, J. (2016). Geometría, una Reflexión Infinita; Vol. 1 y 2. México: Ed. Universidad Autónoma de Guerrero.
- [5] Michael, J. (2008). Plane And Solid Geometry. New York, London: Ed. Springer Science Business Media, LLC.
- [6] Pogorélov, A. V. (1974). Geometria Elemental. Moscú: Ed. MIR.
- [7] Ramírez A. I. (2002). Introducción a la Geometría Avanzada. México: Facultad de Ciencias, UNAM.
- [8] Venema, G. (2012). Foundations of Geometry. USA: Ed. Pearson Education, Inc.
- [9] Wentworth, G. D Smith, Eugene, D. (1999). Solid Geometry. New York: Ed. Ginn and Company.
- [10] Yakoliev, G. (1985). Geometría. Moscú: Ed. MIR.