# CÁLCULO SUPERIOR.
## SUPERFICIES Y SÓLIDOS.

### PDF Interactivo (Versión 1.0)

Puede ver y manipular las figuras en 3D haciendo clic sobre ellas (necesita una conexión a Internet).

**Prof. Walter Mora F.,**
**Prof. Gilberto Vargas M.**
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica.
Marzo, 2011.



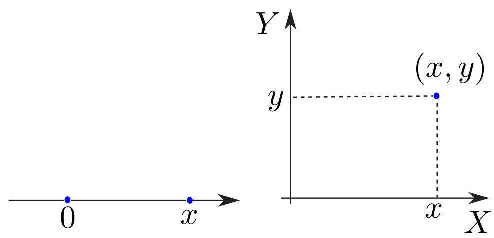
Se recomienda usar el navegador Google Chrome.
Si no tiene Java instalado, descargar en www.java.com
(Los usuarios de Ubuntu 64 bits podrían necesitar cambiar 'icedtea6' por 'sun-java6-plugin')

# Contenido

# 2 SUPERFICIES Y SÓLIDOS.

## 2.1 Espacio tridimensional. Coordenadas cartesianas.

Una vez que se ha especificado una unidad de medida, un número $x \in \mathbb{R}$ puede ser usado para representar un punto en una línea, un par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se puede usar para representar un punto en un plano,

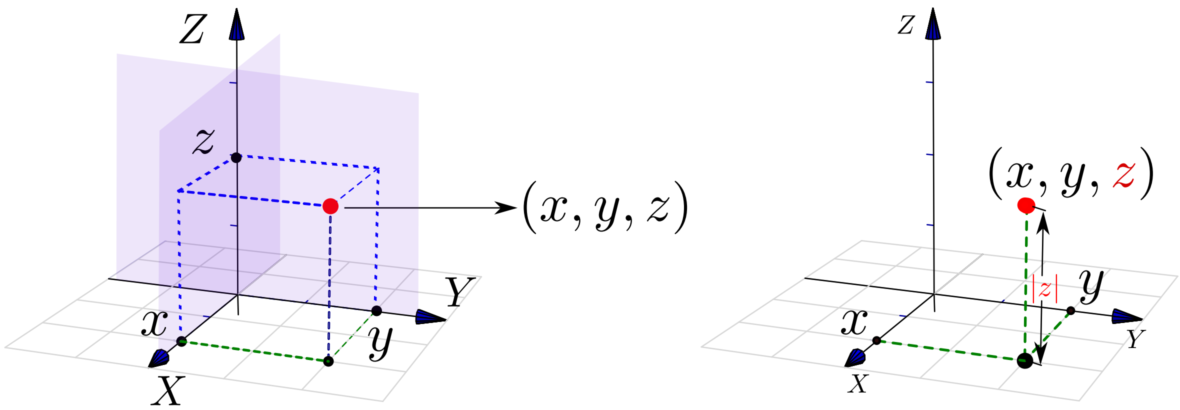



(a) Punto en una línea (b) Punto en el plano

**Figura 2.1**

De manera análoga, un triple $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se puede usar para representar un punto en el espacio tridimensional. Tomamos un punto fijo cualquiera $O$, llamado *origen*, y tres planos distintos, mutuamente perpendiculares, que pasan por $O$. Los planos se intersecan en pares en tres rectas (ejes) mutuamente perpendiculares que pasan por $O$ llamadas $X$, $Y$ y $Z$. Para hacer la representación en un plano podemos trazar el eje $Y$ y el eje $Z$ de frente y la parte positiva del eje $X$ se representa en una dirección aproximadamente sur-oeste, para simular profundidad (perpectiva). Dibujamos $(x,y)$ en el plano $XY$ y, desde este punto, dibujamos un segmento paralelo al eje $Z$ y orientado de acuerdo al signo de $z$ y de longitud $|z|$, como se muestra en la figura (2.1, b). Si tiene conexión a Internet, puede hacer clic en la figura, esto lo llevará a una página Web con un 'applet' con el que se podrá hacer una idea más clara.

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)




(a) Coordenadas cartesianas (b) Punto $P = (x,y,z)$

**Figura 2.2**

**Ejemplo 1.**

Los puntos en el eje $X$ tienen coordenadas $(x,0,0)$, $x \in \mathbb{R}$, los puntos en el eje $Y$ tienen coordenadas $(0,y,0)$, $y \in \mathbb{R}$ y los puntos en el eje $Z$ tienen coordenadas $(0,0,z)$, $z \in \mathbb{R}$. En la figura que sigue se muestran cinco ejemplos de puntos en el espacio.

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

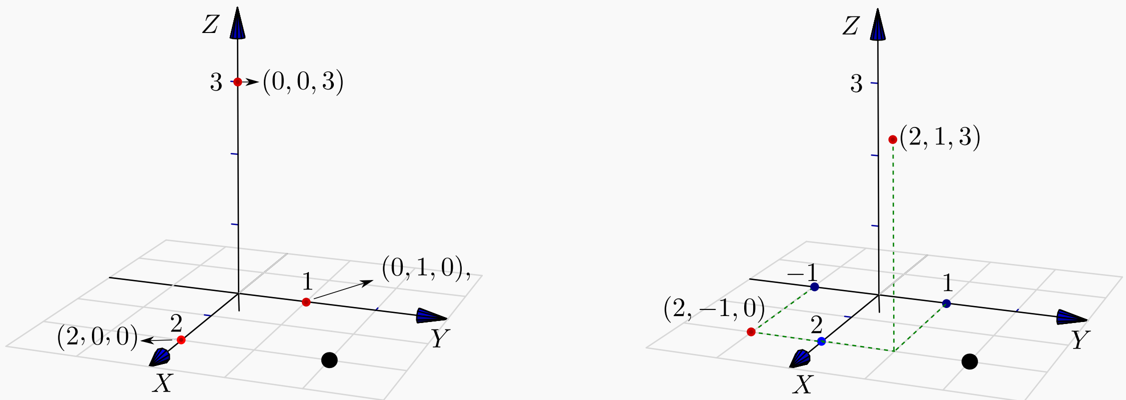
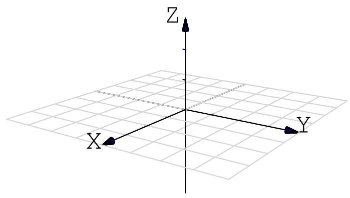


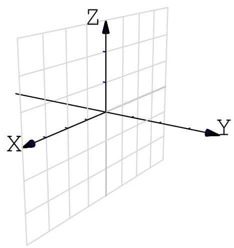

**Figura 2.3** Puntos $(2,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,3)$, $(2,1,3)$ y $(2,-1,0)$.

Planos $XY$, $XZ$ y $YZ$. Los ejes coordenados determinan tres planos, el plano $XY$ es el plano que contiene el eje $X$ y el eje $Y$, el plano $XZ$ es el plano que contiene el eje $X$ y el eje $Z$ y el plano $YZ$ es el plano que contiene el eje $Y$ y el eje $Z$.

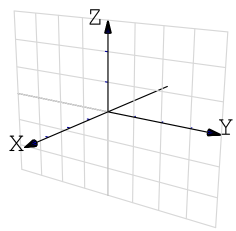
Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)




Plano $XY$



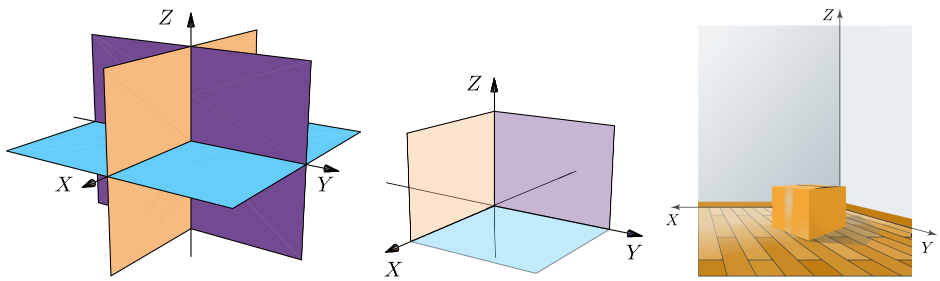

Plano $XZ$




Plano $YZ$

El primer octante. Los planos $XY$, $XZ$ y $YZ$ dividen el espacio en ocho partes llamadas *octantes*. El primer octante corresponde a la parte positiva de los ejes.

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)



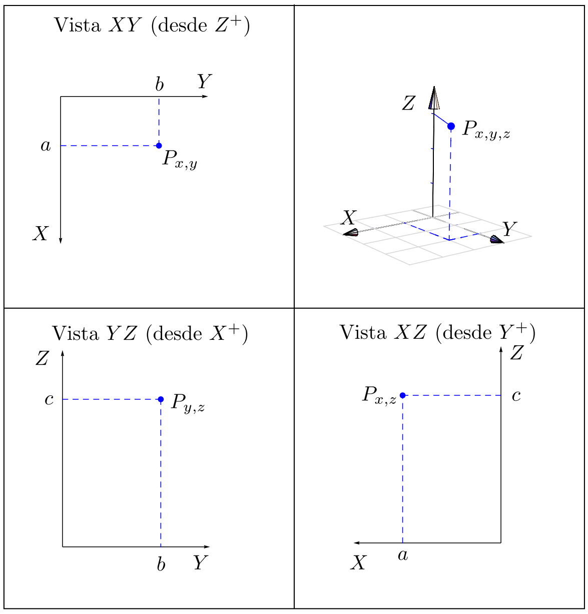

(a) Octantes

(b) Primer octante

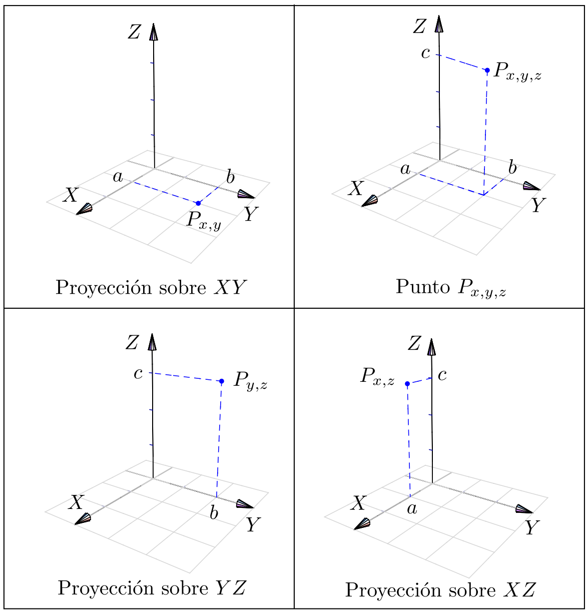
(c) Habitación-primer octante

Vistas isométricas de un punto. Considere el punto $P_{x,y,z} = (a,b,c)$ en el espacio tridimensional, se define *la vista* de este punto en el plano $XY$ como el punto $P_{x,y} = (a,b,0)$. Análogamente se define la vista en el plano $YZ$ como $P_{y,z} = (0,b,c)$ y la vista en el plano $XZ$ como $P_{x,z} = (a,0,c)$.

En la siguiente figura se muestra una manera de utilizar las vistas como una guía para la mejor comprensión de objetos 3D.




Estas vistas también se denominan "proyecciones perpendiculares" del punto en el plano respectivo.




## 2.2 Funciones de dos variables

Una función de dos variables $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$, asigna a cada par $(x,y) \in D$, un único número real denotado con $f(x,y)$. El gráfico de $f$ es el conjunto $\{(x,y,z) \,:\, x,y \in D \ \text{ y } \ z = f(x,y)\}$.

El criterio (fórmula) que define a $f$ puede ser explícito o implícito. Para hablar de una función de dos variables se escribe $z = f(x,y)$ o $F(x,y,z) = 0$.

**Ejemplo 2.**

- Forma explícita: $z = x^2 + y^2$ o equivalentemente $f(x,y) = x^2 + y^2$.
- Forma implícita: $\overbrace{z^2 + y^2 + z^2 - 1}^{F(x,y,z)} = 0;\ z \geq 0$.

La representación gráfica de $f$ corresponde a la representación de todos los puntos $(x,y,z)$ que satisfacen la ecuación $z = f(x,y)$ o $F(x,y,z) = 0$.

Como en funciones de una variable, el dominio máximo de $f$ es el conjunto de puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $z = f(x,y)$ este bien definida.

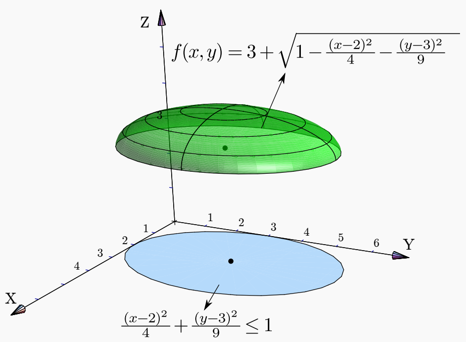
**Ejemplo 3.**

Consideremos la función $f(x,y) = 3 + \sqrt{1 - \dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{(y-3)^2}{9}}$. La función está bien definida si el subradical $1 - (x-2)^2/4 - (y-3)^2/9 \geq 0$, entonces el dominio máximo de esta función es el conjunto

$$D_f = \{(x,y)\ :\ \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} \leq 1\},$$

es decir, $D_f$ es la región encerrada por la elipse $(x-2)^2/4 + (y-3)^2/9 = 1$ (incluido el borde).

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

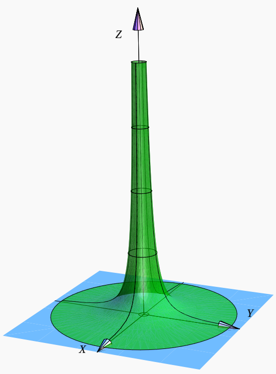


**Ejemplo 4.**

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

La función $z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ solo se indefine en el origen $(0,0,0)$, entonces el dominio máximo de esta función es el conjunto

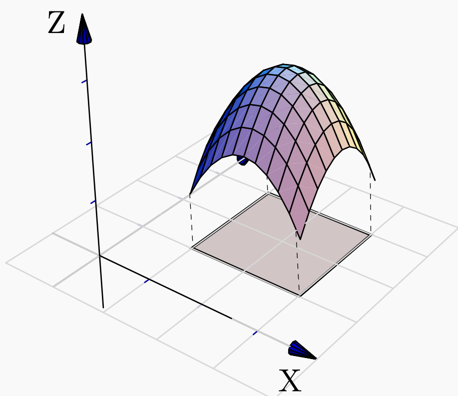
$$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$




**Ejemplo 5.**

Consideremos la función $f(x,y) = 3-(x-2)^2-(y-2)^2$. Su dominio máximo es $\mathbb{R}^2$. Frecuentemente hacemos la representación gráfica de $f$ sobre un *dominio restringido*, por ejemplo sobre el conjunto $D = [1,3]\times[1,3]$,

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)




## 2.3 Curvas y superficies en $\mathbb{R}^3$

Nos interesan las superficies de ecuación $z = f(x,y)$, es decir, las superficies formadas por los puntos $(x,y,z)$ que satisfacen la ecuación $z = f(x,y)$ o también en la forma $F(x,y,z) = 0$.

A veces decimos "superficie de ecuación (explícita) $z = f(x,y)$" o "superficie de ecuación (implícita) $F(x,y,z) = 0$". Como sugiere el ejemplo 5, un bosquejo de una superficie se puede hacer con un conjunto de curvas; a estas curvas se les llama 'trazas' o 'cortes verticales y horizontales'. En esta sección vamos a ocuparnos con superficies simples: Planos, superficies cilíndricas y superficies cuádricas.

### 2.3.1 Curvas en el espacio.

Una manera de describir una curva en el plano $XY$ es por medio de su ecuación cartesiana $F(x,y) = c$. Por ejemplo, una circunferencia de radio $a$ tiene ecuación: $x^2 + y^2 = a^2$. Desde este punto de vista, una curva $C$ definida por esta ecuación es un conjunto de puntos, a saber,

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = c\}$$

Las curvas en $\mathbb{R}^3$ podrían ser definidas por un par de ecuaciones (como intersección de dos superficies),

$$F_1(x,y,z) = c_1\,; \;\; F_2(x,y,z) = c_2,$$

Por ejemplo, una circunferencia centrada en el origen y de radio $a$ en el plano $XY$:

$$x^2 + y^2 = a^2;\;\; z = 0.$$

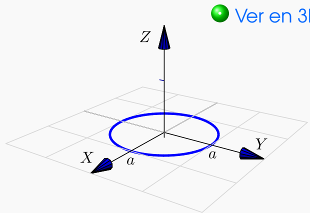
Otra manera de definir una curva es como el lugar geométrico de un punto en movimiento, $r(t)$ es la posición del punto en el instante $t$. La curva es descrita por una función $r(t)$ de parámetro $t$ que devuelve valores en $\mathbb{R}^2$, si es una curva plana, o en $\mathbb{R}^3$ si es una curva en el espacio. Por ejemplo $r(t) = (a\cos t,\, a\,\text{sen}\, t, 0);\; t \in [0, 2\pi]$ es una parametrización de una circunferencia, centrada en el origen, de radio $a$ en el plano $XY$.

**Ejemplo 6.**

En el espacio tridimensional, una circunferencia en el plano $XY$, de radio $a$ y centrada en el origen se puede describir de varias maneras, por ejemplo,

- Ecuación cartesiana: $x^2 + y^2 = a^2;\;\; z = 0.$
- Ecuación paramétrica: $r(t) = (r\cos t,\, r\,\text{sen}\, t,\, 0);\;\; t \in [0, 2\pi].$

Ver en 3D




Curvas en los planos $XY$, $XZ$ y $YZ$. En general, "$F(x,y) = 0;\; z = 0$" es la ecuación de una curva en el plano $XY$. De manera análoga, "$F(x,z) = 0;\; y = 0$" corresponde a una curva en el plano $XZ$ y "$F(y,z) = 0;\; x = 0$" corresponde a una curva en el plano $YZ$.

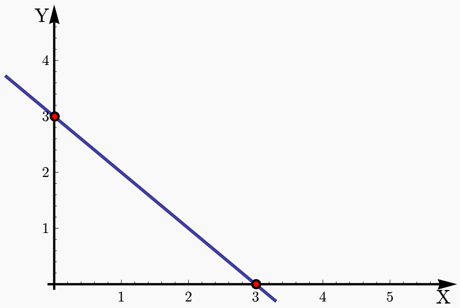
**Ejemplo 7.**

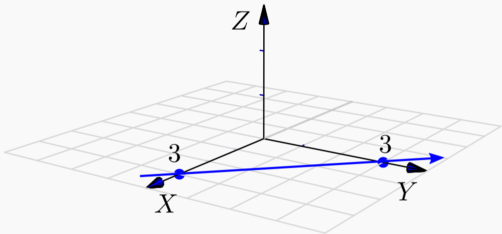
Realizar la representación gráfica, en el espacio, de la curva $C_1 : x + y = 3; z = 0$

Ver en 3D

**Solución:**

La curva $C_1 : x + y = 3;\ z = 0$, corresponde a una recta en el plano $XY$. Interseca al eje $X$ en $x = 3$ y al eje $Y$ en $y = 3$.



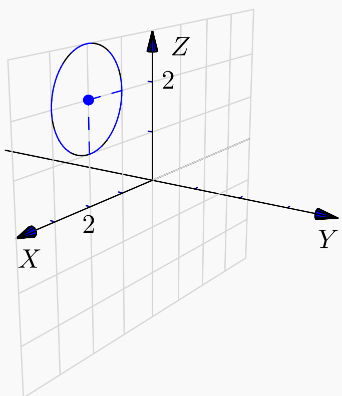

**Ejemplo 8.**

Realizar la representación gráfica, en el espacio, de la curva $C_2 : (x-2)^2 + (z-2)^2 = 1; y = 0$.

Ver en 3D

**Solución:**

La curva $C_2 : (x-2)^2 + (z-2)^2 = 1;\ y = 0$ corresponde a una circunferencia de radio 1 en el plano $XZ$. Su centro es $(2,0,2)$.



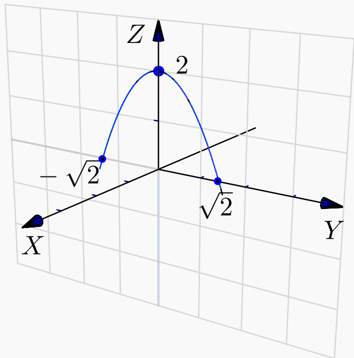
**Ejemplo 9.**

Realizar la representación gráfica, en el espacio, de la curva $C_3 : z = 2 - y^2;\ x = 0$.

Ver en 3D

**Solución:**

La curva $C_3$ es la parábola $: y^2 = -(z-2)$ (cóncava hacia abajo) en el plano $YZ$. El vértice es $(0,0,2)$ e interseca al eje $X$ en $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$.



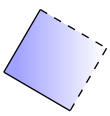

**EJERCICIOS (Curvas en el espacio)**

**2.1** Realizar la representación gráfica, en el espacio, de las curvas

**a)** $z = 4 - x^2;\ y = 0$.
**b)** $(z-2)^2 + (y-2)^2 = 4;\ x = 0$.
**c)** $\dfrac{(y-1)^2}{4} + x^2 = 1;\ z = 0$.
**d)** $z + 2y = 4;\ x = 0$.

**2.2** ¿Es $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 0$ la ecuación de una curva?

### 2.3.2 Planos



Posiblemente los planos son las superficies más sencillas de dibujar. La ecuación cartesiana de un plano es $ax + by + cz = d$ con con $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ (se prohíbe el caso $a = b = c = 0$). Para realizar la representación gráfica de un plano $\Pi$ nos basamos en el hecho de que si $P, Q$ son dos puntos en este plano, entonces la recta (o cualquier segmento de ella) que contiene a estos puntos, está en el plano. En la práctica necesitamos al menos dos segmentos de recta para dibujar una parte del plano, mediante un triángulo o un paralelogramo.

#### Planos de ecuación cartesiana con dos variables ausentes.

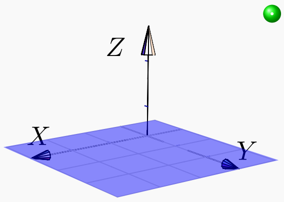
Las variables ausentes indican que están multiplicadas por cero en la ecuación cartesiana y, por tanto, pueden tomar valores arbitrarios. Por ejemplo el plano $0 \cdot x + 0 \cdot y + z = 2$ es el plano $z = 2$.

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

**Ejemplo 10.**

Ver en 3D

El plano $z = 0$ lo constituyen todos los puntos de la forma $(x,y,0)$ con $x,y \in \mathbb{R}$ arbitrarios, es decir, el plano $z = 0$ es el plano $XY$.



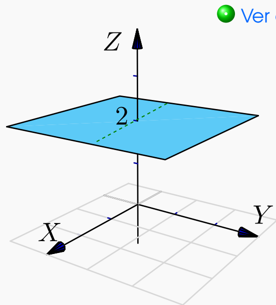

**Ejemplo 11.**

Dibujar el plano $z = 2$.

**Solución:**

Ver en 3D

El plano $z = 2$ lo constituyen todos los puntos de la forma $(x,y,2)$ con $x,y \in \mathbb{R}$arbitrarios, es decir, es un plano paralelo al plano $XY$ que pasa por $z = 2$.



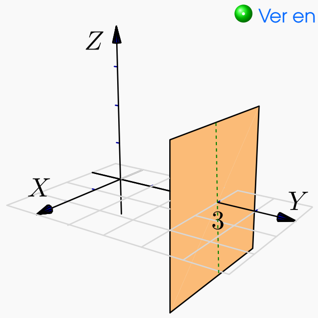

**Ejemplo 12.**

Dibujar el plano $y = 3$.

**Solución:**

Ver en 3D

El plano $y = 3$ lo constituyen todos los puntos de la forma $(x,3,z)$ con $x,z \in \mathbb{R}$, es decir, es un plano paralelo al plano $YZ$ que pasa por $y = 3$.




## Planos de ecuación cartesiana con una variable ausente.

Cuando hay una variable ausente (con coeficiente nulo), el plano está 'generado' por la recta determinada por las variables presentes.

**Ejemplo 13.**

Dibujar el plano $x+y=2$.

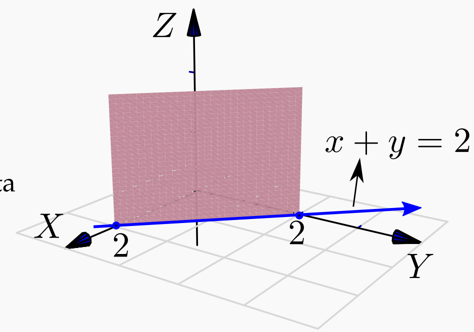
**Solución:**

Ver en 3D

El plano $x+y=2$ corresponde a la superficie

$$\{(x,y,z)\ :\ x+y=2\},$$

es decir, las coordenadas $x$ e $y$ deben estar sobre la recta $x+y=2$ y la coordenada $z$ es arbitraria.




## Planos de ecuación cartesiana sin variables ausentes.

Podemos distinguir entre los que pasan por el origen y los que no.

Una forma sencilla para dibujar planos que *no* contienen el origen consiste en determinar la intersección del plano con cada eje coordenado y trazar los segmentos de recta que unen estos puntos. En caso necesario, se pueden extender dos de estos segmentos y formar un paralelogramo.

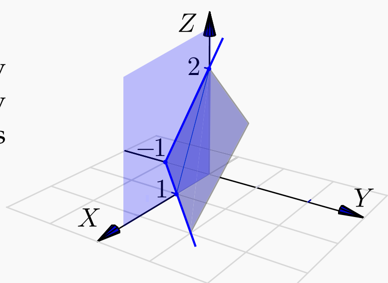
**Ejemplo 14.**

Dibujar el plano $4x-4y+2z=4$

**Solución:**

Ver en 3D

El plano interseca a los ejes coordenados en $x=1$, $y=-1$ y $z=2$. Podemos usar el segmento que va de $x=1$ a $y=-1$ y el segmento que va de $y=-1$ a $z=2$. Con estos dos segmentos podemos dibujar un paralelogramo.




Para dibujar planos que contienen el origen se anula una de las variables y se dibuja una primera recta resultante en el plano correspondiente. Luego se anula otra variable y se dibuja una segunda recta en el plano correspondiente. Tomamos dos segmentos, uno en cada recta y formamos un paralelogramo.

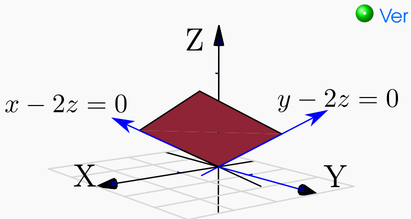
**Ejemplo 15.**

Dibujar el plano $x+y-2z=0$.

**Solución:**

Como el plano $x+y-2z=0$ pasa por el origen, podemos usar la recta $x-2z=0$ (con $y=0$) y la recta $y-2z=0$ (con $x=0$) para dibujar un paralelogramo que represente al plano.

Ver en 3D




**EJERCICIOS (Planos)**

**2.3** Dibujar los planos

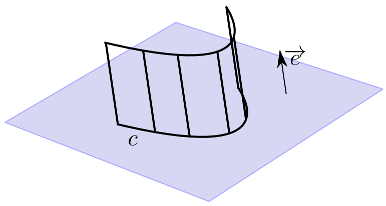
**a)** $2z+y=2$
**b)** $x=2$
**c)** $x-y-z=0$
**d)** $x+y-z=2$
**e)** $2x+2y+2z=2$

**2.4** Dibujar el plano $4x-4y+2z=4$ en el primer octante.

### 2.3.3 Superficies cilíndricas o "cilindros".

El término "cilindro" tiene varios significados relacionados y puede ser un concepto algo confuso. La palabra "cilindro" probablemente evoque la imagen de un cilindro circular recto, pero en cálculo en varias variables *un cilindro* (cilindro generalizado) se refiere a una superficie generada por una curva: Un cilindro es una superficie formada por una familia de rectas paralelas, llamadas *generatrices*, que pasan por los puntos respectivos de una cierta curva *directriz.* Si la directriz vive en un plano y si la generatriz es perpendicular a este plano, el cilindro se le dice "cilindro recto". Un cilindro es un caso particular de una superficie *reglada.*

En este libro solo se consideran cilindros (generalizados) de ecuación $r(t,s)=c(t)+s\cdot\overrightarrow{e}$; $t\in I$, $s\in\mathbb{R}$ donde $c(t)$ es la parametrización de una curva que está en alguno de los plano $XY$, $YZ$ o $XZ$ y $\overrightarrow{e}$ es un vector perpendicular al plano correspondiente.



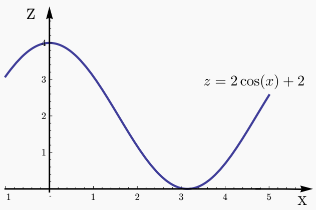

En este libro, la línea generatriz es el eje asociado a al variable ausente!

Es decir, en nuestro caso, las superficies con ecuación en *dos* de las tres variables $x,y$ y $z$ van a ser cilindros rectos, con línea generatriz paralela al eje asociado con la variable ausente.Por ejemplo, el cilindro de ecuación $z=1-x^2$ tiene generatriz paralela al eje $Y$ mientras que el cilindro $y^2+(z-1)^2=1$ tiene generatriz paralela al eje $X$.

**Ejemplo 16.**

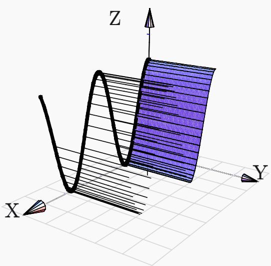
Dibujar el cilindro de ecuación $z = 2\cos(x) + 2$.

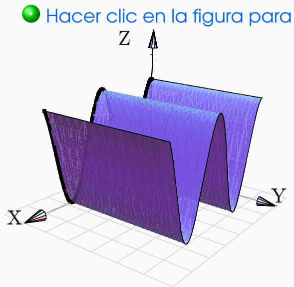
**Solución:**
Primero deberíamos dibujar la curva de ecuación $z = 2\cos(x) + 2$ en el plano $XZ$.




Luego, según nuestro convenio, la superficie cilíndrica $z = 2\cos(x) + 2$ tiene línea generatriz paralela al eje $Y$:

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)



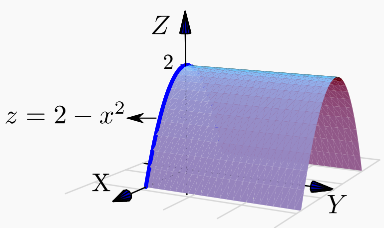




**Ejemplo 17.**

Dibujar el cilindro de ecuación $z = 2 - x^2$.

**Solución:**
La superficie cilíndrica generada por $z = 2 - x^2$ con línea generatriz paralela al eje $Y$:

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)



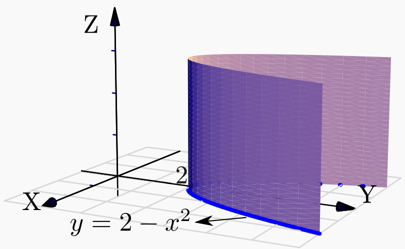
**Ejemplo 18.**

Dibujar el cilindro de ecuación $y = x^2 + 2$.

**Solución:**

La superficie cilíndrica generada por $y = x^2 + 2$ tiene su línea generatriz paralela al eje $Z$:

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)



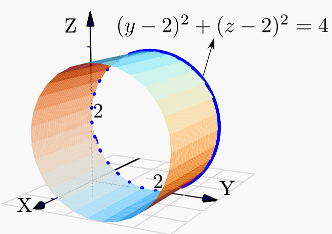

**Ejemplo 19.**

Dibujar el cilindro de ecuación $(y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$.

**Solución:**

La superficie cilíndrica generada por la circunferencia $(y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$ tiene su línea generatriz paralela al eje $X$:

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)




## 2.4 Superficies cuadráticas.

Rotar una cónica (no degenerada) alrededor de su eje focal, por ejemplo, produce un caso especial de un conjunto más general de superficie llamadas *superficies de segundo orden.* Estas superficies satisfacen una ecuación de segundo grado en $x$; $y$ y $z$ y también son llamadas *superficies cuadráticas* o *cuádricas.*

La curva de intersección entre un plano y una superficie cuadrática es una cónica. Hay 17 tipos estándar de cuádricas, algunas de ellas son: paraboloide, esfera, esferoide, elipsoide, cono, hiperboloide, cilindro, cono elíptico, cilindro elíptico, hiperboloide elíptico, paraboloide elíptico, etc.

Aquí solo consideramos cuádricas en posición estándar (sin rotación). Estas superficies tienen ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0.$$

### 2.4.1 Curvas de nivel y trazas.

Si $S$ es una superficie en el espacio de ecuación $F(x,y,z) = 0$, todos los pares $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen la ecuación $F(x,y,c) = 0$ definen una curva en el plano $XY$. A esta curva se le llama *curva de nivel* de la superficie $S$.

También nos interesa dibujar la curva como una curva en el espacio. Por abuso del lenguaje se dice "la curva de nivel $z = c$" para indicar la curva de nivel "$F(x,y,c) = 0$, $z = 0$". ('Iso $z$' —el mismo $z$ para los $x$ e $y$). A las curvas "$F(x,y,c) = 0$, $z = c$" les llamamos 'trazas' o 'cortes' de la superficie.

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

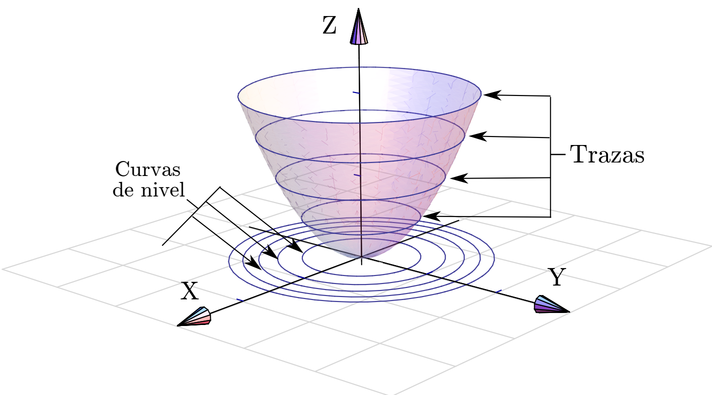



**Figura 2.4** Superficie $z = x^2 + y^2$ y algunas curvas de nivel y algunas trazas.

**Ejemplo 20.**

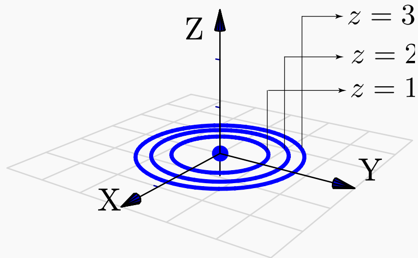
Consideremos la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$. Como $z$ es una suma de cuadrados, $z$ debe ser $\geq 0$. Vamos a dibujar las curvas de nivel correspondientes a $z = 0,1,2$ y $z = 3$.

- La curva de nivel $z = 0$ es el punto $(0,0,0)$
- La curva de nivel $z = 1$ es la circunferencia $1 = x^2 + y^2$

**Continuación...**

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

- La curva de nivel $z=2$ es la circunferencia $2=x^2+y^2$
- La curva de nivel $z=3$ es la circunferencia $3=x^2+y^2$



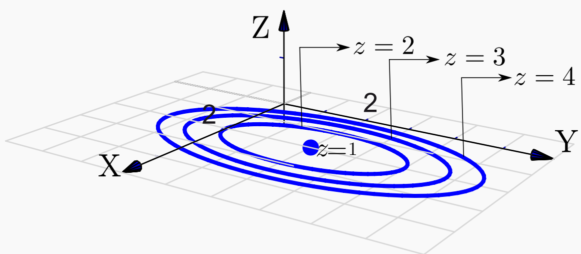

**Ejemplo 21.**

Consideremos la superficie de ecuación $z-1=(x-2)^2+\dfrac{(y-2)^2}{4}$. Dibujar las curvas de nivel correspondientes a $z=1,2,3$ y $z=4$.

**Solución:**

- La curva de nivel $z=1$ es el punto $(2,2,0)$.
- La curva de nivel $z=2$ es la elipse $1=(x-2)^2+\dfrac{(y-2)^2}{4}$.
- La curva de nivel $z=3$ es la elipse $2=(x-2)^2+\dfrac{(y-2)^2}{4}$, es decir, $1=\dfrac{(x-2)^2}{2}+\dfrac{(y-2)^2}{8}$.
- La curva de nivel $z=4$ es la elipse $3=(x-2)^2+\dfrac{(y-2)^2}{4}$, es decir, $1=\dfrac{(x-2)^2}{3}+\dfrac{(y-2)^2}{12}$.

Ver en 3D




Trazas o cortes. Con el fin de realizar el dibujo de una superficie $S$ de ecuación explícita $z=f(x,y)$ o de ecuación implícita $F(x,y,z)=0$, procedemos a realizar cortes a esta superficie con planos paralelos a los planos coordenados. Estas curvas son llamadas *trazas o cortes* y producen un dibujo 'de alambre' de la superficie a dibujar.

Para describir las trazas por ecuaciones se procede de la siguiente manera:

- Si la traza resulta de la intersección de la superficie $S$ con el plano $x = c$, entonces su ecuación es "$z = f(c, y)$; $x = c$" o "$F(c, y, z) = 0$; $x = c$," y se representa en el plano $x = c$.

- Si la traza resulta de la intersección de la superficie $S$ con el plano $y = c$, entonces su ecuación es "$z = f(x, c)$; $y = c$" o "$F(x, c, z) = 0$; $y = c$," y se representa en el plano $y = c$.

- Si la traza resulta de la intersección de la superficie $S$ con el plano $z = c$, entonces su ecuación es "$c = f(x, y)$, $z = c$" o "$F(x, y, c) = 0$, $z = c$" y se representa en el plano $z = c$.

**Ejemplo 22.**

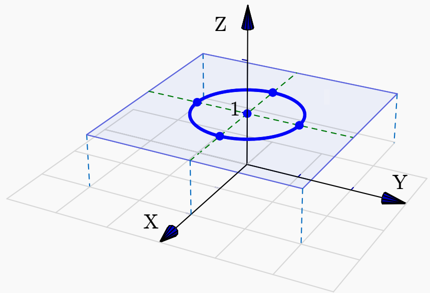
Consideremos la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$. Dibujar la traza $z = 1$.

Ver en 3D

**Solución:** La traza $z = 1$ es la circunferencia

$$1 = x^2 + y^2; \quad \text{con} \quad z = 1.$$

La curva se representa en el plano $z = 1$. Como la circunferencia vive en el plano $z = 1$, para dibujarla ubicamos su centro $(0,0,1)$ y trazamos un par de rectas paralelas a los ejes $X$ e $Y$ que pasen por este punto, estas líneas las podemos usar como "semiejes" para dibujar este tipo de elipse.




Estrategia general. Para dibujar trazas una estrategia consiste en trasladar los ejes al plano de dibujo: $x = c$; $y = c$ o $z = c$.

Ver en 3D

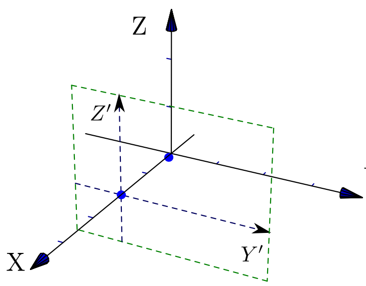



**Figura 2.5** Traslación de ejes

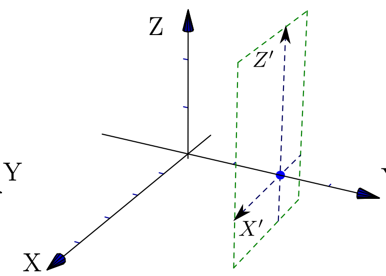



**Figura 2.6** Traslación de ejes

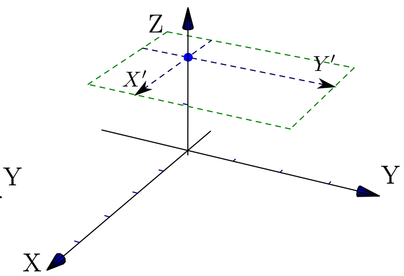



**Figura 2.7** Traslación de ejes

Por ejemplo, consideremos la superficie $S$ de ecuación $4(y-1)^2+4(z-1)^2=x^2$. La traza $x=2$ es la curva "$(y-1)^2+(z-1)^2=1;\ x=2$." Para dibujar la traza primero trasladamos los ejes al plano $x=2$ (figura 2.8), luego dibujamos la curva en el plano $YZ$ (figura 2.9), finalmente dibujamos la curva "$(y-1)^2+(z-1)^2=1;\ x=2$" usando los ejes $Y'Z'$ (figura 2.10).

Ver en 3D

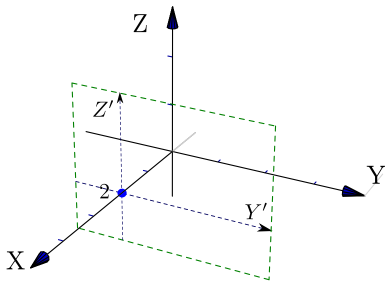



**Figura 2.8** Traslación de ejes

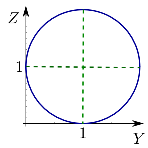



**Figura 2.9**

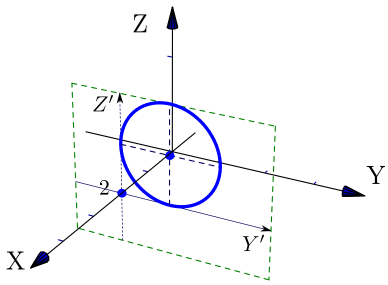


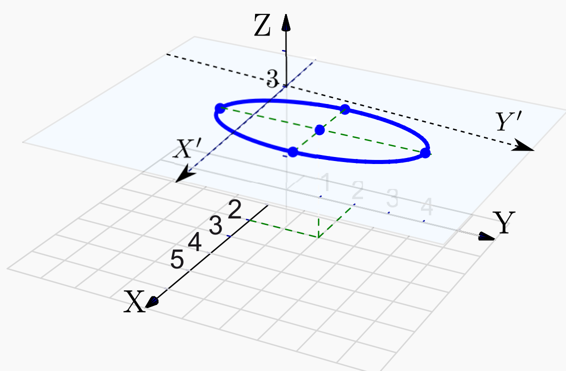

**Figura 2.10** Traza $x=2$

**Ejemplo 23.**

Consideremos la superficie de ecuación $z-1=(x-2)^2+\dfrac{(y-2)^2}{4}$. Dibujar la traza $z=3$.

**Solución:** La traza $z=3$ es la elipse $1=\dfrac{(x-2)^2}{2}+\dfrac{(y-2)^2}{8}$ en el plano $z=3$. Como la elipse vive en el plano $z=3$, para dibujarla ubicamos su centro $(2,2,3)$ y trazamos un par de rectas paralelas a los ejes $X$ e $Y$ que pasen por este punto, estas líneas las podemos usar como "semiejes" para dibujar la elipse.

Ver en 3D

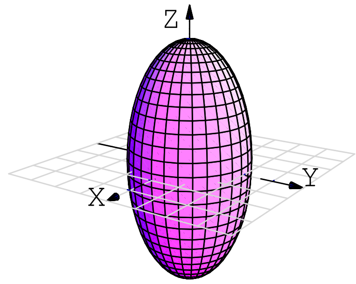



### 2.4.2 Cuádricas

Nos interesan las cuádricas de ecuación $Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+G=0$. Excepto casos degenerados, completando cuadrados podemos obtener la ecuación canónica de cada superficie cuadrática. A continuación se muestra algunas cuádricas en posición estándar y centradas en el origen.

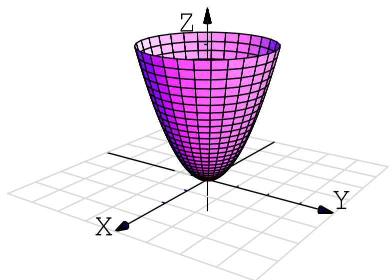
## Cuádricas centradas en el origen

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)



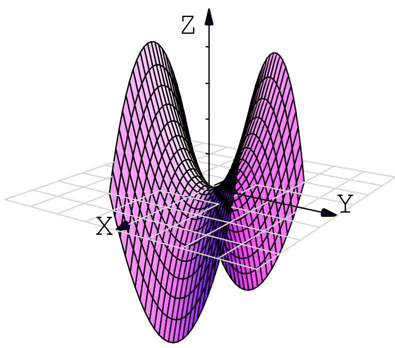

Elipsoide: Tiene ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

Es simétrico con respecto a cada uno de los tres planos coordenados y tiene intersección con los ejes coordenados en $(\pm a,0,0)$, $(0,\pm b,0)$ y $(0,0,\pm c)$. La traza del elipsoide sobre cada uno de los planos coordenados es un único punto o una elipse.



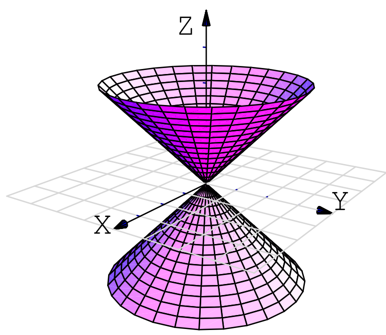

Paraboloide elíptico: Tiene ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$

Sus trazas sobre planos horizontales $z=k$ son elipses: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{k}{c}$. Sus trazas sobre planos verticales, ya sean $x=k$ o $y=k$ son parábolas.



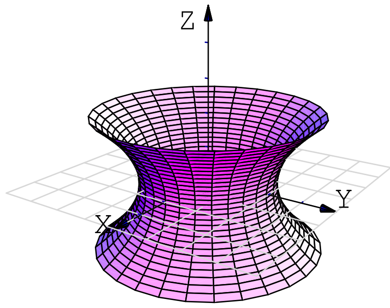

Paraboloide hiperbólico: Tiene ecuación $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{z}{c}$.

Sus trazas sobre planos horizontales $z=k$ son hipérbolas o dos rectas $(z=0)$. Sus trazas sobre planos verticales paralelos al plano $x$ son parábolas que abren hacia abajo, mientras que las trazas sobre planos verticales paralelos al plano $YZ$ son parábolas que abren hacia arriba. Su gráfica tiene la forma de una silla de montar.




Cono elíptico: Tiene ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$.

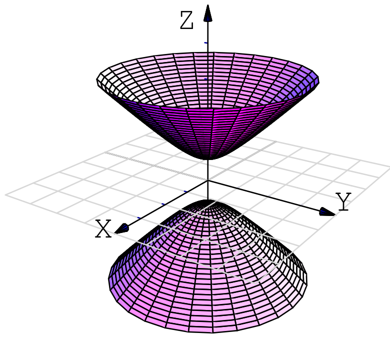
Sus trazas sobre planos horizontales $z=k$ son elipses. Sus trazas sobre planos verticales corresponden a hipérbolas o un par de rectas.




Hiperboloide de una hoja: Tiene ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Sus trazas sobre planos horizontales $z=k$ son elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$. Sus trazas sobre planos verticales son hipérbolas o un par de rectas que se intersecan.




Hiperboloide de dos hojas: Tiene ecuación

$$\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}=1.$$

Es una superficie con dos *hojas* (o mantos) separadas. Sus trazas sobre planos horizontales $z=k$ son elipses y sobre planos verticales son hipérbolas

**Ejemplo 24.**

Identifique y dibuje la superficie cuadrática $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}+\frac{(z-1)^2}{4}=1.$

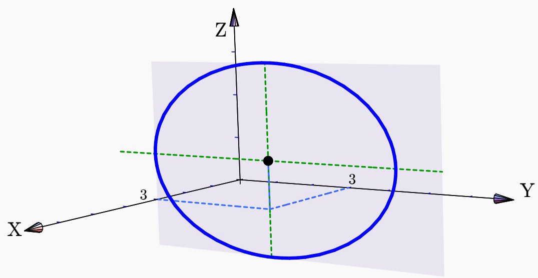
**Solución:** Este es un elipsoide con centro en $(3,3,1)$.

Una estrategia de dibujo es la siguiente: Los elipsoides se puede dibujar con tres elipses (trazas). En este caso, se pueden usar $x=3$; $y=3$ y $z=1$ (estos valores corresponden al centro de la cuádrica).

**Continuación...**

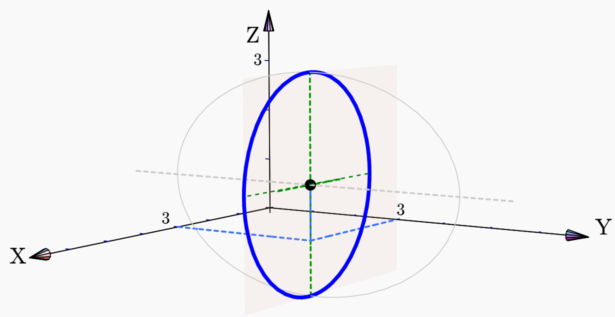
- La traza $x=3$ corresponde a la elipse $\dfrac{(y-3)^2}{9}+\dfrac{(z-1)^2}{4}=1$ con $x=3$ que se dibuja en el plano $x=3$.

Ver en 3D



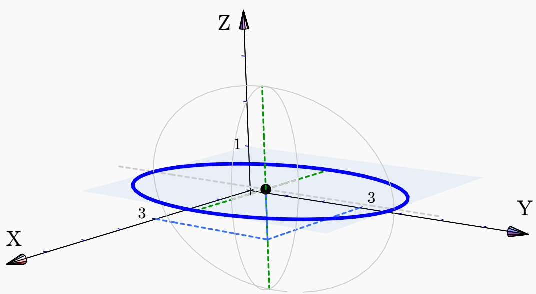

- Si $y=3$ obtenemos la elipse (circunferencia) $(x-3)^2+(z-1)^2=4$ con $y=3$ que se dibuja en el plano $y=3$.

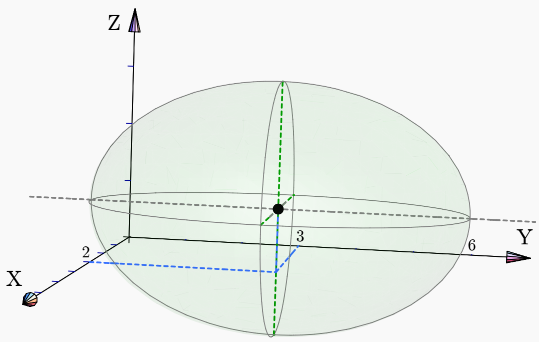
Ver en 3D




- Si $z=1$ obtenemos la elipse $\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$ con $z=1$ que se dibuja en el plano $z=1$.

Ver en 3D



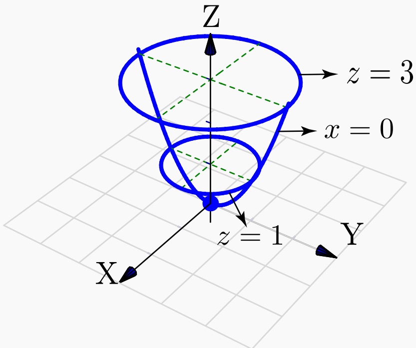
**Ejemplo 25.**

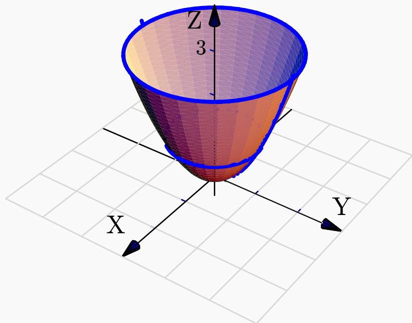
Consideremos la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$. Trazar la superficie usando las trazas correspondientes a $z = 0,1,3$ y $x = 0$.

**Solución:**

- La traza $z = 0$ es el punto $(0,0,0)$
- La traza $z = 1$ es la circunferencia $1 = x^2 + y^2$; en el plano $z = 1$
- La traza $z = 3$ es la circunferencia $3 = x^2 + y^2$;en el plano $z = 3$
- La traza $x = 0$ es la parábola $z = y^2$; en el plano $x = 0$

Ver en 3D




**Ejemplo 26.**

Consideremos la superficie de ecuación $z - 1 = (x-2)^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4}$. Trazar la superficie usando las trazas correspondientes a $z = 1,2,3,4$ y $x = 2$.

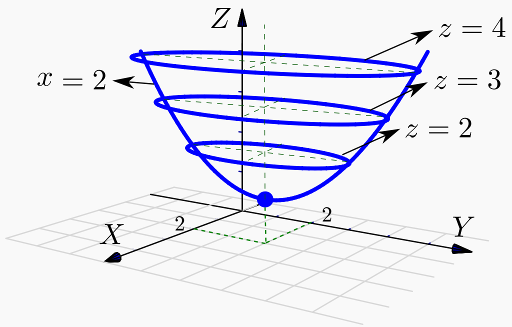
**Solución:**

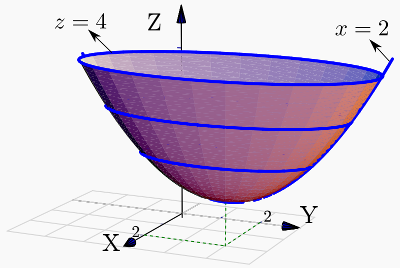
- La traza $z = 1$ es el punto $(2,2,1)$
- La traza $z = 2$ es la elipse $1 = (x-2)^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4}$ en el plano $z = 2$.
- La traza $z = 3$ es la elipse $1 = \dfrac{(x-2)^2}{2} + \dfrac{(y-2)^2}{8}$ en el plano $z = 3$.
- La traza $z = 4$ es la elipse $1 = \dfrac{(x-2)^2}{3} + \dfrac{(y-2)^2}{12}$ en el plano $z = 4$.

**Continuación...**

- La traza $x=2$ es la parábola $z-1=\dfrac{(y-2)^2}{4}$ en el plano $x=2$.

Ver en 3D




**Ejemplo 27.**

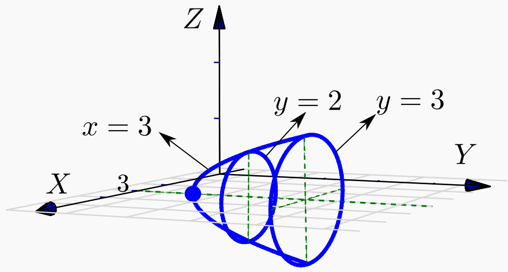
Identifique y dibuje la superficie cuadrática $x^2+2z^2-6x-y+10=0$

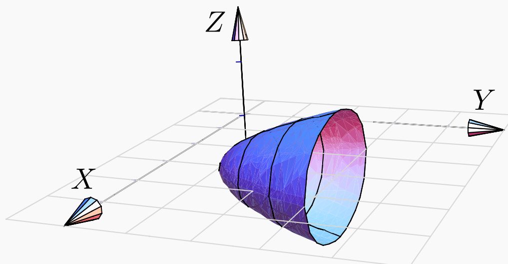
**Solución:** Completando el cuadrado en $x$ obtenemos el *paraboloide elíptico* $y-1=(x-3)^2+2z^2$. Abre en dirección del la parte positiva del eje $Y$.

Trazas. La estrategia es la siguiente: El *paraboloide elíptico* (que está más arriba), se puede dibujar con un par de elipses y una parábola. Para obtener las elipses le damos valores a $y$ en la ecuación $y-1=(x-3)^2+2z^2$. Se requiere que $y\geq 1$.

- Si $y=1$ obtenemos el punto: $(3,1,0)$.
- Si $y=2$ obtenemos la elipse $1=(x-3)^2+\dfrac{z^2}{1/2}$ en el plano $y=2$
- Si $y=3$ obtenemos la elipse $1=\dfrac{(x-3)^2}{2}+z^2$ en el plano $y=3$
- Para obtener la parábola, ponemos $x=3$ y obtenemos la parábola $y=2z^2+1$ en el plano $x=3$.

Ver en 3D



**Ejemplo 28.**

Identifique y dibuje la superficie cuadrática $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$.

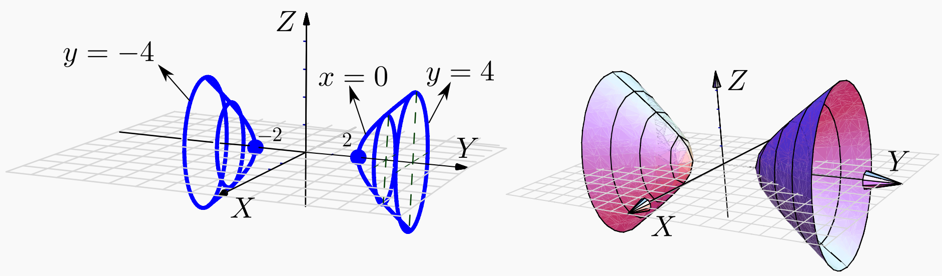
**Solución:** Dividiendo por 4 obtenemos: $-x^2 + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{2} = 1$, que corresponde a un *hiperboloide de dos hojas*. Abre en dirección del eje $Y$.

Trazas. La estrategia es la siguiente: El *hiperboloide de dos hojas* (que está más arriba), se puede dibujar con dos elipses y una hipérbola *por cada hoja*.

Para obtener elipses, arreglamos la ecuación como $\dfrac{y^2}{4} - 1 = x^2 + \dfrac{z^2}{2}$. Las elipses se obtienen dando valores a $y$ con $|y| > 2$.

- Si $y = \pm 2$ obtenemos dos puntos: $(0,2,0)$, $(0,-2,0)$.
- Si $y = \pm 3$ obtenemos la elipse $\dfrac{x^2}{5/4} + \dfrac{z^2}{5/2} = 1$ en el plano $y = 3$ y el plano $y = -3$.
- Si $y = \pm 4$ obtenemos la elipse $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{z^2}{6} = 1$ en el plano $y = 4$ y el plano $y = -4$.
- Para obtener la hipérbola, ponemos $x = 0$ y arreglamos la ecuación como $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{2} = 1$.

Ver en 3D




## EJERCICIOS (Cuádricas)

**2.5** Dibuje cada una de las siguientes cuádricas

**a)** $x^2 + (y-2)^2 = z/4$
**b)** $z^2 + y^2 = x/4$
**c)** $x^2 + y^2 + (z-1)^2/9 = 1$
**d)** $x^2 + y^2 - (z-2)^2 = 1$
**e)** $x^2 + y^2 - (z-2)^2 = 0$
**f)** $x^2 + (y-2)^2 - z^2 = 0$

## 2.5 Sólidos simples

Los sólidos simples se describen por medio de su frontera, es decir, se describen por las superficies que lo limitan. Un sólido simple es un conjunto compacto limitado por una o varias superficies orientables (de dos caras), sin hoyos, con borde y sin traslapes; de tal manera que en el interior del sólido no hay superficies ni 'burbujas' (la frontera del sólido es tal que divide el espacio en dos partes).

### 2.5.1 Visualizando la intersección de dos superficies

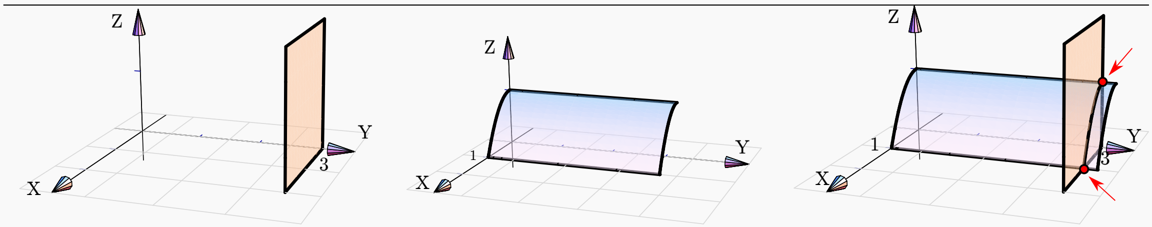
Para realizar dibujos 'a mano' es esencial visualizar la intersección de superficies. En general, si dos superficies se cortan en una curva, una manera de bosquejar esta curva es buscar los puntos de contacto en los planos $XY$, $XZ$ o $YZ$. En los ejemplos que siguen, estos puntos guía se señalan con un punto rojo.

**Ejemplo 29.**

Consideremos la superficie $S_1 : z = 1 - x^2$ y el plano $S_2 : y = 3$.

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

| Plano $y = 3$ | Superficie $S_1 : z = 1 - x^2$ | Intersección |
|---|---|---|

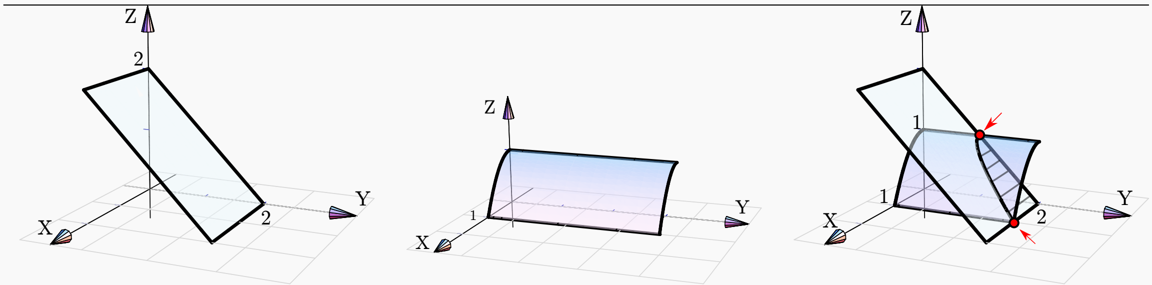



**Ejemplo 30.**

Consideremos la superficie $S_1 : z = 1 - x^2$ y el plano $S_2 : y + z = 2$.

Ver en 3D

| Plano $y + z = 2$ | Superficie $S_1 : z = 1 - x^2$ | Intersección |
|---|---|---|

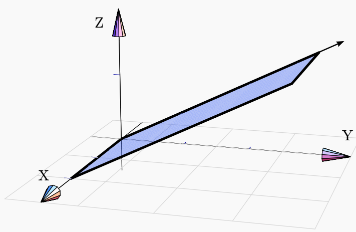


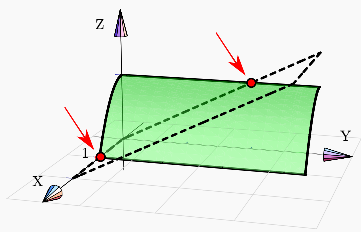
**Ejemplo 31.**

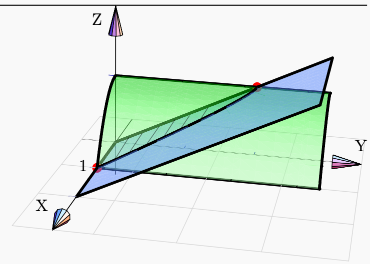
Consideremos la superficie $S_1: z = 1 - x^2$ y el plano $S_2: 2z - y = 0$.

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

| Plano $S_2: 2z - y = 0$ | Superficie $S_1: z = 1 - x^2$ | Intersección |
|---|---|---|





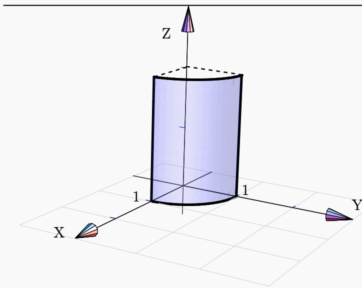


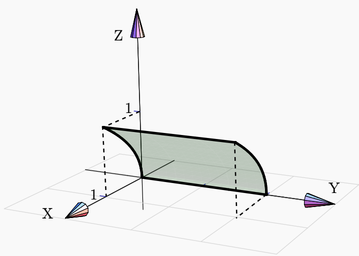

**Ejemplo 32.**

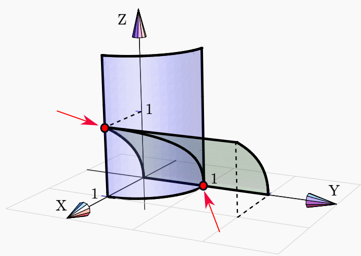
Consideremos las superficies $S_1: x^2 + y^2 = 1$, $S_2: x - z^2 = 0$.

Ver en 3D

| Superficie $S_1: x^2 + y^2 = 1$ | Superficie $S_2: x - z^2 = 0$ | Intersección |
|---|---|---|








## Perspectiva.

En general, cuando dibujamos el sistema de ejes $XYZ$ en posición estándar, podemos mover el eje $X$ un poco hacia arriba o un poco hacia abajo y esto hace que la perspectiva cambie. En el dibujo que sigue, se muestra la intersección del mismo cilindro y el mismo plano, la diferencia está en la posición del eje $X$ (lo que produce el cambio de perspectiva!)

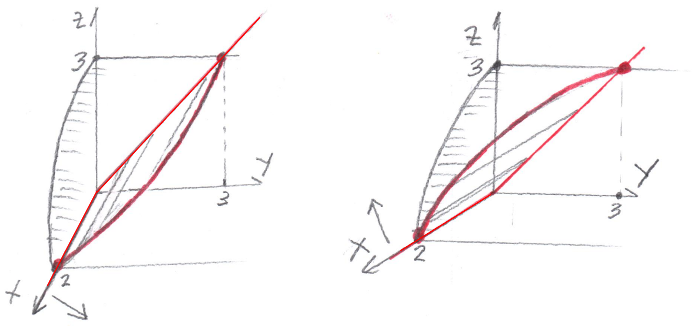
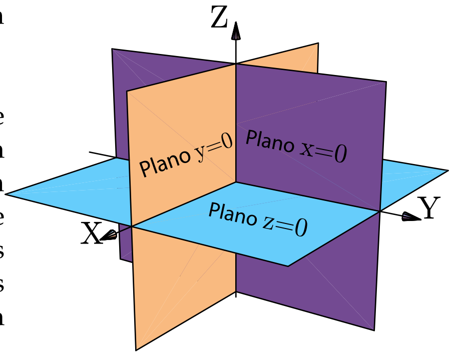



**Figura 2.11** Efecto en la perspectiva al mover el eje $X$

### 2.5.2 Dibujo de sólidos simples

Los planos $x = 0$; $y = 0$ y $z = 0$. Muchos de los sólidos están limitados por uno o varios de los planos coordenados, es decir, los planos $x = 0$; $y = 0$ y $z = 0$. Por lo tanto vale la pena recordar estos planos.

Ver en 3D




¿Siempre dibujamos en el I octante?. No, excepto que se pida de manera específica. A veces se pide el dibujo en el primer octante para simplificar el dibujo, pero para otros sólidos es obligatorio especificar el octante para que se cumpla la especificación de *sólido simple* que dimos más arriba y así evitar ambigüedades (recuerde que los sólidos simples son conjuntos compactos y no tienen superficies interiores ni 'burbujas').

## Ambiguedades.

Por ejemplo, el sólido $Q$ limitado por $z = 2 - x^2$; $y = 3$; $x = 0$; $y = 0$ y $z = 0$, no es un sólido simple pues $x = 0$ es una superficie interior,

Ver en 3D

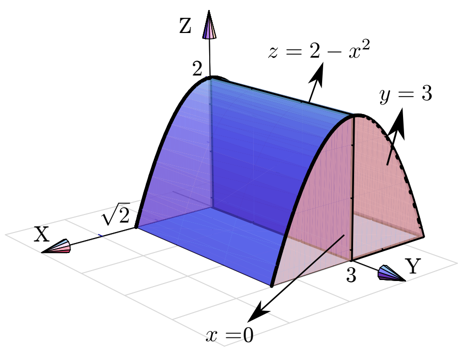
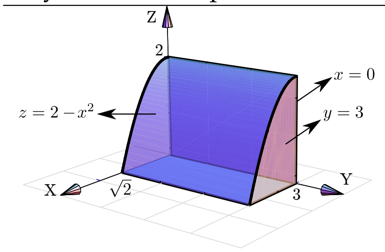
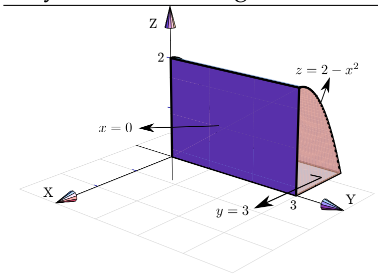



**Figura 2.12** $Q$ no es un sólido simple

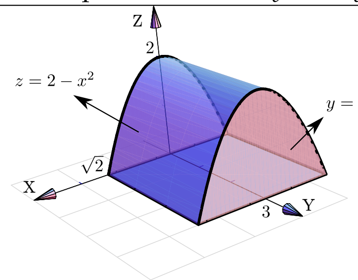
Podemos arreglar el problema especificando el octante o elimando la superficie $x = 0$,

| Sólido simple (especificando el octante) | Sólido simple (especificando el octante) |
| --- | --- |
| $Q$ limitado por $z=2-x^2$; $y=3$; $x=0$; $y=0$ y $z=0$, en el primer octante | $Q$ limitado por $z=2-x^2$; $y=3$; $x=0$; $y=0$ y $z=0$, en el segundo octante |




| Sólido simple (eliminando $x=0$) |
| --- |
| Sólido $Q$ limitado por $z=2-x^2$; $y=3$; $y=0$ y $z=0$, |




El dibujo de sólidos simples se hace estableciendo las rectas o las curvas de intersección entre las superficies que limitan el sólido.

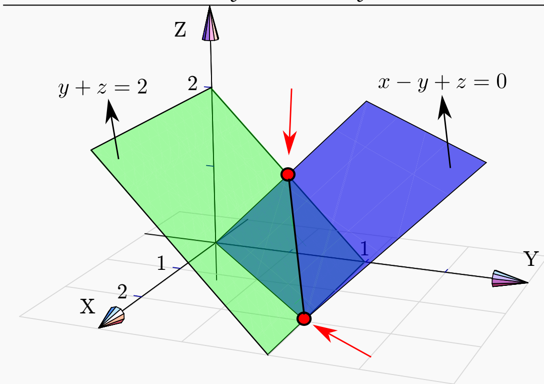
**Ejemplo 33.**

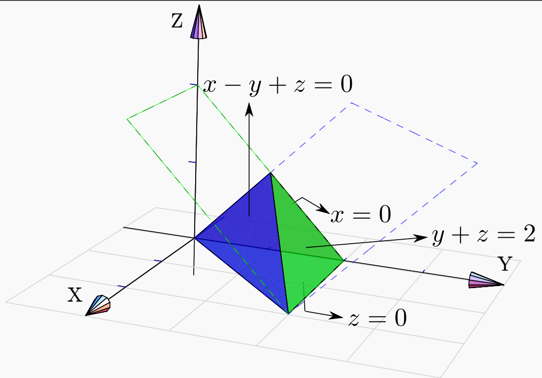
Dibujar el sólido $Q$ limitado por los planos $x-y+z=0$; $y+z=2$; $x=0$ y $z=0$.

**Solución:** Dibujamos ambos planos y marcamos los puntos guía para trazar el segmento de intersección. El sólido se mantiene en el primer octante pues está limitado por el plano $x=0$ (plano $YZ$) y el plano $z=0$ (plano $XY$).

Ver en 3D

| Planos $x-y+z=0$; $y+z=2$; | Sólido $Q$ |
| --- | --- |



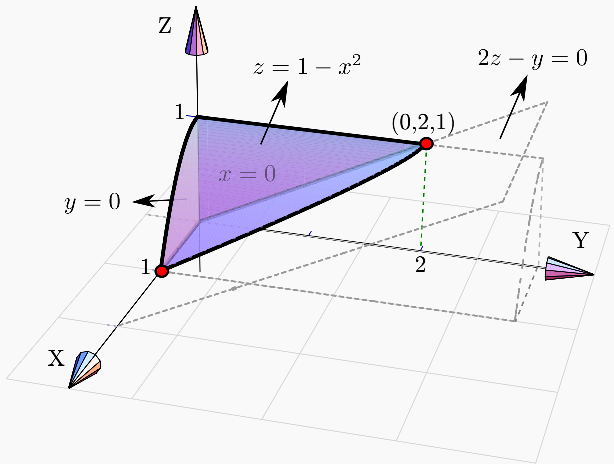



**Ejemplo 34.**

Dibujar el sólido $Q$ limitado por la superficie $S_1: z = 1 - x^2$ y los planos $2z - y = 0$; $y = 0$; $x = 0$; en el primer octante.

**Solución:** La superficie $S_1: z = 1 - x^2$ queda arriba y el plano $2z - y = 0$ queda abajo. El plano $z = 0$ *no* es parte del sólido. El punto $(0,2,1)$ se obtiene como intersección de las rectas $z = 1$ y $2z - y = 0$.

Ver en 3D

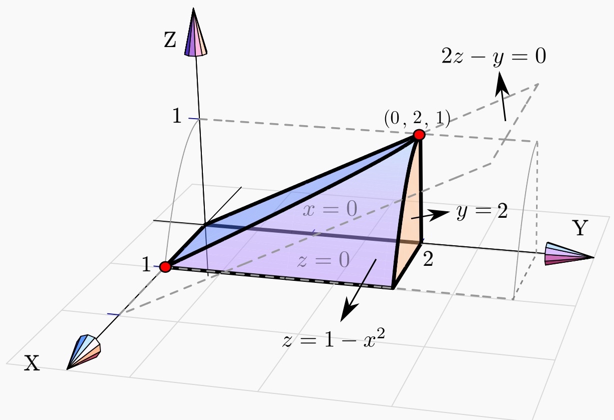



**Ejemplo 35.**

Dibujar el sólido $Q$ limitado por la superficie $S_1: z = 1 - x^2$ y los planos $2z - y = 0$; $x = 0$; $z = 0$ y $y = 2$, en el primer octante.

**Solución:** Como el sólido está limitado por los planos $z = 0$ y $x = 0$, entonces el plano $2z - y = 0$ queda en la parte de arriba del sólido.

Ver en 3D

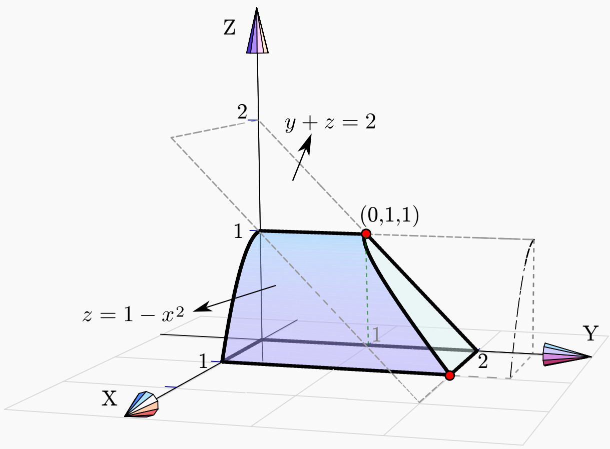


**Ejemplo 36.**

Dibujar el sólido $Q$ limitado por la superficie $S_1: z = 1 - x^2$ y el plano $y + z = 2$; en el primer octante.

**Solución:** En este caso no es necesario especificar los planos $x = 0$; $y = 0$ y $z = 0$; con solo especificar que está en el primer octante es suficiente porque en este caso no hay ambiguedad.

Ver en 3D

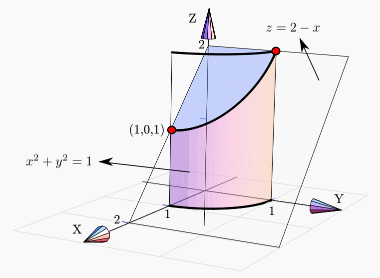
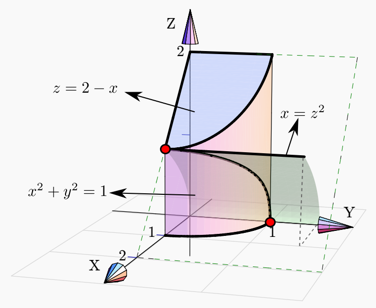
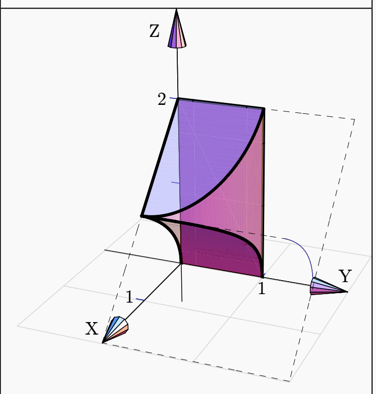



**Ejemplo 37.**

Dibujar el sólido $Q$ limitado por las superficies $S_1: x^2 + y^2 = 1$; $S_2: x - z^2 = 0$ y los planos $z = 2 - x$; $x = 0$ y $y = 0$, en el primer octante.

**Solución:** Talvez sea más sencillo dibujar primero la superficie $S_1: x^2 + y^2 = 1$ y el plano $z = 2 - x$; luego dibujamos la otra superficie $S_2: x - z^2 = 0$.

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

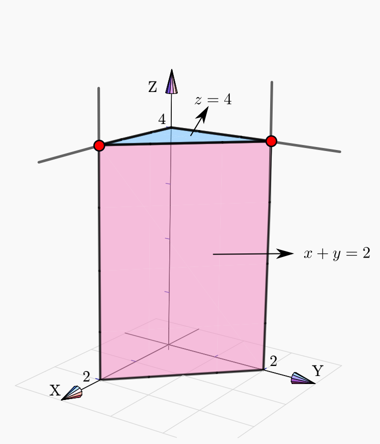
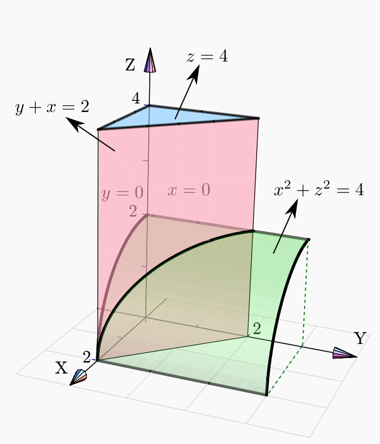
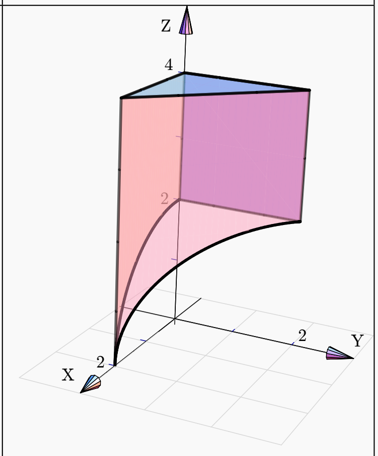
| Superficie $S_1: x^2 + y^2 = 1$ y plano $z = 2 - x$ | Agregamos la superficie $S_2: x - z^2 = 0$. | Sólido $Q$ |
|---|---|---|
|  |  |  |

**Ejemplo 38.**

Dibuje el sólido $Q$ limitado por las superficies $x^2+z^2=4$; $y+x=2$; $z=4$; y $y=0, x=0$, en el I octante.

**Solución:** Talvez sea más sencillo dibujar los planos $y+x=2$ y $z=4$; luego agregamos la otra superficie $x^2+z^2=4$.

Ver en 3D

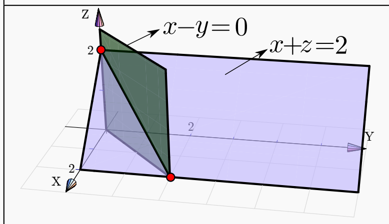
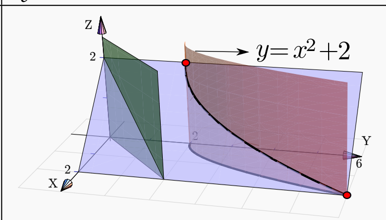
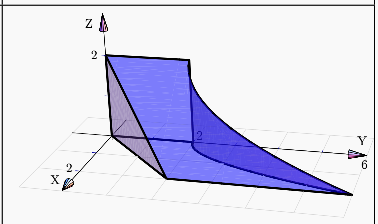
| Planos $y+x=2$; $z=4$. | Agregamos la superficie $x^2+z^2=4$. | Sólido $Q$ |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

**Ejemplo 39.**

Dibuje el sólido $Q$ limitado por la superficie $y=x^2+2$ y los planos $x-y=0$; $x+z=2$; $x=0$ y $z=0$.

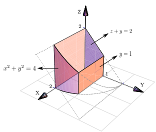
**Solución:** Talvez sea más sencillo dibujar primero los planos $x-y=0$ y $x+z=2$; luego agregamos la otra superficie $y=x^2+2$.

Ver en 3D

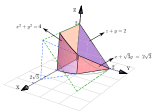
| Planos $x-y=0$ y $x+z=2$ | Agregamos la superficie $y=x^2+2$. | Sólido $Q$ |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

## EJERCICIOS (Sólidos)

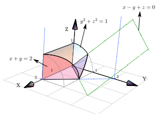
Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)



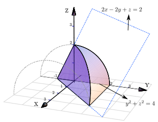
**2.6** Dibujar el sólido $Q_1$ limitado por las superficies $x^2+y^2=4$; $z+y=2$; $y=1$ y $y=0$, en el I octante.



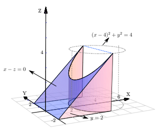
**2.7** Sólido $Q_2$ limitado por la superficie $x^2+y^2=4$; y los planos $z+y=2$; $x+\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}$ y $x=0$, en el I octante



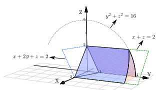
**2.8** Sólido $Q_3$ limitado por la superficie $y^2+z^2=1$; y los planos $x+y=2$; $x-y+z=0$, en el I octante.



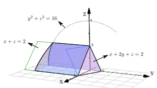
**2.9** Sólido $Q_4$ limitado por la superficie $y^2+z^2=4$ y los planos $2x-2y+z=2$; $x=0$ y $z=0$.



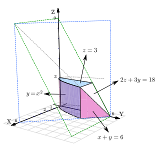
**2.10** Sólido $Q_5$ limitado por la superficie $(x-4)^2+y^2=4$ y los planos $x-z=0$; $y=-2$; $y=2$; y $z=0$ con $0\leq x\leq 4$.



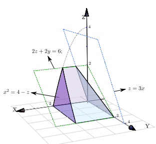
**2.11** Sólido $Q_6$ limitado por la superficie $y^2+z^2=16$ y los planos $x+2y+z=2$; $x+z=2$; $x=0$; y $z=0$ en el I octante.



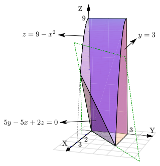
**2.12** Sólido $Q_7$ limitado por la superficie $y^2+z^2=16$ y los planos $x+2y+z=2$; $x+z=2$; $x=0$; y $z=0$ en el I y IV octante.



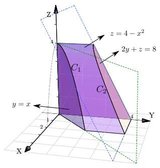
**2.13** Sólido $Q_8$ limitado por la superficie $y=x^2$ y los planos $2z+3y=18$; $x+y=6$; $z=3$; $x=0$; y $z=0$, en el I octante.



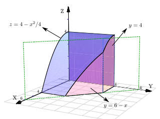
**2.14** Sólido $Q_9$ limitado por la superficie $x^2=4-z$ y los planos $2z+2y=6$; $z=3x$; $y=0$; y $z=0$.



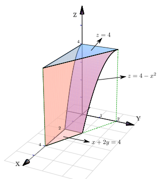
**2.15** Sólido $Q_{10}$ limitado por la superficie $z = 9 - x^2$ y los planos $5y - 5x + 2z = 0$ y $y = 3$, en el primer octante.



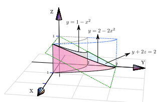
**2.16** Sólido $Q_{11}$ limitado por las superficies $z = 4 - x^2$; $2y + z = 8$; $y = x$; $x = 0$ y $z = 0$, en el primer octante.



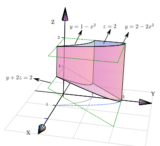
**2.17** Sólido $Q_{12}$ limitado por las superficies $z = 4 - x^2/4$; $y = 6 - x$; $y = 4$ y $y = 0$, en el primer octante.



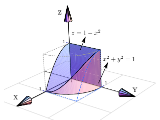
**2.18** Sólido $Q_{13}$ limitado por las superficies $z = 4 - x^2$; $x + 2y = 4$; $z = 4$; $z = 0$ y $y = 0$.



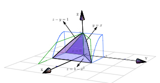
**2.19** Sólido $Q_{14}$ limitado por las superficies $y = 2 - 2x^2$; $y = 1 - x^2$; $y + 2z = 2$; $x = 0$ y $z = 0$; en el I octante.



**2.20** Sólido $Q_{15}$ limitado por las superficies $y = 2 - 2x^2$; $y = 1 - x^2$; $y + 2z = 2$; $x = 0$ y $z = 2$, en el I octante.



**2.21** Sólido $Q_{16}$ limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 1$; $z = 1 - x^2$, en el I octante.



**2.22** Sólido $Q_{17}$ limitado por las superficies $z = 1 - x^2$; $z - y = 1$; $y = x$; $x = 0$ y $z = 0$, en el I y IV octante.

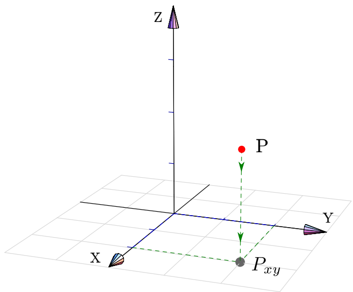
## 2.6 Proyección de un sólido

### Proyección ortogonal de un punto.

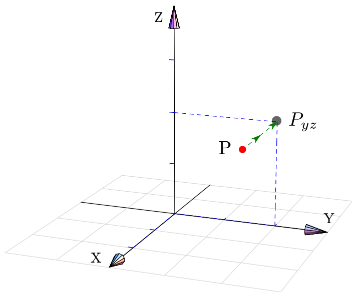
La proyección ortogonal de un punto $P$ en un plano es el punto en este plano cuya distancia (euclidiana) a $P$ es mínima. Intuitivamente corresponde a la "sombra" del punto proyectada perpendicularmente sobre el plano. En la figura que sigue se muestra la proyección de un punto $P$ sobre cada uno de los planos $XY$, $YZ$ y $XZ$.

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

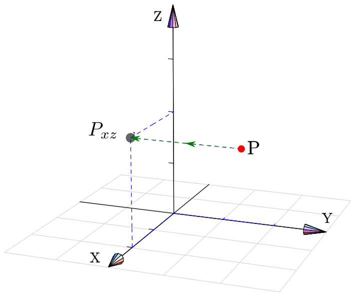
Proyección sobre $XY$




Proyección sobre $YZ$




Proyección sobre $XZ$




### Proyección ortogonal de una superficie.

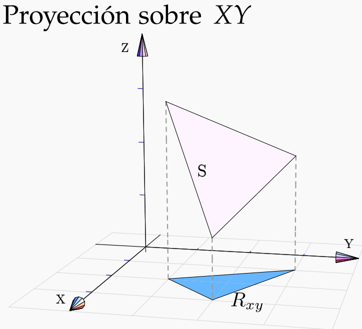
La proyección perpendicular de una superficie $S$ es la proyección de cada uno de sus puntos.

**Ejemplo 40.**

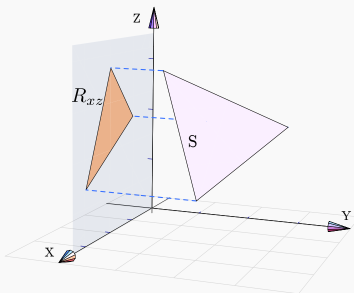
En este ejemplo visualizamos la proyección de un triángulo $S$ sobre cada uno de los planos $XY$, $YZ$ y $XZ$.

Ver en 3D

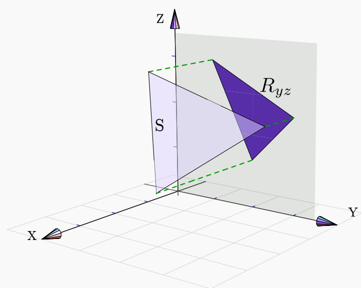
Proyección sobre $XY$




Proyección sobre $YZ$




Proyección sobre $XZ$



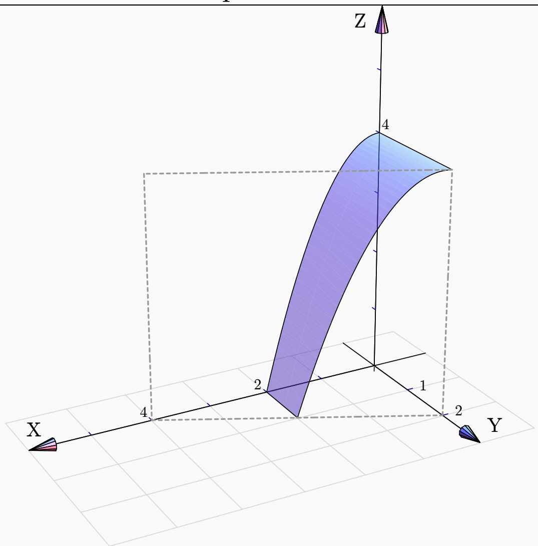

En la práctica nos interesa describir la proyección de manera analítica porque, en este curso, estas proyecciones van a ser regiones de integración.

**Ejemplo 41.**

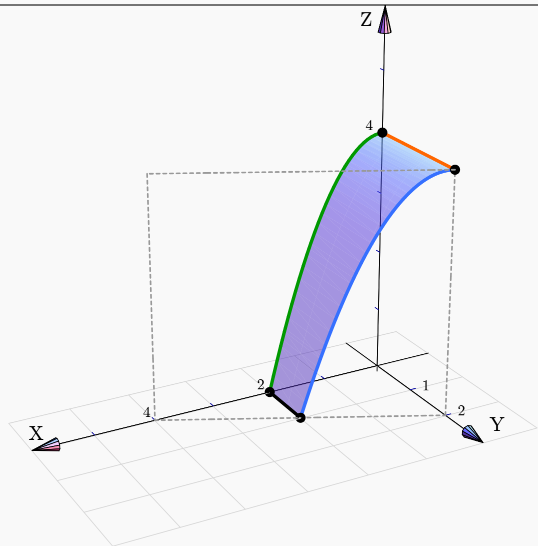
Consideremos la superficie $S:\ z = 4 - x^2$ limitada por el plano $x + 2y = 4$ en el primer octante. En general, se puede determinar la proyección de una superficie proyectando la frontera, es decir, la curvas

Ver en 3D

Superficie $S$

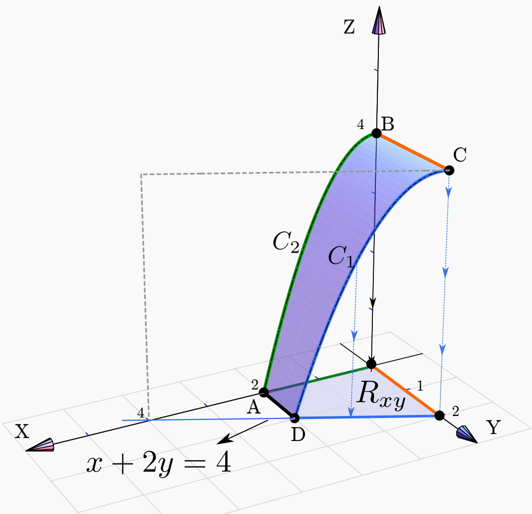



Frontera de $S$

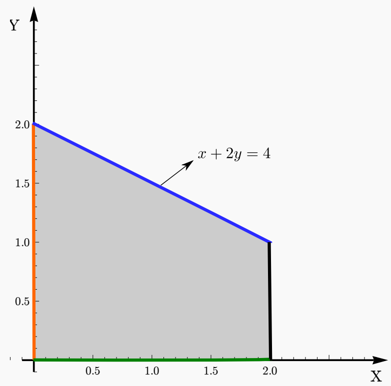



Ver en 3D

Proyectando la superficie $S$




Proyección sobre $XY$



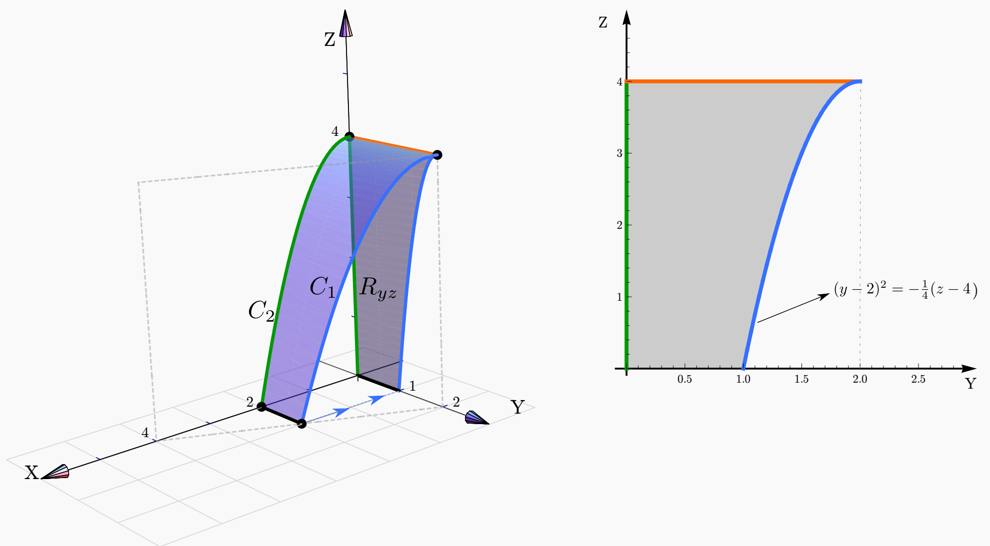

Las curvas $C_1$ y $C_2$ están en planos perpendiculares al plano $XY$. La curva $C_2$ está en el plano $XZ$ por lo que su proyección es el segmento que va del origen hasta $(2,0,0)$. La curva $C_1$ está sobre el plano $x + 2y = 4$, como este plano es *perpendicular al plano* $XY$, la proyección de esta curva está sobre la recta que genera el plano, es el segmento que va de $(0,2,0)$ a $(2,1,0)$.

**Continuación...**

Finalmente podemos decir que $R_{xy}$ está entre la recta $y=0$ y la recta $x+2y=4$ con $x \in [0,2]$.

Ver en 3D

Proyectando la superficie $S$ | Proyección sobre $YZ$



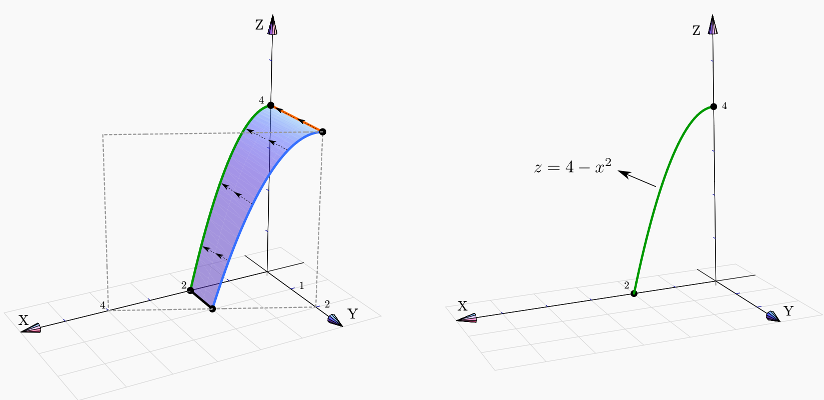

La curva $C_2$ está en el plano $XZ$, por tanto su proyección es el segmento que va de $(0,0,0)$ a $(0,0,4)$.
La curva $C_1$ esta en un plano que *no es perpendicular* a $YZ$. Para calcular la ecuación de su proyección observamos que esta curva es la intersección de las superficies $S:\ z=4-x^2$ y $x+2y=4$, lo que hacemos es eliminar la varible $x$ para que nos quede una ecuación en términos de $y$ y $z$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} z & = & 4-x^2 \\ x & = & 4-2y \end{array}\right. \Longrightarrow z=4-(4-2y)^2, \quad \text{o también} \quad (y-2)^2 = -\frac{1}{4}(z-4) \quad \text{(una parábola!).}$$

---

Ver en 3D

Proyectando la superficie $S$ | Proyección sobre $YZ$




La curvas $C_1$ y $C_2$ están sobre la superficie $z=4-x^2$ que es perpendicular al plano $XZ$, por lo tanto la proyección de la superficie $S$ es la misma curva $z=4-x^2$ (no hay región).

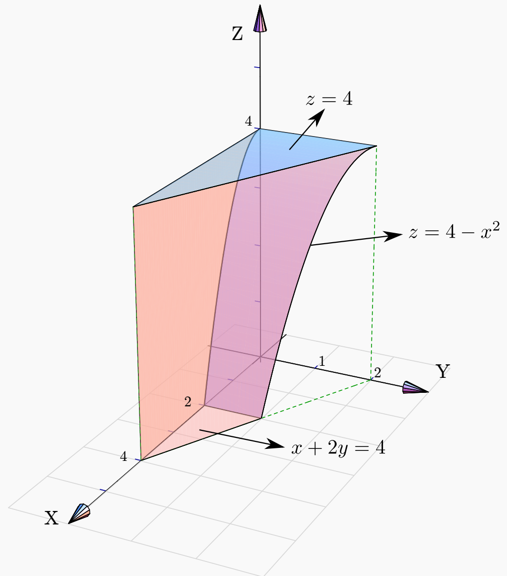
## Proyección de un sólido

En el caso de sólidos simples, la proyección se determina proyectando las superficies (posiblemente no todas) que lo limitan.

**Ejemplo 42.**

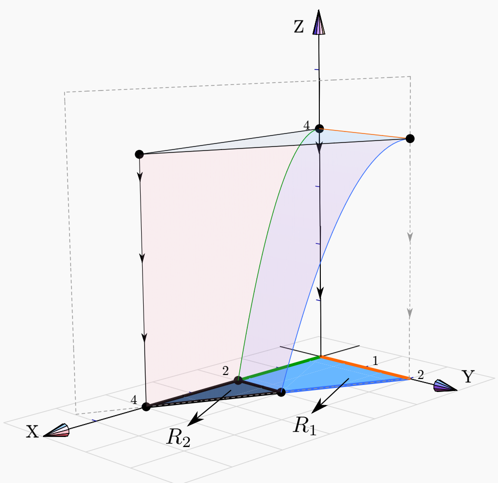
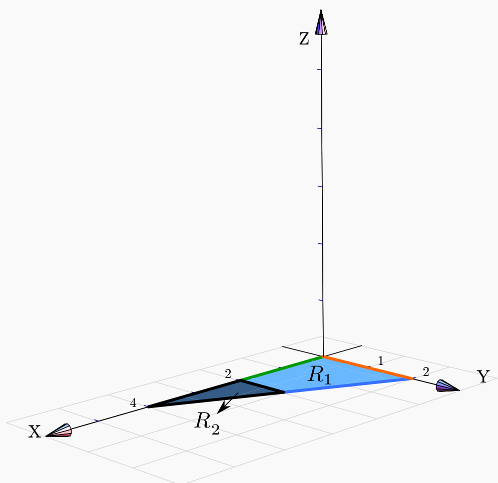
Consideremos el sólido $Q$ limitado por la superficie $S:\ z = 4 - x^2$ y los planos $x + 2y = 4$ y $z = 4$, en el primer octante.

Ver en 3D




Proyección sobre el plano $XY$: La proyección es $R_{xy} = R_1 + R_2$. La superficie $z = 4 - x^2$ se proyecta sobre $R_1$ y el plano $z = 4$ se proyecta sobre $R_{xy}$. El plano $x + 2y = 4$ se proyecta en la recta que genera este mismo plano.

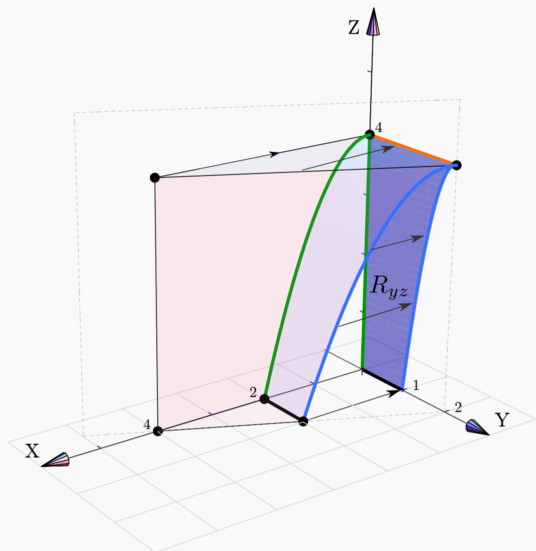
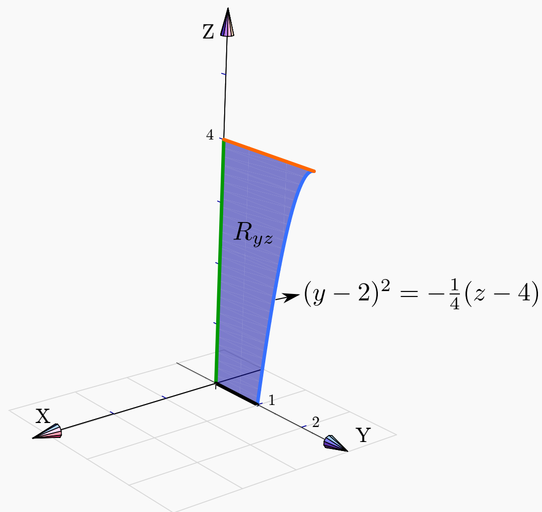
Ver en 3D

| Proyectando el sólido $Q$ | Proyección sobre $XY$ |
|---|---|
|  |  |

**Continuación...**

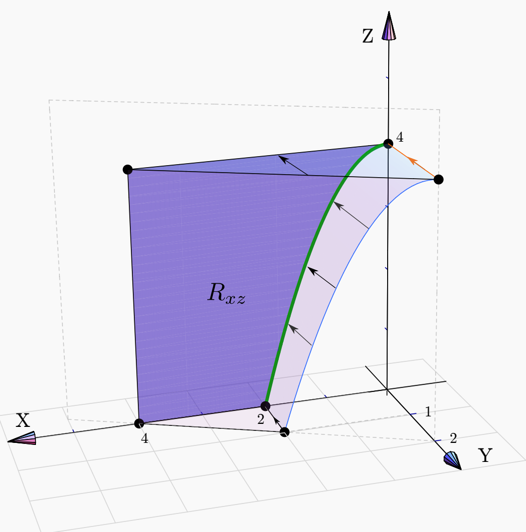
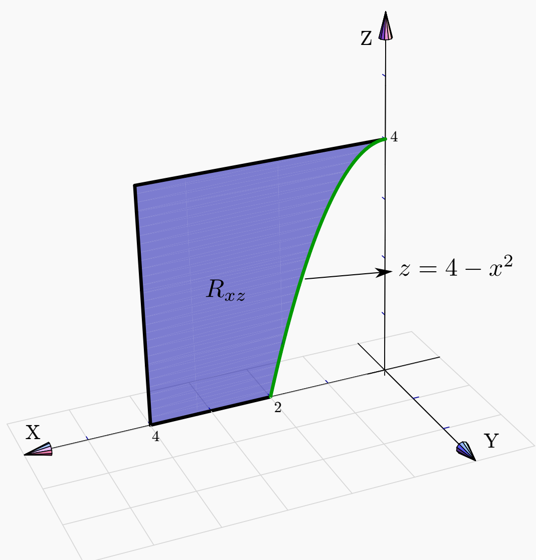
Proyección sobre el plano $YZ$: La proyección $R_{yz}$ va desde la recta $z=0$ (eje $Z$) hasta la parábola $(y-2)^2=-\frac{1}{4}(z-4)$ (esta ecuación la determinamos en el ejemplo anterior) con $z\in[0,4]$. Tanto la superficie $z=4-x^2$ como la porción del plano $x+2y=4$ se proyectan sobre esta región. El plano $z=4$ se proyecta sobre el segmento que va de $(0,0,4)$ a $(0,2,4)$.

Ver en 3D

| Proyectando el sólido $Q$ | Proyección sobre $YZ$ |
|---|---|
|  |  |

Proyección sobre el plano $XZ$: La proyección $R_{xz}$ va desde la parábola $z=4-x^2$ hasta la recta $x=4$. La porción del plano $x+2y=4$ se proyecta sobre esta región. La superficie $z=4-x^2$ se proyecta sobre la curva que la genera y el plano $z=4$ se proyecta sobre el segmento que va de $(4,0,4)$ a $(0,0,4)$

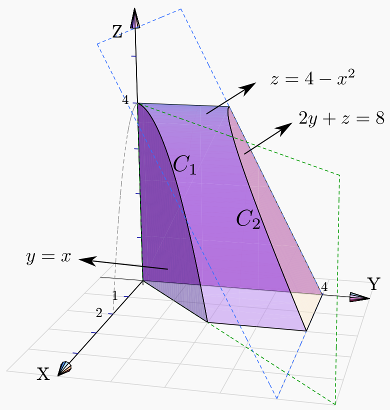
Ver en 3D

| Proyectando el sólido $Q$ | Proyección sobre $YZ$ |
|---|---|
|  |  |

**Ejemplo 43.**

Consideremos el sólido $Q$ limitado por la superficie $S:\ z=4-x^2$ y los planos $2y+z=8$ y $y=x$, en el primer octante.

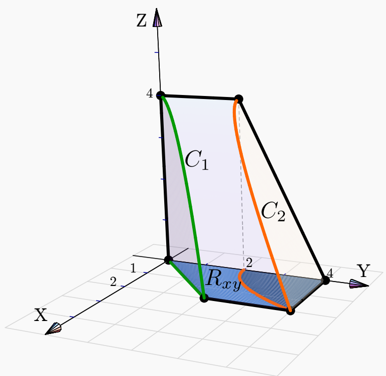
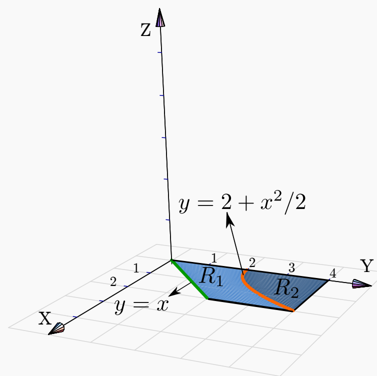
Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)




Proyección sobre el plano $XY$: La curva $C_1$ está en el plano $y=x$ que es perpendicular al plano $XY$; su proyección es el segmento que va de $(0,0,0)$ a $(2,2,0)$.
La curva $C_2$ es la intersección de las superficies $z=4-x^2$ y $2y+z=8$; la ecuación de su proyección en el plano $XY$ se obtiene eliminando $z$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 4-x^2 \\ \\ y & = & 4-z/2 \end{array}\right. \Longrightarrow y=4-\frac{(4-x^2)}{2}, \quad \text{o también} \quad y=2+\frac{x^2}{2} \quad \text{(una parábola!).}$$

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

| Proyectando el sólido $Q$ | Proyección sobre $XY$ |
|---|---|
|  |  |

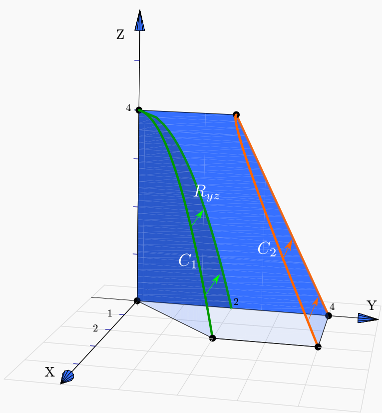
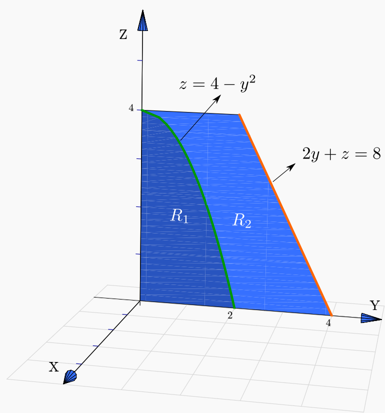



La proyección es $R_{xy}=R_1+R_2$. La porción de la superficie $z=4-x^2$ se proyecta sobre $R_1$ mientras que la porción del plano $2y+z=8$ se proyecta sobre $R_2$. El plano $y=x$ es perpendicular al plano $XY$ y por tanto se proyecta sobre su recta generadora $y=x$.

**Continuación...**

Proyección sobre el plano $YZ$: La curva $C_1$ es la intersección de la superficie $z = 4 - x^2$ con el plano $y = x$ por lo que su proyección en el plano $YZ$ es la parábola $z = 4 - y^2$. La curva $C_2$ está en un plano perpendicular al plano $YZ$, por lo tanto su proyección es está en la recta que genera el plano: $2y + z = 8$.

Ver en 3D

| Proyectando el sólido $Q$ | Proyección sobre $YZ$ |
| --- | --- |
|  |  |

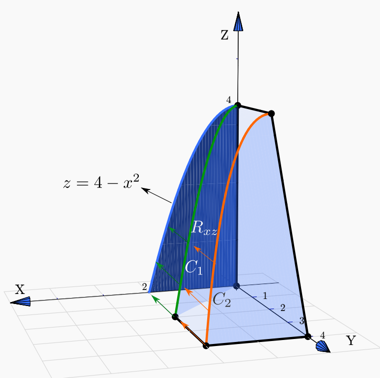
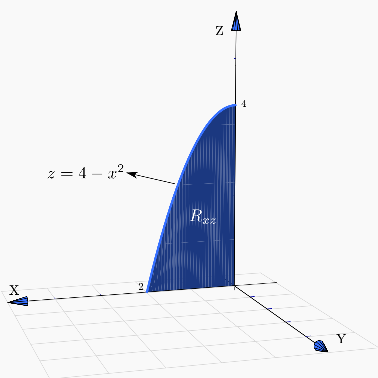




La proyección es $R_{yz} = R_2 + R_2$. La proyección de la porción del plano $y = x$ es la región $R_1$. La proyección de la porción de superficie $z = 4 - x^2$ es la región $R_2$. La proyección del plano $2y + z = 8$ es el segmento que va de $(4,0,0)$ a $(0,2,4)$.

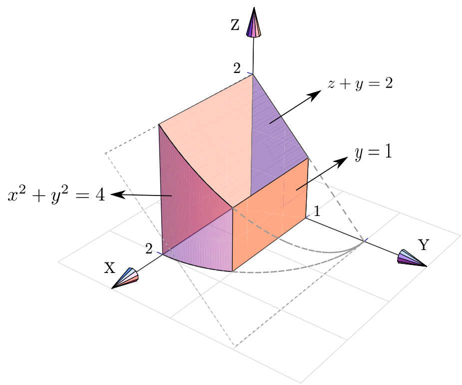
Proyección sobre el plano $XZ$: La proyección es $R_{xz}$. En este caso, las curvas $C_1$ y $C_2$ se proyectan sobre la curva $z = 4 - x^2$. La superficie $z = 4 - x^2$ se proyecta sobre su curva generadora mientras que las porciones de los planos $y = x$ y $2y + z = 8$ se proyectan sobre $R_{xz}$.

Ver en 3D

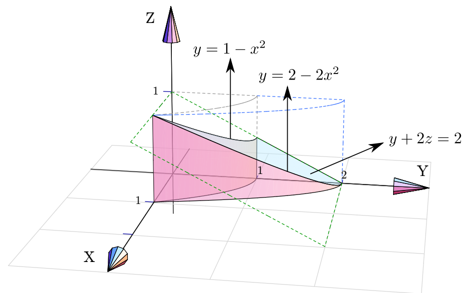
| Proyectando el sólido $Q$ | Proyección sobre $XZ$ |
| --- | --- |
|  |  |

## EJERCICIOS (Proyecciones de un sólido)

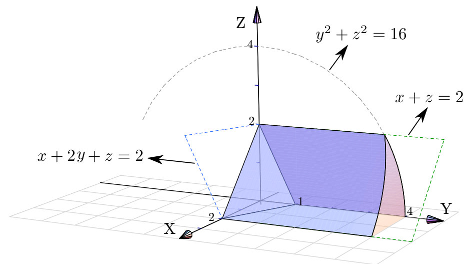
Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)



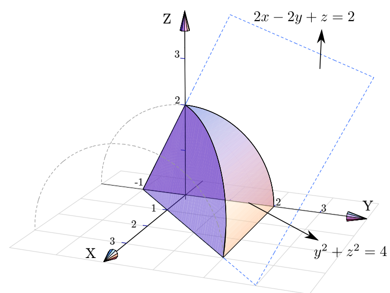

**2.23** Dibujar las proyecciones del sólido $Q$ si este sólido está limitado por $x^2+y^2=4$; $z+y=2$; $y=1$; $x=0$; $y=0$ y $z=0$, en el I octante




**2.24** Dibujar las proyecciones del sólido $Q$ si este sólido está limitado por las superficies $y=2-2x^2$; $y=1-x^2$; $y+2z=2$; $x=0$ y $z=0$; en el I octante.




**2.25** Dibujar las proyecciones del sólido $Q$ si este sólido está limitado por la superficie $y^2+z^2=16$ y los planos $x+2y+z=2$; $x+z=2$; $x=0$; y $z=0$ en el I octante.




**2.26** Dibujar las proyecciones del sólido $Q$ si este sólido está limitado por la superficie $y^2+z^2=4$ y los planos $2x-2y+z=2$; $x=0$ y $z=0$.

# Bibliografía


[1] H. Anton, C. Rorres. "*Elementary Linear Algebra.*". Nineth ed. John Wiley & Sons. 2005.

[2] T. Apostol. "*Calculus*". Vol 2. Second Edition. John Wiley & Sons. 1967.

[3] Ch. Bär. "*Elementary Differential Geometry*". Cambridge University Press. 2010.

[4] Ch. Lehmann. "*Geometría Analítica*". Editorial Limusa S.A.. 1989.

[5] D. Marsh. “*Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*”. 2nd ed. Springer. 2005.

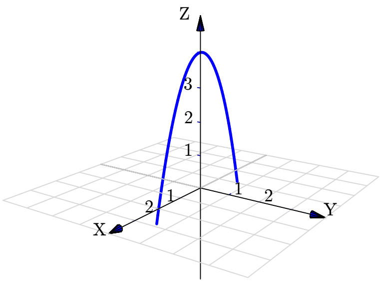
[6] J. Stewart. “*Calculus. Early Transcentals*”. Thompson. 6ta ed. 2008.

# Solución de los Ejercicios

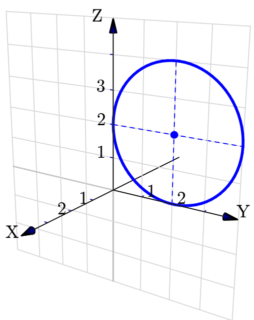
Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

## Soluciones del Capítulo 2

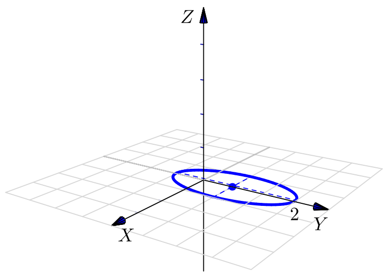
**2.1.a** $z = 4 - x^2;\ y = 0.$



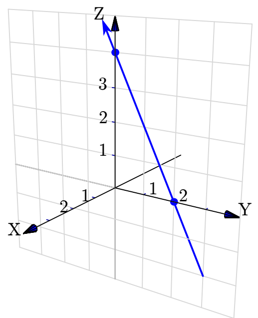

**2.1.b** $(z-2)^2 + (y-2)^2 = 4;\ x = 0.$



**2.1.c** $\dfrac{(y-1)^2}{4}+x^2=1;\ z=0$

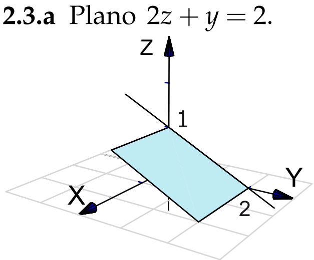



**2.1.d** $z+2y=4;\ x=0$

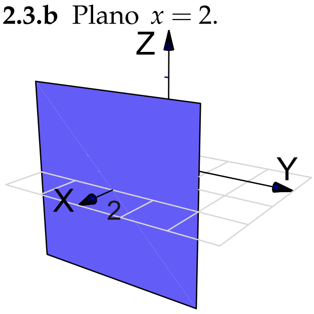



**2.2** Es un punto, $P=(1,-2,0)$

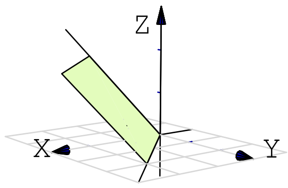
**2.3.a** Plano $2z+y=2$.



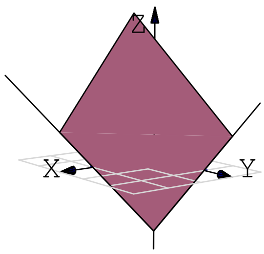

**2.3.b** Plano $x=2$.



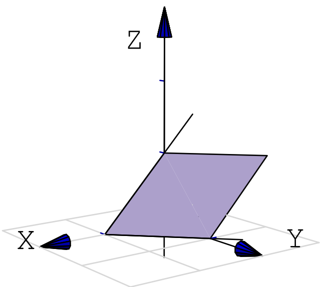
**2.3.c** Plano $x - y - z = 0$. Podemos usar las rectas $y = x$ y $z = x$.



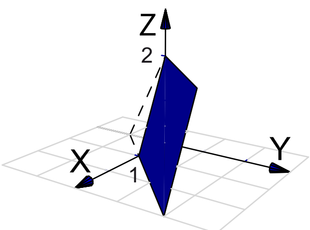

**2.3.d** Plano $x + y - z = 2$. Podemos usar las intersecciones con los ejes: $x = 2$; $y = 2$; $z = -1$.



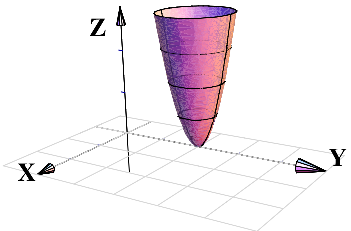

**2.3.e** Plano $2x + 2y + 2z = 2$. Podemos usar las intersecciones con los ejes: $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$.



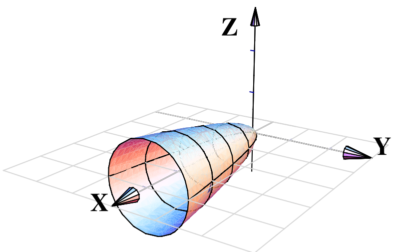

**2.4** Plano $4x - 4y + 2z = 4$ en el primer octante. En este caso el plano lo dibujamos desde el segmento que va de $x = 1$ hasta $z = 2$.



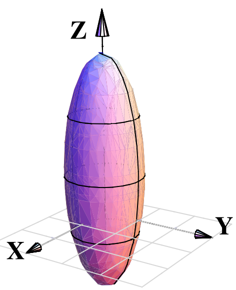

**2.5.a** $x^2 + (y-2)^2 = z/4$.



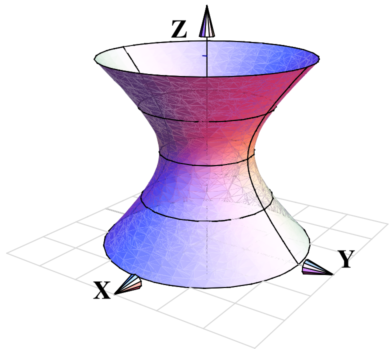

**2.5.b** $z^2 + y^2 = x/4$



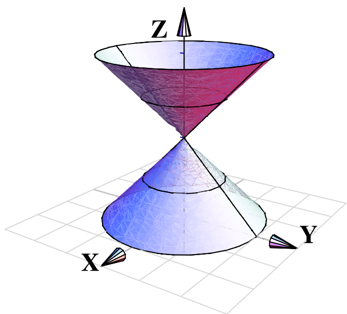

**2.5.c** $x^2 + y^2 + (z-1)^2/9 = 1$



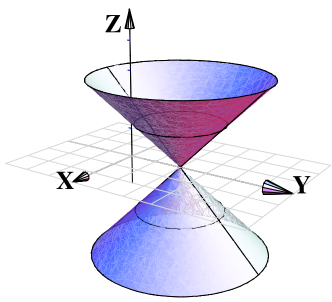

**2.5.d** $x^2 + y^2 - (z-2)^2 = 1$



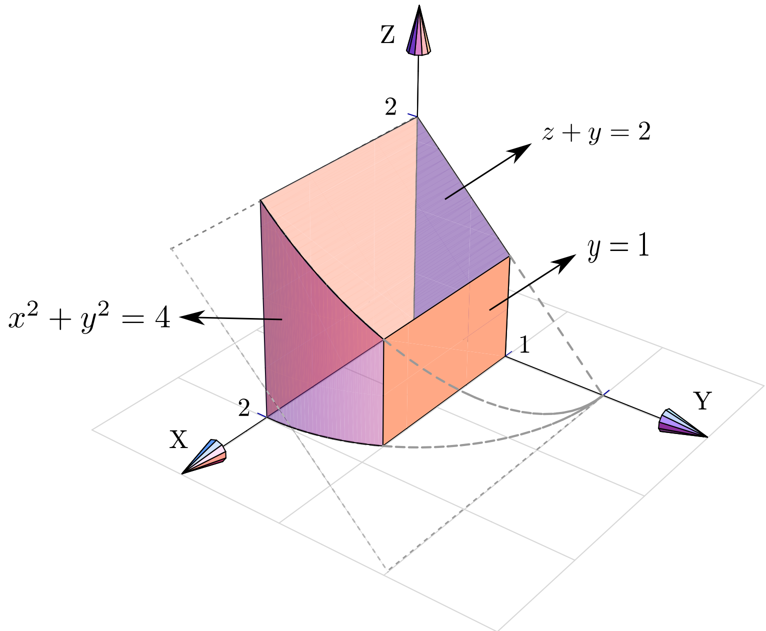

**2.5.e** $x^2 + y^2 - (z-2)^2 = 0$



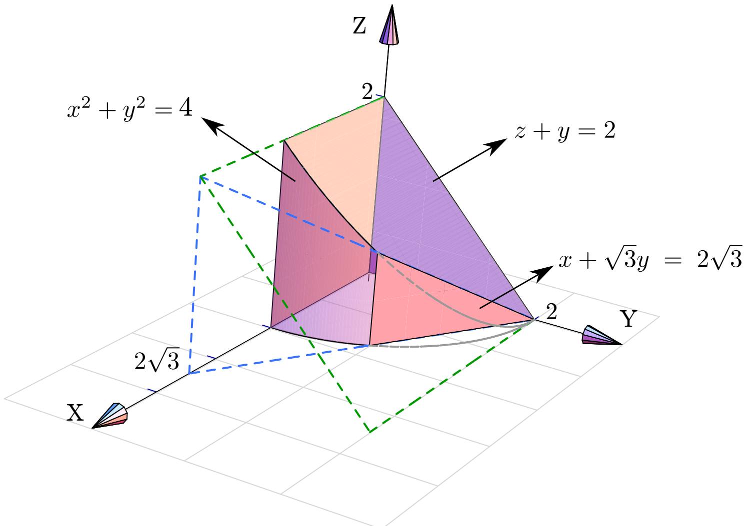

**2.5.f** $x^2 + (y-2)^2 - z^2 = 0$



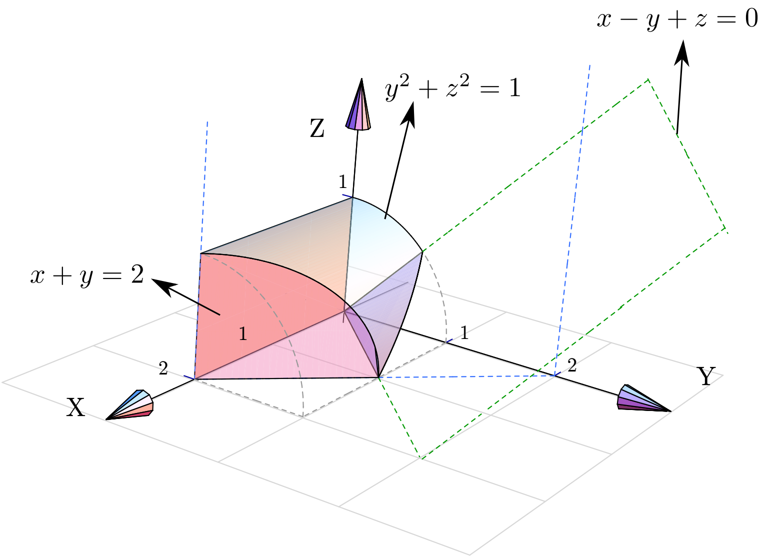

**2.6** Sólido $Q_1$



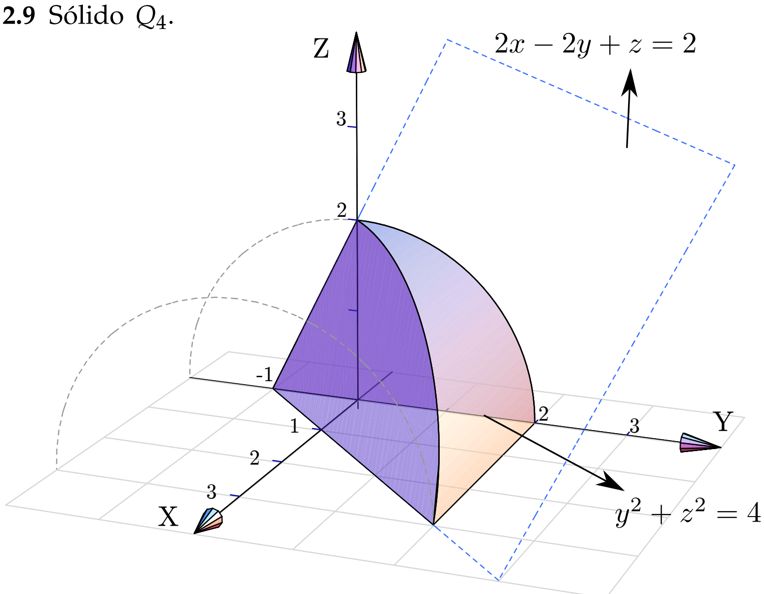

**2.7** Sólido $Q_2$.



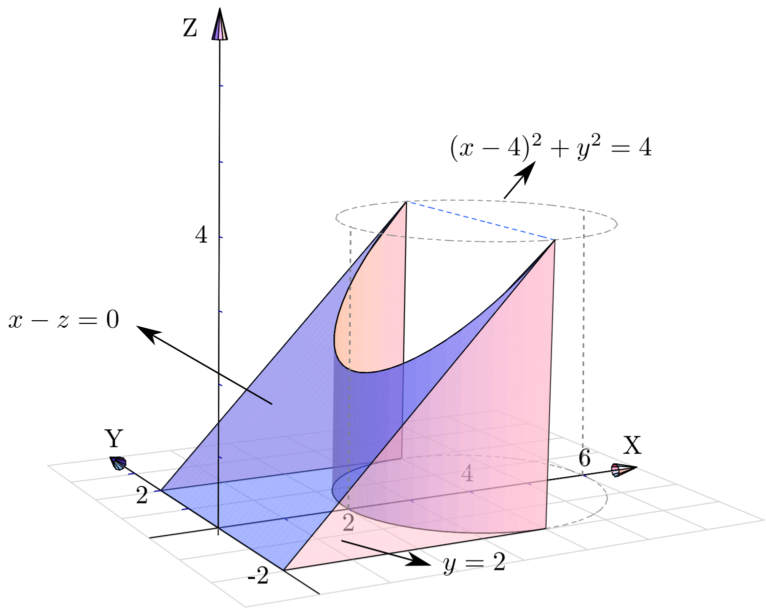

**2.8** Sólido $Q_3$.



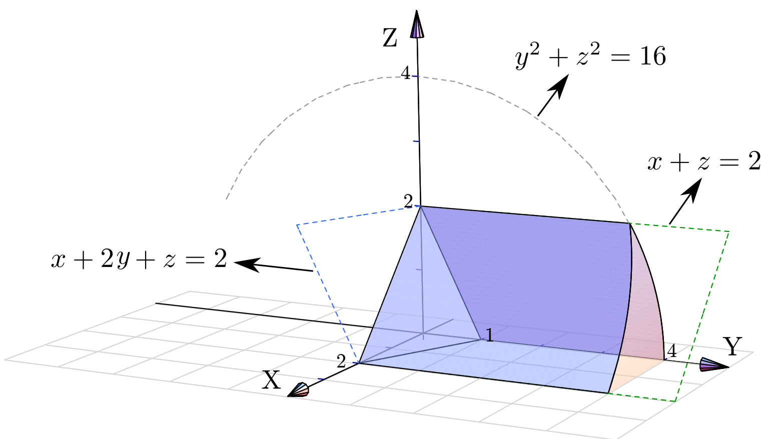

**2.9** Sólido $Q_4$.



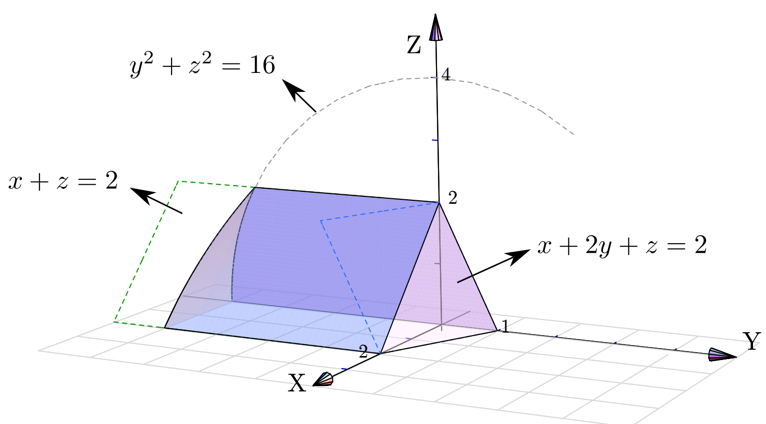

**2.10** Sólido $Q_5$.



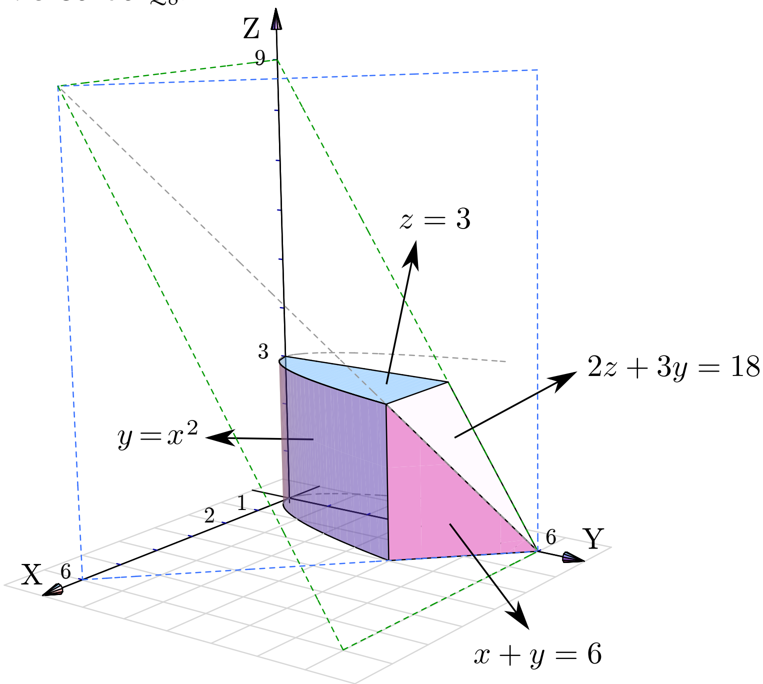

**2.11** Sólido $Q_6$.



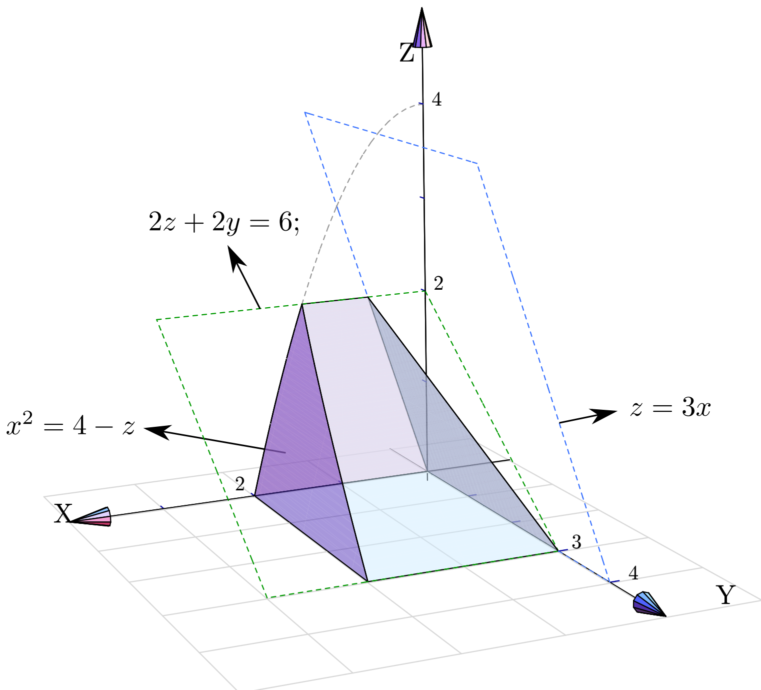

**2.12** Sólido $Q_7$.



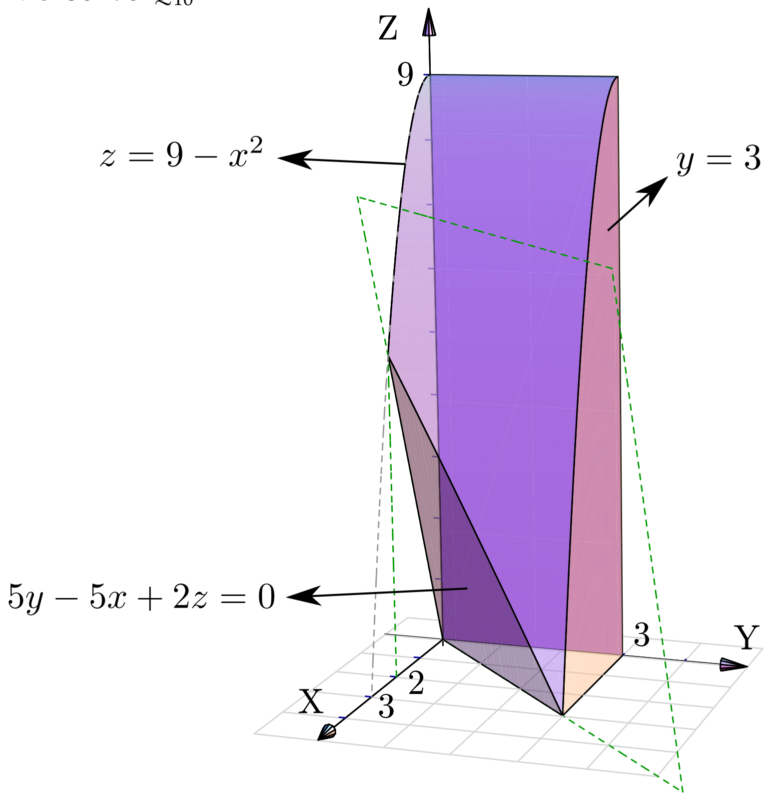
**2.13** Sólido $Q_8$.



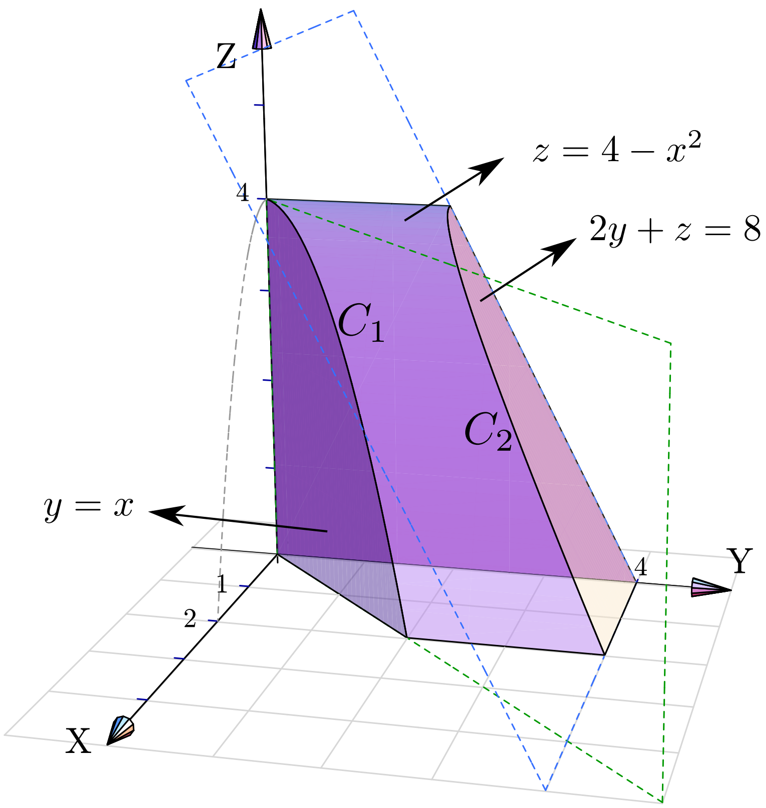

**2.14** Sólido $Q_9$.



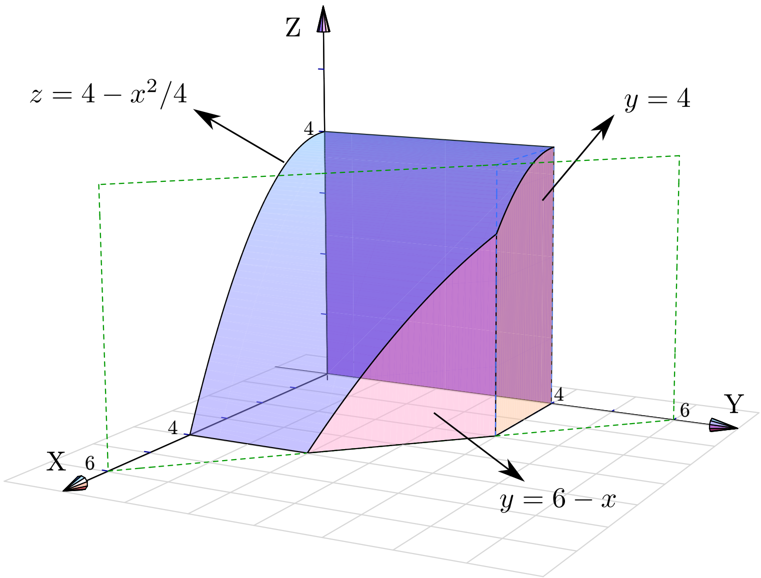
**2.15** Sólido $Q_{10}$.



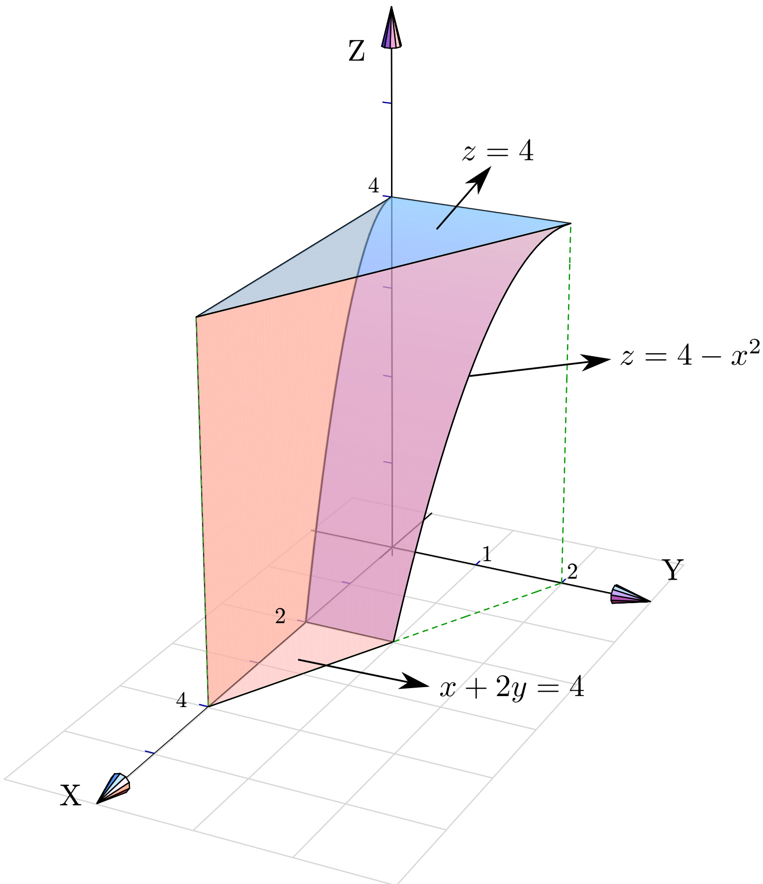

**2.16** Sólido $Q_{11}$.



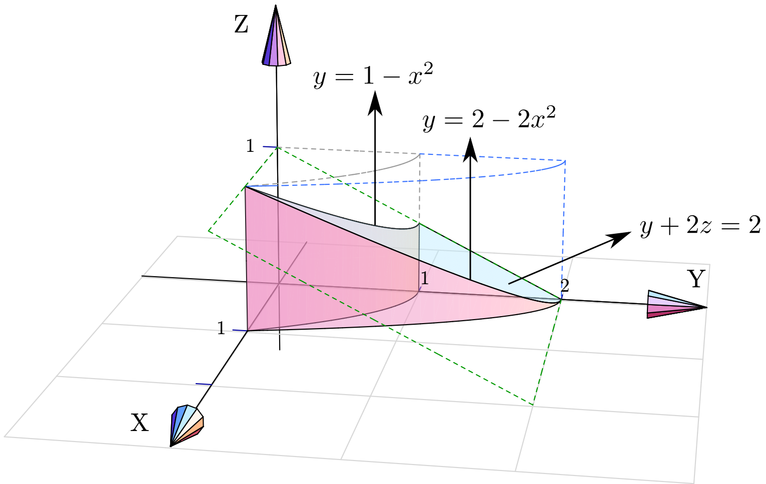
**2.17** Sólido $Q_{12}$.



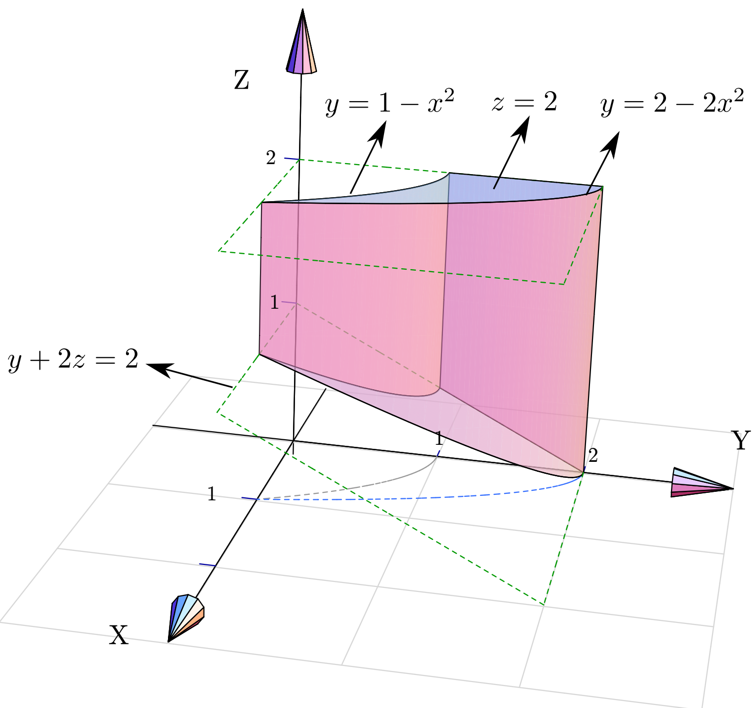

**2.18** Sólido $Q_{13}$.



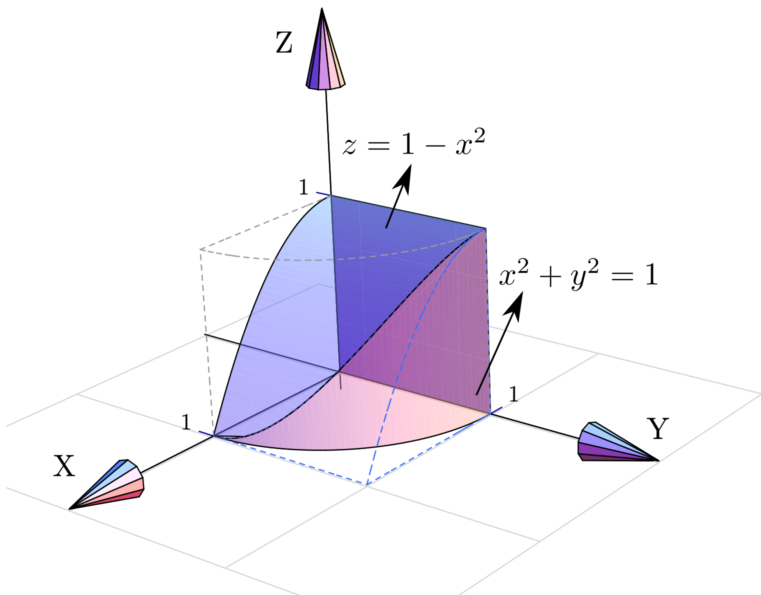

**2.19** Sólido $Q_{14}$.



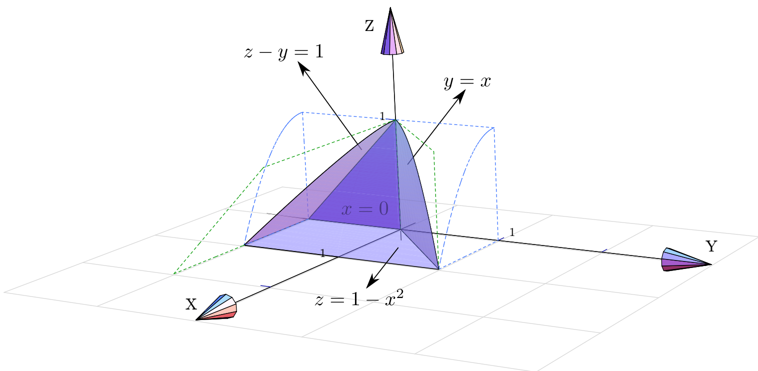

**2.20** Sólido $Q_{15}$.




**2.21** Sólido $Q_{16}$.

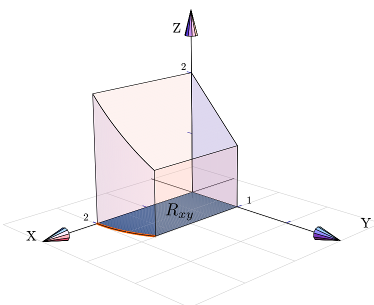


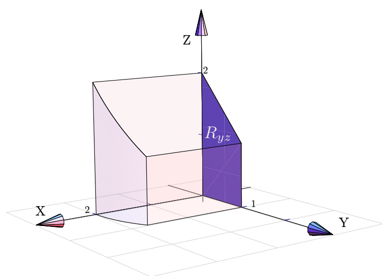

**2.22** Sólido $Q_{17}$.

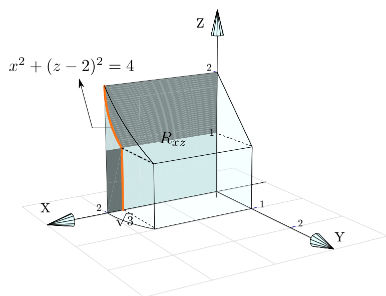



**2.23** Proyecciones de $Q$.

| Proyección sobre $XY$ | Proyección sobre $YZ$ | Proyección sobre $XZ$ |
|---|---|---|

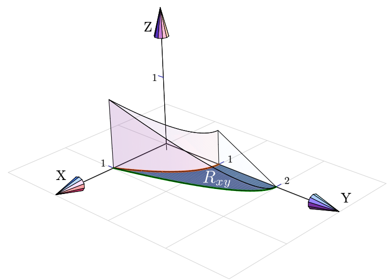


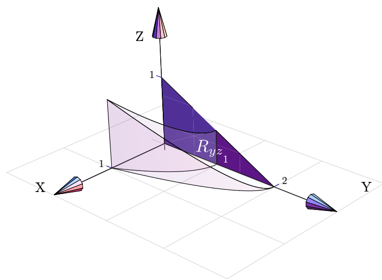



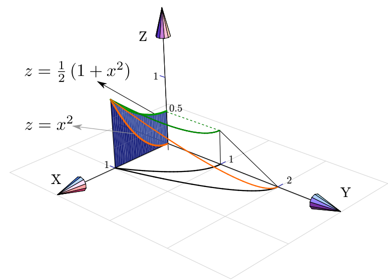




**2.24** Proyecciones de $Q$.

| Proyección sobre $XY$ | Proyección sobre $YZ$ | Proyección sobre $XZ$ |
|---|---|---|

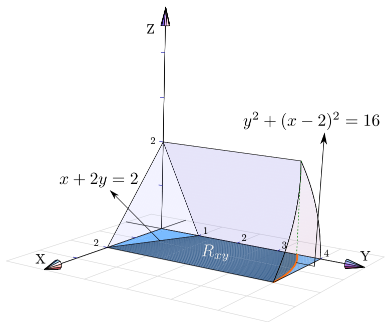


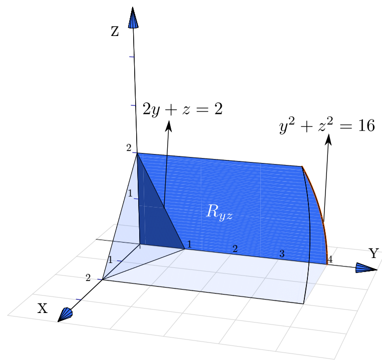


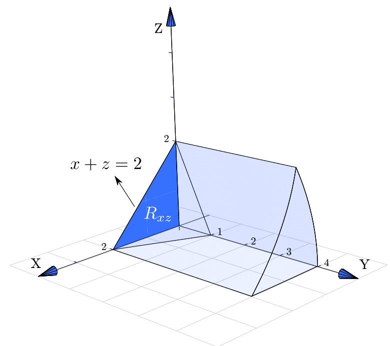



**2.25** Proyecciones de $Q$.

| Proyección sobre $XY$ | Proyección sobre $YZ$ | Proyección sobre $XZ$ |
|---|---|---|

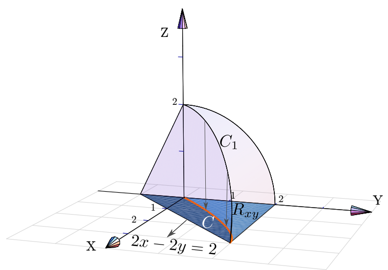







**2.26** Proyecciones de $Q$.

Proyección sobre $XY$

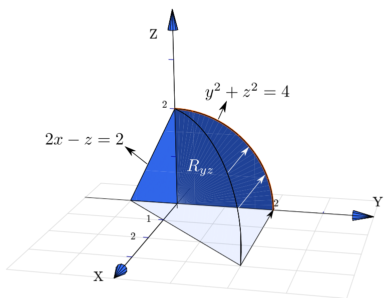



La curva $C_1$ se proyecta en la curva $C$ en el plano $XY$. La curva $C_1$ es la intersección de las superficies $y^2 + z^2 = 4$ y $2x - 2y + z = 2$; para calcular su ecuación eliminamos $z$,

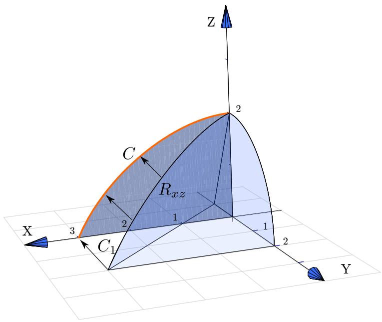
$$\left\{ \begin{array}{rcl} y^2 + z^2 & = & 1 \\ 2x - 2y + z & = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow y^2 + (2 - 2x + 2y)^2 = 4.$$

(una elipse con rotación).

Proyección sobre $YZ$



Proyección sobre $XZ$




La curva $C_1$ se proyecta en la curva $C$ en el plano $XZ$. La curva $C_1$ es la intersección de las superficies $y^2+z^2=1$ y $2x-2y+z=2$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} y^2+z^2 & = & 1 \\ \\ 2x-2y+z & = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow (-1+\frac{z}{2}+x)^2+z^2=1.$$

(una elipse con rotación).