Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 20, No 2. Marzo — Agosto, 2020

Artículo de sección
ISSN 1659 -0643

Fórmulas de "Trigonometría Áurea" para las funciones Seno y Coseno

"Golden Trigonometry" formulas for Sine and Cosine functions

George Braddock Stradtmann
georgebraddock@gmail.com
Escuela de matemática
Colegio Universitario de Cartago
Costa Rica

Recibido: 15 Febrero 2019 Aceptado: 15 Agosto 2019

Resumen. En este artículo, se define una nueva constante matemática (que llamamos β), cuyas propiedades junto con las del número áureo ϕ, permiten obtener expresiones algebraicas muy sencillas para las funciones trigonométricas seno y coseno evaluadas en diferentes ángulos. Se obtuvo una sencilla expresión para el área de un pentágono regular inscrito en un círculo de radio 1. Los cálculos de las fórmulas que nos dan el valor de las funciones trigonométricas, expresadas en función de las constantes ϕ y β, se resumen en dos cuadros al final del artículo. Los cuadros se crearon siguiendo un procedimiento análogo al utilizado por el astrónomo Ptolomeo, para hallar los valores numéricos de su famosa *tabla de cuerdas*, que fue documentado en el primer libro de su gran obra *El Almagesto*.

Palabras clave: trigonometría áurea, funciones trigonométricas, número áureo, sección áurea, pentágono, pentagrama, tabla de cuerdas de Ptolomeo.

Abstract. In this paper, a new mathematical constant is defined (we called it β), whose properties along with the golden number's properties, allow us to obtain very simple algebraic expressions for the trigonometric functions sine and cosine evaluated in different angles. We obtained a simple expression for the area of a regular pentagon inscribed within a circle with radio 1. The calculations of the formulas giving us the value of the trigonometric functions, expressed as a function of the constants ϕ and β, are summarized in two tables at the end of this paper. The tables were created following an analogous procedure as the one used by the astronomer Ptolemy, to find the numerical values of his famous *table of chords*, documented in the first book of his great work *The Almagest*.

KeyWords: golden trigonometry, trigonometric functions, golden number, golden section, pentagon, pentagram, Ptolemy's table of chords.

1.1 Introducción

El objetivo de este artículo consiste en dar a conocer unas fórmulas novedosas, la mayoría de ellas no conocidas, que permiten calcular el valor de las funciones trigonométricas seno y coseno, evaluadas en ciertos ángulos, expresadas en función del número áureo $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y de una nueva constante, relacionda con ϕ, que se definió y llamamos β (beta). Los resultados se resumen en dos cuadros al final del artículo. Para crear las tablas seguimos un procedimiento muy similar al utilizado por el astrónomo Ptolomeo para calcular su famosa *tabla de cuerdas*, que aparece en el Libro I de su gran obra *El Almagesto*[1].

Según Brummelen ([2], pág. 8),

> "the first of the Almagest's 13 books contains a description of how one can build a trigonometric table with one's bare hands. (Ptolomy actually used another function called the chord, but the chord is similar to the sine)"[2].

Se conocen algunas fórmulas para calcular el valor exacto del seno y el coseno de algunos ángulos, un ejemplo de las cuales se muestran en la Figura 1.1.

El valor exacto del seno de 6° es

$$\frac{1}{16}\left(-2\left(1+\sqrt{5}\right)-\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{30\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)$$

El valor exacto del seno de 9° es

$$\frac{1}{8}\left(\sqrt{2}+\sqrt{10}+\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{5\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)$$

Figura 1.1: Valor exacto de $sen(6^\circ)$ y $sen(9^\circ)$. Valores calculados en el sitio `http://demonstrations.wolfram.com/ExactValuesForSineAndCosine/`.

Como puede verse, las expresiones no son nada sencillas ni fáciles de deducir o de simplificar.
Se verá en este artículo que el seno de 6° y el seno de 9° pueden escribirse:

$$\operatorname{sen}(6^\circ) = \frac{\sqrt{3}\beta - \phi}{4} \quad \operatorname{sen}(9^\circ) = \frac{\phi - \beta}{2\sqrt{2}}$$

expresiones que son mucho más sencillas y elegantes que las dadas en la Figura 1.1.

Walser (véase [6], pág. 54) acuña el nombre *Golden Trigonometry* para las expresiones que dan el valor de las funciones trigonométricas en función del número áureo y al proceso para obtenerlas. Las expresiones que Walser da en su libro son las siguientes:

[1] En esa época de Ptolomeo le llamaban "Libro I" al "Capítulo I", "Libro II" al "Capítulo II", etc.
[2] "el primero de los trece libros del Almagesto contiene una descripción de como uno puede construir una tabla trigonométrica con sus propias manos (Ptolomeo en realidad usó otra función llamada la **cuerda**, pero la cuerda es muy similar al **seno**)".

	sin	cos	tan
18°	$\dfrac{\tau-1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2+\tau}}{2}$	$\dfrac{\tau-1}{\sqrt{2+\tau}}$
36°	$\dfrac{\sqrt{3-\tau}}{2}$	$\dfrac{\tau}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3-\tau}}{\tau}$
54°	$\dfrac{\tau}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3-\tau}}{2}$	$\dfrac{\tau}{\sqrt{3-\tau}}$
72°	$\dfrac{\sqrt{2+\tau}}{2}$	$\dfrac{\tau-1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2+\tau}}{\tau-1}$

Figura 1.2: Seno, coseno y tangente de los ángulos de 18°, 36°, 54° y 72°, como aparecen en [6], pág. 54. Note que Walser denota la constante ϕ con el símbolo τ.

Se verá que, utilizando la constante ϕ y la constante β, se obtienen expresiones más sencillas y fáciles de calcular, para las mencionadas funciones trigonométricas. Además dichas constantes no aparecerán elevadas a ninguna potencia ni formando parte de un subradical.

1.2 Algunas identidades trigonométricas

Se usarán en este artículo, las siguientes identidades trigonométricas:

Identidad # 1: $sen(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$

Identidad # 2: $cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

Identidad # 3: $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$

Identidad # 4: $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

Identidad # 5: $\operatorname{sen}(90° - x) = \cos x$

Identidad # 6: $\cos(90° - x) = \operatorname{sen} x$

Identidad # 7: $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$

1.3 El Número Áureo

El número ϕ (Phi), conocido como "número áureo", es el nombre que se le da a la constante $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Es un número irracional cuyo valor aproximado es $1.6180339887498948482045868\ldots$.

Las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$ son $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Note que $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2-1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 - \phi$. Entonces el conjunto solución de la cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$ es $\{\ \phi, 1-\phi\ \}$.
Las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 + x - 1 = 0$ son $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
Note que $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-2+1+\sqrt{5}}{2} = -1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi - 1$ y que $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -\phi$. Entonces el conjunto solución de la cuadrática $x^2 + x - 1 = 0$ es $\{\ \phi - 1, -\phi\ \}$.

Al expresar las longitudes de diferentes segmentos del pentágono regular y el pentagrama, o las razones entre algunos de ellos, se han obtenido con frecuencia términos que incluyen los radicales $\sqrt{3-\phi}$, $\sqrt{2-\phi}$ y $\sqrt{2+\phi}$. Para no usar expresiones como esas, donde aparece ϕ en un subradical, se definió una nueva constante a la que llamamos β de la siguiente manera:

$$\beta = \sqrt{3-\phi}$$

La constante β es un irracional cuyo valor aproximado es $\beta = 1.17557050458494625833741119\ldots$.
Más adelante se probará que la constante β se puede definir como la razón entre el lado del pentágono regular y el radio de su círculo circunscrito, pues esa razón tiene el valor $\sqrt{3-\phi}$. Se verá también que $\beta = \sqrt{2-\phi}\sqrt{2+\phi}$.

Algunas propiedades de las constantes ϕ y β son las siguientes:

Propiedad 1: $\phi^2 = \phi + 1$

Prueba: ϕ es solución de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$ entonces $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ que puede escribirse $\phi^2 = \phi + 1$ ■

Propiedad 2: $\phi - 1 = \frac{1}{\phi} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Prueba: Dividiendo por ϕ la ecuación dada en la propiedad P 1.3, se obtiene $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$ de donde $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$. Note además que $\phi - 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}-2}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ■

Propiedad 3: $\phi - 1 = \sqrt{2-\phi}$

Prueba: $(\phi-1)^2 = \phi^2 - 2\phi + 1 = \phi + 1 - 2\phi + 1 = 2 - \phi$ ■

Propiedad 4: $\phi^3 = 2\phi + 1$

Prueba: $\phi^3 = \phi\phi^2 = \phi(\phi+1) = \phi^2 + \phi = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1$ ■

Propiedad 5: $\phi\beta^2 = 2\phi - 1 = \sqrt{5}$

Prueba: $\phi\beta^2 = \phi(3-\phi) = 3\phi - \phi^2 = 3\phi - \phi - 1 = 2\phi - 1$.

Por la definición de ϕ se tiene que $2\phi - 1 = \sqrt{5}$ ■

Propiedad 6: $\beta = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$

Prueba: $\beta^2 = 3 - \phi = 3 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ ■

Propiedad 7: $\phi^2\,\beta^2 = 2 + \phi = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$

Prueba: $\phi^2\,\beta^2 = (\phi+1)\,(3-\phi) = 3\phi - \phi^2 + 3 - \phi = 2\phi - \phi - 1 + 3 = 2 + \phi = 2 + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ ■

Propiedad 8: $\sqrt{2-\phi}\,\sqrt{2+\phi} = \beta$

Prueba: $\sqrt{2-\phi}\,\sqrt{2+\phi} = \sqrt{4-\phi^2} = \sqrt{4-1-\phi} = \sqrt{3-\phi} = \beta$ ■

Propiedad 9: $\phi^2\,\beta = \sqrt{4\phi+3}$

Prueba: $\phi^2\,\beta = \phi\,(\phi\,\beta) = \phi\sqrt{\phi+2} = \sqrt{\phi^3+2\phi^2} = \sqrt{2\phi+1+2\phi+2} = \sqrt{4\phi+3}$ ■

Propiedad 10: $\phi^2 + \beta^2 = 4$

Prueba: $\phi^2 + \beta^2 = \cancel{\phi} + 1 + 3 - \cancel{\phi} = 4$ ■

Propiedad 11: $\phi^2 - \beta^2 = 2\,(\phi - 1)$

Prueba: $\phi^2 - \beta^2 = \phi + 1 - 3 + \phi = 2\phi - 2 = 2\,(\phi-1)$ ■

Propiedad 12: $\sqrt{2 \pm \phi\beta} = \dfrac{\phi \pm \beta}{\sqrt{2}}$

Prueba: $\sqrt{2}\,\sqrt{2 \pm \phi\beta} = \sqrt{4 \pm 2\phi\beta} = \sqrt{\phi^2 + \beta^2 \pm 2\phi\beta} = \sqrt{(\phi \pm \beta)^2} = \phi \pm \beta$ ■

Propiedad 13: $\dfrac{\phi}{\beta} = \sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}}$

Prueba: $4\phi^2 - 1 = (2\phi - 1)\cdot(2\phi+1) = \phi\,\beta^2 \cdot \phi^3 = \phi^4\,\beta^2 = \dfrac{\phi^4\,\beta^4}{\beta^2}$

de donde $\dfrac{\phi^2}{\beta^2} = \dfrac{4\phi^2 - 1}{\phi^2\,\beta^4} = \dfrac{(2\phi)^2 - 1}{(\phi\,\beta^2)^2} = \dfrac{(1+\sqrt{5})^2 - 1)}{(\sqrt{5})^2} = \dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}$ ■

1.4 La Tabla de Cuerdas de Ptolomeo

En la sección 10 del primer libro del Almagesto, Ptolomeo mostró como crear una *tabla de cuerdas*, que en aquella época era el equivalente de una tabla de senos actual.

Una parte de la tabla de cuerdas se muestra en la Figura 1.3.

THE ALMAGEST, I 23

Arcs	Chords			Sixtieths				Arcs	Chords			Sixtieths			
84½	80	41	3	0	0	46	25	110½	98	35	52	0	0	35	42
85	81	4	15	0	0	46	14	111	98	53	43	0	0	35	29
85½	81	27	22	0	0	46	3	111½	99	11	27	0	0	35	15
86	81	50	24	0	0	45	52	112	99	29	5	0	0	35	1
86½	82	13	19	0	0	45	40	112½	99	46	35	0	0	34	48
87	82	36	9	0	0	45	29	113	100	3	59	0	0	34	34
87½	82	58	54	0	0	45	18	113½	100	21	16	0	0	34	20
88	83	21	33	0	0	45	6	114	100	38	26	0	0	34	6
88½	83	44	6	0	0	44	55	114½	100	55	28	0	0	33	53
89	84	6	33	0	0	44	43	115	101	12	25	0	0	33	39
89½	84	28	54	0	0	44	31	115½	101	29	15	0	0	33	25
90	84	51	10	0	0	44	20	116	101	45	57	0	0	33	11
90½	85	13	20	0	0	44	8	116½	102	2	33	0	0	32	57
91	85	35	24	0	0	43	57	117	102	19	1	0	0	32	43

Figura 1.3: Parte de una página del Almagesto con la Tabla de Cuerdas, tomada de [1], pág. 23

Para realizar los cálculos Ptolomeo utilizó algunos métodos como los siguientes:

1. método para hallar la cuerda de un ángulo, que es el suplemento de un ángulo cuya cuerda es conocida.

2. método para hallar la cuerda de un ángulo, que es la diferencia de dos ángulos cuyas cuerdas son conocidas.

3. método para hallar la cuerda de un ángulo, que es la suma de dos ángulos cuyas cuerdas son conocidas.

También usó un teorema, conocido actualmente como el *Teorema de Ptolomeo*, que dice:

> Dado un polígono de 4 lados inscrito en un círculo, el producto de sus diagonales es igual a la suma del producto de cada pareja de lados opuestos.

N **Claudio Ptolomeo.** El astrónomo Ptolomeo nació cerca del año 100 DC y falleció cerca del año 170 DC. Posiblemente era un griego, que vivió y trabajó en Alejandría, Egipto. Fue además astrólogo, geógrafo y matemático. Se dedicó a la observación astronómica y fue un gran divulgador de la ciencia geográfica y astronómica de la antiguedad.
Es muy conocido por su obra *Geografía*, pero su obra principal es *El Almagesto* (del árabe que significa El Gran Libro) donde expone sus teorías astronómicas y contiene una recopilación de sus observaciones astronómicas y realizó mejoras importantes al catálogo de estrellas del astrónomo griego Hiparco. Según Camacho

> "es una obra monumental, no solo por la cantidad de observaciones que recoge, sino también por el detalle con que trata todos los temas de la astronomía y el cuidado que se nota en la argumentación. A pesar de que han pasado casi dos mil años desde que fue escrita, aún hoy impresiona a los lectores. No en vano se impuso en el pensamiento occidental hasta el siglo XVII.".
>
> ([3], pág. 62)

Su modelo geocéntrico suponía una Tierra inmóvil que ocupaba el centro del universo y los astros (el Sol, la Luna y las estrellas) giraban a su alrededor. Los planetas, que tenían un movimiento retrógrado en ciertas épocas del año, giraban en órbitas circulares llamadas *epiciclos* cuyo centro estaba en una órbita mayor llamada *deferente*. Como Ptolomeo suponía que esos movimientos orbitales de los astros debían ser circulares y uniformes, su sistema se fue complicando mucho mediante la adición de puntos *excéntricos* y puntos *ecuantes*, para poder "salvar las apariencias". Camacho ([3], pág. 65) explica muy bien el significado de esos términos.
Mediante su módelo Ptolomeo trató de resolver geométricamente algunos problemas del movimiento planetario como los siguientes:

1. La causa del movimiento retrógrado de los planetas en ciertas épocas.
2. El aumento del brillo de los planetas cuando realizan su movimiento retrógrado.
3. La duración del movimiento retrógrado y de los períodos de revolución planetarios.

Sus teorías astronómicas geocéntricas tuvieron gran acogida e influyeron en el pensamiento de astrónomos, geógrafos y matemáticos hasta inicios del siglo XVII.

En la figura 1.4 se tiene que D es el centro y AC es un diámetro del círculo con radio R mostrado. Los puntos A, F, D, E, C son colineales y se tiene que $DE = EC$, $EF = EB$ y $DB \perp AC$.

Ptolomeo, usando muchas proposiciones ya probadas por Euclides en sus "Elementos", por ejemplo la proposición 9 del libro XIII (véase [4], pág. 457), conocía que el segmento DC es el lado de un hexágono regular inscrito en el círculo, que el FD es el lado de un decágono regular inscrito y que el FB es el lado de un pentágono regular inscrito.

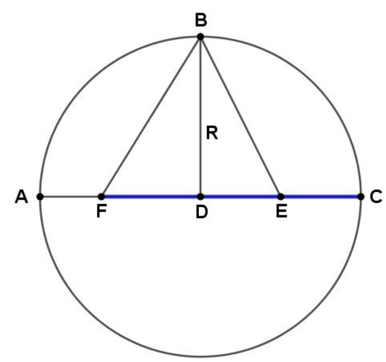

Figura 1.4: Esta figura aparece en la sección 10 del Libro I del Almagesto

Además conocía que el segmento CF es cortado en D en "radio extremo y medio"[3]. Con esto querían decir los antiguos geómetras que se cumple la siguiente relación:

$$\frac{FC}{DC} = \frac{DC}{FD} = \phi \tag{1.1}$$

Si se le llama L_n al lado del polígono regular de n lados y C_m a la cuerda que subtiende un ángulo central de m grados, entonces se puede decir que $L_n = C_{\frac{360°}{n}}$, esto es, que $m = \frac{360°}{n}$.

La relación (1.1) puede escribirse entonces

$$\frac{L_{10} + L_6}{L_6} = \frac{L_6}{L_{10}} = \phi \tag{1.2}$$

Por otro lado, en el triángulo FBD se tiene, por el teorema de Pitágoras, que

$$FB^2 = FD^2 + DB^2$$

[3]Proposición 9: Si el lado del hexágono y el del decágono inscrito en el mismo círculo se suman (poniéndolos en una misma recta) la recta ha sido cortada en radio extremo y medio y su segmento mayor es el lado del hexágono.

[3]Véase [1], pág. 14.

y como $DB = DC$ entonces $FB^2 = FD^2 + DC^2$

que puede escribirse

$$L_5^2 = L_{10}^2 + L_6^2 \tag{1.3}$$

Ahora, como (1.2) implica que $L_6 = \phi\, L_{10}$, entonces (1.3) puede escribirse

$$\begin{aligned} L_5^2 &= L_{10}^2 + \phi^2\, L_{10}^2 \\ L_5^2 &= L_{10}^2\,(1+\phi^2) \\ L_5^2 &= L_{10}^2\,(2+\phi) \\ L_5 &= L_{10}\,\sqrt{2+\phi} \end{aligned}$$

y usando la propiedad P 1.3 se llega a que

$$\frac{L_5}{L_{10}} = \phi\,\beta \tag{1.4}$$

Como el hexágono regular está formado por 6 triángulos equiláteros, es fácil ver que el lado del hexágono es igual al radio R de su círculo circunscrito, esto es

$$L_6 = C_{60^\circ} = R. \tag{1.5}$$

Usando la relación (1.2) se tiene que $L_{10} = \dfrac{R}{\phi}$

y usando la propiedad P 1.3 esto es

$$L_{10} = C_{36^\circ} = R\,(\phi - 1). \tag{1.6}$$

Sustituyendo estos valores de L_6 y de L_{10} en (1.3)

$$\begin{aligned} L_5^2 &= R^2\,(\phi-1)^2 + R^2 \\ L_5^2 &= R^2\,(\phi^2 - 2\phi + 1 + 1) \\ L_5^2 &= R^2\,(\phi + 1 - 2\phi + 1 + 1) \\ L_5^2 &= R^2\,(3-\phi) = R^2\,\beta^2 \end{aligned}$$

$$L_5 = C_{72^\circ} = R\,\beta \tag{1.7}$$

Despejando β se descubre que $\beta = \dfrac{L_5}{R}$, esto es

La constante β es la razón entre el lado del pentágono regular y el radio de su círculo circunscrito.

1.5 Longitud de algunas cuerdas

Usando un radio $R = 1$, las igualdades (1.5), (1.6) y (1.7) nos dan los siguientes valores para las cuerdas C_6, C_{10} y C_5:

$$C_{60^\circ} = 1 \;\; C_{36^\circ} = \phi - 1 \; C_{72^\circ} = \beta$$

De una manera parecida Ptolomeo calculó el valor de esas 3 cuerdas, pero él no usó los símbolos ϕ y β pues utilizó valores numéricos con notación sexagesimal y utilizó un radio con un valor de 60 "partes" (60^p). Obtuvo los siguientes valores:

$C_{60^\circ} = 60^p$.
$C_{36^\circ} = 60^p\,(\phi - 1) = 37.082039^p = 37^p\,4'\,55''$.
$C_{72^\circ} = 60^p\,\beta = 70.534230^p = 70^p\,32'\,3''$[4]

Relación entre la "cuerda" y el "seno" de un ángulo

Si una cuerda de longitud L subtiende un ángulo central de θ grados, entonces el "seno" del ángulo $\dfrac{\theta}{2}$ está dado por $\dfrac{L/2}{R}$, esto es

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{L}{2R} \tag{1.8}$$

Por ejemplo, Ptolomeo obtuvo para la cuerda C_{72° el valor 70.534230^p. Se tiene entonces que

$$\operatorname{sen}\frac{72^\circ}{2} = \frac{70.534230^p}{2\cdot 60^p}$$

$$\operatorname{sen}36^\circ = \frac{70.534230^p}{2\cdot 60^p}$$

$$\operatorname{sen}36^\circ = 0.587785\ldots$$

1.6 Seno y coseno de los ángulos de 18°, 30° y 36°

Después de calcular las cuerdas C_{36°, C_{60° y C_{72° como lo hizo Ptolomeo, se usará la fórmula (1.8) con un radio $R = 1$, para calcular los senos de los ángulos de 18°, 30° y 72°.

[4] El valor en el Almagesto, para la cuerda C_{72°, es en realidad $C_{72^\circ} = 70^p\,32'\,4''$, pues tiene un pequeño error de redondeo.

- Como se obtuvo para la cuerda C_{36° el valor $\phi - 1$, se tiene que

$$\operatorname{sen}\frac{36^\circ}{2} = \frac{\phi-1}{2\cdot 1}, \text{ esto es } \operatorname{sen}18^\circ = \frac{\phi-1}{2}$$

- Como se obtuvo para la cuerda C_{60° el valor 1 se tiene que

$$\operatorname{sen}\frac{60^\circ}{2} = \frac{1}{2\cdot 1} \text{ esto es } \operatorname{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$$

- Como se obtuvo para la cuerda C_{72° el valor β se tiene que

$$\operatorname{sen}\frac{72^\circ}{2} = \frac{\beta}{2\cdot 1} \text{ esto es } \operatorname{sen}36^\circ = \frac{\beta}{2}$$

- Los cosenos correspondientes, calculados con la identidad $\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$, son:

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1-\frac{(\phi-1)^2}{4}} = \sqrt{\frac{4-(\phi^2-2\phi+1)}{4}} = \sqrt{\frac{4-(1+\phi-2\phi+1)}{4}}$$

$$\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{4-(2-\phi)}{4}} = \sqrt{\frac{2+\phi}{4}} = \sqrt{\frac{\phi^2\beta^2}{4}} \text{ esto es } \cos 18^\circ = \frac{\phi\beta}{2}$$

- $\cos 30^\circ = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$ esto es $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- $\cos 36^\circ = \sqrt{1-\frac{\beta^2}{4}} = \sqrt{\frac{4-\beta^2}{4}} = \sqrt{\frac{\phi^2+\beta^2-\beta^2}{4}} = \sqrt{\frac{\phi^2}{4}}$ esto es $\cos 36^\circ = \frac{\phi}{2}$

1.7 Seno y coseno de los ángulos medios

Con la Identidad #1.2 o la Identidad #1.2 puede hallarse el seno y el coseno de los ángulos medios de algunos de los ángulos para los que ya conocemos su seno y coseno.

- $\operatorname{sen}9^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 18^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\phi\beta}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\phi\beta}{4}}$ y por la propiedad P 1.3 esto es $\operatorname{sen}9^\circ = \frac{\phi-\beta}{2\sqrt{2}}$

$$\cos 9^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 9^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\phi\beta}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\phi\beta}{4}}$$

y por la propiedad P 1.3 esto es $\cos 9^\circ = \frac{\phi+\beta}{2\sqrt{2}}$

- $\operatorname{sen} 15^\circ = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

  Se puede demostrar[5] que $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ es lo mismo que $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ luego $\operatorname{sen} 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

- $\cos 15^\circ = \sqrt{\dfrac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}$ esto es $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

- $\operatorname{sen} 45^\circ = \sqrt{\dfrac{1-\cos 90^\circ}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-0}{2}}$ esto es $\operatorname{sen} 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

- $\cos 45^\circ = \sqrt{\dfrac{1+\cos 90^\circ}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+0}{2}}$ esto es $\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

1.8 Seno y coseno de los complementos

En un principio solo se calcularán los senos y cosenos de los ángulos θ con valores angulares enteros del primer octante, esto es, en el rango $0 < \theta \leq 45^\circ$.
Usando la Identidad #5 1.2 y la Identidad #6 1.2 pueden hallarse los senos y cosenos de los ángulos θ del segundo octante, esto es, en el rango $45 < \theta \leq 90^\circ$, ya que estos son complementarios de los ángulos del primer octante.
Otras identidades trigonométricas muy conocidas nos permiten encontrar los valores de las funciones trigonométricas de otros cuadrantes, a partir de los valores obtenidos en el primer cuadrante.

1.9 Cálculo del seno y el coseno de otros ángulos del primer octante

Usando las identidades dadas en la página 1.2, en especial las identidades (1) y (2), pueden calcularse los valores del seno y coseno de otros ángulos enteros y múltiplos de 3°.

Cálculo de $\operatorname{sen} 6^\circ$ y $\cos 6^\circ$

Puede calcularse $\operatorname{sen}(6^\circ)$, usando la Identidad #2 .

$$\operatorname{sen}(6^\circ) = \operatorname{sen}(36^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen}(36^\circ)\cos(30^\circ) - \cos(36^\circ)\operatorname{sen}(30^\circ)$$

$$\operatorname{sen}(6^\circ) = \frac{\beta}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\phi}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

esto es

$$\operatorname{sen}(6^\circ) = \frac{\beta\sqrt{3}-\phi}{4}$$

[5]Prueba: Sea $X = \sqrt{2-\sqrt{3}}$. Entonces $2X^2 = 4 - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3}-1)^2$ por lo tanto $2X^2 = (\sqrt{3}-1)^2$ esto es, $X = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

El cálculo de $\cos(6^\circ)$, es muy parecido al cálculo de $\operatorname{sen}(6^\circ)$, usando la Identidad #2.

$$\cos(6^\circ) = \cos(36^\circ - 30^\circ) = \cos(36^\circ)\cos(30^\circ) + \operatorname{sen}(36^\circ)\operatorname{sen}(30^\circ)$$

$$\cos(6^\circ) = \frac{\phi}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

esto es

$$\cos(6^\circ) = \frac{\phi\sqrt{3}+\beta}{4}$$

El cálculo de las fórmulas para otros ángulos múltiplos de 3° del primer octante, usando las identidades (1) y (2), se da en el Anexo de la página 24. Los cálculos se realizaron en el orden mostrado a continuación y tomando en cuenta las igualdades:

$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$

$3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$

$12^\circ = 30^\circ - 18^\circ$

$21^\circ = 30^\circ - 9^\circ$

$24^\circ = 30^\circ - 6^\circ$

$27^\circ = 18^\circ + 9^\circ$

$33^\circ = 15^\circ + 18^\circ$

$39^\circ = 30^\circ + 9^\circ$

$42^\circ = 30^\circ + 12^\circ$

1.10 Cálculo del área del Pentágono Regular

En la figura 1.5 se tiene que

$$\operatorname{sen}(36^\circ) = \frac{KG}{R} \quad y \quad \cos(36^\circ) = \frac{OK}{R},$$

y como se vió que $\operatorname{sen}(36^\circ) = \dfrac{\beta}{2}$ y $\cos(36^\circ) = \dfrac{\phi}{2}$,

entonces se tiene que $KG = R\dfrac{\beta}{2}$ y $OK = R\dfrac{\phi}{2}$

El área del triángulo OKG es entonces

$$A_{\triangle OKG} = \frac{KG\cdot OK}{2} = \frac{R\frac{\beta}{2}\cdot R\frac{\phi}{2}}{2} = \frac{1}{8}R^2\cdot\phi\beta$$

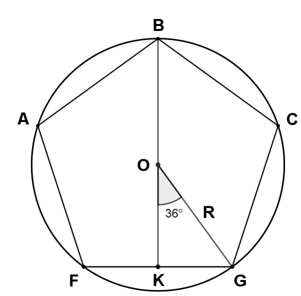

Figura 1.5: Polígono regular inscrito en un círculo de radio R.

y como el área del polígono $ABCGF$ es 10 veces el área del triángulo OKG, se tiene que

$$A_{ABCGF} = \frac{10}{8}R^2\cdot\phi\beta = \frac{5}{4}R^2\cdot\phi\beta$$

Pero $R\,\beta = L_5$ como vimos en la fórmula (7). Entonces el área está dada también por

$$A_{ABCGF} = 5\,L_5 \cdot \frac{\phi}{4} \cdot R$$

y si se le llama A_5 al área y P_5 al perímetro del pentágono regular

$$\frac{A_5}{P_5} = \frac{\phi}{4} \cdot R.$$

Ese resultado puede ser novedoso o es poco conocido.

Si el radio del círculo es $R = 1$, ese resultado se pueden expresar así en palabras:

> Dado un pentágono regular inscrito en un círculo de radio **1**, su área dividida por su perímetro, es igual a la cuarta parte del número ϕ.

En la página 1.14 del Anexo se dan los complicados cálculos algebraicos que realizó el gran educador Posamentier ([5], pág. 150 y pág. 311), para hallar el valor exacto del segmento OK.
Para evidenciar la utilidad de los métodos que se han desarrollado en este artículo, se calculará la longitud de OK simplemente así: vimos que $OK = R\,\dfrac{\phi}{2}$ y $R = \dfrac{L_5}{\beta}$, entonces $OK = \dfrac{L_5}{2} \cdot \dfrac{\phi}{\beta}$ y por la propiedad P 1.3

$$OK = \frac{L_5}{2} \cdot \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}.$$

1.11 Tabla de senos y cosenos con relación a las constantes ϕ y β

El siguiente cuadro resume los cálculos realizados hasta ahora, mostrando los valores del seno y el coseno de los ángulos múltiplos de 3° del primer octante, expresados con relación a las constantes ϕ y β.

Tabla 1.1: Valor de las funciones trigonométricas seno y coseno en función de las constantes ϕ y β, para ángulos múltiplos de 3° del primer octante

θ	**Seno** (θ)	**Coseno** (θ)
3°	$\dfrac{(\phi-1)(\sqrt{3}+1) - \phi\beta(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}$	$\dfrac{(\phi-1)(\sqrt{3}-1) + \phi\beta(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}}$
6°	$\dfrac{\beta\sqrt{3}-\phi}{4}$	$\dfrac{\phi\sqrt{3}+\beta}{4}$
9°	$\dfrac{\phi-\beta}{2\sqrt{2}}$	$\dfrac{\phi+\beta}{2\sqrt{2}}$
12°	$\dfrac{\phi\beta-\sqrt{3}(\phi-1)}{4}$	$\dfrac{\phi\beta\sqrt{3}+(\phi-1)}{4}$

15°	$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
18°	$\dfrac{\phi-1}{2}$	$\dfrac{\phi\beta}{2}$
21°	$\dfrac{\beta(\sqrt{3}+1)-\phi(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}$	$\dfrac{\beta(\sqrt{3}-1)+\phi(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}}$
24°	$\dfrac{\phi\sqrt{3}-\beta}{4}$	$\dfrac{\phi+\sqrt{3}\beta}{4}$
27°	$\dfrac{\phi\beta-(\phi-1)}{2\sqrt{2}}$	$\dfrac{\phi\beta+(\phi-1)}{2\sqrt{2}}$
30°	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
33°	$\dfrac{\phi\beta(\sqrt{3}-1)+(\phi-1)(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}}$	$\dfrac{\phi\beta(\sqrt{3}+1)-(\phi-1)(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}$
36°	$\dfrac{\beta}{2}$	$\dfrac{\phi}{2}$
39°	$\dfrac{\phi(\sqrt{3}+1)-\beta(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}$	$\dfrac{\phi(\sqrt{3}-1)+\beta(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}}$
42°	$\dfrac{\phi\beta\sqrt{3}-(\phi-1)}{4}$	$\dfrac{(\phi-1)\sqrt{3}+\phi\beta}{4}$
45°	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

1.12 Cálculo del seno y el coseno de ángulos múltiplos de 1.5°

A continuación se calculará el seno y el coseno de un ángulo de $22.5^\circ = \dfrac{45^\circ}{2}$, para luego calcular el seno y el coseno de un ángulo de $1.5^\circ = 24^\circ - 22.5^\circ$. Esto permitirá posteriormente calcular los valores correspondientes a otros ángulos múltiplos de 1.5°.

$$\operatorname{sen} 22.5^\circ = \operatorname{sen}\frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}}$$

$$\operatorname{sen} 22.5^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\cos 22.5^\circ = \cos\frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

$$\cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Cálculo de $\operatorname{sen} 1.5^\circ$ y $\cos 1.5^\circ$

$$\operatorname{sen}(1.5^\circ) = \operatorname{sen}(24^\circ - 22.5^\circ) = \operatorname{sen}(24^\circ)\cos(22.5^\circ) - \cos(24^\circ)\operatorname{sen}(22.5^\circ)$$

$$\operatorname{sen}(1.5^\circ) = \operatorname{sen}(24^\circ)\cos(22.5^\circ) - \cos(24^\circ)\operatorname{sen}(22.5^\circ)$$

$$\operatorname{sen}(1.5^\circ) = \frac{\phi\sqrt{3}-\beta}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} - \frac{\phi+\sqrt{3}\beta}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\operatorname{sen}(1.5^\circ) = \frac{(\phi\sqrt{3}-\beta)(\sqrt{2}+1)-(\phi+\beta\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\cos(1.5^\circ) = \cos(24^\circ - 22.5^\circ) = \cos(24^\circ)\cos(22.5^\circ) + \operatorname{sen}(24^\circ)\operatorname{sen}(22.5^\circ)$$

$$\cos(1.5^\circ) = \cos(24^\circ)\cos(22.5^\circ) + \operatorname{sen}(24^\circ)\operatorname{sen}(22.5^\circ)$$

$$\cos(1.5^\circ) = \frac{(\phi+\beta\sqrt{3})}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{(\phi\sqrt{3}-\beta)}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\cos(1.5^\circ) = \frac{(\phi+\beta\sqrt{3})(\sqrt{2}+1)+(\phi\sqrt{3}-\beta)}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Cálculo de $\operatorname{sen} 4.5^\circ$ y $\cos 4.5^\circ$

$$\operatorname{sen}(4.5^\circ) = \operatorname{sen}(6^\circ - 1.5^\circ) = \operatorname{sen}(6^\circ)\cos(1.5^\circ) - \cos(6^\circ)\operatorname{sen}(1.5^\circ)$$

$$\operatorname{sen}(4.5^\circ) = \frac{\beta\sqrt{3}-\phi}{4}\cdot\frac{\left(\phi+\beta\sqrt{3}\right)(\sqrt{2}+1)+\left(\phi\sqrt{3}-\beta\right)}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} - \frac{\phi\sqrt{3}+\beta}{4}\cdot\frac{\left(\phi\sqrt{3}-\beta\right)(\sqrt{2}+1)-\left(\phi+\beta\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Luego de simplificar[6] se llega a

$$\operatorname{sen}(4.5^\circ) = \frac{\phi\beta-(\phi-1)(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} \tag{1.9}$$

El cálculo del coseno de un ángulo de 4.5° se podría realizar con un procedimiento similar al utilizado para calcular el seno de 4.5°, usando esta vez la Identidad #2. También se podría realizar con la identidad $\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$ que nos llevaría a la siguiente fórmula:

$$\cos(4.5^\circ) = \sqrt{1-\frac{\left[\phi\beta-(\sqrt{2}+1)(\phi-1)\right]^2}{\left[2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right]^2}}$$

[6] Los detalles de la simplificación del cálculo de $\operatorname{sen}(4.5^\circ)$ se dan en la página 1.14 del Anexo.

Cualquiera de estos dos procedimientos llevaría una gran cantidad de trabajo algebraico y de simplificación para lograr una expresión para $\cos(4.5^\circ)$ parecida a la de $\operatorname{sen}(4.5^\circ)$, que no incluye potencias de ϕ o β y solo incluye radicales sencillos como $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ *y* $\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Por eso se dará a conocer un método[7] que permite, con solo hacer un pequeño cálculo algebraico y observar la expresión (1.9), asegurar que la expresión correspondiente para el coseno de 4.5° es

$$\cos(4.5^\circ) = \frac{\phi\beta(\sqrt{2}+1)+(\phi-1)}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} \tag{1.10}$$

Ese método novedoso está basado en el teorema que se da a continuación.

Teorema 1.1

Si $0^\circ < \theta < 90^\circ$ y se tiene que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{A\cdot B \pm C\cdot D}{E}$$

con A,B,C,D,E reales mayores que cero, y además se cumple que $(A^2+C^2)(B^2+D^2)=E^2$ entonces

$$\cos\theta = \frac{A\cdot D \mp C\cdot B}{E}.$$

Demostración: Como se muestra en la Figura 1.6, puede suponerse que E es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, donde $A\cdot B \pm C\cdot D$ es un cateto y θ es el ángulo opuesto a él. Al otro cateto se le llamará X.

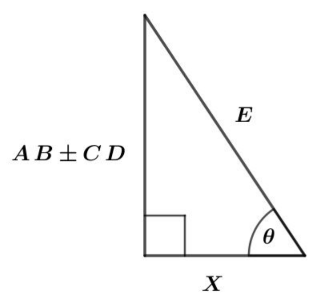

Figura 1.6: Triángulo rectángulo con un cateto igual a $A\,B \pm C\,D$ e hipotenusa E.

Por el teorema de pitágoras se tiene que

$$X^2 = E^2 - (A\cdot B \pm C\cdot D)^2$$
$$X^2 = (A^2+C^2)(B^2+D^2) - (A^2\cdot B^2 \pm 2\cdot A\cdot B\cdot C\cdot D + C^2\cdot D^2)$$
$$X^2 = \cancel{A^2\cdot B^2} + A^2\cdot D^2 + C^2\cdot B^2 + \cancel{C^2\cdot D^2} - \cancel{A^2\cdot B^2} \mp 2\cdot A\cdot B\cdot C\cdot D - \cancel{C^2\cdot D^2}$$
$$X^2 = A^2\cdot D^2 + C^2\cdot B^2 \mp 2\cdot A\cdot B\cdot C\cdot D$$
$$X^2 = (A\cdot D \mp C\cdot B)^2$$

[7]Ese método es muy usado por el autor para calcular el coseno de un ángulo para el que se conoce su seno y viceversa.

Se concluye que $X = A \cdot D \mp C \cdot B$. Entonces

$$\cos\theta = \frac{X}{E} = \frac{A \cdot D \mp C \cdot B}{E} \blacksquare$$

Ejemplo 1.1

Conociendo que el valor del seno de $4.5°$ está dado por la fórmula (1.9), se puede suponer que es de la forma

$$\operatorname{sen}(4.5°) = \frac{A \cdot B - C \cdot D}{E}$$

con $A = \phi\beta$, $B = 1$, $C = \phi - 1$, $D = \sqrt{2} + 1$, $E = 2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Note que $E^2 = 8(2+\sqrt{2})$.

Se calcula ahora $\left(A^2 + C^2\right) = \phi^2\beta^2 + (\phi - 1)^2 = 2 + \phi + \phi^2 - 2\phi + 1 = 3 - \phi + 1 + \phi = 4 = \dfrac{8}{2}$
$\left(B^2 + D^2\right) = 1 + (\sqrt{2}+1)^2 = 1 + 3 + 2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2} = 2(2+\sqrt{2})$,

y viendo que se cumple la igualdad $\left(A^2 + C^2\right)\left(B^2 + D^2\right) = 8(2+\sqrt{2}) = E^2$,

puede asegurarse, por el teorema 1.1, que se cumple que $\cos(4.5°) = \dfrac{A \cdot D + C \cdot B}{E}$,

esto es que $\cos(4.5°)$ está dado por la fórmula (1.10), sin tener que realizar ningún cálculo algebraico adicional.

A continuación se dará a conocer un teorema utilizado por el autor para hallar el seno y el coseno de un ángulo de la forma $(45° - \theta)$, donde θ es un ángulo para el que se conocen los valores de A, B, C, D, E tal que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{A \cdot B \pm C \cdot D}{E}$.

Teorema 1.2

Si $0° < \theta < 90°$ y se tiene que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{A \cdot B \pm C \cdot D}{E}$$

con A, B, C, D, E reales mayores que cero, y además se cumple que $(A^2 + C^2)(B^2 + D^2) = E^2$ entonces

$$\operatorname{sen}(45° - \theta) = \frac{(A \mp C)\,D - (A \pm C)\,B}{\sqrt{2}\,E}$$

$$\cos(45° - \theta) = \frac{(A \mp C)\,B + (A \pm C)\,D}{\sqrt{2}\,E}$$

Demostración: Por el teorema 1.1 se tiene que $\cos\theta = \dfrac{A \cdot D \mp C \cdot B}{E}$.

Utilizando ahora la Identidad #1.2 se tiene que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(45^\circ-\theta) &= \operatorname{sen}(45^\circ)\cos(\theta)-\cos(45^\circ)\,sin(\theta)\\
\operatorname{sen}(45^\circ-\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\right)\\
\operatorname{sen}(45^\circ-\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{A\cdot D\mp C\cdot B}{E}-\frac{A\cdot B\pm C\cdot D}{E}\right)\\
\operatorname{sen}(45^\circ-\theta) &= \frac{A\cdot D\mp C\cdot B-A\cdot B\mp C\cdot D}{\sqrt{2}\,E}
\end{aligned}$$

esto es

$$\operatorname{sen}(45^\circ-\theta)=\frac{(A\mp C)\,D-(A\pm C)\,B}{\sqrt{2}\,E} \tag{1.11}$$

La fórmula para $\cos(45^\circ-\theta)$ se puede obtener de manera análoga, usando la Identidad #1.2, pero mejor se usará el teorema 1.1.

La fórmula (1.11) puede escribirse $\operatorname{sen}(45^\circ-\theta)=\dfrac{A'\cdot B'-C'\cdot D'}{E'}$

con $A'=A\mp C$, $B'=D$, $C'=A\pm C$, $D'=B$, $E'=\sqrt{2}\,E$ (note que $E'^2=2\,E^2$).

Como $(A'^2+C'^2)\,(B'^2+D'^2)=((A\mp C)^2+(A\pm C)^2)\,(D^2+B^2)=2\,(A^2+C^2)\,(B^2+D^2)=2\,E^2=E'^2$, se nota que sí se cumplen las hipótesis del teorema 1.1. Por lo tanto

$$\cos(45^\circ-\theta)=\frac{A'\cdot D'+C'\cdot B'}{E'}$$

esto es

$$\cos(45^\circ-\theta)=\frac{(A\mp C)\,B+(A\pm C)\,D}{\sqrt{2}\,E}\ \blacksquare$$

Seno y coseno de otros ángulos múltiplos de 1.5 del primer octante

Utilizando la Identidad #1 o la Identidad #2 se pueden hallar las fórmulas para el seno de los demás ángulos múltiplos de 1.5° y menores que 22.5° (pero que no son múltiplos de 3° pues ya se calcularon), tomando en cuenta que:

$7.5^\circ=6^\circ+1.5^\circ$

$10.5^\circ=6^\circ+4.5^\circ$

$13.5^\circ=15^\circ-1.5^\circ$

$16.5^\circ=12^\circ+4.5^\circ$

$19.5^\circ=13.5^\circ+6^\circ$

El seno de los ángulos de la forma $45^\circ - X$ donde X es uno de ángulos mencionados, se calcularon utilizando el teorema 1.2. Los cosenos correspondientes se calcularon utilizando el teorema 1.1. Los resultados de los cálculos se resumen en el Cuadro 2.

Se da a continuación un ejemplo que muestra cómo se calculó $\operatorname{sen}(10.5^\circ)$ y luego, usando el teorema 1.1 se calculó $\cos(10.5^\circ)$ y usando el el teorema 1.2 se calculó $\operatorname{sen}(34.5^\circ)$. Finalmente se usó el teorema 1.1 para calcular y $\cos(34.5^\circ)$.

Ejemplo 1.2

Halle la fórmula para el seno de 10.5° y posteriormente, usando el teorema 1.1 y el teorema 1.2, las fórmulas para el coseno de 10.5°, el seno de 34.5° y el coseno de 34.5°.

Solución:

$$\operatorname{sen}(10.5^\circ) = \operatorname{sen}(6 + 4.5^\circ) = \operatorname{sen}(6^\circ)\cos(4.5^\circ) + \cos(6^\circ)\operatorname{sen}(4.5^\circ)$$

$$\operatorname{sen}(10.5^\circ) = \frac{\beta\sqrt{3} - \phi}{4} \cdot \frac{\phi\beta(\sqrt{2}+1) + (\phi - 1)}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{\beta + \phi\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\phi\beta - (\phi-1)(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Luego de desarrollollar y simplificar [a] se llega a

$$\operatorname{sen}(10.5^\circ) = \frac{(\phi-1)(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3}) - \phi\beta(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} \tag{1.12}$$

Para calcular el coseno de 10.5° utilizando el teorema 1.1 se debe comprobar primero que se cumplen las hipótesis de dicho teorema.

Sea $A = (\phi - 1)$, $\quad B = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt{3}$, $\quad C = \phi\beta$, $\quad D = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$, $\quad E = 4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Entonces $\operatorname{sen}(10.5^\circ)$ es de la forma $\dfrac{A \cdot B - C \cdot D}{E}$.

Se verificará ahora si se cumple la igualdad $(A^2 + C^2) \cdot (B^2 + D^2) = E^2 = 32(2 + \sqrt{2})$.

$$(A^2 + C^2) = (\phi - 1)^2 + (\phi\beta)^2 = 1 + \phi - 2\phi + 1 + \phi + 2 = 4$$

$$(B^2 + D^2) = (1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})^2$$

$$= (1 + 3 + 6 + \cancel{2\sqrt{3}} + \cancel{2\sqrt{2}\sqrt{3}} + 6\sqrt{2}) + (1 + 2 + 3 + 2\sqrt{2} - \cancel{2\sqrt{3}} - \cancel{2\sqrt{2}\sqrt{3}}) = 16 + 8\sqrt{2}$$

Se tiene entonces que $(A^2 + C^2) \cdot (B^2 + D^2) = 4(16 + 8\sqrt{2}) = 32(2 + \sqrt{2}) = E^2$.

Como sí se cumplen las hipótesis del teorema 1.1 se tiene que $\cos(10.5^\circ) = \dfrac{A \cdot D + C \cdot B}{E}$, esto es

$$\cos(10.5^\circ) = \frac{(\phi-1)(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})+\phi\beta(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} \tag{1.13}$$

Como también se cumplen las hipótesis del teorema 1.2, que son las mismas del teorema 1.1, se tiene

$$\operatorname{sen}(45^\circ - 10.5^\circ) = \operatorname{sen}(34.5^\circ) = \frac{(A+C)D-(A-C)B}{\sqrt{2}E}$$

esto es

$$\operatorname{sen}(34.5^\circ) = \frac{((\phi-1)+\phi\beta)(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})-((\phi-1)-\phi\beta)(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})}{\sqrt{2}E}$$

expresión que simplificada[b] queda

$$\operatorname{sen}(34.5^\circ) = \frac{(\phi-1)(1-\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3})+\phi\beta(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} \tag{1.14}$$

El lector puede comprobar ahora que, si $A=(\phi-1)$, $B=1-\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3}$, $C=\phi\beta$, $D=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $E=4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, se cumple que $(A^2+C^2)\cdot(B^2+D^2)=E^2=32(2+\sqrt{2})$. Entonces, por el teorema 1.1,

$$\cos(34.5^\circ) = \frac{(\phi-1)(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})-\phi\beta(1-\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} \quad \blacksquare \tag{1.15}$$

[a]Los detalles de la simplificación del cálculo de $\operatorname{sen}(10.5^\circ)$ se dan en la página 1.14 del Anexo.
[b]Los detalles de la simplificación del cálculo de $\operatorname{sen}(34.5^\circ)$ se dan en la página 1.14 del Anexo.

Como ya mencionamos, usando esas mismas técnicas que se utilizaron en el ejemplo 1.12, se hallaron también las fórmulas para los senos y los cosenos de los demás ángulos del primer octante, de la forma $3k-1.5$ grados, que se muestran en la tabla 1.2.

La tabla 1.2 muestra los valores del seno y el coseno de los ángulos de la forma $3k-1.5$ (grados) del primer octante, expresados con relación a las constantes ϕ y β

Tabla 1.2: Valor de las funciones trigonométricas seno y coseno en función de las constantes ϕ y β, para ángulos de la forma $3k-1.5$ (grados) del primer octante.

θ	**Seno** (θ)	**Coseno** (θ)
$1.5°$	$\frac{\phi(-1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})-\beta(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{\phi(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})+\beta(-1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$4.5°$	$\frac{\phi\beta-(\phi-1)(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{\phi\beta(\sqrt{2}+1)+(\phi-1)}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$7.5°$	$\frac{(\sqrt{2}+1)-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{1+\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$10.5°$	$\frac{(\phi-1)(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})-\phi\beta(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{(\phi-1)(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})+\phi\beta(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$13.5°$	$\frac{\beta(\sqrt{2}+1)-\phi}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{\beta+\phi(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$16.5°$	$\frac{\beta(1-\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3})+\phi(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{\beta(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})-\phi(1-\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$19.5°$	$\frac{\phi\beta(-1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})-(\phi-1)(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{\phi\beta(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\phi-1)(-1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$22.5°$	$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$25.5°$	$\frac{\phi\beta(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})+(\phi-1)(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{\phi\beta(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})-(\phi-1)(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$28.5°$	$\frac{\beta(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})-\phi(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{\beta(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})+\phi(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$31.5°$	$\frac{\phi(\sqrt{2}+1)-\beta}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{\phi+\beta(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$34.5°$	$\frac{(\phi-1)(1-\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3})+\phi\beta(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{(\phi-1)(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})-\phi\beta(1-\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$37.5°$	$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)-1}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{\sqrt{3}+(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$40.5°$	$\frac{\phi\beta+(\phi-1)(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{\phi\beta(\sqrt{2}+1)-(\phi-1)}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$43.5°$	$\frac{\phi(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})+\beta(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{\phi(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})-\beta(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

1.13 Imposibilidad de hallar fórmulas para algunos ángulos

Para algunos ángulos θ no es posible encontrar una fórmula exacta para calcular su seno o su coseno. Un requisito necesario para la existencia de la fórmula es que el polígono de n lados, con $n = \dfrac{360°}{\theta}$, sea un polígono construible[8].

Por ejemplo, para el ángulo de $20°$ no existen fórmulas exactas para calcular su seno o su coseno ya que el polígono de $n = \dfrac{360°}{20°} = 18$ lados **no** es construible. Una consecuencia de ello es que no pueden hallarse fórmulas exactas para calcular el seno o el coseno de un ángulo de $1°$ ya que, si existieran, podría calcularse el seno de uno de $20°$

[8] El matemático alemán Karl Friedrich Gauss [1777-1855] realizó, en 1796 (a sus 19 años de edad) el siguiente descubrimiento: para que un polígono regular de n lados sea construible (con regla y compás) es necesario que se cumpla la igualdad

$$n = 2^t \cdot \prod_{i=1}^{5} p_i^{e_i}$$

donde los p_i son "primos de Fermat", $t \geq 0$ y los exponentes e_i mayores o iguales a 0.

con la Identidad #1.2

$$\text{sen}(21^\circ - 1^\circ) = \text{sen}(21^\circ) \cdot \cos(1^\circ) - \cos(21^\circ) \cdot \text{sen}(1^\circ)$$

lo cual contradice que no es posible, pues el polígono de 18 lados no es construible.

Por la misma razón no pueden hallarse fórmulas exactas para un ángulo de 0.5°. Entonces no se podrán hallar fórmulas exactas para los senos o los cosenos de ángulos que difieren en 0.5° de los ángulos que aparecen en los cuadros 1.11 y 1.2.

El mismo problema encontró Ptolomeo al calcular los valores numéricos de su tabla de cuerdas para ángulos que diferían en 0.5° de los ángulos múltiplos de 1.5° ya calculados:

> "si pudieramos calcular la longitud de la cuerda que subtiende un arco de $\frac{1}{2}^\circ$, entonces esa cuerda completaría el resto de cuerdas intermedias, por adición y substracción, a partir de las cuerdas separadas por $1\frac{1}{2}^\circ$ que ya fueron calculadas,...... Pero como, dada una cuerda tal como esa que subtiende un arco de $1\frac{1}{2}^\circ$, la cuerda de un tercio de ese arco no es de ninguna manera dada geométricamente, por lo tanto buscaremos la cuerda de un arco de 1° por medio de las cuerdas que subtienden arcos de $1\frac{1}{2}^\circ$ y $\frac{3}{4}^\circ$."
>
> ([1], pág. 19)

Entonces Ptolomeo usó un lema que afirma que la razón entre dos cuerdas es menor que la razón entre los ángulos correspondientes a esas cuerdas, para poder obtener una aproximación del valor de la cuerda de 1° a partir de las cuerdas de 1.5° y $\frac{3}{4}^\circ$ que ya había calculado.

1.14 Conclusiones

- Se ha definido una nueva constante matemática (a la que llamamos β), cuya utilidad ha resultado muy clara en este artículo.

- Al usar las constantes ϕ y β y sus propiedades, para calcular el valor de seno y el coseno de diferentes ángulos, se facilitan los cálculos algebraicos que permiten obtener expresiones sencillas y elegantes para sus valores respectivos.

- Se obtuvo una expresión poco conocida, para el área de un pentágono regular.

- Siguiendo el mismo procedimiento realizado por Ptolomeo para calcular su tabla de cuerdas, pero usando las constantes ϕ, β y sus propiedades en vez de usar valores numéricos, se obtuvieron expresiones (la mayoría no conocidas) que nos permiten calcular el valor de las funciones trigonométricas seno y coseno en función de esas constantes ϕ y β, para todos los ángulos múltiplos de 1.5° del primer octante.

- Se dio a conocer un método diferente para hallar una fórmula para $\cos\theta$ a partir de una fórmula conocida para el seno de ese mismo ángulo, de la forma

  $sen\,(\theta) = (A \cdot B \pm C \cdot D)/E.$

- Se dio a conocer un método diferente para hallar las fórmulas para $\text{sen}\,(45^\circ - \theta)$ y $\cos\,(45^\circ - \theta)$ a partir de una fórmula conocida para el seno de θ, de la forma

  $sen\,(\theta) = (A \cdot B \pm C \cdot D)/E.$

- Con este trabajo creemos que se ha logrado un avance significativo en esa poco explorada rama de la matemática conocida como " Trigonometría Áurea".

Bibliografía

[1] Benton, (1952) *Ptolomy, Copernicus, Kepler*. Encyclopedia Britannica, Inc. London, United Kindom: Britannica Great Books.

[2] Brummelen, G. (2013). *Heavenly Mathematics, The Forgotten Art of Spherical Trigonometry*. Princeton, New Jersey, USA: Princeton University Press.

[3] Camacho, L. (2015). *La Ciencia en su Historia*. San José, Costa Rica: Editorial de la Universidad Estatal a Distancia (EUNED)

[4] Densmore, D. (Ed).(2003). *Euclid's Elements*. Santa Fe, New Mexico, USA: Green Lyon Press.

[5] Posamentier, A.; Lehmann, I. (2012). *The Glorious Golden Ratio*. New York, USA: Prometheus Books..

[6] Walser, H. (2001). *The Golden Section*. The Mathematical Society of America. USA.

Anexo

Cálculo de sen 15° y cos 15°

$$\operatorname{sen}(15^\circ) = sen(45^\circ - 30^\circ) = sen(45^\circ)\,cos(30^\circ) - cos(45^\circ)\,sen(30^\circ)$$

$$\operatorname{sen}(15^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen}(15^\circ) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos(15^\circ) = cos(45^\circ - 30^\circ) = cos(45^\circ)\,cos(30^\circ) + sen(45^\circ)\,sen(30^\circ)$$

$$\cos(15^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos(15^\circ) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

Cálculo de sen 3° y cos 3°

$$\operatorname{sen}(3^\circ) = \operatorname{sen}(18^\circ - 15^\circ) = \operatorname{sen}18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \operatorname{sen}15^\circ$$

$$\operatorname{sen}(3^\circ) = \frac{\phi-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \frac{\phi\beta}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen}(3^\circ) = \frac{(\phi-1)(\sqrt{3}+1) - \phi\beta(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}$$

$$\cos(3^\circ) = \cos(18^\circ - 15^\circ) = \cos 18^\circ \cos 15^\circ - \operatorname{sen}18^\circ \operatorname{sen}15^\circ$$

$$\cos(3^\circ) = \frac{\phi\beta}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{\phi-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos(3^\circ) = \frac{(\phi-1)(\sqrt{3}-1) + \phi\beta(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}}$$

Cálculo de sen 12° y cos 12°

$$\operatorname{sen}(12^\circ) = sen(30^\circ - 18^\circ) = sen(30^\circ)\,cos(18^\circ) - cos(30^\circ)\,sen(18^\circ)$$

$$\operatorname{sen}(12^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\phi\beta}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\phi-1}{2} = \frac{\phi\beta - \sqrt{3}(\phi-1)}{4}$$

$$\operatorname{sen}(12^\circ) = \frac{\phi\beta - \sqrt{3}(\phi-1)}{4}$$

$$\cos(12^\circ) = cos(30^\circ - 18^\circ) = cos(30^\circ)\,cos(18^\circ) + sen(30^\circ)\,sen(18^\circ)$$

$$\cos(12^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\phi\beta}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\phi-1}{2} = \frac{\sqrt{3}\phi\beta + (\phi-1)}{4}$$

$$\cos(12^\circ) = \frac{\phi\beta\sqrt{3} + (\phi-1)}{4}$$

Cálculo de sen 21° y cos 21°

$$\text{sen}(21^\circ) = sen(30^\circ - 9^\circ) = sen(30^\circ)\,cos(9^\circ) - cos(30^\circ)\,sen(9^\circ)$$

$$\text{sen}(21^\circ) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\phi+\beta}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\phi-\beta}{2\sqrt{2}} = \frac{\phi+\beta-\sqrt{3}\phi+\sqrt{3}\beta}{4\sqrt{2}}$$

$$\text{sen}(21^\circ) = \frac{\beta(\sqrt{3}+1) - \phi(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}$$

$$\cos(21^\circ) = cos(30^\circ - 9^\circ) = cos(30^\circ)\,cos(9^\circ) + sen(30^\circ)\,sen(9^\circ)$$

$$\cos(21^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\phi+\beta}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\phi-\beta}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\phi+\sqrt{3}\beta+\phi-\beta}{4\sqrt{2}}$$

$$\cos(21^\circ) = \frac{\beta(\sqrt{3}-1) + \phi(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}}$$

Cálculo de sen 24° y cos 24°

$$\text{sen}(24^\circ) = sen(30^\circ - 6^\circ) = sen(30^\circ)\,cos(6^\circ) - cos(30^\circ)\,sen(6^\circ)$$

$$\text{sen}(24^\circ) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\phi\sqrt{3}+\beta}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\beta\sqrt{3}-\phi}{4} = \frac{\phi\sqrt{3}+\beta-3\beta+\sqrt{3}\phi}{8} = \frac{2\phi\sqrt{3}-2\beta}{8}$$

$$\text{sen}(24^\circ) = \frac{\phi\sqrt{3}-\beta}{4}$$

$$\cos(24^\circ) = cos(30^\circ - 6^\circ) = cos(30^\circ)\,cos(6^\circ) - sen(30^\circ)\,sen(6^\circ)$$

$$\cos(24^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\phi\sqrt{3}+\beta}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\beta\sqrt{3}-\phi}{4} = \frac{3\phi+\sqrt{3}\beta+\sqrt{3}\beta-\phi}{8} = \frac{2\phi+2\sqrt{3}\beta}{8}$$

$$\cos(24^\circ) = \frac{\phi+\sqrt{3}\beta}{4}$$

Cálculo de sen 27° y cos 27°

$$\text{sen}(27^\circ) = sen(18^\circ + 9^\circ) = sen(18^\circ)\,cos(9^\circ) + cos(18^\circ)\,sen(9^\circ)$$

$$\operatorname{sen}(27^\circ) = \frac{(\phi-1)}{2}\cdot\frac{(\phi+\beta)}{2\sqrt{2}} + \frac{\phi\beta}{2}\cdot\frac{(\phi-\beta)}{2\sqrt{2}} = \frac{\phi^2+\phi\beta-\phi-\beta+\phi^2\beta-\phi\beta^2}{4\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen}(27^\circ) = \frac{\phi+1+\phi\beta-\phi-\beta+\phi\beta+\beta-3\phi+\phi+1}{4\sqrt{2}} = \frac{2+2\phi\beta-2\phi}{4\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen}(27^\circ) = \frac{\phi\beta-(\phi-1)}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos(27^\circ) = cos(18^\circ+9^\circ) = cos(18^\circ)\,cos(9^\circ) - sen(18^\circ)\,sen(9^\circ)$$

$$\cos(27^\circ) = \frac{\phi\beta}{2}\cdot\frac{(\phi+\beta)}{2\sqrt{2}} - \frac{(\phi-1)}{2}\cdot\frac{(\phi-\beta)}{2\sqrt{2}} = \frac{\phi^2\beta+\phi\beta^2-\phi^2+\phi\beta+\phi-\beta}{4\sqrt{2}}$$

$$\cos(27^\circ) = \frac{\phi\beta+\beta+3\phi-\phi-1-\phi-1+\phi\beta+\phi-\beta}{4\sqrt{2}} = \frac{2\phi\beta+2\phi-2}{4\sqrt{2}}$$

$$\cos(27^\circ) = \frac{\phi\beta+(\phi-1)}{2\sqrt{2}}$$

Cálculo de sen 33° y cos 33°

$$\operatorname{sen}(33^\circ) = sen(15^\circ+18^\circ) = sen(15^\circ)\,cos(18^\circ) + cos(15^\circ)\,sen(18^\circ)$$

$$\operatorname{sen}(33^\circ) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\phi\beta}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\phi-1}{2}$$

$$\operatorname{sen}(33^\circ) = \frac{\phi\beta(\sqrt{3}-1)+(\phi-1)(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}}$$

$$\cos(33^\circ) = cos(15^\circ+18^\circ) = cos(15^\circ)\,cos(18^\circ) - sen(15^\circ)\,sen(18^\circ)$$

$$\cos(33^\circ) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\phi\beta}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\phi-1}{2}$$

$$\cos(33^\circ) = \frac{\phi\beta(\sqrt{3}+1)-(\phi-1)(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}$$

Cálculo de sen 39° y cos 39°

$$\operatorname{sen}(39^\circ) = sen(30^\circ+9^\circ) = sen(30^\circ)\,cos(9^\circ) + cos(30^\circ)\,sen(9^\circ)$$

$$\operatorname{sen}(39^\circ) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\phi+\beta}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\phi-\beta}{2\sqrt{2}} = \frac{\phi+\beta+\sqrt{3}\phi-\sqrt{3}\beta}{4\sqrt{2}} = \frac{\phi(\sqrt{3}+1)-\beta(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen}(39^\circ) = \frac{\phi(\sqrt{3}+1)-\beta(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}$$

$$\cos(39^\circ) = cos(30^\circ + 9^\circ) = cos(30^\circ)\,cos(9^\circ) - sen(30^\circ)\,sen(9^\circ)$$

$$\cos(39^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\phi+\beta}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\phi-\beta}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\phi+\sqrt{3}\beta-\phi+\beta}{4\sqrt{2}} = \frac{\phi(\sqrt{3}-1)+\beta(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}}$$

$$\cos(39^\circ) = \frac{\phi(\sqrt{3}-1)+\beta(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}}$$

Cálculo de $\operatorname{sen} 42^\circ$ y $\cos 42^\circ$

$$\operatorname{sen}(42^\circ) = \operatorname{sen}(30^\circ+12^\circ) = \operatorname{sen}(30^\circ)\cos(12^\circ) + \cos(30^\circ)\operatorname{sen}(12^\circ)$$

$$\operatorname{sen}(42^\circ) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\phi\beta\sqrt{3}+(\phi-1)}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\phi\beta-\sqrt{3}(\phi-1)}{4}$$

$$\operatorname{sen}(42^\circ) = \frac{\phi\beta\sqrt{3}+(\phi-1)+\phi\beta\sqrt{3}-3(\phi-1)}{8}$$

$$\operatorname{sen}(42^\circ) = \frac{\phi\beta\sqrt{3}-(\phi-1)}{4}$$

$$\cos(42^\circ) = \cos(30^\circ+12^\circ) = \cos(30^\circ)\cos(12^\circ) - \operatorname{sen}(30^\circ)\operatorname{sen}(12^\circ)$$

$$\cos(42^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\phi\beta\sqrt{3}+(\phi-1)}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\phi\beta-\sqrt{3}(\phi-1)}{4}$$

$$\cos(42^\circ) = \frac{3\phi\beta+\sqrt{3}(\phi-1)-\phi\beta+\sqrt{3}(\phi-1)}{8}$$

$$\cos(42^\circ) = \frac{\phi\beta+\sqrt{3}(\phi-1)}{4}$$

Cálculo detallado de $\operatorname{sen} 4.5^\circ$ y $\cos 4.5^\circ$

$$\operatorname{sen}(4.5^\circ) = \operatorname{sen}(6^\circ-1.5^\circ) = \operatorname{sen}(6^\circ)\cos(1.5^\circ) - \cos(6^\circ)\operatorname{sen}(1.5^\circ)$$

$$\operatorname{sen}(4.5^\circ) = \frac{\beta\sqrt{3}-\phi}{4}\cdot\frac{\left(\phi+\beta\sqrt{3}\right)(\sqrt{2}+1)+\left(\phi\sqrt{3}-\beta\right)}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} - \frac{\phi\sqrt{3}+\beta}{4}\cdot\frac{\left(\phi\sqrt{3}-\beta\right)(\sqrt{2}+1)-\left(\phi+\beta\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\operatorname{sen}(4.5^\circ) = \frac{(3\beta^2-\phi^2)(\sqrt{2}+1)+3\phi\beta-\cancel{\beta^2\sqrt{3}-\phi^2\sqrt{3}}+\phi\beta-\left((3\phi^2-\beta^2)(\sqrt{2}+1)-\phi\beta-\cancel{\beta^2\sqrt{3}-\phi^2\sqrt{3}}-3\phi\beta\right)}{16\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\operatorname{sen}(4.5^\circ) = \frac{(3\beta^2-\phi^2)(\sqrt{2}+1)+8\phi\beta-(3\phi^2-\beta^2)(\sqrt{2}+1)}{16\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

tomando en cuenta ahora que

$$3\beta^2-\phi^2 = 3(3-\phi)-(1+\phi) = 9-3\phi-1-\phi = 8-4\phi$$

y que

$$3\phi^2-\beta^2=3\,(1+\phi)-(3-\phi)=3+3\phi-3+\phi=4\phi$$

se tiene que

$$\operatorname{sen}(4.5^\circ)=\frac{(8-4\phi)\,(\sqrt{2}+1)+8\phi\,\beta-4\phi\,(\sqrt{2}+1)}{16\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\operatorname{sen}(4.5^\circ)=\frac{(\sqrt{2}+1)\,(8-4\phi-4\phi)+8\phi\,\beta}{16\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\operatorname{sen}(4.5^\circ)=\frac{(\sqrt{2}+1)\,(1-\phi)+\phi\,\beta}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\operatorname{sen}(4.5^\circ)=\frac{\phi\,\beta-(\phi-1)\,(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Cálculo detallado del seno de 10.5°.

$\operatorname{sen}(10.5^\circ)=\operatorname{sen}(6+4.5^\circ)=\operatorname{sen}(6^\circ)\cos(4.5^\circ)+\cos(6^\circ)\operatorname{sen}(4.5^\circ)$

$$\operatorname{sen}(10.5^\circ)=\frac{\beta\sqrt{3}-\phi}{4}\cdot\frac{\phi\,\beta\,(\sqrt{2}+1)+(\phi-1)}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\frac{\beta+\phi\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\phi\,\beta-(\phi-1)\,(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\operatorname{sen}(10.5^\circ)=\frac{\phi\,\beta^2\sqrt{3}\,(\sqrt{2}+1)+\beta\sqrt{3}\,(\phi-1)-\phi^2\,\beta\,(\sqrt{2}+1)-\phi\,(\phi-1)+\phi\,\beta^2-\beta\,(\phi-1)\,(\sqrt{2}+1)+\phi^2\,\beta\sqrt{3}-\phi\,(\phi-1)\sqrt{3}\,(\sqrt{2}+1)}{8\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

desarrollando y tomando en cuenta que $\phi\,(\phi-1)=1$ se tiene que

$$\operatorname{sen}(10.5^\circ)=\frac{\phi\,\beta^2\sqrt{2}\sqrt{3}+\phi\,\beta^2\sqrt{3}+\phi\,\beta\sqrt{3}-\beta\sqrt{3}-\phi^2\,\beta\sqrt{2}-\phi^2\,\beta-1+\phi\,\beta^2-\phi\,\beta\sqrt{2}-\phi\,\beta+\beta\sqrt{2}+\beta+\phi^2\,\beta\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{3}}{8\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\operatorname{sen}(10.5^\circ)=\frac{(2\phi-1)\sqrt{2}\sqrt{3}+(2\phi-1)\sqrt{3}+\phi\,\beta\sqrt{3}-\cancel{\beta\sqrt{3}}-(\phi+\cancel{1})\,\beta\sqrt{2}-(\phi+\cancel{1})\,\beta-1+(2\phi-1)-\phi\,\beta\sqrt{2}-\phi\,\beta+\cancel{\beta\sqrt{2}}+\cancel{\beta}+(\phi+\cancel{1})\,\beta\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{3}}{8\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\operatorname{sen}(10.5^\circ)=\frac{2\phi\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3}+2\phi\sqrt{3}-\sqrt{3}+\phi\,\beta\sqrt{3}-2\phi\,\beta\sqrt{2}-\phi\,\beta-1+2\phi-1-\phi\,\beta+\phi\,\beta\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{3}}{8\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\operatorname{sen}(10.5^\circ)=\frac{2\phi\sqrt{2}\sqrt{3}-2\sqrt{2}\sqrt{3}+2\phi\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2\phi\,\beta\sqrt{3}-2\phi\,\beta\sqrt{2}-2\phi\,\beta-2+2\phi}{8\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\operatorname{sen}(10.5^\circ)=\frac{\phi\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3}+\phi\sqrt{3}-\sqrt{3}+\phi\,\beta\sqrt{3}-\phi\,\beta\sqrt{2}-\phi\,\beta-1+\phi}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\operatorname{sen}(10.5^\circ)=\frac{\phi\,(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})-\phi\,\beta\,(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\operatorname{sen}(10.5^\circ)=\frac{(\phi-1)\,(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})-\phi\,\beta\,(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Cálculo detallado del seno de 34.5°.

$$\operatorname{sen}(45^\circ-10.5^\circ)=\operatorname{sen}(34.5^\circ)=\frac{(A+C)\,D-(A-C)\,B}{\sqrt{2}E}$$

esto es

$$\operatorname{sen}(34.5^\circ) = \frac{((\phi-1)+\phi\beta)(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})-((\phi-1)-\phi\beta)(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})}{\sqrt{2}\,E}$$

$$\operatorname{sen}(34.5^\circ) = \frac{\cancel{(\phi-1)}+(\phi-1)\sqrt{2}-(\phi-1)\sqrt{3}+\phi\beta+\phi\beta\sqrt{2}-\cancel{\phi\beta\sqrt{3}}-[\cancel{(\phi-1)}+(\phi-1)\sqrt{3}+(\phi-1)\sqrt{2}\sqrt{3}-\phi\beta-\cancel{\phi\beta\sqrt{3}}-\phi\beta\sqrt{2}\sqrt{3}]}{\sqrt{2}\,E}$$

$$\operatorname{sen}(34.5^\circ) = \frac{(\phi-1)\sqrt{2}-(\phi-1)\sqrt{3}+\phi\beta+\phi\beta\sqrt{2}-(\phi-1)\sqrt{3}-(\phi-1)\sqrt{2}\sqrt{3}+\phi\beta+\phi\beta\sqrt{2}\sqrt{3}]}{\sqrt{2}\,E}$$

$$\operatorname{sen}(34.5^\circ) = \frac{(\phi-1)(\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3})+\phi\beta(2+\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3})}{\sqrt{2}\,E}$$

$$\operatorname{sen}(34.5^\circ) = \frac{(\phi-1)(1-\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{3})+\phi\beta(\sqrt{2}+1+\sqrt{3})}{E}$$

$$\operatorname{sen}(34.5^\circ) = \frac{(\phi-1)(1-\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3})+\phi\beta(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Cálculos de Posamentier para hallar el valor exacto del segmento OK

Posamentier[9] previamente había calculado que el segmento BK de la Figura 1.5 medía

$$BK = L_5\cdot\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{4}}$$

y el segmento BO (igual al radio del círculo) medía

$$BO = L_5\cdot\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

Entonces

$$OK = BK - BO = L_5\cdot\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{4}} - L_5\cdot\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

multiplicando por $\dfrac{\sqrt{20}}{L_5}$ se obtiene que

$$\frac{\sqrt{20}}{L_5}OK = \frac{\cancel{\sqrt{4}}\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{4}}} - \frac{\cancel{\sqrt{10}}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{10}}}$$

$$\frac{\sqrt{20}}{L_5}OK = \sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}} - \sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$

elevando al cuadrado

[9] Los cálculos mostrados están basados en [5], pág. 150 y pág. 311.

$$\begin{aligned}
\frac{20\,(OK)^2}{L_5^2} &= 25+10\sqrt{5}+10+2\sqrt{5}-2\sqrt{25+10\sqrt{5}}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \\
&= 35+12\sqrt{5}-2\sqrt{250+50\sqrt{5}+100\sqrt{5}+100} \\
&= 35+12\sqrt{5}-2\sqrt{350+150\sqrt{5}} \\
&= 35+12\sqrt{5}-2\sqrt{225+2\cdot 15\cdot 5\sqrt{5}+125} \\
&= 35+12\sqrt{5}-2\sqrt{\left(15+5\sqrt{5}\right)^2} \\
&= 35+12\sqrt{5}-2\left(15+5\sqrt{5}\right) \\
&= 35+12\sqrt{5}-30-10\sqrt{5} \\
&= 5+2\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Posamentier concluye entonces que

$$OK = L_5\cdot\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \quad \blacksquare$$

Fórmulas de "Trigonometría Áurea" para las funciones Seno y Coseno . George Braddock S.
Derechos Reservados © 2020 Revista digital Matemática, Educación e Internet. ISSN 1659-0643. (https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/)