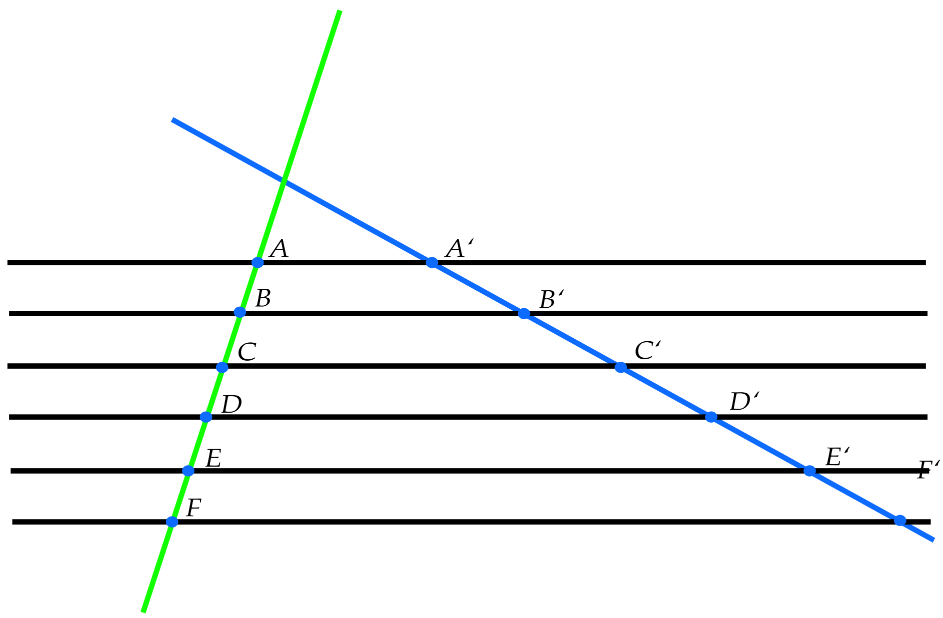
Trigonometría, Semejanza y la Geometría de las Estrellas

María de la Paz Álvarez Scherer
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
UNAM (México)

Al estudiar las relaciones entre dos triángulos tenemos criterios bajo los cuáles ellos son *congruentes* (es decir, que si colocamos uno sobre el otro, cada parte del primero cae exactamente sobre la parte correspondiente del segundo) denotados por ALA, LAL y LLL que nos indican, qué lados o ángulos de cada uno de ellos sabemos que son iguales. La otra relación importante importante entre triángulos es que sean *semejantes*; es decir, que tengan sus lados *proporcionales*, que estén a escala. Y se demuestra que dos triángulos son semejantes sí y sólo sí sus ángulos correspondientes son iguales.

Esta demostración se basa en el teorema de Tales que dice que si tres o más paralelas cortan a una transversal determinando sobre ella segmentos iguales entre sí, entonces ellas determinan sobre cualquier otra transversal segmentos iguales entre sí. Es importante resaltar que este teorema *no* dice que los segmentos determinados en la primera transversal sean iguales a los determinados en la segunda. La siguiente figura ilustra lo que sí dice el teorema:



El teorema supone que los segmentos que tienen longitud igual son, por un lado

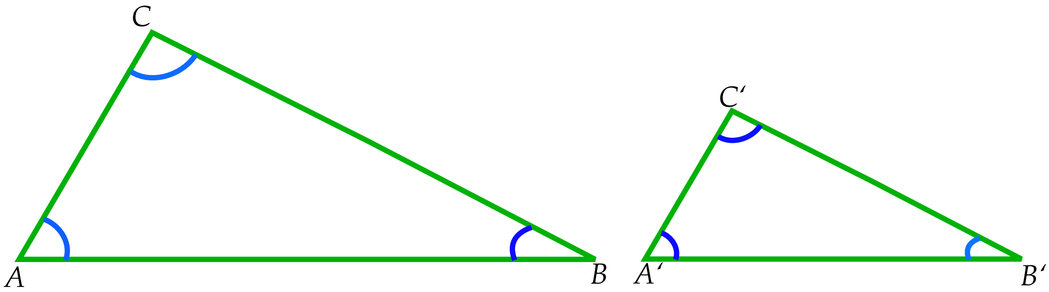
$$AB = BC = CD = DE = EF$$

y concluye que entonces también tienen la misma longitud

$$A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = E'F'$$

Con esta herramienta tenemos que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes, ya que

$$\measuredangle A = \measuredangle A',\ \measuredangle B = \measuredangle B' \text{ y } \measuredangle C = \measuredangle C'$$

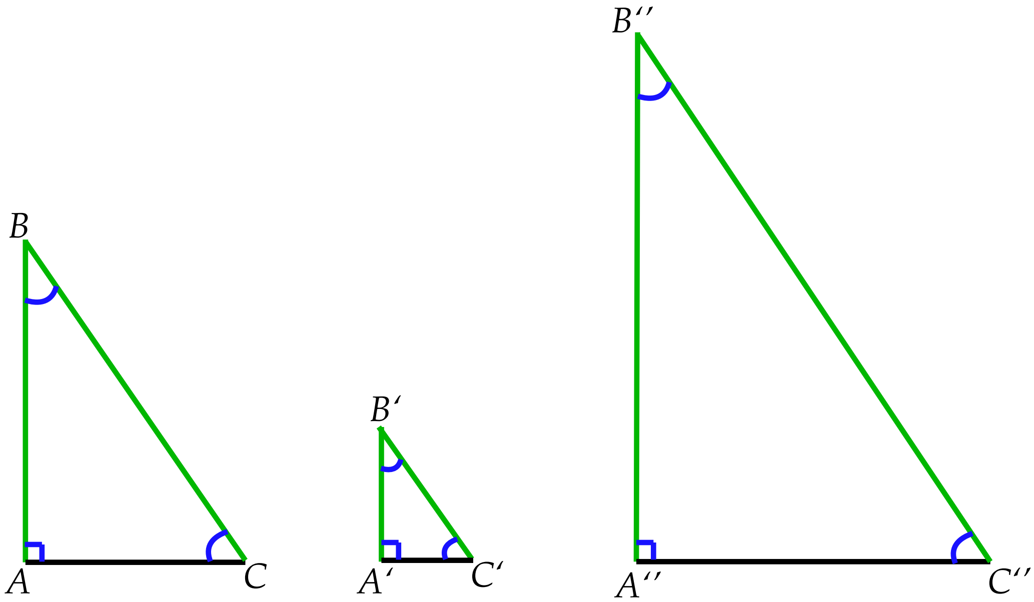


y, por lo tanto, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$.

Si nos fijamos en dos de las proporciones anteriores, por ejemplo en $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$, lo que estamos haciendo es comparar la razón entre lados correspondientes de cada uno de los triángulos, así escrito, nos habla de la *escala* en la que están estos triángulos; pero podemos reescribir esta proporción como $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$ y, así escrita, nos dice que la *razón* entre un par de lados del primer triángulo es *igual* a la *razón* que existe entre los lados correspondientes del segundo triángulo. Y esto vale para cualquier par de lados del primero y sus correspondientes en el segundo:

$$\frac{AB}{AC'} = \frac{A'B'}{A'C'}, \qquad \frac{BC}{AC'} = \frac{B'C'}{A'C'}.$$

Veamos ahora qué pasa con los triángulos rectángulos. Como son rectángulos, basta que conozcamos uno de los ángulos no rectos, para saber cuál es el tercer ángulo; es decir, si sabemos que tenemos un triángulo rectángulo que tiene un ángulo x, el tercer ángulo es $90° - x$. En el siguiente ejemplo, si $\measuredangle C = \measuredangle C' = \measuredangle C'' = \gamma$, entonces $\measuredangle B = \measuredangle B' = \measuredangle B'' = 90° - \gamma$



Claramente estos tres triángulos son semejantes y lo son a todos los otros triángulos rectángulos que tengan como uno de sus ángulos no rectos a γ. Es decir, en el mundo de los triángulos rectángulos, conociendo γ tenemos una *infinidad* de triángulos semejantes. Y en cada uno de ellos, según vimos más arriba, la razón que existe entre los lados correspondientes a AC y BC (es decir, $\dfrac{AB}{BC}$ que son el cateto opuesto a γ y la hipotenusa del triángulo) es igual y *sólo depende del ángulo* γ.

Por eso podemos darle un nombre a esta razón. ¿Qué tal si se nos“ocurre” llamarla *seno de* γ? Luego se nos puede ocurrir que sería muy conveniente hacer una tabla de los valores de *seno de* γ.

Ptolomeo (siglo II) en *Tabla de cuerdas inscritas en un círculo* de su obra *Syntaxis Mathematica* (llamada *Almagest* por los árabes y conocida así hasta la fecha) se dio a la tarea de calcular una tabla muy relacionada a esta razón para ciertos ángulos. Una parte importante de la historia de la trigonometría fue la de cumplir la tarea de calcular estas tablas para cualquier valor de γ. Hay que notar que como la hipotenusa de un triángulo rectángulo siempre es mayor que cualquiera de sus catetos, el seno de un ángulo siempre es menor que 1, ya que el denominador es estrictamente mayor que el numerador de este número racional.

De la misma manera como “bautizamos” a esta razón como *seno*, podemos nombrar a todas las otras razones que existen entre los lados de un triángulo rectángulo; así y recordando que estamos considerando ángulos estrictamente menores que 90° tenemos:

1. $coseno(\gamma) = \dfrac{AB}{BC}$, que es la razón entre el cateto adyacente a γ y la hipotenusa y, que también es estrictamente menor que 1

2. $tangente(\gamma) = \dfrac{AB}{AC}$, que es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente a γ

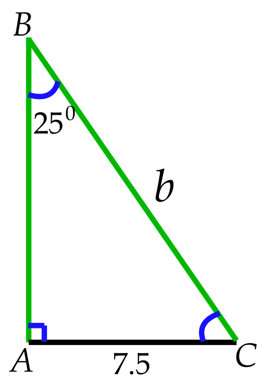
3. $cotangente(\gamma) = \dfrac{AC}{AB}$, que es la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto a γ

4. $secante(\gamma) = \dfrac{BC}{AB}$, que es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto a γ y que es estrictamente mayor que 1

5. $cosecante(\gamma) = \dfrac{AC}{AB}$, que es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente a γ y que también es mayor que 1.

Lo importante de tener tablas con estas razones es que basta que conozcamos un lado de un triángulo particular de toda la infinidad de triángulos rectángulos que tienen a γ como uno de sus ángulos no rectos, para que conozcamos todos los lados y ángulos de este triángulo particular. Es decir, tenemos resuelto este triángulo rectángulo.

Por ejemplo: Si nos dicen que tenemos un triángulo rectángulo, que tiene un ángulo de 25°, basta con ir a las tablas trigonométricas y tenemos que $sen(25)° \approx 0.42261826174$ (Usamos el símbolo $\approx$ para enfatizar que es una aproximación, ya que este número no es un racional).



Si ahora nos dan el lado opuesto a este ángulo, por ejemplo, $7.5cm$ tenemos la siguiente ecuación:

$$0.42261826174 = \frac{7.5}{x}$$

donde x es la hipotenusa del triángulo. Basta resolverla para tener, redondeando este número, que

$$x = 17.75$$

y si usamos ahora el Teorema de Pitágoras podemos tener una excelente aproximación al cuadrado del tercer lado del triángulo; es la raíz cuadrada de

$$b^2 = (17.75)^2 - (7.5)^2$$

$$b \approx 16.088$$

Y por medio de las tablas trigonométricas podemos también resolver este mismo triángulo si lo que nos hubiesen dado fuera, por ejemplo, los catetos $a = 7.5$ y $b = 16.088$. Usando el teorema de Pitágoras podemos calcular la hipotenusa que resulta

$$c^2 = (16.088)^2 + (7.5)^2$$

y, redondeando los cálculos,

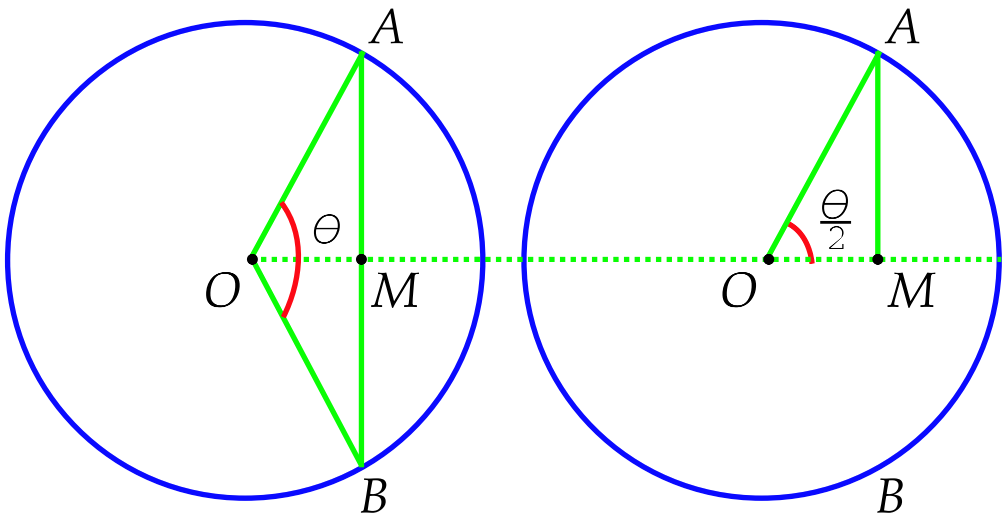
$$c = 17.7503$$

¿Qué problema estaba trabajando Ptolomeo?. ¿Por qué era importante calcular estas tablas? ¿Cómo le hizo? ¿Por qué decimos que son equivalentes a las tabla de seno de un ángulo? Ptolomeo era el gran astronómo de su época. Uno de sus objetivos era tener una forma de predecir la posición de las estrellas para poder viajar y navegar basándose en mapas celestes. Antes que él, se habían dedicado a la geometría de las estrellas el astrónomo Hiparco (siglo II ANE) Casi no se sabe nada de él, su gran obra (12 tomos) se perdió antes de la época de Ptolomeo y es el propio Ptolomeo el que le da crédito tanto por su primera tabla de cuerdas como por las observaciones astronómicas que Hiparco hizo entre los años 161 y 127 ANE. El determinó la hora exacta de la salida y la puesta de los signos zodiacales Este problema no había podido ser resuelto por otros randes matemáticos de la época, por ejemplo, Euclides. Hiparco, siguiendo la tradición babilónica, dividió al ángulo central de una círculo en 360 partes iguales, a la manera en que lo seguimos haciendo hoy en día con los grados.

Después de Hiparco, fue Menelao (siglo I NE) el que hizo importantes contribuciones a la trigonometría y a la geometría esférica en problemas relacionados profundamente con su trabajo astronómico. Su sucesor es Ptolomeo. Como demasiadas veces en la historia, es poco lo que sabemos de su vida, pero está establecido que hizo observaciones astronómicas en Alejandría: la primera de ellas el 26 de marzo de 127 y la última el 2 de febrero de 141.

Sir Thomas Heath, dice de Ptolomeo en *A History of Greek Mathematics* (vol II): ”La Syntaxis es profundamente valiosa ya que da cuenta muy minuciosa de las observaciones e investigaciones tanto de Hiparco como de los que le antecedieron, por ejemplo del eclipse de luna de 721 ANE. Ptolomeo se basó principalmente en el trabajo de Hiparco sobre todo en la preparación de su tabla de cuerdas (equivalente a la senos), [...] su contribución más valiosa es la teoría sobre el movimiento de los cinco planetas; al respecto Hiparco sólo había coleccionado material de las observaciones astronómicas hechas por sí mismo y por sus antecesores...". Y,más adelante:"es evidente que ninguna parte de la trigonometría es nueva para Ptolomeo...su gran mérito es haber sabido abstraer resultados de tratados previos y condensarlos en el mínimo espacio necesario para poder establecer los métodos y fórmulas que necesita"

El método seguido por Ptolomeo fue el de encontrar, a partir de un círculo, una forma de establecer la relación entre la longitud de una cuerda y el ángulo central que la subtiende. En la figura, la relación que se busca es entre AB y θ. Nótese que si unimos M, punto medio de AB, con O , bisecamos al ángulo θ y además, trazamos un ángulo recto; es decir, $\measuredangle AMO = 90°$, Pero si conocemos la relación entre la longitud de AB y θ, y nos fijamos en el triángulo rectángulo $\triangle AOM$, la longitud $\frac{1}{2}AB = AM$ es PRECISAMENTE el seno de $\theta/2$



En el siguiente número de la revista continuaremos con el trabajo de Ptolomeo. Quisiera acabar esta nota con una comparación entre la Tabla de Cuerdas de Ptolomeo y una tabla de senos de una calculadora (tomada de la referencia 2 de las páginas web). La marcada desviación en la diferencia del ángulo $110°30'$ se cree que es debido a un error tipográfico en la versión del Almagesto que se conserva. Nótese la gran precisión de los cálculos de este geómetra de las estrellas:

θ	$\dfrac{crd\,\theta}{120}$	$sen\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$	diferencia
$16°30'$	0.12324930556	0.1434926220	0.0000004336
$49°$	0.41469644444	0.4146932427	0.0000012017
$64°$	0.5299189815	0.5299192642	0.0000002827
$83°30'$	0.6658819444	0.665881660	0.0000002784
$110°30'$	0.8216018519	0.8216469379	0.0000450860
$126°$	0.8910069444	0.8910065242	0.0000004202
$155°$	0.9762962963	0.9762960071	0.0000002892
$176°30'$	0.9995347222	0.9995335908	0.0000011314

Bibliografía.

1. Heath, Sir Thomas, A History of Greek Mathematics Volume II, 1981, Dover Publications, Inc., New York.

2. North, John, Historia Fontana de la Astronomía y la Cosmología, 2001, Fondo de Cultura Económica, México.

3. Páginas web con excelente información, historia de las tablas y las propias tablas:

   (a) http://hypertextbook.com/eworld/chords.shtml

   "Ptolemy's Table of Chords Trigonometry in the Second Century". E-World © 1992-2005 by Glenn Elert. All Rights Reserved – Fair Use Encouraged. 28 June 1994

   (b) http://www.math.rutgers.edu/courses/436/436-s00/Papers2000/hunt.html

   "The Beginnings of Trigonometry". Joseph Hunt History of Mathematics. Rutgers, Spring 2000

   (c) http://cerebro.xu.edu/math/math147/02f/ptolemy/ptolemyintro.html