TEC | Tecnológico de Costa Rica

Escuela de Matemática

6º Libro

Relaciones y Álgebra

Educación virtual para estudiantes de sexto año de primaria

Proyecto EVEPRIM 6

Rebeca Solís Ortega
Zuleyka Suárez Valdés-Ayala
Ivonne Sánchez Fernández
Carlos Monge Madriz

Revista digital Matemática Educación e Internet (**https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/**).

Correo Electrónico: rsolis@itcr.ac.cr

Escuela de Matemática

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Apdo. 159-7050, Cartago

Teléfono (506)25502015

Solís Ortega, R., Suárez Valdés-Ayala, Z., Sánchez Fernández, I., Monge Madriz, C.

Relaciones y Álgebra. Educación virtual para estudiantes de sexto año de primaria. 1ra ed.

- Escuela de Matemática,Instituto Tecnológico de Costa Rica. 2023.

ISBN Obra Independiente: 978-9930-617-32-8

1) Relaciones.
2) Sucesiones.
3) Representación.
4) Ecuaciones.
5) Inecuaciones.

En este libro digital se incluyen enlaces a diferentes sitios web, los autores no se hacen responsables si el o los autores o administradores del sitio referenciado eliminan, bloquean o modifican el contenido de la página.

Las imágenes que se utilizan en este libro digital son de uso libre y gratuito (excepto cuando se indique lo contrario) diseñadas por **@Freepik** y **Vecteezy.com**.

Agradecimientos

A la Vicerrectoría de Investigación y Extensión del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

A los asesores nacionales de matemática de primer y segundo ciclo del Ministerio de Educación Pública: Hermes Mena Picado y Xinia Zuñiga Esquivel, que tuvieron la gentileza de dar soporte logístico y acompañamiento durante el proceso de creación de los materiales.

Al asesor regional de Matemática de Aguirre, Adolfo Alejandro Monge Zamora, por sus comentarios y sugerencias.

A todos los docentes de primaria participantes, quienes fueron siempre la guía para la realización de este material.

A los estudiantes Jean Carlo Guillén Méndez, Steven Sánchez Ramírez y Michelle Chinchilla Chinchilla por la ayuda al editar este libro.

Prefacio

La Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica, por medio de su proyecto Eveprim6, pretende contribuir a la formación académica de los estudiantes de sexto año de primaria y a la vez ofrecer un recurso para padres y maestros de esta población. Para ello, se han considerado las habilidades contempladas en el programa de estudios vigente, en el área de matemática, según el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

El equipo de Eveprim6, les insta a revisar con atención todo el material a su disposición, ya que el mismo ha sido elaborado con el fin de promover el auto-aprendizaje a distancia.

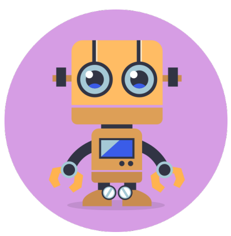
Este libro contiene 6 capítulos, en cada uno de ellos encontrará aspectos teóricos, ejemplos, ejercicios con solución, problemas introductorios, videos explicativos y actividades interactivas de la web. Se le recomienda hacer una lectura a profundidad, reflexionando y analizando cada uno de los ejemplos, ejercicios y problemas propuestos.

Procure no avanzar en los temas hasta que considere que ya asimiló la información. Para su autoevaluación puede apoyarse en las prácticas que aparecen al final de cada capítulo y su respectiva solución. Con el fin de que la lectura de este libro le permita detenerse en contenidos particulares se ofrecen algunas secciones con información adicional.

A lo largo de este libro se utilizan una serie de imágenes y símbolos para representar secciones determinadas. A continuación, se presentan los significados de las mismas.

Símbolo	Sección	Descripción
	Activación de conocimientos	Al hacer clic sobre la imagen, tendrá acceso a un apartado del libro que contiene aspectos teóricos y ejemplos de contenidos estudiados en años anteriores. Estos son necesarios para la correcta asimilación de los nuevos aprendizajes.

Símbolo	Sección	Descripción
	Recuerda que...	Muestra contenidos previos que son necesarios para los aprendizajes.
	Para saber más...	Encontrará información o ejercicios de un nivel más avanzado.
	Sabías que...	Contiene aspectos que permiten relacionar la matemática con hechos históricos, aplicaciones a situaciones del entorno, curiosidades, entre otros.
	Videos	Al dar clic, tendrá acceso a materiales audiovisuales diseñados exclusivamente como complemento de este libro. Según su objetivo se clasifican en: ▪ Introducción de contenidos. ▪ Refuerzo de aspectos teóricos. ▪ Solución de ejercicios y problemas, paso a paso. Se recomienda abrir estos enlaces en una nueva pestaña para evitar retornar al inicio del libro.

Símbolo	Sección	Descripción
	Práctica	Serie de ejercicios y problemas que se incluyen al final de cada capítulo. Todas las prácticas propuestas contienen su respectiva solución. Hay ejercicios que enlazan a su solución en video o a alguna aplicación interactiva de la web. Para dirigirse a la solución respectiva de un ejercicio haga clic sobre el símbolo y para regresar al enunciado del ejercicio haga clic sobre el símbolo.
	Aplicaciones tecnológicas	Al dar clic al enlace, se le dirigirá al material interactivo. Aplicaciones como Geogebra pueden ayudarle a fortalecer el aprendizaje o profundizar los conocimientos de una manera divertida. Se recomienda abrir estos enlaces en una nueva pestaña para evitar retornar al inicio del libro.

Índice general

Capítulo 1

Relaciones

1.1 Razón

Analice

Tatiana está empezando a caminar por las tardes. Por eso, todos los días anota de la distancia que recorre y el tiempo que tarda.

La semana pasada hizo el siguiente registro:

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Distancia en kilómetros	8	9	2	6	10	3	6
Tiempo en horas	2	3	1	2	2	1	3

Tatiana le preguntó a sus papás cómo se calcula la rapidez para analizar qué tan rápido ha caminado esos días. Sus papás le responden que no lo saben, pero al fijarse en el velocímetro de su carro, este indica que la rapidez se mide en "kilómetros por hora" (km/ h).

Con base en esta información, ayude a Tatiana a calcular la rapidez a la que ha caminado durante la semana.

Solución: En el problema se menciona que la rapidez se mide en "kilómetros por hora" (km/ h), así se puede calcular la rapidez de algunos de los días de la siguiente manera:

Lunes	**Miércoles**	**Viernes**	**Domingo**
$\frac{8\,\text{km}}{2\,\text{h}}$	$\frac{2\,\text{km}}{1\,\text{h}}$	$\frac{10\,\text{km}}{2\,\text{h}}$	$\frac{6\,\text{km}}{3\,\text{h}}$

Al simplificar cada fracción, se obtiene:

Lunes	**Miércoles**	**Viernes**	**Domingo**
4 km/ h	2 km/ h	5 km/ h	2 km/ h

Ejemplo 1.1

Calcule la rapidez a la que Tatiana caminó los otros días de la semana. Con base en esa información, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué día o días caminó con la mayor rapidez?

b) ¿Qué día o días caminó con la menor rapidez?

c) ¿Qué días o días caminó con la misma rapidez?

Solución: Al calcular la rapidez de los otros días se obtienen los siguientes datos:

Martes	**Jueves**	**Sábado**
$\frac{9\,\text{km}}{3\,\text{h}} = 3\,\text{km/ h}$	$\frac{6\,\text{km}}{2\,\text{h}} = 3\,\text{km/ h}$	$\frac{3\,\text{km}}{1\,\text{h}} = 3\,\text{km/ h}$

Así, para responder las preguntas del ejemplo, conviene hacer un resumen de la rapidez con la que caminó Tatiana todos los días:

Lunes	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**	**Sábado**	**Domingo**
4 km/ h	3 km/ h	2 km/ h	3 km/ h	5 km/ h	3 km/ h	2 km/ h

Con base en la información anterior, se puede responder a las preguntas planteadas. Así:

a) El día que Tatiana caminó con mayor rapidez fue el viernes.

b) Los días que Tatiana caminó con menor rapidez fueron el miércoles y el domingo.

c) Los días que Tatiana caminó con igual rapidez fueron:

- El miércoles y el domingo con una rapidez de 2 km/ h.
- El martes, jueves y sábado con una rapidez de 3 km/ h.

Observe que, aunque Tatiana la mayoría de días caminó distancias diferentes y requirió tiempos diferentes, esas magnitudes (la distancia y el tiempo) se pueden comparar mediante una división, con esto se puede establecer una nueva medida, la rapidez.

En matemática, se pueden comparar las magnitudes por medio de diferencia (resta), por ejemplo, cuando decimos que Kimberly tiene 12 años y Rodrigo tiene 11 años, entonces Kimberly es mayor que Rodrigo por un año (se hizo la resta $12 - 11 = 1$).

Sin embargo, otra forma de comparar cantidades o magnitudes, es por medio de un cociente (división) como en el caso de la rapidez. A esta comparación de magnitudes, se le llama **razón matemática**.

Definición 1.1 Razón matemática

La razón matemática permite comparar dos magnitudes por medio de un cociente (división). En general, las razones se pueden representar por medio de fracciones.

Siguiendo con la definición planteada, se puede comparar la razón entre el número 2 y el número 3, así se puede escribir de las siguientes formas:

Opción 1	**Opción 2**
$2 : 3$	$\frac{2}{3}$

En ambas opciones se lee "dos es a tres". Donde el dos ocupa la posición denominada **antecedente** y el tres ocupa la posición llamada **consecuente**.

Las relaciones que permiten establecer razones tienen una característica muy importante y es que se debe respetar el orden en que solicita dicha relación. Por ejemplo, no es lo mismo decir 2 : 3 que 3 : 2.

Sabías que...

La diferencia entre un número racional escrito en notación de fracción y una razón matemática, es que la fracción involucra números que representan la misma especie de objetos o magnitudes. En cambio, en la razón se pueden comparar magnitudes de diferente naturaleza.

A continuación, se presentan varios ejemplos sobre el tema.

Ejemplo 1.2

En la sección 6-2, hay 15 mujeres y 12 hombres. Establezca:

a) La relación entre mujeres y hombres.

b) La relación entre hombres y mujeres.

Solución:

a) Para establecer la relación entre mujeres y hombres, se puede realizar el siguiente análisis:

Cantidad de mujeres	**Cantidad de hombres**	**Razón**	**Razón simplificada**
15	12	$\frac{15}{12}$	$\frac{5}{4}$

Esto quiere decir que, por cada 5 mujeres en esa sección, hay 4 hombres.

b) Para establecer la relación entre hombres y mujeres, se puede realizar el siguiente análisis:

Cantidad de hombres	Cantidad de mujeres	Razón	Razón simplificada
12	15	$\frac{12}{15}$	$\frac{4}{5}$

Note que son los mismos datos del ejemplo anterior, pero la razón que se solicita está en otro orden. Por tanto, se puede decir que, por cada 4 hombres en la sección, hay 5 mujeres.

Ejemplo 1.3

La impresora que compró Karina, rinde 120 páginas por cada 4 mililitros de tinta en el cartucho. Establezca la razón entre la cantidad de páginas y la cantidad de mililitros de tinta.

Solución: Para establecer la relación entre la cantidad de páginas y la cantidad de mililitros de tinta, se puede realizar el siguiente análisis:

Cantidad de páginas	Cantidad de mililitros	Razón	Razón simplificada
120	4	$\frac{120}{4}$	30

Esto significa que por cada 30 páginas que se imprimen, se emplea 1 mililitro de tinta.

Ejemplo 1.4

En béisbol, la rapidez del lanzamiento de la bola y la del bateo, es una de las métricas más importantes para determinar la probabilidad de que cualquier bola bateada sea valiosa. Un lanzador de las ligas mayores, en promedio, envía la bola de manera que, en 1 segundo, recorre 40 metros. Establezca la razón entre la cantidad de metros y el tiempo que tarda en recorrer dicha distancia.

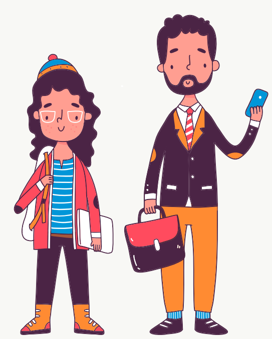
Solución: Para establecer la relación entre la cantidad de metros y el tiempo que tarda una bola de béisbol en recorrer dicha distancia, se puede realizar el siguiente análisis:

Distancia en metros	**Tiempo en segundos**	**Razón**	**Razón simplificada**
40	1	$\frac{40}{1}$	40

Esto quiere decir, que la rapidez del lanzamiento es 40 metros por segundo (m/s). Es decir, que recorre 40 metros cada segundo.

Ejemplo 1.5

Matías tiene 36 años e Irene, su sobrina, tiene 18 años. Determine la razón entre las edades de ambos.



Solución: Note que en este caso no piden un orden específico para establecer la razón, por lo que se puede hacer en cualquier orden. En este ejemplo, se presentan las dos posibles opciones, pero basta con realizar una de las dos.

- **Situación 1:** Razón entre la edad de Matías en relación con la de Irene. En este caso se tiene:

Razón	Razón simplificada
$\frac{36}{18}$	2

  Esto significa que Matías tiene dos veces (el doble de) la edad de Irene.

- **Situación 2:** Razón entre la edad de Irene en relación con la de Matías. En este caso se tiene:

Razón	Razón simplificada
$\frac{18}{36}$	$\frac{1}{2}$

  Esto significa que Irene tiene la mitad de la edad que tiene Matías.

Video 1.1

Este video muestra cómo establecer razones matemáticas en diferentes contextos.

1.2 Práctica: razones

1.2.1 Para cada inciso determine una razón que cumpla con la condición planteada:

a) El antecedente es mayor que el consecuente.

b) El antecedente es un número par y el consecuente un número impar.

c) El antecedente es un número primo que está entre 12 y 15; el consecuente es un múltiplo de 5.

d) El antecedente es el sucesor del consecuente.

e) El antecedente es el antecesor del consecuente.

1.2.2 En una escuela hay 5 grupos de sexto grado y se ha hecho un registro donde se indica la cantidad de hombres y mujeres que hay en cada grupo. Dicho registro se muestra a continuación:

	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5
Cantidad de mujeres	15	14	20	16	16
Cantidad de hombres	18	16	12	16	18

Calcule la razón entre mujeres y hombres, para cada sección. Además, explique el significado de cada razón.

1.2.3 Lea con atención las siguientes situaciones. Determine la relación (razón) entre las cantidades, según el orden que se solicita. Escriba la razón en forma de fracción y simplifique al máximo la respuesta. Además, indique el significado de cada razón.

a) En un equipo de natación hay 20 mujeres y 15 hombres. Establezca la relación (razón) entre mujeres y hombres.

b) Un confite pequeño cuesta 25 colones y si compro dos, el precio sería de 50 colones. Determine la relación entre el precio de un confite y el precio de dos confites.

c) En una pequeña granja avícola hay 150 animales y 75 son gallinas ponedoras de huevos. Establezca la relación entre el total de animales y las gallinas ponedoras.

d) En una fiesta infantil revientan una piñata. Lucas agarra 7 dulces y su hermana Melissa 49, establezca la relación entre el total de dulces que agarró Lucas y el que obtuvo su hermana.

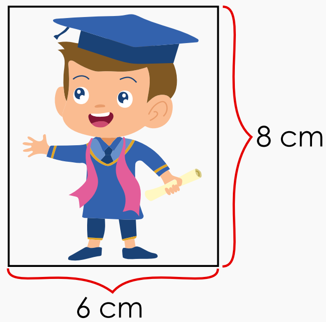
e) Don Hugo trabaja en transporte privado, la semana pasada trabajó 27 horas y esta semana logró trabajar 45 horas. Determine la relación entre el total de horas que trabajó la semana pasada y el total de horas de esta semana.

f) En la escuela, por cada 3 niños se compra un paquete con 60 hojas blancas. Determine la razón entre la cantidad de niños y el total de hojas blancas.

1.3 Proporciones

Analice

Para la graduación de sexto grado, a Esteban le tomaron una foto con dimensiones 8 cm de altura y 6 cm de base, como se muestra en la siguiente figura:



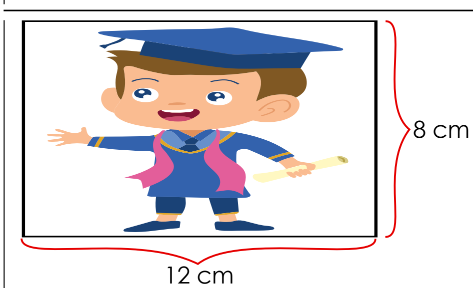
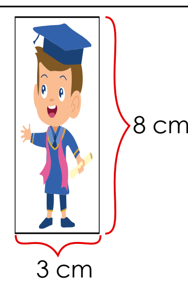
Su familia está tan emocionada, que su mamá la va a duplicar (ampliar al doble) para ponerla en un marco que compró y su papá la va a reducir a la mitad, para ponerla en un llavero que tiene.

Para hacer esto, van a la fotocopiadora y:

- La mamá pide que la nueva foto tenga dimensiones de altura 8 cm y de base 12 cm.
- El papá pide que la nueva foto tenga dimensiones de altura 8 cm y de base 3 cm.

¿Son estas medidas correctas? En caso contrario, ¿cuáles son las medidas correctas?

Solución: Primero, se debe analizar como quedarían las imágenes de acuerdo con las medidas que la mamá y el papá de Esteban solicitaron. Así se tiene

Foto para mamá (duplicar)	**Foto para papá (reducirse a la mitad)**
	

Como se puede observar en los casos anteriores, las fotografías no quedaron bien. Esto se debe a que no se utilizaron las medidas correctas.

Note que la foto original tiene como dimensiones de altura 8 cm y de base 6 cm. Así, se puede establecer una razón:

altura : base

$$8 : 6$$

$$\frac{8}{6}$$

Note que esta fracción se puede simplificar por 2, así:

$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

A continuación, se analizan las razones (**altura : base**) de las fotos:

Foto para mamá (duplicar)	**Foto para papá (reducirse a la mitad)**
$\frac{8}{12}$ Al simplificar por 4 se obtiene $\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$

Si se comparan las tres razones (fotografía original, fotografía de la mamá y fotografía del papá) se tiene que todas son distintas:

$$\frac{4}{3} \neq \frac{2}{3} \neq \frac{8}{3}$$

Esto provoca que las dimensiones deseadas para las fotografías no sean correctas.

Ahora bien, lo correcto sería:

- Para la fotografía de la mamá: duplicar (multiplicar por dos) cada una de las medidas.
- Para la fotografía del papá: dividir entre dos cada una de las medidas.

Recuerde

El símbolo = se lee **igual** y el símbolo $\neq$ se lee: **diferente**

Así, se tiene:

Foto para mamá (duplicar)	Foto para papá (reducirse a la mitad)
	

En este caso, si se calculan las razones (**altura : base**) de las fotos, se tiene:

Foto para mamá (duplicar)	Foto para papá (reducirse a la mitad)
$\frac{16}{12} = \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$

Si se comparan las tres razones (fotografía original, fotografía de la mamá y fotografía del papá) se tiene que todas son equivalentes:

$$\frac{16}{12} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \qquad \qquad \frac{4}{3} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Por tanto, las dimensiones deseadas para las fotografías son correctas.

Note que a pesar de utilizar números diferentes, la relación o la razón entre ellas es equivalente, es decir, guardan la misma relación. A esta característica, se le llama **proporcionalidad**.

Definición 1.2 Proporcionalidad

Una proporción es una equivalencia entre dos razones. Además, la fracción canónica que se genera al simplificar las proporciones se denomina: **constante de proporcionalidad**.

Una proporción de la forma:

$$2 : 3 :: 4 : 6$$

Se lee "dos es a tres como cuatro es a seis" y se puede escribir como:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Además, a las posiciones que ocupan el 2 y el 6 se les llama **extremos** y a las posiciones que ocupan el 3 y el 4 se les denomina **medios**.

Una característica importante para las proporciones directas, es que el producto de los medios es equivalente al producto de los extremos.

Recuerde

Las proporciones se llaman **directas** cuando, al aumentar una de las magnitudes, el resto de las magnitudes aumentan en forma proporcional, por ejemplo, la relación entre la cantidad de animales y la cantidad de alimento que necesitan: cuanto mayor sea el número de animales, aumentará la cantidad de alimento que se necesita.

$\underbrace{2 : \overbrace{3 :: 4}^{\text{medios}} : 6}_{\text{extremos}}$	**Producto de los medios** $3 \cdot 4 = 12$	**Producto de los extremos** $2 \cdot 6 = 12$

Para saber más...

Las proporciones se llaman **inversas** cuando, al aumentar una de las magnitudes, el resto de las magnitudes disminuye proporcionalmente y viceversa, por ejemplo, la relación entre la cantidad personas para arreglar un salón y el tiempo que les demora: cuantas más personas colaboren, menos tiempo tomará el poder terminar.

Ejemplo 1.6

Determine si las siguientes parejas de datos son proporcionales:

a) $\frac{15}{21}$ y $\frac{20}{12}$

b) $\frac{18}{22}$ y $\frac{45}{55}$

c) $21 : 100$ y $15 : 60$

Solución:

a) Para determinar si las fracciones $\frac{15}{21}$ y $\frac{20}{12}$ son proporcionales, se debe simplificarlas al máximo. Así:

Razón #1	**Razón #2**
$\frac{15}{21}$	$\frac{20}{12}$
Fracciones simplificadas:	
$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{3}$

Por lo tanto, las razones no son proporcionales.

b) Para determinar si las fracciones $\frac{18}{22}$ y $\frac{45}{55}$ son proporcionales, se debe simplificarlas al máximo. Así:

Razón #1	Razón #2
$\frac{18}{21}$	$\frac{45}{55}$
Fracciones simplificadas:	
$\frac{9}{11}$	$\frac{9}{11}$

Por tanto, las razones son proporcionales y su constante de proporcionalidad es $\frac{9}{11}$.

c) Para determinar si las razones $21 : 100$ y $15 : 60$ son proporcionales, se debe escribirlas en notación de fracción y luego simplificarlas al máximo. Así:

Razón #1	Razón #2
$21 : 100$	$15 : 60$
En notación de fracción:	
$\frac{25}{100}$	$\frac{15}{60}$
Fracciones simplificadas:	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Por tanto, las razones son proporcionales y su constante de proporcionalidad es $\frac{1}{4}$.

Ejemplo 1.7

Analice cada una de las siguientes situaciones e indique si las magnitudes son directamente proporcionales:

a) La cantidad de ebanistas de una empresa y el total de artículos que se construyen.

b) El número de computadoras que se compra en el centro de cómputo de una escuela y su costo en dólares.

c) La cantidad de pintores y el tiempo que tardan en pintar una pared.

Solución:

a) Si aumenta la cantidad de ebanistas, la cantidad de artículos también aumenta. Por tanto, ambas magnitudes son directamente proporcionales.

b) Si aumenta la cantidad de computadoras, el costo de adquirirlas aumenta también. Por tanto, ambas magnitudes son directamente proporcionales.

c) Si aumenta la cantidad de pintores, el tiempo que tardan en pintar la pared disminuye, por tanto, **no** son magnitudes directamente proporcionales.

Video 1.2

En este video se puede observar algunos contextos de expresiones proporcionales.

1.4 Práctica: proporciones

1.4.1 Emilio es fanático del fútbol y leyó en una página de la UNCAF, la siguiente información:

La revista especializada en finanzas Forbes publicó en su edición de agosto-septiembre el listado de las 100 mujeres **más poderosas de centroamérica**, entre las que destacan tres futbolistas del área que han brillado tanto en su país como a nivel internacional.

Las jugadoras son las costarricenses Katherine Alvarado y Shirley Cruz, así como la guatemalteca Ana Lucía Martínez Maldonado, además de otras atletas y mujeres de otros ámbitos profesionales.

Sabías que...

La revista Forbes Centroamérica es una revista mensual que se publica en seis países: Guatemala, Nicaragua, El Salvador, Honduras, Costa Rica y Panamá. Su objetivo es contar las mejores historias de negocios de la región.

Puede observar su edición de Agosto del 2020 en este **enlace**

Él decidió conseguir un afiche de tamaño 20×13 cm (un rectángulo de 20 cm de largo y 13 cm de ancho) de Shirley Cruz. Sin embargo, quiere llevarlo a duplicar de tamaño. Determine las dimensiones del nuevo afiche, de manera que sea proporcional al afiche original.

1.4.2 Determine si las siguientes parejas representan una proporción. Justifique su respuesta.

a) Pareja 1: $\frac{15}{20}$ y $\frac{28}{21}$

b) Pareja 2: $\frac{3}{6}$ y $\frac{4}{8}$

c) Pareja 3: $\frac{15}{36}$ y $\frac{25}{65}$

d) Pareja 4: $\frac{8}{33}$ y $\frac{16}{66}$

1.5 Regla de tres

Analice

Ginnette fue a la feria del agricultor para comprar naranjas. En el puesto al que se acercó le dijeron que una malla con 5 naranjas cuesta 1 000 colones (malla A), pero también tienen mallas con 8 naranjas en 2 000 colones (malla B). Con base en esta información:

a) Determine el precio por naranja si compra la malla A.

b) Determine el precio por naranja si compra la malla B.

c) ¿Cuál es la malla más rentable? Piense en función del precio que debe pagar por cada naranja.

d) ¿Cuál será la cantidad de naranjas ideal para que al comprar la malla B, el precio por naranja sea proporcional al de la malla A?

Solución:

a) Para determinar el precio por naranja si se compra la malla A, se puede establecer una razón como la siguiente:

Cantidad de naranjas	Precio	Relación entre el precio y la cantidad de naranjas	Razón simplificada
5	1 000	$\dfrac{1\,000}{5}$	$\dfrac{200}{1} = 200$

Los datos quieren decir que, por cada 200 colones, se puede comprar una naranja. Esto es equivalente a decir que cada naranja cuesta 200 colones.

b) Para determinar el precio por naranja si se compra la malla B, se puede establecer una razón como la siguiente:

Cantidad de naranjas	**Precio**	**Relación entre el precio y la cantidad de naranjas**	**Razón simplificada**
8	2 000	$\frac{2\,000}{8}$	$\frac{250}{1} = 250$

Los datos quieren decir que, por cada 250 colones, se puede comprar una naranja. Esto es equivalente a decir que cada naranja cuesta 250 colones.

c) La malla más rentable, tomando en cuenta el precio que debe se debe pagar por cada naranja, es la malla A, porque cada naranja es 50 colones más barata que las naranjas de la malla B.

d) Para saber la cantidad de naranjas ideal para que al comprar la malla B, el precio por naranja sea proporcional al de la malla A, se deben establecer las razones. Cómo no se sabe la cantidad de naranjas, se usará una letra cualquiera que represente la cantidad de naranjas aunque aún no se conoce su valor.

En proporciones, la letra que se desconoce y que representa un número se llama **incógnita**. En este caso, se usará la letra "n" para representar la cantidad de naranjas que se requieren.

Malla A	**Malla B**
$\frac{1\,000}{5}$	$\frac{2\,000}{n}$

Así, se tiene la proporción:

$$\frac{1\,000}{5} = \frac{2\,000}{n}$$

Según lo estudiado, en una proporción directa el producto de los medios es equivalente al producto de los extremos:

$\underbrace{1\,000 : \overbrace{5 : : 2\,000}^{\text{medios}} : n}_{\text{extremos}}$	**Producto de los medios** $5 \cdot 2\,000 = 10\,000$	**Producto de los extremos** $1\,000 \cdot n$

Entonces se puede establecer la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2000 &= 1\,000 \cdot n \\ 10\,000 &= 1\,000 \cdot n \end{aligned}$$

Ahora bien, como 1 000 y "n" son factores de 10 000, también son divisores, por lo que:

$$\begin{aligned} \frac{10\,000}{1\,000} &= n \\ n &= 10 \end{aligned}$$

Por tanto, para que la cantidad de naranjas y el precio de la malla B sea proporcional a los datos de la malla A, la cantidad de naranjas en la malla B debe ser 10.

Ejemplo 1.8

Mauricio va a comprar 14 manzanas para hacer un postre para la fiesta de cumpleaños de su hija. En el supermercado observa que las manzanas que necesita se venden en paquetes de dos manzanas. Si cada paquete cuesta ₡1 300, ¿Cuánto debe pagar en total por la compra?

Solución: Haciendo un resumen de la información del ejemplo anterior, se tiene:

Manzanas →	2	14	← Manzanas
↓			↓
Precio →	1 300	p	← Precio

Así, se tiene la proporción:

$$\frac{2}{1\,300} = \frac{14}{p}$$

Según lo estudiado, el producto de los medios es equivalente al producto de los extremos:

$\underbrace{2 : \overbrace{1\,300 :: 14}^{\text{medios}} : p}_{\text{extremos}}$	**Producto de los medios** $1\,300 \cdot 14 = 18\,200$	**Producto de los extremos** $2 \cdot p$

Entonces se puede establecer la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} 1\,300 \cdot 14 &= 2 \cdot p \\ 18\,200 &= 2 \cdot p \end{aligned}$$

Ahora bien, como 2 y p son factores de 18 200, también son sus divisores, por lo que:

$$\begin{aligned} \frac{1\,820}{2} &= p \\ 9\,100 &= p \end{aligned}$$

Por tanto, Mauricio debe invertir ₡9 100 para comprar las 14 manzanas.

En general, una forma que se puede utilizar para calcular el valor de la incógnita se resume en los siguientes recuadros, donde se asume que la incógnita se denomina x. Observe la forma general de calcular el valor de la incógnita:

Caso 1

$$\frac{10}{5}=\frac{20}{x}$$

$$\frac{10}{5}=\frac{20}{x}$$

$$x=\frac{5\cdot 20}{10}$$

$$x=\frac{5\cdot \cancel{20}}{\cancel{10}}$$

$$x=\frac{5\cdot 2}{10}$$

$$x=10$$

Caso 2

$$\frac{10}{5}=\frac{x}{10}$$

$$\frac{10}{5}=\frac{x}{10}$$

$$x=\frac{10\cdot 10}{5}$$

$$x=\frac{10\cdot \cancel{10}}{\cancel{5}}$$

$$x=\frac{10\cdot 2}{1}$$

$$x=20$$

Caso 3

$$\frac{10}{x}=\frac{20}{10}$$

$$\frac{10}{x}=\frac{20}{10}$$

$$x=\frac{10\cdot 10}{20}$$

$$x=\frac{10\cdot \cancel{10}}{\cancel{20}}$$

$$x=\frac{\cancel{10}\cdot 1}{\cancel{2}}$$

$$x=5$$

Caso 4

$$\frac{x}{5}=\frac{20}{10}$$

$$\frac{x}{5}=\frac{20}{10}$$

$$x=\frac{5\cdot 20}{10}$$

$$x=\frac{5\cdot \cancel{20}}{\cancel{10}}$$

$$x=\frac{5\cdot 2}{1}$$

$$x=10$$

Note, que en todas las proporciones hay cuatro términos (dos medios y dos extremos). Cuando hay una proporción donde se conocen tres términos y se desconoce uno, ese valor se determina utilizando **la regla de tres**, que consiste precisamente en determinar el valor de la incógnita, tal como se mostró en los casos anteriores.

Ejemplo 1.9

Mi mamá es muy buena para digitar en la computadora, puede llegar a escribir hasta 110 palabras por minuto. Si ella mantiene ese ritmo, ¿Cuánto tiempo le tomará escribir un documento que consta de 4 950 palabras?

Solución: Haciendo un resumen de la información del ejemplo anterior, se tiene:

Palabras →	110	4 950	← Palabras
Minutos →	1	m	← Minutos

Así, se tiene:

$$\frac{110}{1} = \frac{4\,950}{m}$$

Usando el método general, se tiene:

$$\frac{110}{1} = \frac{4\,950}{m}$$

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1 \cdot 4\,950}{110} \\
m &= \frac{1 \cdot \cancel{4\,950}}{\cancel{110}} \\
m &= \frac{1 \cdot 495}{11} \\
m &= 45
\end{aligned}$$

Por tanto, tardaría 45 minutos en digitar las 4 950 palabras.

Ejemplo 1.10

La maestra Sofía, desea enseñarle a sus alumnos cómo calcular distancias en el mapa escolar. Para ello, necesita hablar de las escalas. Existen diferentes tipos de mapas y cada uno de ellos puede tener diferente escala.

En el mapa físico político (físico porque muestra el relieve y político porque presenta límites naciones e internacionales) de Costa Rica, aparece una notación como la siguiente:

Sabías que...

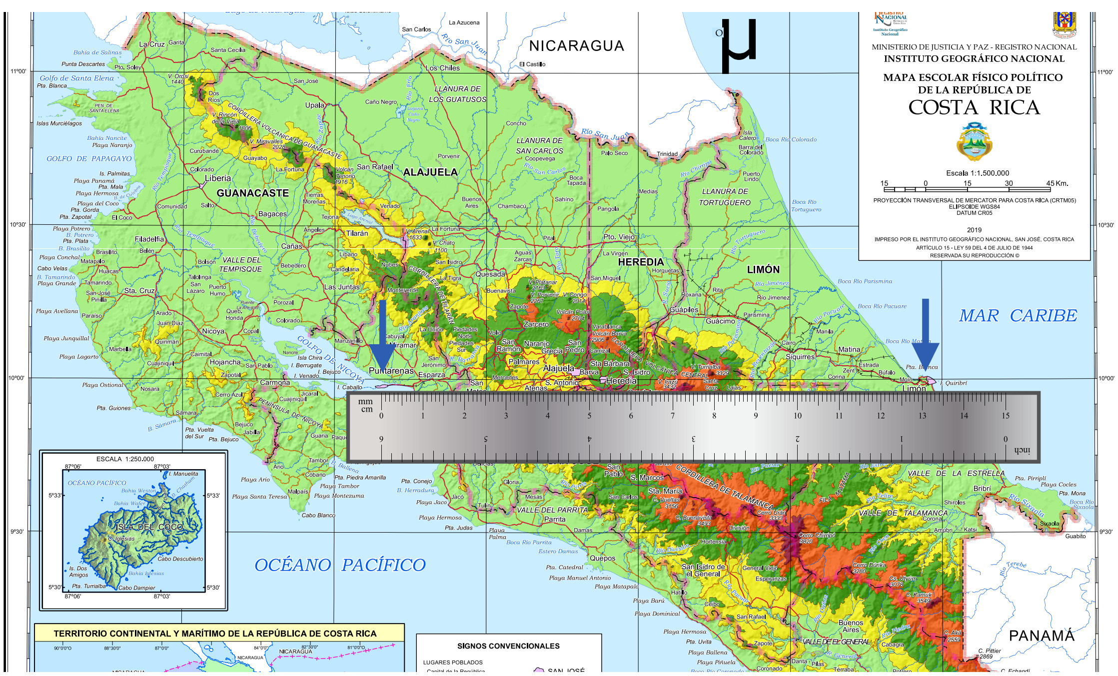
En la página del **sistema nacional de información territorial** donde se pueden descargar diferentes tipos de mapa de Costa Rica. Los mapas que se presentan a continuación, fueron recuperados de dicha página.

Note que la escala es una razón matemática donde el antecedente representa la cantidad de centímetros en el mapa y el consecuente, la cantidad de centímetros en la realidad. En este caso en particular, la escala nos indica:

$$1 : 1\,500\,000$$

Lo que significa que un centímetro en el mapa representa un millón quinientos mil centímetros en la realidad. Lo que equivale a 15 km.
Con base en esta información, la maestra les pide a los estudiantes que determinen la distancia real entre el cantón central de la provincia de Puntarenas y la de Limón. ¿Puede ayudarlos?

Solución: Suponga la siguiente medición entre los cantones centrales de Puntarenas y Limón:



Así, se obtiene que la distancia es de 13,1 cm aproximadamente. Para determinar la distancia real entre dichos puntos se utiliza una proporción como la siguiente:

Centímetros en el mapa →	1	13,1	← Centímetros medidos en el mapa
↓			↓
Centímetros en la realidad →	1 500 000	x	← Centímetros en la realidad

Sin embargo, también se puede escribir como:

Centímetros en el mapa →	1	13,1	← Centímetros medidos en el mapa
↓			↓
Kilómetros en la realidad →	15	x	← Kilómetros en la realidad

Así se tiene:

$$\frac{1}{15} = \frac{13,1}{x}$$

$$x = \frac{15 \cdot 13,1}{1}$$

$$x = 196,5$$

Por tanto, la distancia aproximada entre los cantones centrales de Puntarenas y Limón es de 196,5 km.

Video 1.3

Este video presenta algunos ejemplos que permiten resolver proporciones incompletas, por medio de la regla de tres.

1.6 Práctica: regla de tres

1.6.1 En una tienda se venden paquetes de chocolates, el paquete A tiene 7 chocolates por 2 100 colones y el paquete B tiene 9 chocolates por 3 600 colones.

a) Determine el precio de cada chocolate si se compra el paquete A.

b) Determine el precio de cada chocolate si se compra el paquete B.

c) ¿Cuál es la mejor opción entre los dos paquetes?

d) ¿Cuál será la cantidad de chocolates que debe tener el paquete B para que el precio por chocolate sea proporcional al precio de los chocolates del paquete A?

1.6.2 Calcule el valor de la incógnita, en cada proporción. Sugerencia: utilice regla de tres.

1) $\frac{m}{5} = \frac{6}{4}$

2) $\frac{1}{c} = \frac{8}{3}$

3) $\frac{7}{4} = \frac{y}{2}$

4) $\frac{2}{3} = \frac{b}{7}$

1.6.3 Lisa compró 70 bolitas de plástico y pagó 4 550 colones. ¿Cuál es el costo de comprar 95 bolitas?

1.7 Porcentaje

Analice

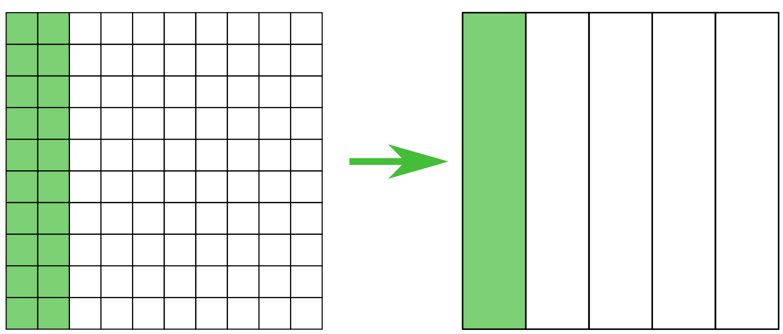
Suponga que en una escuela hay un total de 100 estudiantes. De ellos, 20 se trasladan en buseta. ¿Qué relación se puede establecer entre el total de estudiantes y aquellos que se trasladan en buseta?

Solución: En la situación anterior, se puede hacer una comparación (razón) entre los 20 estudiantes que viajan en buseta y el total de 100 estudiantes, así:

$$20 : 100$$

$$\frac{20}{100}$$

En este caso, el 20 por ciento (20 por cada 100) del total de estudiantes van en buseta. Este resultado también se puede escribir como 20 %. Gráficamente se tiene:

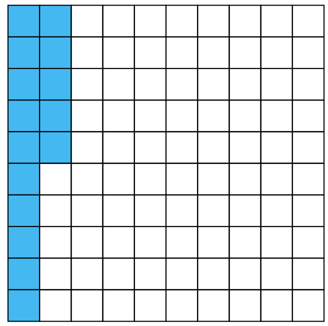


Lo que también se puede entender como la quinta parte de la unidad.

Así, por ejemplo el 15 por ciento, se puede escribir de tres maneras:

Porcentual	Fracccionaria	Decimal
15 %	$\frac{15}{100}$	0, 15

Y gráficamente se puede representar de la siguiente manera:



Definición 1.3 Porcentaje

Cuando se establece una razón (relación) donde el consecuente es 100, se dice que la razón es un **porcentaje**, porque se establece la relación de una cantidad determinada, por cada 100 que haya en total.

De acuerdo con la definición anterior, analice algunos casos:

1) Cuando en las noticias dicen que un candidato a presidente lleva 32 % de los votos, es porque, por cada cien votantes, este candidato ha obtenido 32 votos.

2) Cuando al precio de un artículo se le hace un descuento del 5 %, quiere decir que por cada 100 colones en el precio total, se le rebajan 5 colones.

3) Cuando en un restaurante se cobra el 13 % de impuestos, significa que por cada 100 colones en la facturación, se cobran 13 colones adicionales.

4) Cuando en el banco la cuenta de ahorros paga el 2 % de intereses mensuales, significa que por cada 100 colones que se ahorren en la cuenta, el banco reconoce 2 colones cada mes y se agregan al dinero ahorrado.

5) El 10 es la décima parte de 100; entonces el 10 % de una cantidad corresponde su décima parte.

6) El 20 es la quinta parte de 100; entonces el 20 % de una cantidad corresponde su quinta parte.

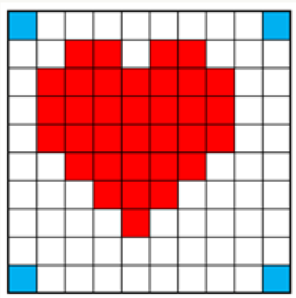
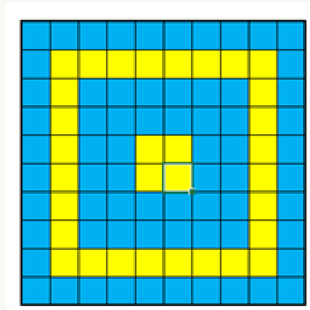
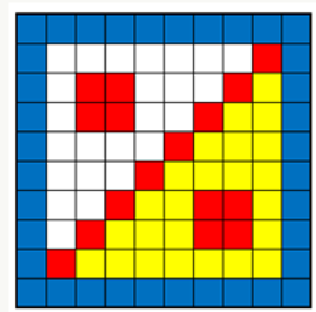
7) El 25 es la cuarta parte de 100; entonces el 25 % de una cantidad corresponde su cuarta parte.

8) El 50 es la mitad parte de 100; entonces el 50 % de una cantidad corresponde su mitad.

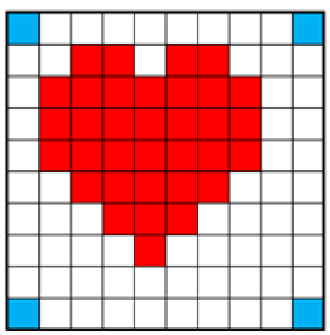
Analice los siguientes ejemplos.

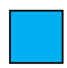
Ejemplo 1.11

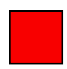
En cada una de las siguientes figuras, indique el porcentaje correspondiente, según el color.

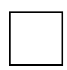




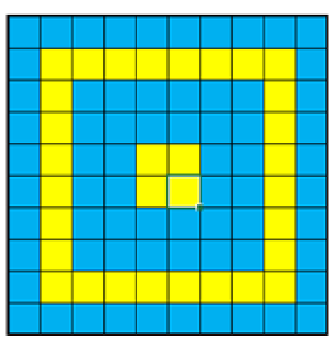
Solución: Para encontrar el porcentaje que corresponde a cada color, basta con contar los cuadrados que tienen el mismo color. Cómo el total de cuadrados es 100, se puede representar como porcentaje, de forma directa.

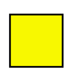


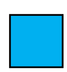
 = 4 %.

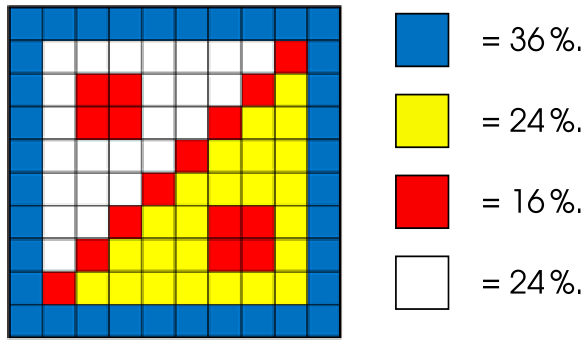
 = 34 %.

 = 62 %.



 = 32 %.

 = 68 %.



Ejemplo 1.12

Calcule el valor que representa cada porcentaje, según la cantidad dada.

a) El 25 % de 5 400

b) El 32 % de 98 000

Solución:

a) El 25 % de 5 400:

Recuerde que 25 % representa 25 unidades por cada 100. Así, se puede establecer la siguiente proporción:

Se seleccionan 25 →	25	x	← ¿A cuánto equivale?
Si el **total** es 100 →	100	5 400	← Si el **total** real es 5400

Así, se tiene:

$$\frac{25}{100} = \frac{x}{5\,400}$$

Se puede emplear la regla de tres para hallar el valor de la incógnita:

$$\frac{25}{100} = \frac{x}{5\,400}$$

$$x = \frac{25 \cdot \cancel{5\,400}}{\cancel{100}}$$

$$x = \frac{25 \cdot 54}{1}$$

$$x = 1\,350$$

Por tanto, el 25 % de 5 400 equivale a 1 350.

Otra forma de obtener el resultado, haciendo uso del cálculo mental, es recordar que el 25 % de un número equivale a su cuarta parte, así que el 25 % de 5 400 equivale a dividirlo entre 4.

Así, se puede descomponer el 5 400 en números que pueda dividir fácilmente entre 4, por ejemplo

$$5\ 400 = 1\ 000 + 1\ 000 + 1\ 000 + 1\ 000 + 1\ 000 + 400$$

Luego se calcula la cuarta parte de cada uno de los sumandos:

$$\begin{array}{ccccccc} 5\ 400 = & 1\ 000 & +1\ 000 & +1\ 000 & +1\ 000 & +1\ 000 & +400 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 250 & +250 & +250 & +250 & +250 & +100 \end{array}$$

Luego, se debe sumar todos los valores del recuadro:

$$250 + 250 + 250 + 250 + 250 + 100 = 500 + 500 + 350 = 1\ 350$$

b) El 32 % de 98 000

Recuerde que 32 % representa 32 unidades por cada 100. Así, se puede establecer la siguiente proporción:

Se seleccionan 32 →	32	x	← ¿A cuánto equivale?
Si el **total** es 100 →	100	98 000	← Si el **total** real es 98000

Así, se tiene:

$$\frac{32}{100} = \frac{x}{98\ 000}$$

Se puede emplear la regla de tres para hallar el valor de la incógnita:

$$\frac{32}{100} = \frac{x}{98\ 000}$$

$$x = \frac{32 \cdot \cancel{98\,000}}{\cancel{100}}$$

$$x = \frac{32 \cdot 980}{1}$$

$$x = 31\,360$$

Por tanto, el 32 % de 98 000 equivale a 31 360.

Ejemplo 1.13

Se sabe que 432 representa un porcentaje de 3 600. ¿Qué porcentaje representa ese 432?

Solución:

Recuerde que un porcentaje se refiere a las unidades que se toman por cada 100. Así, se puede establecer la siguiente proporción:

¿A cuánto equivale? →	x	432	← Si se sabe que se seleccionaron 432
Si el **total** es 100 →	100	3 600	← En un **total** real de 3 600

Así, se tiene:

$$\frac{x}{100} = \frac{432}{3\,600}$$

$$\frac{x}{100} = \frac{432}{3\,600}$$

$$x = \frac{100 \cdot 432}{3\,600}$$

$$x = \frac{\cancel{100} \cdot 432}{3\,\cancel{600}} = \frac{1 \cdot \cancel{432}}{\cancel{36}} = \frac{\cancel{216}}{\cancel{18}} = \frac{\cancel{108}}{\cancel{9}} = \frac{\cancel{36}}{\cancel{3}} = \frac{12}{1} = 12$$

Por tanto, 432 de 3 600 equivale al 12 %.

Ejemplo 1.14

Un examen tenía un valor de 20 % del total de la nota. ¿Si Carlos obtuvo un 70 de calificación, qué porcentaje del total de la nota alcanzó?

Solución:
Se realiza un planteo similar a los ejemplos anteriores:

Se seleccionan 20 →	20	x	← ¿A cuánto equivale?
Si el **total** es 100 →	100	70	← Si obtuvo una nota total de 70

Así, se tiene:

$$\frac{20}{100} = \frac{x}{70}$$

Se puede emplear la regla de tres para hallar el valor de la incógnita.

$$\frac{20}{100} = \frac{x}{70}$$

$$x = \frac{70 \cdot 20}{100}$$

$$x = \frac{70 \cdot \cancel{20}}{\cancel{100}} = \frac{\cancel{70} \cdot 2}{\cancel{10}} = \frac{7 \cdot 2}{1} = 14$$

Por tanto, haber obtenido una nota de 70 en una prueba que representa el 20 % del total del promedio, equivale a haber alcanzado un 14 %.

Otra forma de obtener el resultado, haciendo uso del cálculo mental, es recordar que el 20 % de un número equivale a su quinta parte, así que el 20 % de 70 equivale a dividirlo entre 5.

Así, se descompone el 70 en números que pueda dividir fácilmente entre 5, por ejemplo:

$$70 = 10 + 10 + 50$$

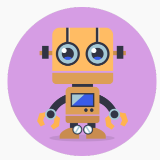
Luego, se calcula la quinta parte de cada uno de los sumandos:

$$\begin{array}{cccc} 70 = & 10 & +\,10 & +\,50 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 2 & 10 \end{array}$$

Ahora solo queda sumar todos los valores del recuadro:

$$2+2+10=14$$

Aplicaciones tecnológicas



La mayoría de las calculadoras tienen una tecla para calcular el porcentaje. Basta digitar la cantidad, usar la tecla de multiplicación, digitar el valor del porcentaje y activar la tecla de porcentaje. Según la calculadora que se emplee, el orden de los pasos puede variar.

1.7.1 Descuentos, intereses e impuestos

En esta sección, se presentan tres ejemplos sobre la aplicación de los porcentajes en problemas que involucran descuentos, intereses e impuestos.

Ejemplo 1.15

Para el día de la madre, una profesora encargó 28 jarras con chocolates, a ₡750 cada una. Así, en total se debe pagar ₡21 000. Sin embargo, le hicieron un descuento del 7 % por haber pagado en efectivo. Con base en esta información, responda:

a) ¿Cuánto dinero le descuentan?

b) ¿Cuánto pagó al final por las jarras?

Solución:

a) Para saber cuánto dinero le descuentan a la profesora, primero se debe calcular el 7 % de ₡21 000. En este caso, significa que, por cada cien colones que se deben pagar, le rebajan (le descuentan) ₡7. Se puede resolver como una regla de tres de la siguiente manera:

Si se sabe que se rebajan ₡7 →	7	x	← ¿Cuánto se rebaja?
Si el **total** es ₡100 →	100	21 000	← Si el **total** real es ₡21 000

$$\frac{7}{100} = \frac{x}{21\,000}$$

Así, se tiene:

$$\frac{7}{100} = \frac{x}{21\,000}$$

Se puede emplear la regla de tres para hallar el valor de la incógnita:

$$\begin{aligned} x &= \frac{7 \cdot \cancel{21\,000}}{\cancel{100}} \\ x &= \frac{7 \cdot 210}{1} \\ x &= 1\,470 \end{aligned}$$

Por tanto, el descuento fue de ₡1 470.

Una forma rápida de calcular a cuánto equivale el 7 % del total es multiplicar, desde el inicio:

$$x = \frac{7}{100} \cdot 21\,000$$

Así, se obtiene ₡1 470.

b) Para saber cuánto pagó la maestra por las jarras, si originalmente ella debía pagar 21 000 colones, ahora le debe restar los 1 470 colones. Así, se tiene:

$$21\,000 - 1\,470 = 19\,530$$

Es decir, al final debe pagar ₡19 530.

Ejemplo 1.16

La familia Sánchez Calderón está investigando acerca del impuesto sobre el valor agregado en Costa Rica para el año 2020. En la página del Ministerio de Hacienda encontraron la siguiente información:

Generalidades del Impuesto sobre el Valor Agregado (IVA)

Dirección de Servicio al Contribuyente

Actualizado a 2020

Definición del Impuesto sobre el Valor Agregado (IVA)

El Impuesto sobre el Valor Agregado (IVA) es un impuesto indirecto que recae sobre el consumo, lo que significa que cuando una persona (cliente) realiza la compra de un bien o servicio, está pagando este impuesto a una tarifa general del 13% o en alguna de las tarifas reducidas del 4%, 2% o 1%.

Información encontrada en el sitio web del Ministerio de Hacienda, puede encontrar más información en este **enlace**.

Una vez que aprendieron el concepto de impuesto sobre el valor agregado, la familia buscó en un sitio de ventas por Internet, para comprar un juego de comedor para su casa. Luego de un rato encontraron el siguiente anuncio:

Venta de juego comedor
₡87 610 sin impuestos

Ahora bien, ellos desean comprar ese juego de comedor, pero sólo tienen 100 000 colones de presupuesto. Si falta agregar el IVA, ¿les alcanza su dinero para comprar dicho juego?

Solución: Para saber si a la familia Sánchez Calderón les alcanza el dinero para comprar el juego comedor, primer se debe calcular el 13 % del impuesto y luego sumarlos al valor de venta. Así, se procederá a calcular el 13 % de ₡87 610:

Impuesto de 13 colones $\longrightarrow$	13	x	$\longleftarrow$ ¿Cuánto se cobra?
Si el **total** es 100 $\longrightarrow$	100	87 610	$\longleftarrow$ En un **total** real de 87 610

$$\frac{13}{100} = \frac{x}{87\,610}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{13 \cdot 87\,61\cancel{0}}{10\cancel{0}} \\ x &= \frac{13 \cdot 87\,61}{10} \\ x &= \frac{113\,893}{10} = 11\,389,3 \end{aligned}$$

Por tanto, el impuesto es de ₡11 389,3.

Una forma rápida de calcular a cuánto equivale el 13 % del total es multiplicar, desde el inicio:

$$x = \frac{13}{100} \cdot 87\,610 = 11\,389,3$$

Finalmente, si al inicio debía pagar ₡87 610, para obtener el precio final se le debe sumar ₡11 389,3. Así, se tiene:

$$8\,610 + 11\,389,3 = 98\,999,3$$

Es decir, al final debe pagar ₡98 999,3, lo que quiere decir que la familia sí puede comprar el juego de comedor con su presupuesto de ₡100 000.

Sabías que...

El Ministerio de Hacienda de Costa Rica es la institución rectora de la política fiscal del país, que garantiza la obtención y aplicación de los recursos públicos, según los principios de economía, eficiencia y eficacia, mediante procesos modernos e integrados, para lograr una sociedad más próspera, justa y solidaria.
Para mayor información puede consultar el sitiio web: **https://www.hacienda.go.cr/contenido/20-mision-vision-y-valores-institucionales**.

Ejemplo 1.17

Erick desea comprar un televisor y encuentra esta promoción:

Pantalla Smart TV

Antes: ₡329 900

Ahora: ₡295 000

Él, antes de hacer la compra, desea saber ¿cuál porcentaje del precio original que le están descontando?.

Solución: Para saber el porcentaje de descuento, primero se debe realizar una resta del precio original y el precio final, para saber cuánto dinero se descuenta, así:

$$329\,900 - 295\,000 = 34\,900$$

Luego, se establece la siguiente proporción:

Decuento →	x	34 900	← Cantidad de descuento
Si el **total** es 100 →	100	329 900	← En un **total** de 329 900

$$\frac{x}{100} = \frac{34\,900}{329\,900}$$

$$x = \frac{34\,900 \cdot \cancel{100}}{\cancel{329\,900}}$$

$$x = \frac{34\,900 \cdot 1}{3\,299}$$

$$x = 10,58$$

Por tanto, el descuento es aproximadamente de 10,58 %

Sabías que...

En matemática existe un número llamado el *número áureo* o *número de oro*, el cual tiene una razón asociada con la belleza tanto en la naturaleza como en algunas construcciones hechas por el ser humano.

A continuación, se presentan dos videos que pueden ayudar a comprender mejor todo lo relacionado con este número y sus aplicaciones.

Video 1.4

Este video presenta los porcentajes como un caso particular de las razones matemáticas.

Video 1.5

En el siguiente video aparecen tres aplicaciones del porcentaje en la vida real.

1.8 Práctica: porcentajes

1.8.1 Complete la siguiente tabla. Puede guiarse con el ejemplo resuelto en la primera fila:

Porcentual	**Fraccionaria**	**Decimal**
3 %	$\frac{3}{100}$	0,03
30 %		
	$\frac{53}{100}$	
		0,80
67 %		
		0,02
	$\frac{10}{100}$	

1.8.2 Anote las cantidades solicitadas, utilice solamente el cálculo mental:

a) El 25 % de 500.

b) El 50 % de 800.

c) El 20 % de 1 500.

d) El 10 % de 990.

e) El 50 % de 2 100.

f) El 25 % de 444.

1.8.3 Calcule el valor que representa cada porcentaje según la cantidad dada:

a) El 25 % de 500.

b) El 70 % de 770.

c) El 5 % de 7 900.

d) El 40 % de 90.

e) El 50 % de 1 350.

1.8.4 Escriba verdadero o falso según corresponda en las siguientes opciones. En caso de ser falso, justifique su respuesta:

a) El 10 % de 4 490 corresponde a 130.

b) El 25 % de 600 corresponde a 150.

c) El 10 % de 8 950 corresponde a 895.

d) El 50 % de 1 300 corresponde a 650.

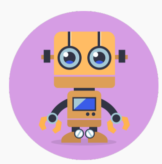
e) El 90 % de 1 990 corresponde a 1790.

1.8.5 Resuelva los siguientes problemas

a) Emma compra dos juguetes para Noah, el primero está marcado con precio de 15400 colones sin impuesto y el segundo con precio de 28 750 colones, también sin impuesto. Determine cuánto debe pagar Emma al final cuando le aplican el 13 % de impuesto.

b) En la farmacia, le hacen un descuento del 5 % a mi abuelito, por ser adulto mayor. El valor de su compra fue de 24 580 colones. ¿Cuánto dinero le descontaron a mi abuelito en su compra?

Aplicaciones tecnológicas



En el siguiente enlace, encontrará una actividad tecnológica donde podrá practicar la asignación de porcentajes en problemas de la vida cotidiana.
Aplicación interactiva

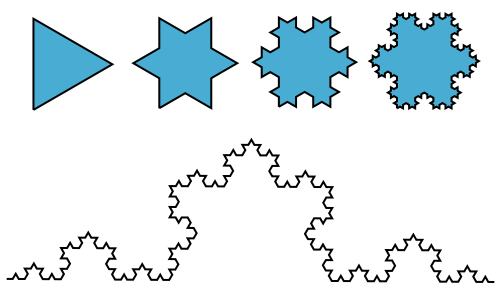
Capítulo 2

Sucesiones

Enrique está leyendo una revista acerca de matemática y ciencia, ahí encuentra una palabra desconocida: **fractales**. Así que decide investigar un poco más y, en la página del **Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT)** descubre lo siguiente:

"Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica se repite en diferentes escalas, hasta el infinito.

La forma más sencilla de entenderlo es con un dibujo:



La idea es que, observando el objeto en cualquier escala, se ve básicamente lo mismo. Como cuando se observa un helecho de cerca: sus ramas parecen de nuevo helechos más pequeños, y las hojas vuelven a reproducir esta estructura."

Esto quiere decir, que el objeto sigue un patrón repetido en su comportamiento. En la naturaleza, hay muchas formas que siguen un patrón sucesivo, algunas de ellas son los caracoles, la coliflor italiana Romanescu, los copos de nieve, las plumas del pavo real, los rayos, las hojas, los helechos los ríos vistos desde el espacio, las nubes y muchas más. Algunos de estos ejemplos se muestran a continuación:

Figura 2.1: Nota. Snail shell. (Fotografía) por blairwang, 2009. Flickr. https://www.flickr.com/photos/blair25/3254715 871/. CC BY 2.0

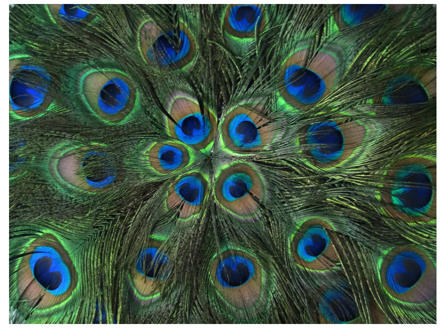


Figura 2.2: Nota. Fpx071611-15. (Fotografía) por Dennis Hill, 2011. Flickr. https://www.flickr.com/photos/fontplaydotcom/ 5943 777318/. CC BY 2.0

Figura 2.3: Nota. Sunflower. (Fotografía) por Arthur T. LaBar, 2006. Flickr. https://www.flickr.com/photos/arthurtlabar/48683566 501/. CC BY-NC 2.0

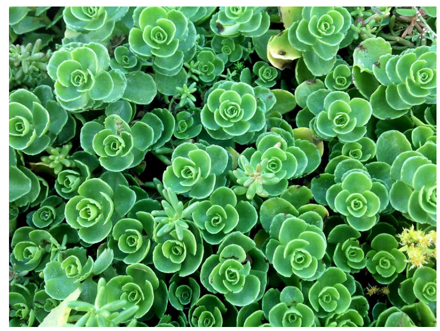


Figura 2.4: Nota. Succulents. (Fotografía) por Chrissie Sternschnuppe, 2014. Flickr. https://www.flickr.com/photos/chrisalban/1499 52842 97/. CC BY-SA 2.0

Pero entonces ¿qué es una sucesión?...

Se puede decir que una sucesión es una colección o conjunto de elementos (números, figuras, letras o la combinación de ellos) que están ordenados por un patrón de formación, es decir, por una regla que permite ese orden.

En una sucesión numérica todos los elementos son números, y cada uno de ellos se denomina "**término de la sucesión**". En estos casos, el patrón de formación o la ley que los ordena, permite identificar, el valor del siguiente término.

Por ejemplo, los números pares tienen la forma $2 \cdot n$, quiere decir que si se toma un número cualquiera, representado por la letra n, y se multiplica por 2, el resultado será un número par. Entonces, cada uno de los términos de la sucesión de números pares se puede escribir usando la siguiente ley (patrón o criterio):

$$a_n = 2 \cdot n$$

Sabías que...

En un expresión de la forma a_n, al término n se le conoce como subíndice, y representa la posición o lugar del término en una sucesión. Por ejemplo en la expresión a_3 se refiere al tercer término de la sucesión.

De esta forma, para calcular una sucesión de números pares, se resuelve de la siguiente manera:

Valor de n	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$\cdots$	n
Elemento de la sucesión	$a_1 = 2 \cdot 1$ $= 2$	$a_2 = 2 \cdot 2$ $= 4$	$a_3 = 2 \cdot 3$ $= 6$	$a_4 = 2 \cdot 4$ $= 8$		$a_n = 2 \cdot n$ Este se llama **término enésimo**

Y así sucesivamente, se puede seguir con la sucesión. Entonces cuatro elementos de la sucesión de números pares son 2, 4, 6 y 8.

De forma similar, los números impares tienen la forma $2 \cdot n + 1$, quiere decir que si se toma un número cualquiera, representado por la letra n, se multiplica por 2 y se suma 1, el resultado será un número impar.

Entonces, cada uno de los términos de la sucesión de números impares se puede escribir usando la siguiente ley (patrón o criterio):

$$a_n = 2 \cdot n + 1$$

De esta forma, para calcular una sucesión de números impares, se resuelve de la siguiente manera:

Valor de n	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$\cdots$	n
Elemento de la sucesión	$a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$	$a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$	$a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$	$a_4 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$		$a_n = 2 \cdot n + 1$ Este se llama término enésimo

De esta forma se puede seguir con el patrón, y obtener más valores de la sucesión. Por el momento se puede decir que cuatro elementos de la sucesión de números impares son 3, 5, 7 y 9.

Ejemplo 2.1

Suponga que existe una sucesión cuyo enésimo término es:

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

Determine los primeros seis valores.

Solución: Para resolver este ejemplo, se debe sustituir, para cada término, el valor correspondiente de n desde 1 hasta 6. Así, se tiene:

Valor de n	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
Término	$a_1 = \frac{1}{2^1}$ $a_1 = \frac{1}{2}$	$a_2 = \frac{1}{2^2}$ $a_2 = \frac{1}{4}$	$a_3 = \frac{1}{2^3}$ $a_3 = \frac{1}{8}$	$a_4 = \frac{1}{2^4}$ $a_4 = \frac{1}{16}$	$a_5 = \frac{1}{2^5}$ $a_5 = \frac{1}{32}$	$a_6 = \frac{1}{2^6}$ $a_6 = \frac{1}{64}$

Ejemplo 2.2

Considere la siguiente sucesión, note que algunos de sus términos están ocultos

1	2	4		16	32	64	

Determine el valor del cuarto y octavo término.

Solución: En este caso, basta con analizar la relación que tienen los valores conocidos para determinar un patrón:

doble doble doble doble

1	2	4		16	32	64	

En los casos expuestos, el término sucesor es el doble del antecesor. Se debe probar si al colocar el doble del 4 en la posición 4 y el doble de 64 en la posición 8, se mantiene la relación que se sugirió.

doble doble doble doble doble doble doble

1	2	4	8	16	32	64	128

Por tanto, el valor que ocupa el término 4 es 8 y el que ocupa la posición 8 es 128.

Ejemplo 2.3

Observe la siguiente sucesión:

$$\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \ldots$$

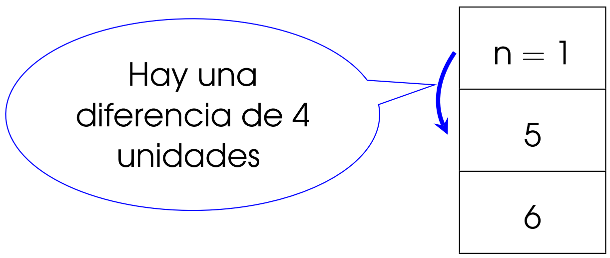
Determine el término número 20.

Solución: En este caso, se podría hacer de uno en uno todos los términos hasta llegar a la posición 20, sin embargo, resulta más interesante descubrir la relación entre la posición del término, el numerador y el denominador, así:

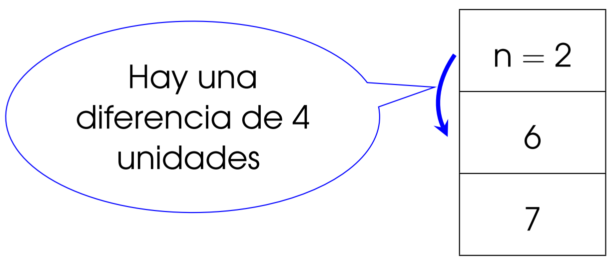
$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$\cdots$	$n=20$
5	6	7	8	9		
6	7	8	9	10		

A continuación, se analiza cada caso:

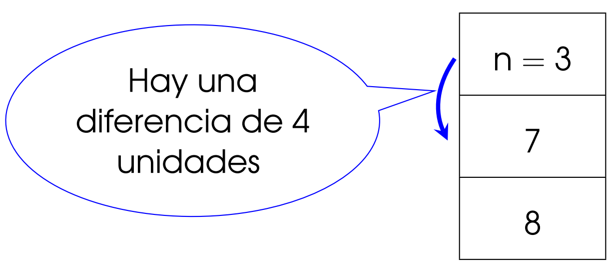
- Para $n = 1$:



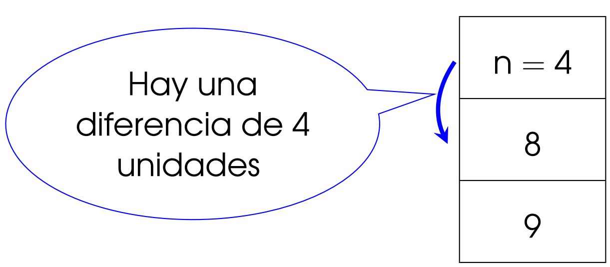
- Para $n = 2$:



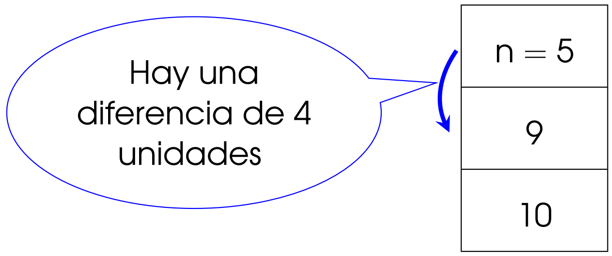
- Para $n = 3$:



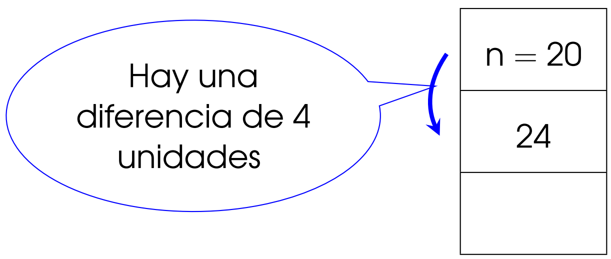
- Para $n = 4$:



- Para $n = 5$:

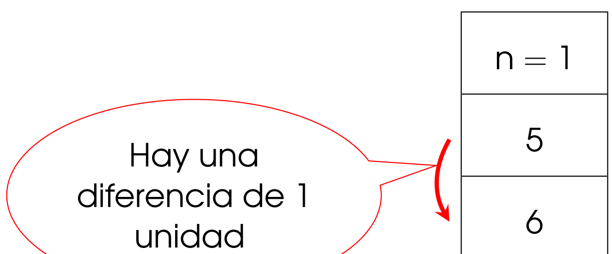


Entonces, se puede generalizar para $n = 20$:

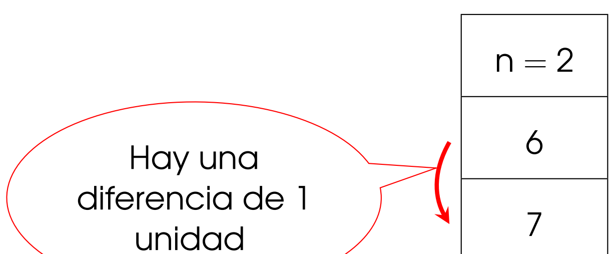


Ahora, para calcular el denominador se puede observar la siguiente relación:

- Para $n = 1$:



- Para $n = 2$:



- Para $n = 3$:

$n = 3$
7
8

Hay una diferencia de 1 unidad

- Para $n = 4$:

$n = 4$
8
9

Hay una diferencia de 1 unidad

- Para $n = 5$:

$n = 5$
9
10

Hay una diferencia de 1 unidad

Entonces, se puede generalizar para $n = 20$:

$n = 20$
24
25

Hay una diferencia de 1 unidad

Todos los datos anteriores pueden resumirse en una tabla, tal y como se muestra a continuación:

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$\cdots$	$n = 20$
5	6	7	8	9		24
6	7	8	9	10		25

Por lo tanto, el término número 20 es $\frac{24}{25}$.

Con base en esta información, ¿es posible calcular el valor del término número 100?

Siguiendo el mismo análisis, se puede decir que, para $n = 100$

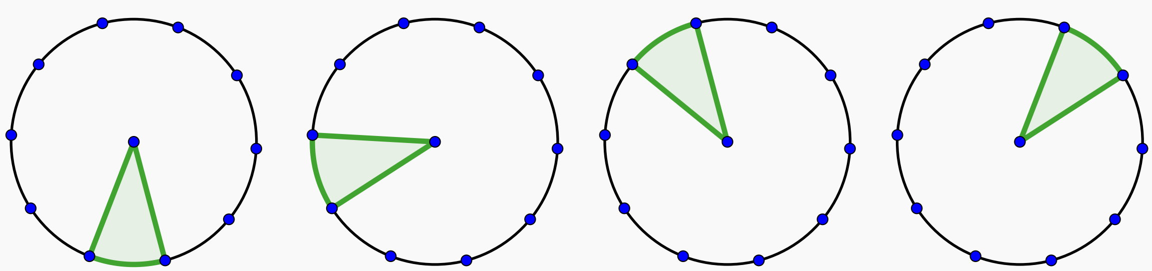
Hay una diferencia de 4 unidades

$n = 100$
104
105

Hay una diferencia de 1 unidades

Analice

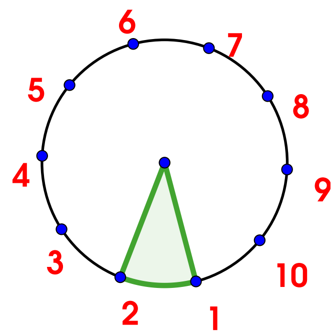
Una sucesión también puede ser no numérica como la que se muestra en las siguientes imágenes:



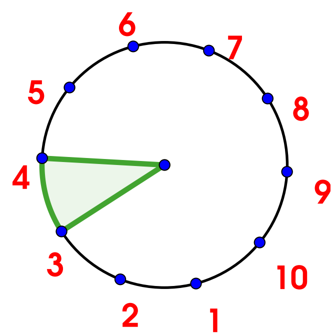
¿Cuál sería la representación para la imagen 5?

Solución: En este caso, observe que el ángulo está girando en sentido horario (igual que las manecillas del reloj) si se ponen números a los puntos sobre la circunferencia es más fácil referirse a ellos:

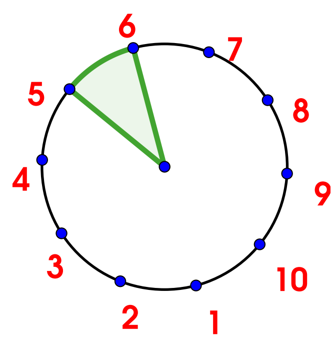
- En la primera imagen, los lados del ángulo utilizan los puntos 1 y 2



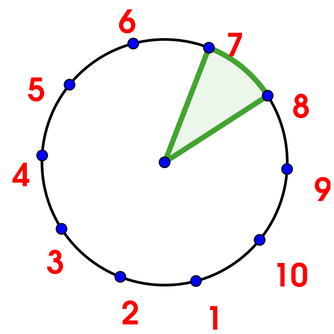
- En la segunda imagen, utilizan los puntos 3 y 4:



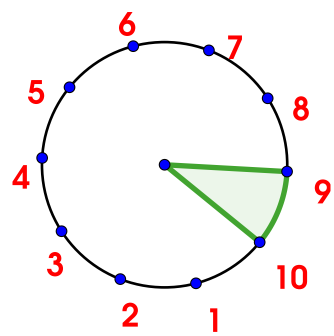
- En la tercera imagen, utilizan los puntos 5 y 6:



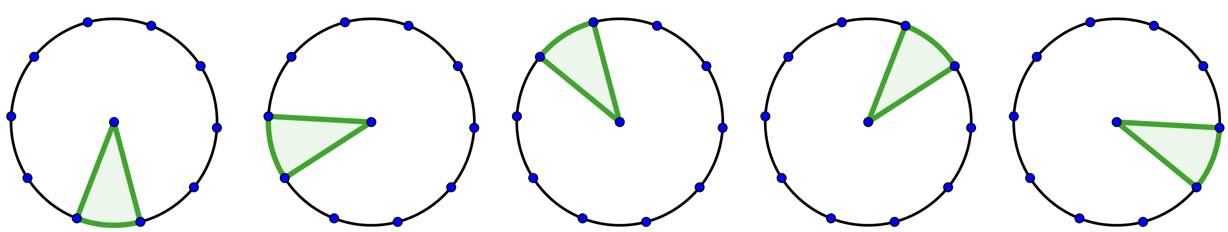
- En la cuarta imagen, utilizan los puntos 7 y 8:



- Así en la imagen 5, los puntos que se deben usar son el 9 y el 10:



Finalmente, el patrón sería:



Video 2.1

En este video se presentan algunos ejemplos de sucesiones y estrategias para calcular los términos de las mismas.

2.1 Práctica: sucesiones

2.1.1 Las células se multiplican en un proceso llamado mitosis. Si un grupo de 3 células realiza este proceso 7 veces ¿Cuántas células resultan?

2.1.2 Dos máquinas empacadoras producen cierto artículo. La máquina 1 produce 4 artículos por minuto y la máquina 2 produce 3 artículos por minuto. Amelia activa ambas máquinas a las 8:00 am y la detiene a las 11:56 am para ir a almorzar. ¿Cuántos artículos produjo de más la máquina 1 durante este tiempo?

2.1.3 Ignacio tiene una cuerda de 200 cm y desea cortarla justo a la mitad, luego toma una de las mitades y la corta justo a la mitad. El chico repite este proceso 5 veces. Después del último corte:

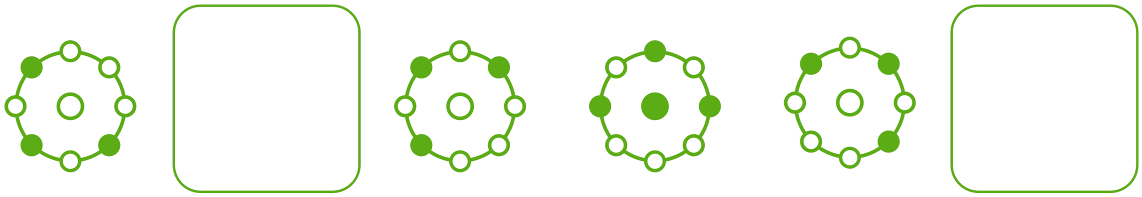
a) ¿cuánto mide la cuerda resultante?

b) determine una fórmula para calcular la medida de la cuerda resultante después de n cortes.

2.1.4 Observe la siguiente la siguiente figura y rellene los espacios, de forma que se complete el patrón:

2.1.5 Considere la sucesión $3, 12, \cdots, 3 \cdot n^2$. Calcule la diferencia entre el quinto y sétimo número de dicha secuencia.

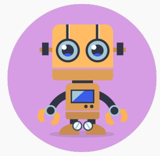
2.1.6 Observe la siguiente sucesión e indique las figuras que completan la secuencia:



2.1.7 Complete la siguiente tabla con lo que se le solicita:

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
	2	4		8	10
$a_n = 3n+1$					
	3	9	27	81	
	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	
$a_n = \dfrac{n}{4n-1}$			$\frac{3}{11}$		
$a_n = 2^n - n$				12	

Aplicaciones tecnológicas



En el siguiente enlace, encontrará una actividad tecnológica donde deberá encontrar la imagen que completa la sucesión que se presenta.

Aplicación interactiva

Capítulo 3

Representación

3.1 Representación algebraica

Analice

Julián es un amante de coleccionar bolinchas y está pronto a celebrar su cumpleaños. El domingo pasado, Julián visitó a sus abuelos. Su abuelo Gil, le regaló una caja con algunas bolinchas adentro.

–No la abras hasta el día de tu cumpleaños- le indicó el abuelo a Julián.

Además, su abuela Antonieta le regaló otra caja de bolinchas con la misma indicación de no abrirla hasta el día de su cumpleaños, solo le indicó que ella le había regalado el doble de bolinchas que su abuelo. Al lunes siguiente, la tía Irene, le regaló 7 bolinchas nuevas. Julián quedó muy impaciente por saber cuántas bolinchas tiene.

a) Represente el total de bolinchas que le han regalado a Julián para su cumpleaños.

b) Si dentro de la cajita del abuelo Gil vienen 15 bolinchas, ¿cuántas bolinchas recibió?

Solución

a) Como no se sabe la cantidad de bolinchas que les regalaron sus abuelos, se simbolizará con  la cantidad de bolinchas que le regaló el abuelo a Julián.

Por otro lado, Antonieta, la abuela de Julián, le regaló el doble de bolinchas que le dio su abuelo. La palabra “doble” hace referencia a “dos veces una cantidad”.

Así, si el abuelo Gil, le regaló esta cantidad de bolinchas , entonces su abuela le obsequió:

$2\cdot$ 

Además, se sabe que la tía Irene le obsequió 7 bolinchas. A continuación, se realiza un resumen de todos los datos que se tienen:

- El abuelo le regaló  bolinchas.
- La abuela le regaló $2\cdot$  bolinchas.
- La tía le obsequió **7** bolinchas.

Para dar respuesta a la interrogante de cuántas bolinchas, en total, le han regalado a Julián, se debe sumar la cantidad obsequiada por su abuelo, por su abuela y por su tía, es decir:

 $+2\cdot$  $+7$

Note que en la expresión anterior se tiene una caja y se le está adicionando dos cajas extra, eso nos da como resultado tres cajas, por tanto, la expresión que representa el total de bolinchas se escribe así:

$3\cdot$  $+7$

b) Como dentro de la caja que le dio el abuelo venían 15 bolinchas, basta con sustituir la caja por el número 15, así se obtiene:

$3\cdot$  $+7$

$$= 3\cdot 15 + 7$$
$$= 52$$

Por lo tanto, Julián recibió como obsequio de sus familiares 52 bolinchas en total.

Note que los dibujos:

 $+2\cdot$  $+7$

Representan una expresión matemática, en donde la variable desconocida es la cantidad de bolinchas dentro de la caja . Para mayor facilidad, en matemática a las variables desconocidas, se les representa con letras, esto evita tener que hacer dibujos como el de la caja y así se ahorra tiempo al escribir la expresión.

En el ejemplo anterior, se podría haber utilizado una letra, como ya se vio en la sección correspondiente a la regla de 3, en este caso se usará la "x" en lugar de la caja, y así se obtendría:

$$x+2\cdot x+7$$
$$=3\cdot x+7$$

En matemáticas se conoce este tipo de expresiones como **"lenguaje algebraico"** pues es la representación matemática a una situación que se trató con un lenguaje verbal. Se sabe, entonces, que la x representa a un número y se podría leer a la expresión $x+2\cdot x+7$ como:

"La suma de un número y el doble de éste, aumentado en siete"

O bien, si se utiliza el equivalente de $3\cdot x+7$, se podría leer como:

"La suma del triple de un número y siete"

El lenguaje algebraico permite, mediante números, letras y operaciones, representar una información. De esta forma, se realiza una traducción de un enunciado verbal a un enunciado que use lenguaje matemático.

Sabías que...

En matemáticas se puede trabajar con valores desconocidos, que usualmente se representan con letras. Estos valores representan un valor numérico que varía, por tanto se le denomina **"variable"**.

Sabías que...

Diofanto de Alejandría fue un matemático griego que vivió en el siglo III y es conocido como el padre del Álgebra. Sus escritos contribuyeron al perfeccionamiento de la notación algebraica y al desarrollo de los conocimientos del álgebra de su época. Introdujo importantes novedades como el empleo de un símbolo único para la variable desconocida.

Puede encontrar más información sobre este matemática en el artículo disponible en **https://recyt.fecyt.es/index.php/LLUL/article/view/14925/9500**

A continuación se analizan algunos enunciados, en donde se indica el enunciado verbal, la operación matemática que le corresponde y el enunciado matemático final. Cabe aclarar, que cuando se habla de un número cualquiera, se usa cualquier letra del abecedario que representa a una variable, o sea, puede ser la x, la y o cualquier otra letra del abecedario que se desee.

Note que, en cada caso, hay una palabra resaltada la cual da una clave de cual operación matemática debe efectuarse.

Enunciado verbal	Operación matemática	Enunciado usando lenguaje matemático
El **doble** de un número	multiplicación	$2 \cdot x$
El **triple** de un número	multiplicación	$3 \cdot x$
El **cuádruple** de un número	multiplicación	$4 \cdot y$
6 **veces** un número	multiplicación	$6 \cdot z$
La **mitad** de un número	división	$x \div 2$ ó también $\frac{x}{2}$
La **tercera parte** de un número	división	$x \div 3$ ó también $\frac{x}{3}$
Un número **aumentado en** 5	suma	$x + 5$
La **suma** de un número y 8	suma	$y + 8$
Un número **adicionado a** 4	suma	$4 + z$
Un número **disminuido en** 3	resta	$x - 3$
La **diferencia** de un número y 7	resta	$x - 7$
La **resta** de 6 y un número	resta	$6 - y$
Un número **elevado** al cuadrado	potencia	y^2
El 5 **%** de un número	porcentaje	$5\,\% \cdot x = \frac{5}{100} \cdot x = 0,05x$

Es muy importante el orden en que se colocan los números cuando está realizando operaciones de resta o división. Recuerde que en estas operaciones no existe la conmutatividad.

Como se vio en el problema de Julián y la cantidad de bolinchas, en ocasiones resulta importante combinar diferentes operaciones matemáticas en un solo enunciado. A continuación, se presentan algunos ejemplos:

Enunciado verbal	**Enunciado usando lenguaje matemático**
El triple de un número aumentado en dos	$3 \cdot x + 2$
La quinta parte de la suma de un número y seis	$\frac{1}{5} \cdot (y+6) = \frac{y+6}{5}$
El cuádruple del dos por ciento de un número	$4 \cdot \left(\frac{2}{100} \cdot x\right)$
La diferencia de la mitad de un número y ocho	$\frac{x}{2} - 8$
El cubo de un número multiplicado por cinco	$z^3 \cdot 5$
Cinco veces un número disminuido en seis	$5 \cdot y - 6$

Video 3.1

En este video se explica como pasar de lenguaje verbal a algebraico mediante un ejemplo y luego se explican algunos enunciados que incluyen productos y sumas.

Video 3.2

En este video se explica como pasar de lenguaje verbal a algebraico mediante un ejemplo y luego se explican algunos enunciados que incluyen divisiones y restas.

Video 3.3

En este video se explica como pasar de lenguaje verbal a algebraico mediante un ejemplo y luego se explican algunos enunciados que incluyen potencias.

También se pueden escribir expresiones en lenguaje matemático usando:

- **Igualdades:**

Enunciado verbal	**Enunciado usando lenguaje matemático**
La mitad de la diferencia de un número y nueve **equivale** a veinte	$\frac{x-9}{2} = 20$
El 10% de un número aumentado en ocho **es igual** a la sexta parte del número disminuido en tres	$\frac{10}{100} \cdot x + 8 = \frac{x}{6} - 3$
Cinco veces la suma de la cuarta parte de un número y dos **equivale** a treinta	$5 \cdot \left(\frac{x}{4} + 2\right) = 30$

- **Desigualdades:**

Enunciado verbal	**Enunciado usando lenguaje matemático**
Tres menos dos veces un número **es mayor que** cuatro	$3 - 2 \cdot x > 4$
La mitad de un número más la sexta parte de éste **es menor que** cinco	$\frac{x}{2} + \frac{x}{6} < 5$
La diferencia del cuadrado de un número y tres **es menor que** el doble del número	$x^2 - 3 < 2 \cdot x$

Video 3.4

En este video se explican dos ejemplos que muestran como pasar de lenguaje verbal a algebraico utilizando igualdades.

Video 3.5

En este video se explican dos ejemplos que muestran como pasar de lenguaje verbal a algebraico utilizando desigualdades.

3.2 Representación en el plano de coordenadas

Analice

Saber movilizarse en el entorno es de suma importancia, pues se necesita realizar compras, ir a la escuela o donde un amigo o simplemente poder llegar a un determinado lugar para una reunión. Reflexione las siguientes preguntas:

1) ¿Qué direcciones utiliza o escucha que se usan en su entorno familiar?
2) ¿Crees que la forma en que se brindan las direcciones en Costa Rica se utiliza de la misma manera en todo el mundo?
3) Si se tiene un mapa y un punto en él, ¿cómo se podría brindar una referencia de ubicación?

Sabías que...

Un rasgo típico de Costa Rica es la forma de brindar las direcciones. A pesar de que las calles y avenidas tienen nombres, las personas siguen brindando una dirección usando características geográficas, anécdotas, personajes del país e incluso establecimientos comerciales (a veces cerrado desde hace años).

Si desea tener más información consulte este **enlace**.

Analice

En la siguiente imagen se presenta un croquis del área central de la provincia de Alajuela en Costa Rica:

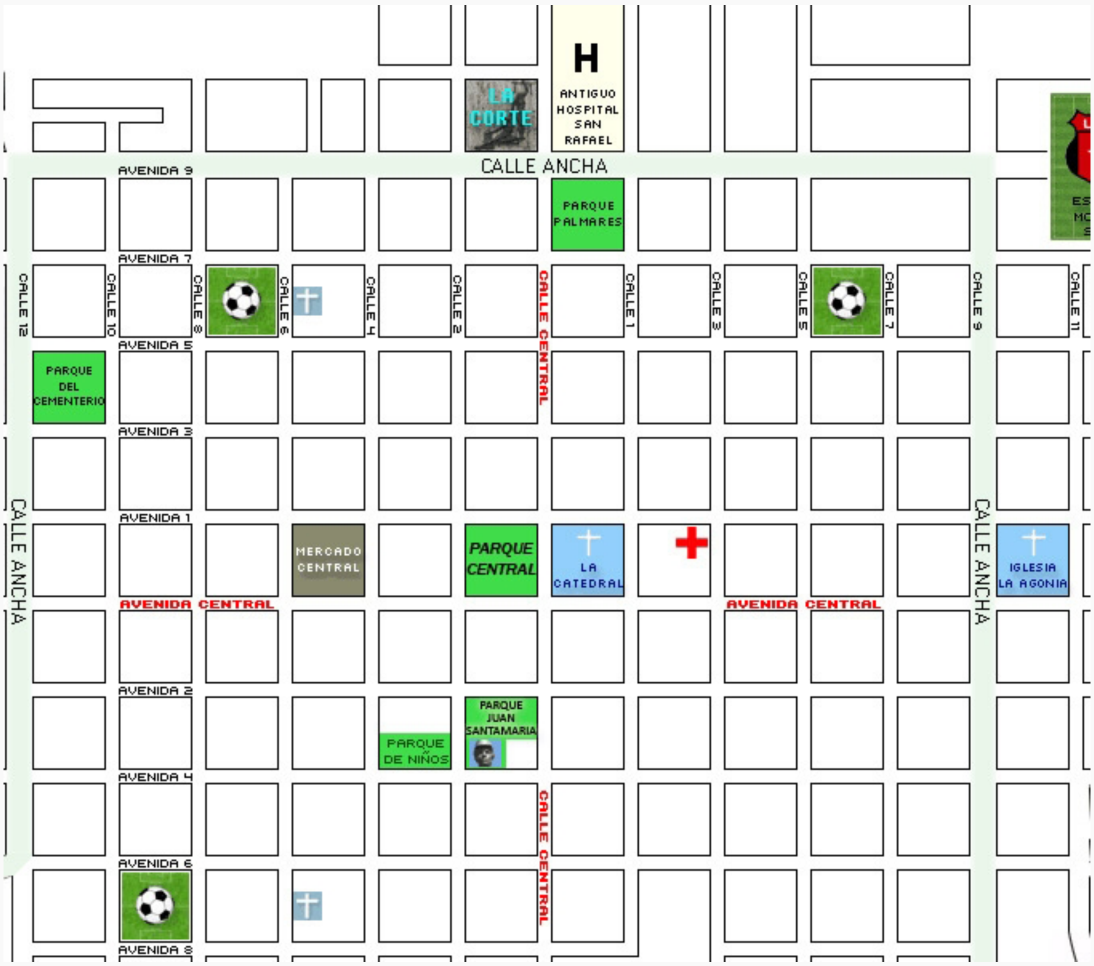
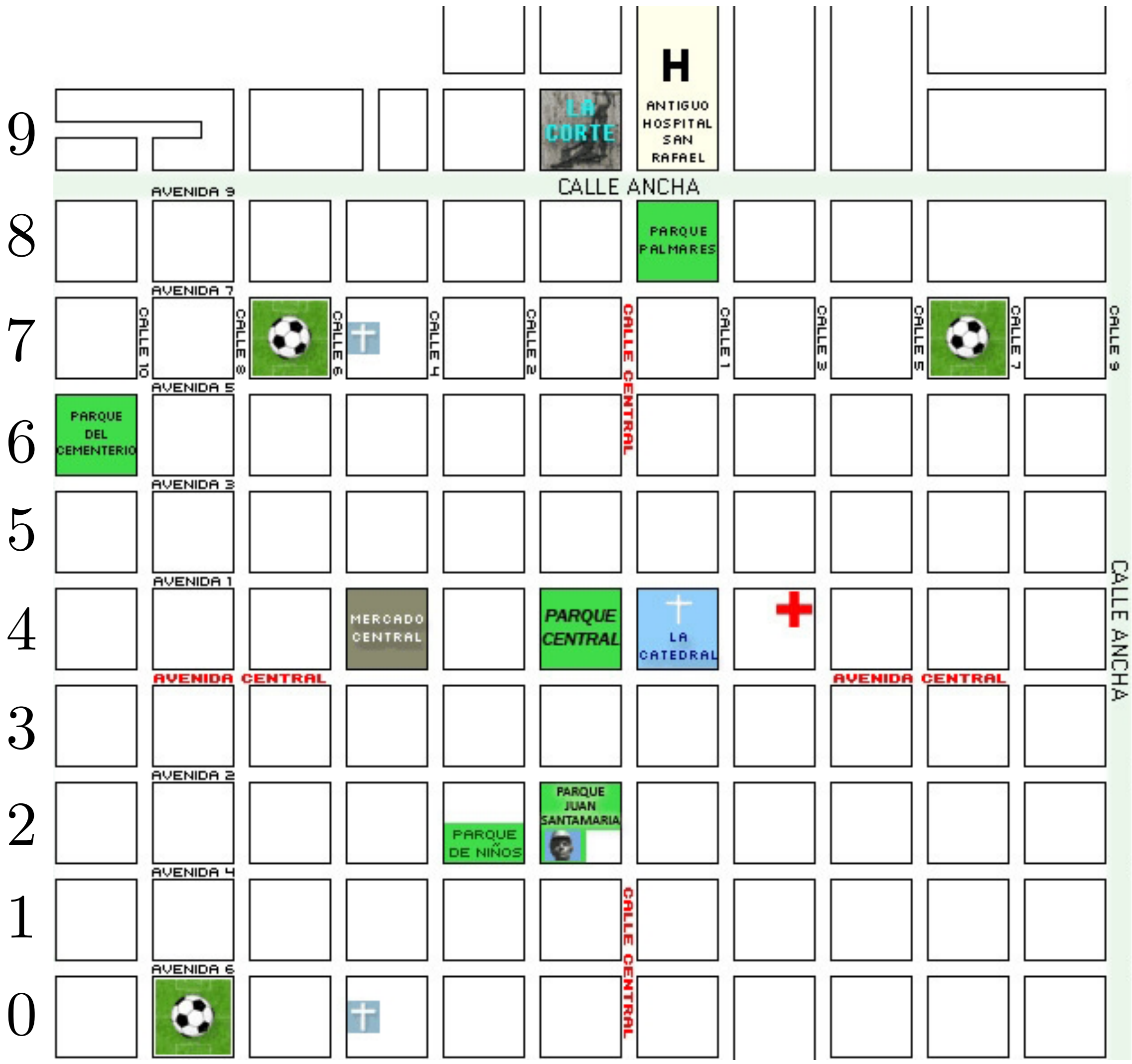


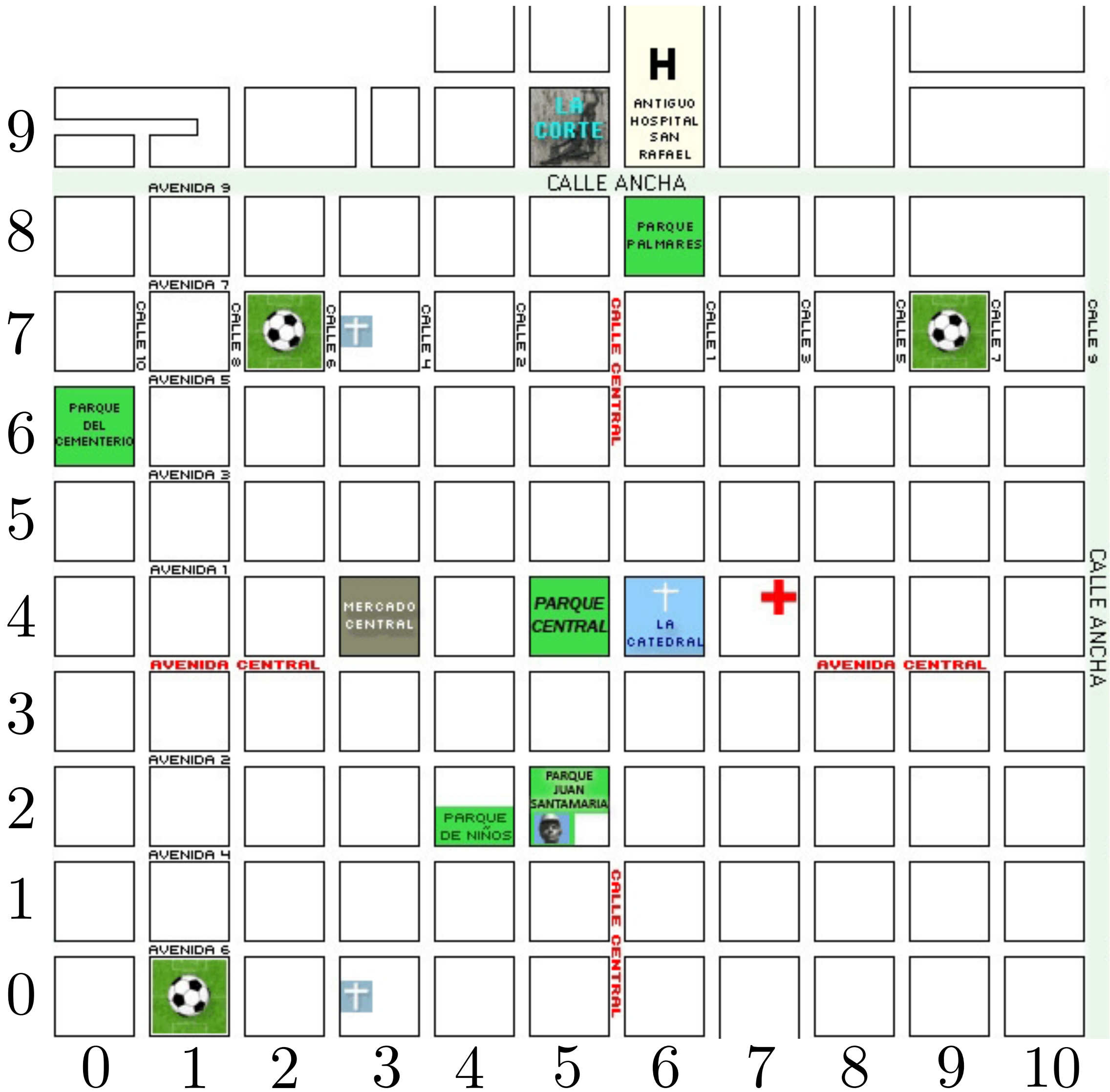
Imagen recuperada de:
http://www.alajuelenses.com/dir/mapas-de-alajuela-costa-rica/

Indique una forma para dar la ubicación en el mapa del Parque Central.

Solución: Para mayor facilidad, al costado izquierdo del croquis, de forma vertical, se agregan números sobre cada cuadra, de la siguiente manera:



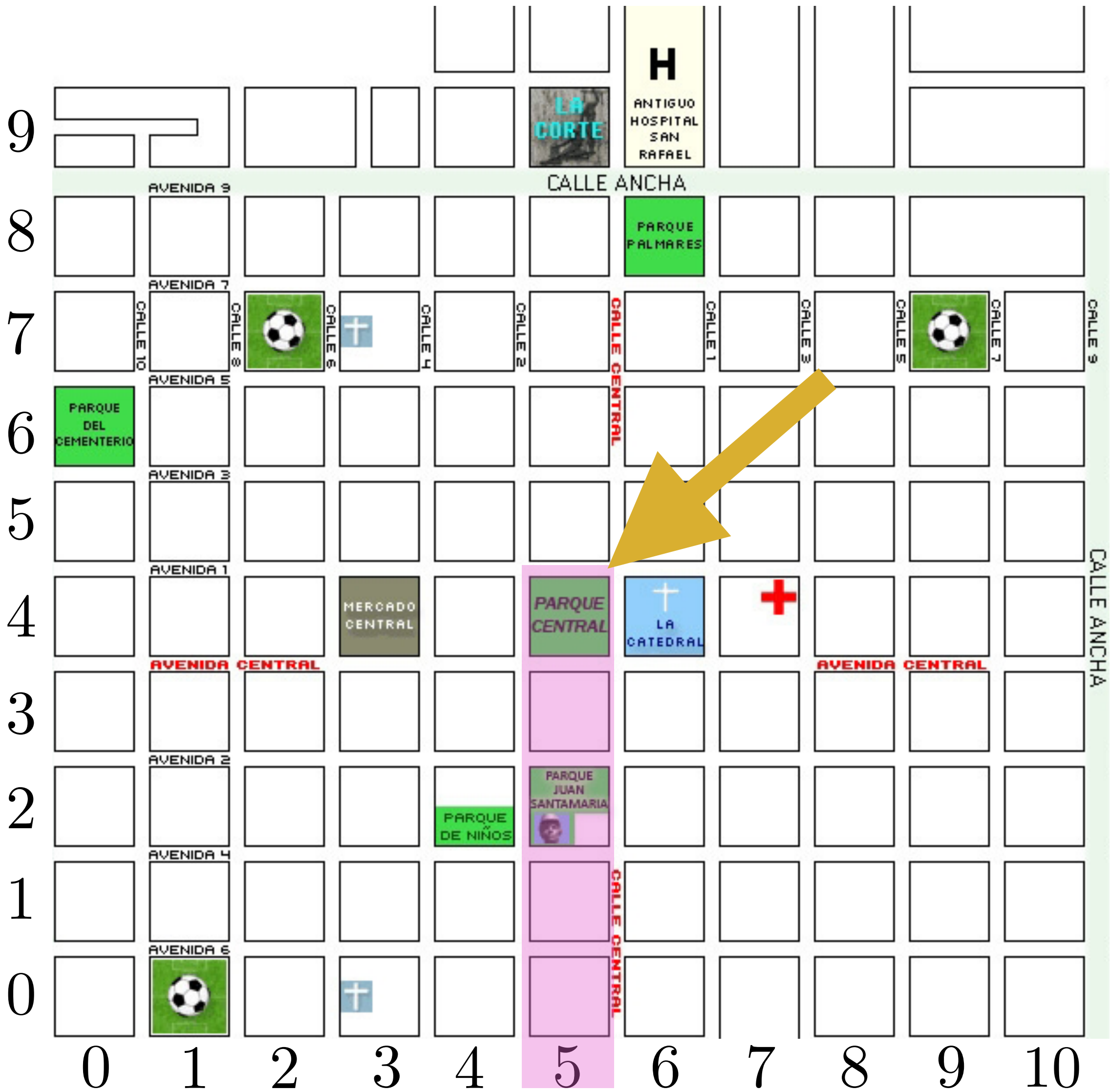
También se agregan números dispuestos horizontalmente, en cada cuadra del borde inferior de la cuadrícula, de la siguiente manera:



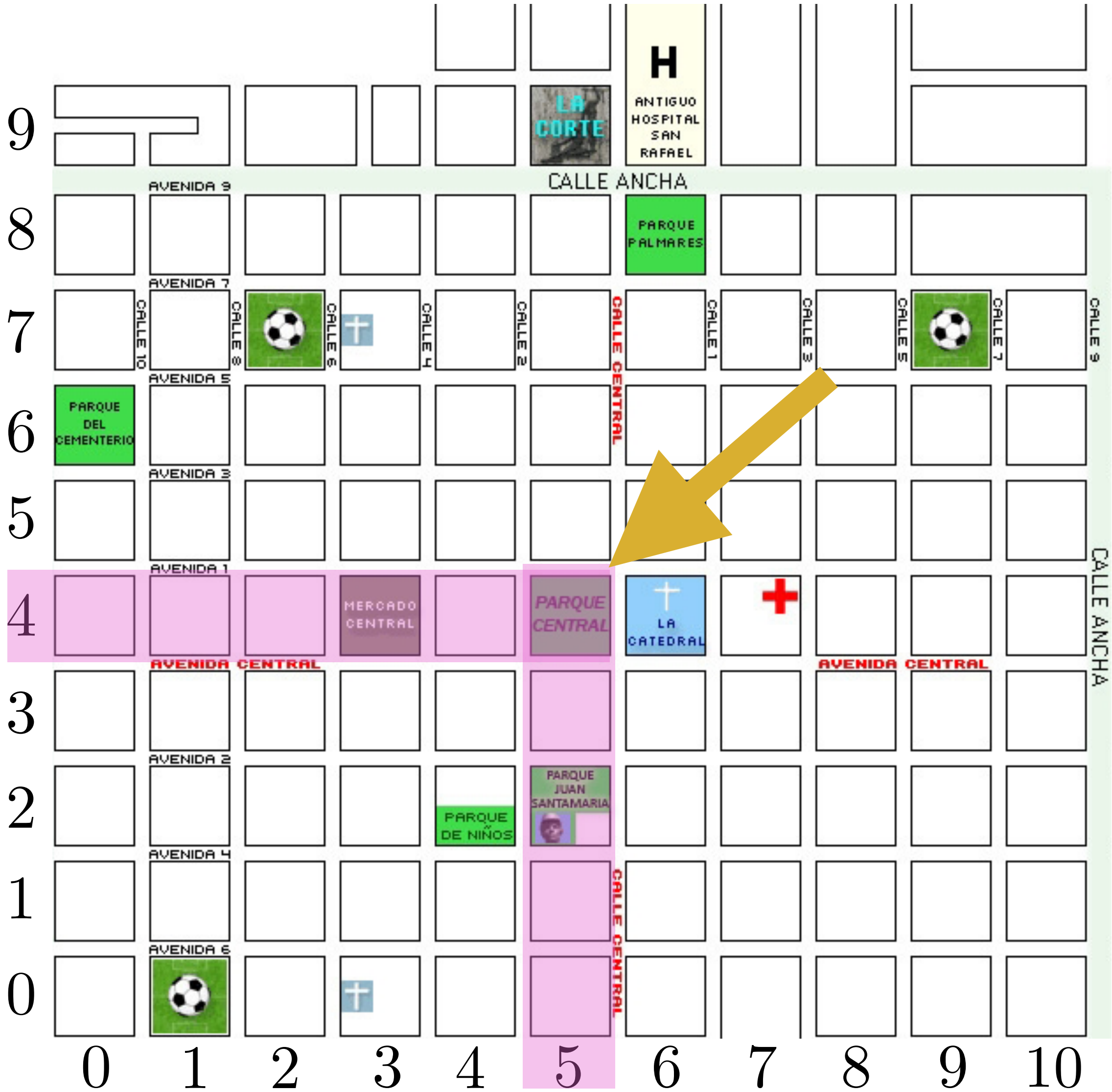
Estos números servirán de guía para poder ubicar lugares dentro del mapa. Para ello se va a establecer el siguiente código:

(número del lado horizontal del mapa, número del lado vertical del mapa)

Entonces si se quiere determinar la ubicación del Parque Central, se puede observar que el número del lado horizontal que le corresponde es el 5:



Y el número del lado vertical que le corresponde, es el 4:



Entonces, se dirá que la ubicación del Parque Central de Alajuela en el mapa, estaría representado por el código $(5,4)$.

Sabías que...

En el área de la geometría se pueden identificar tres términos que se les conoce como primitivos y son: recta, segmento y punto. Lo que se tienen son nociones o representaciones de los mismos, ya que son conceptos difíciles de definir ya que carecen de anchura, volumen o área. Algunas nociones que se tienen de punto pueden ser:

- La cabeza de un alfiler
- La marca que deja un marcador de punta fina cuando se apoya sobre un papel
- Incluso, un círculo visto desde la distancia puede denotar un punto

Si usted se encuentra de pie en determinado lugar y luego con una cámara tipo dron, se toma una fotografía desde muy alto representaría un punto en el plano. Cuando se ubican lugares en un mapa, se les tiende a nombrar como puntos en el plano. De hecho podría decirse que un punto es una representación geométrica de una posición.

En el ejemplo anterior se utilizó un código para representar lugares en el mapa, se denominará a ese código con la palabra "punto", porque representan una posición en un lugar determinado.

Ejemplo 3.1

Siguiendo la misma estrategia implementada anteriormente, determine cuáles son las ubicaciones como puntos en el mapa, de los siguientes lugares:

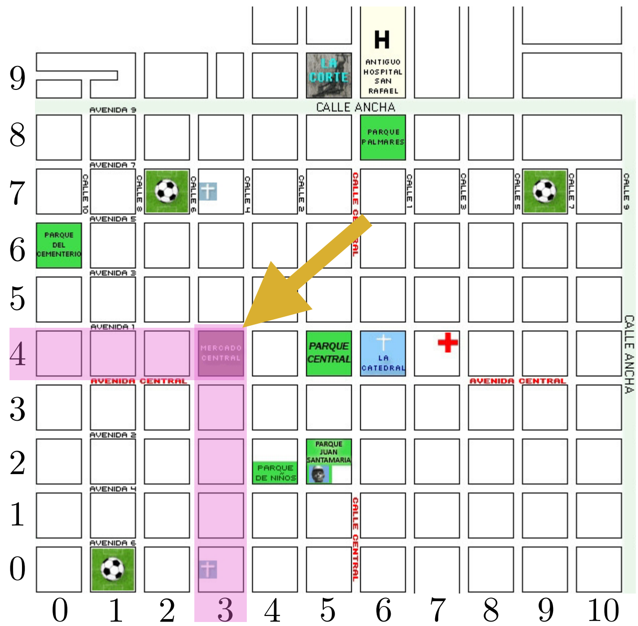
a) Mercado Central

b) Parque Palmares

c) Parque Juan Santamaría

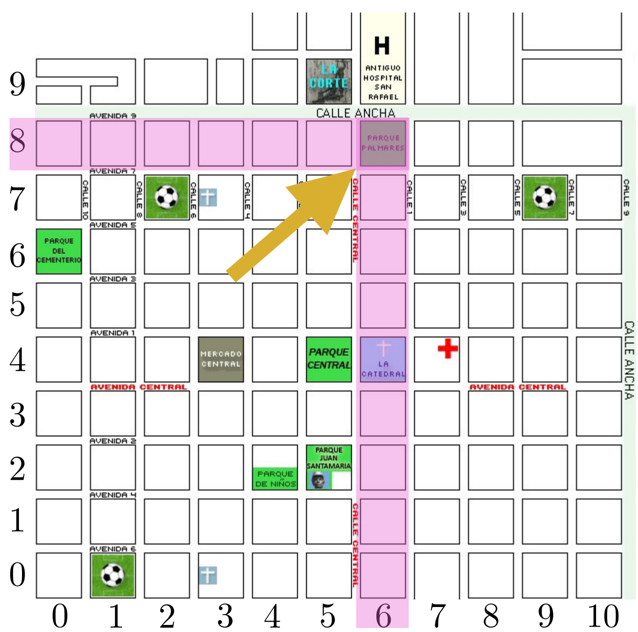
Solución:

a) Mercado Central. Se tiene:



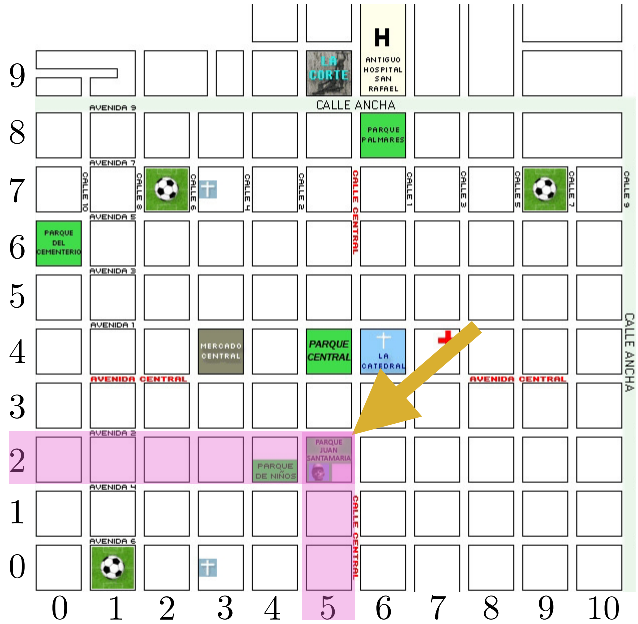
Así, se dirá que la ubicación del Mercado Central en el mapa es el punto $(3,4)$.

b) Parque Palmares. Se tiene:



Así, se dirá que la ubicación del parque Palmares en el mapa es el punto $(6,8)$.

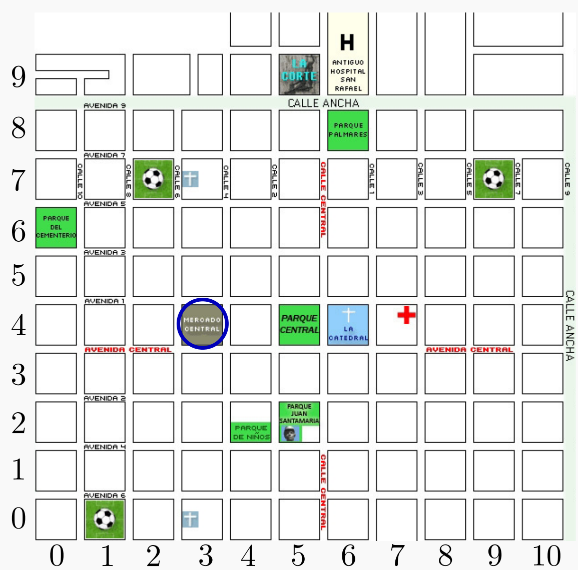
c) Parque Juan Santamaría. Se tiene:



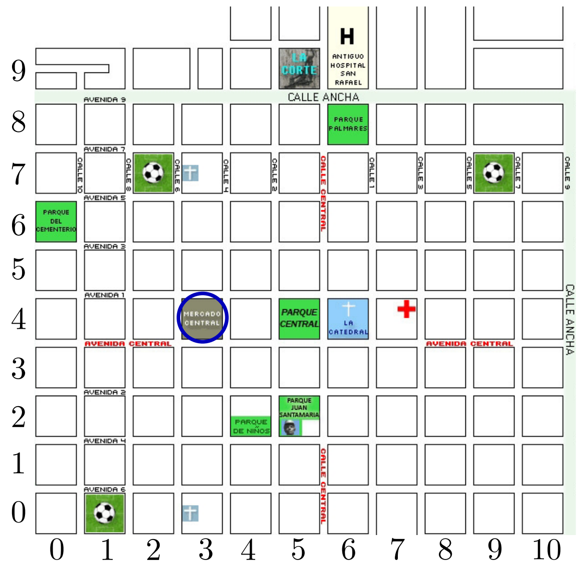
Así, se dirá que la ubicación del parque Juan Santamaría en el mapa es el punto $(5, 2)$.

Analice

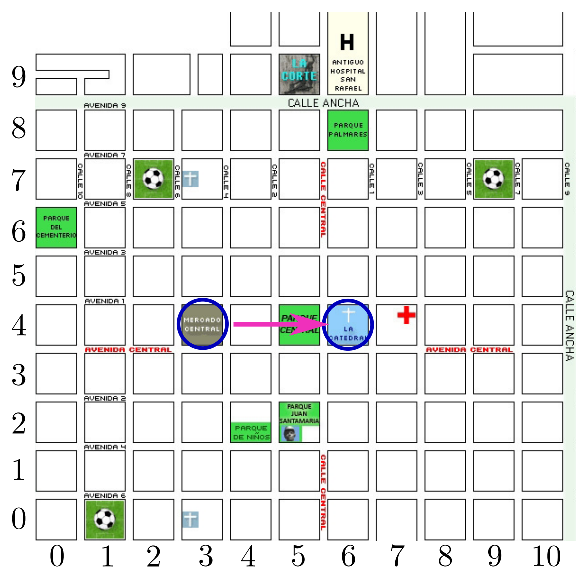
Si una persona se encuentra en el Mercado Central y desea dirigirse hacia el antiguo Hospital San Rafael, ¿qué dirección le brindaría bajo este sistema que se ha implementado?



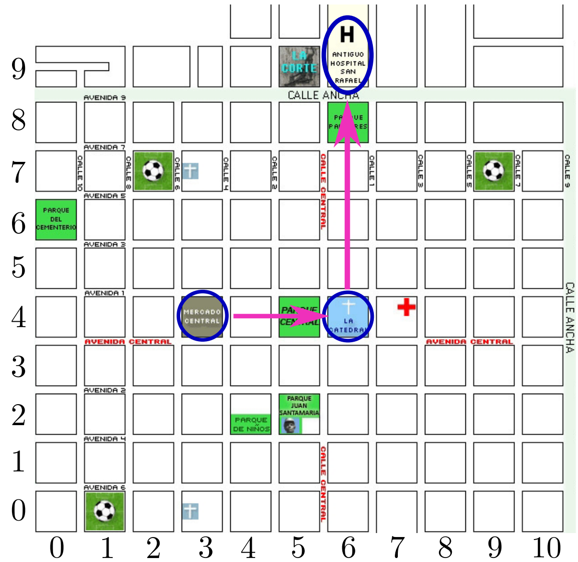
Solución: Observe que la ubicación del Mercado Central, tal y como se vio en el ejemplo anterior, se ubica en el punto (3,4):



Se le podría indicar a la persona que camine tres cuadras a la derecha desde esa posición (hacia el Este), así se llega al punto (6,4), donde se ubica la Catedral:



De ahí, puede caminar cinco cuadras hacia arriba (al Norte) hasta llegar al antiguo Hospital San Rafael que se ubica en el punto (6,9):



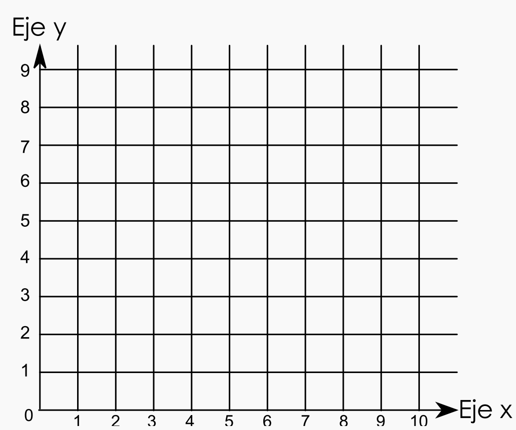
Finalmente ese era el punto a donde se quería dirigir la persona.

Definición 3.1 Plano de coordenadas

Es una superficie formada por la intersección de dos rectas perpendiculares, utilizadas para localizar puntos, rectas y gráficas.

El eje horizontal del plano de coordenadas, se llama eje de las **abscisas** y comúnmente se utiliza la letra "x" para representarlo. De igual manera, el eje vertical se llama eje de **ordenadas** y regularmente se utiliza la letra "y". Estos dos ejes se cortan en un punto al que se le denomina origen de coordenadas. A este punto se le puede llamar punto "O" y sus coordenadas son (0,0).

Gráficamente se puede representar como:



Sabías que...

El plano de coordenadas fue perfeccionado por el matemático francés René Descartes. En su honor al plano se le conoce también como sistema de coordenadas cartesianas.

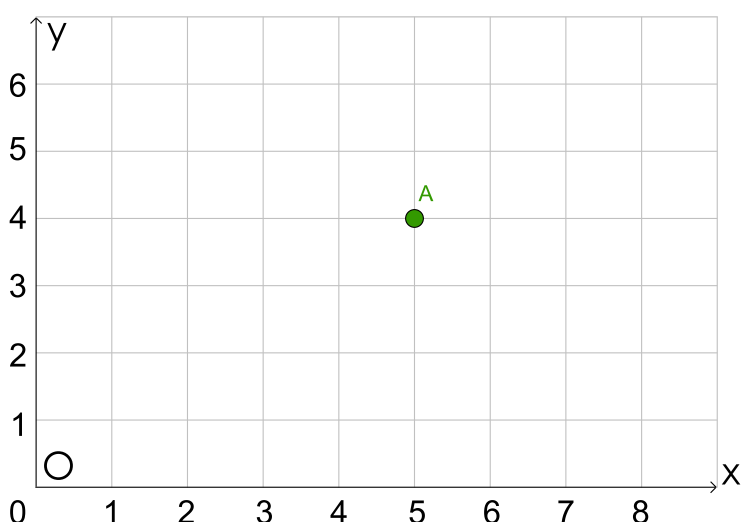
Las coordenadas cartesianas se utilizan para localizar sitios en los mapas.

Determinar la posición de un punto en el sistema de coordenadas

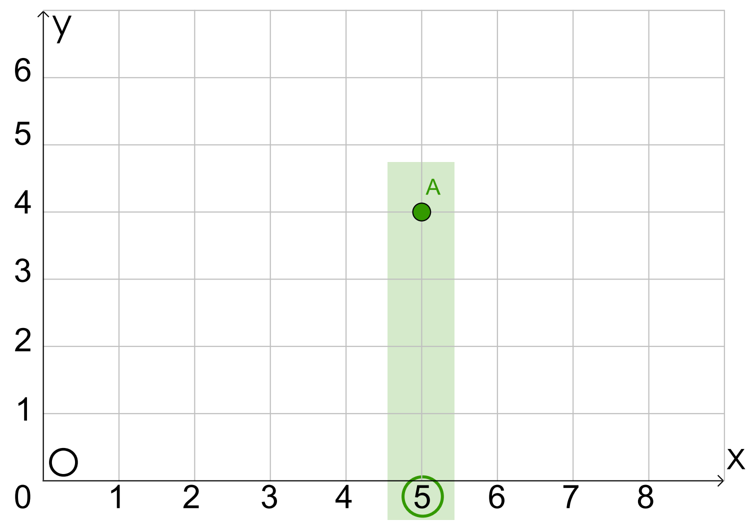
Para nombrar un punto en el plano se usan dos valores (x, y). El primer valor corresponde a la posición respecto al **eje** x y el segundo valor, a la posición en el **eje** y. Estos dos valores se colocan entre paréntesis y separados por una coma.

Así, si se quiere saber cuál es la posición de un punto A, primero se debe ubicar sobre el **eje** x la cantidad que indique el primer valor del paréntesis y luego, subir en el **eje** y la cantidad que indique el segundo valor del paréntesis.

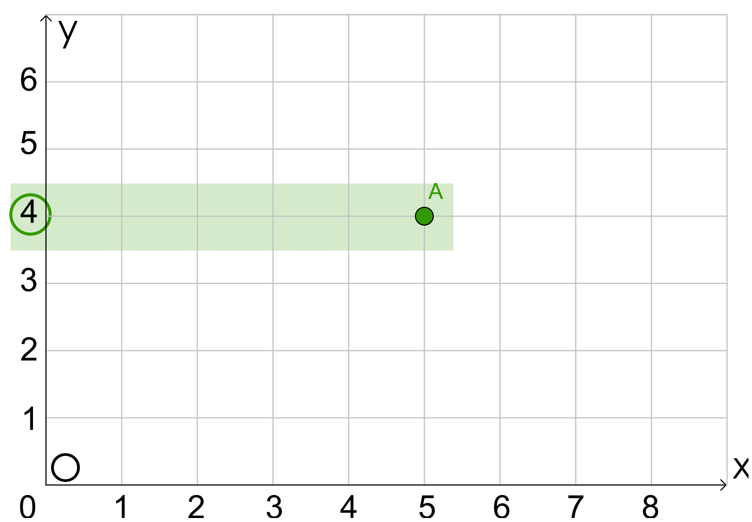
Suponga que se quiere determinar la posición del siguiente punto A:



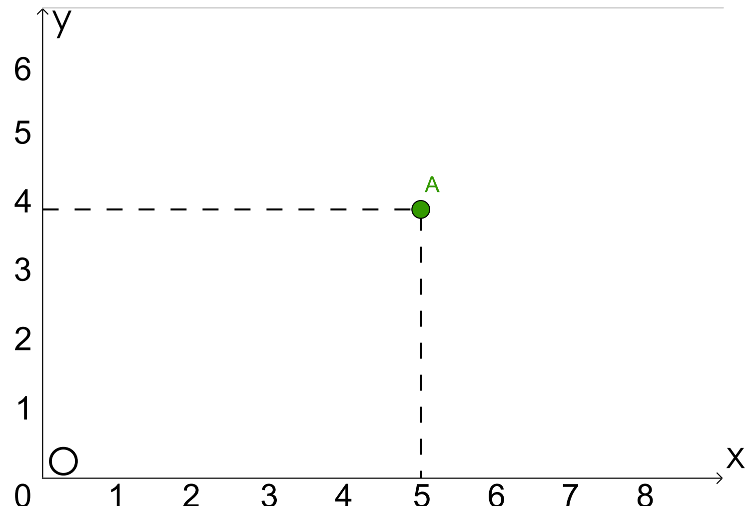
Se sabe que la posición del punto A es de la forma (x, y). Para determinar el valor de x se considera el valor correspondiente del eje horizontal, que en este caso se observa que corresponde al número 5:



Para determinar el valor de la coordenada y, se deben considerar los números correspondientes al eje vertical, en este caso es el número 4:



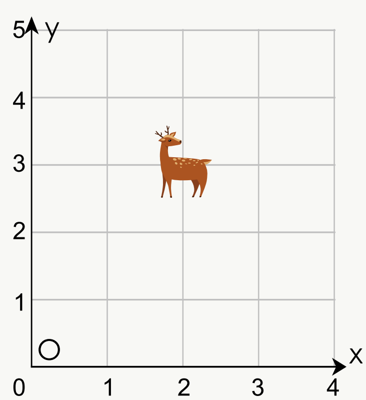
Por lo tanto, se puede asegurar que el punto A se encuentra en la posición $(5, 4)$:



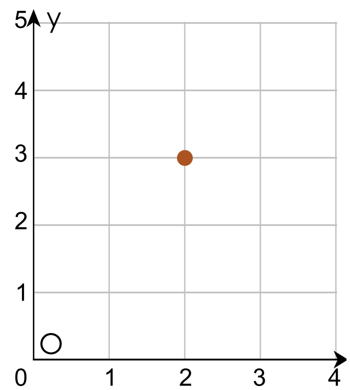
Para repasar la ubicación de puntos en el plano, analice los siguientes dos ejemplos:

Ejemplo 3.2

Un guardabosques del Parque Nacional Santa Rosa desea determinar la ubicación de un venado cola blanca que está herido dentro de las inmediaciones del parque. Él se dio cuenta porque a los venados se les implanta un chip para conocer su ubicación. El guardabosques debe realizar la lectura de la posición del venado mediante un GPS, con la finalidad de indicarle la posición del animal al veterinario y que éste acuda a revisarlo. A continuación, se puede ver la pantalla del GPS del guardabosques. Indique la posición en la que se encuentra el venado.



Solución: En matemática, para otorgarle mayor precisión a la posición de los objetos que se colocan en un sistema de coordenadas, es común visualizarlos como un punto, tal como se muestra a continuación:



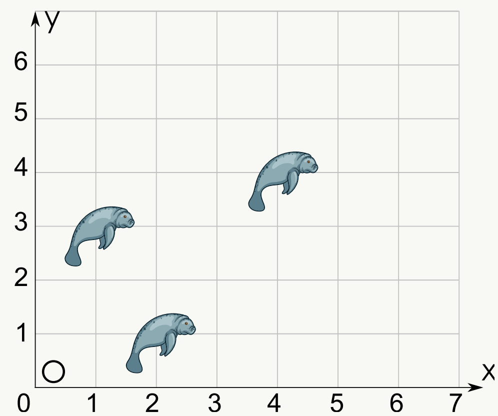
Así, el venado se encuentra aproximadamente en la posición $(2,3)$. Esto porque, la primera coordenada indica la posición en el **eje** x y para determinarla se debe contar dos posiciones desde el origen hacia la derecha. La segunda coordenada indica la posición sobre el **eje** y, se determina contando tres posiciones hacia arriba desde el origen de coordenadas.

Sabías que...

El Venado de Cola Blanca fue declarado símbolo de la fauna de Costa Rica, mediante la Ley No. 7497 del 2 de mayo de 1995. En Costa Rica es difícil verlo, pues es una especie en peligro de extinción por la caza ilegal o porque, por razones de desarrollo urbano, ha ido perdiendo su hábitat natural. Puede encontrar más información en el sitio web: **https://guiascostarica.info/simbolos/venado/**

Ejemplo 3.3

En el Parque Nacional Tortuguero, un científico se está encargando de estudiar a los manatíes que habitan en la zona. Para ello intenta identificar los animales mediante un dron, que cuando es ubicado sobre la superficie del agua, puede detectar el calor que emanan los manatíes y registrar sus posiciones mediante coordenadas. El sistema del dron genera la siguiente imagen:



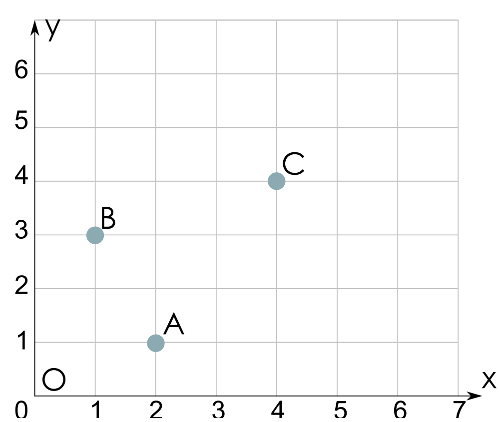
Con base en esa imagen, determine:

a) ¿Cuántos manatíes ha detectado el dron?

b) ¿Cuáles son las posiciones de los manatíes detectados?

Solución:

a) En total se han visualizado 3 manatíes. Como se mencionó anteriormente, por un asunto de exactitud en la posición de los objetos, el sistema de coordenadas se puede visualizar de la siguiente manera:



b) Las posiciones de los manatíes son:

- Manatí A: $(2, 1)$
- Manatí B: $(1, 3)$
- Manatí C: $(4, 4)$

Sabías que...

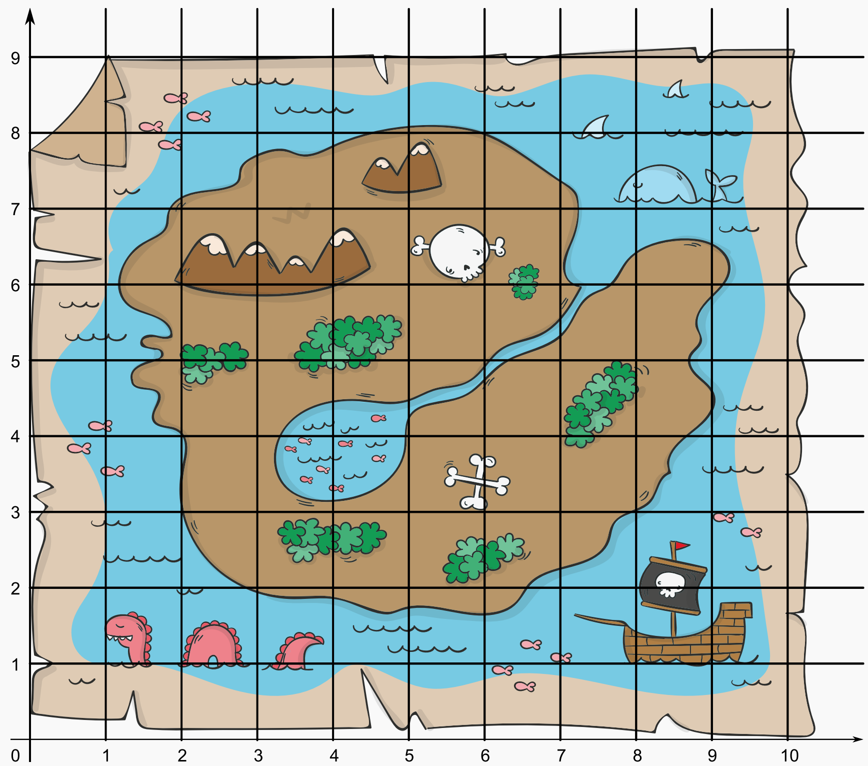
El manatí fue declarado símbolo de la fauna marina de Costa Rica el 29 de julio del 2014, su nombre científico es Trichechus manatus y en la lengua indígena caribeña, significa "con mamas".

Puede encontrar más información en el sitio web: **https://guiascostarica.info/simbolos/manati-simbolo-nacional-de-la-fauna-marina/**

Analice

RETO

Siempre se ha creído que la Isla del Coco en Costa Rica fue el lugar en donde muchos piratas, en tiempos antiguos, escondían sus tesoros. Suponga que está sentado a la orilla del mar en la provincia de Puntarenas y se encuentra una botella con un mapa e indicaciones para encontrar un tesoro en la Isla del Coco:



Realice los siguientes pasos:

1) Ubíquese en el punto (3,2) y avance hacia el Este tres casillas, usted llegará al punto (__, __).

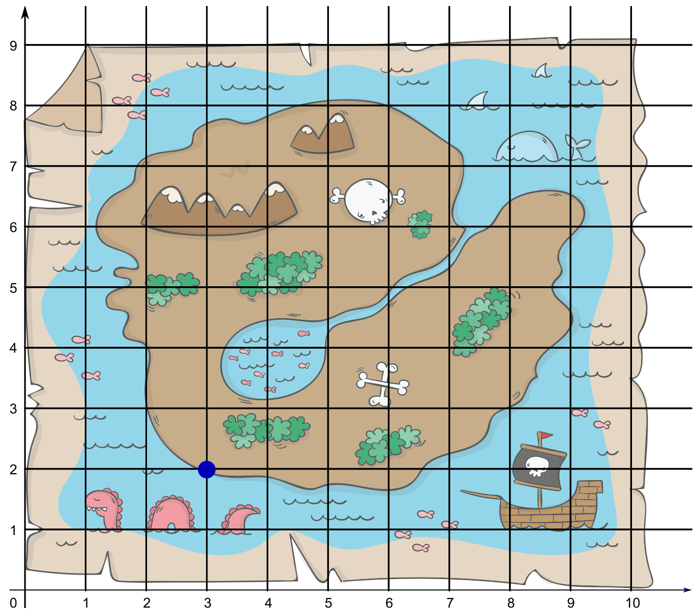
2) Luego, avance hacia el Norte dos casillas, usted llegará al punto (_____, _____).

3) Seguidamente, avance hacia el Este una casilla más, usted llegará al punto (_____, _____).

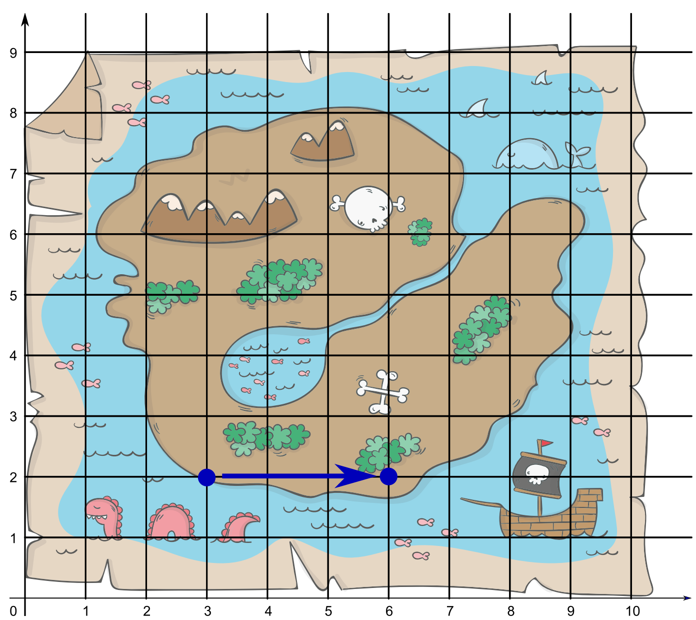
4) Después, avance tres casillas hacia el Norte, usted llegará al punto (_____, _____).

5) Finalmente, avance cuatro casillas al Oeste y llegará al punto donde está enterrado el tesoro, que corresponde a: (_____, _____)

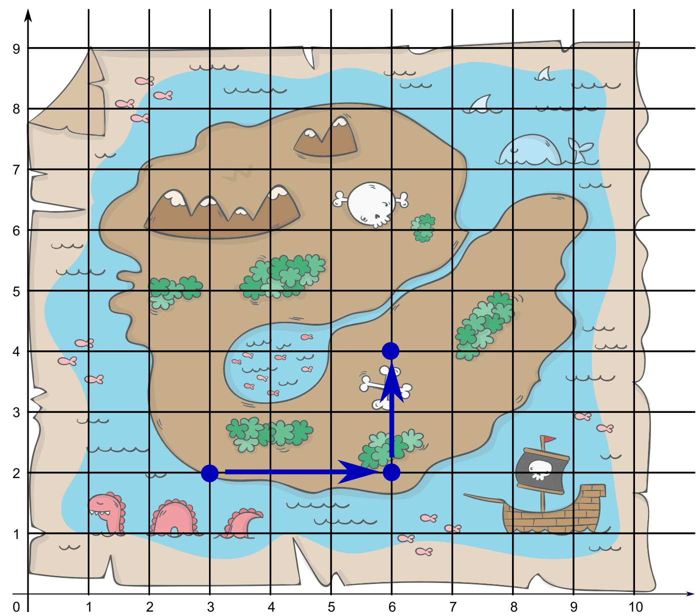
Solución: Primero, se inicia en el punto (3,2):



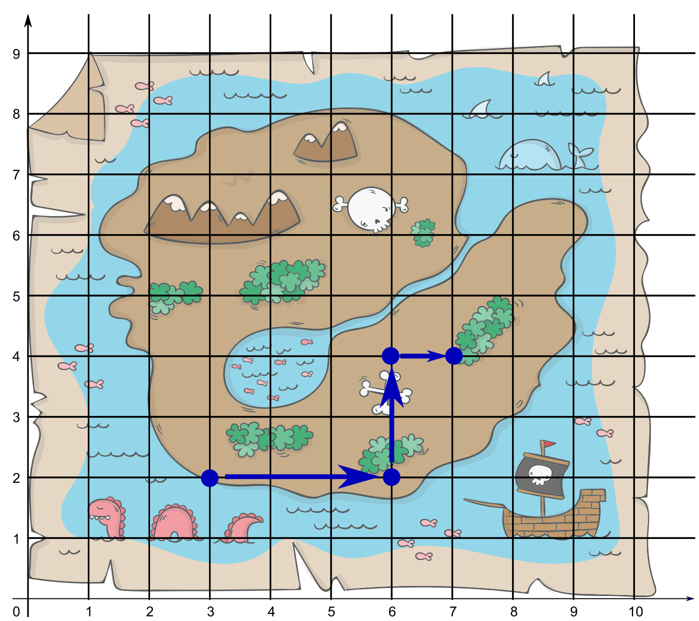
Si sigue correctamente los pasos, usted primero llegará al punto (6,2):



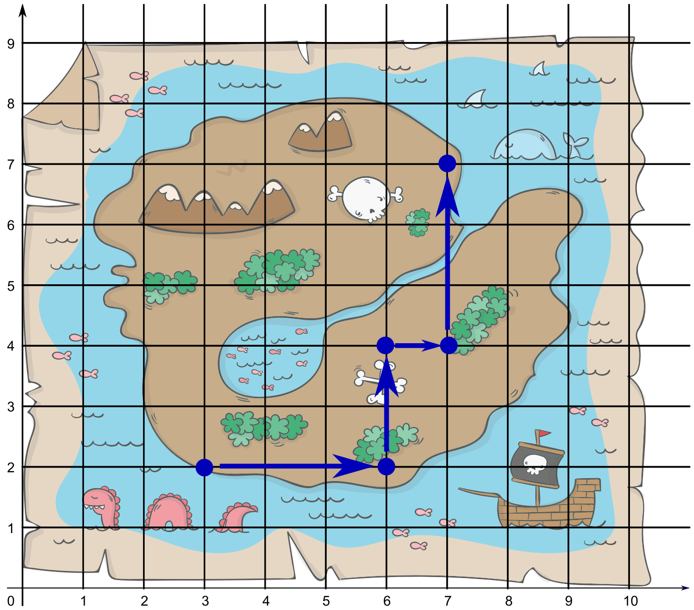
De ahí se desplazó al punto (6,4):



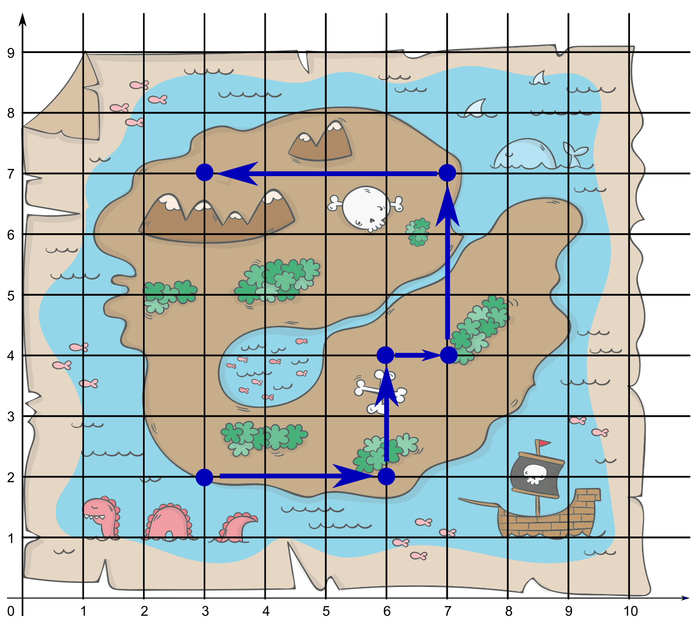
Luego siguió al punto (7,4):



De ahí al punto (7,7):



Finalmente encontró el tesoro en el punto (3,7):

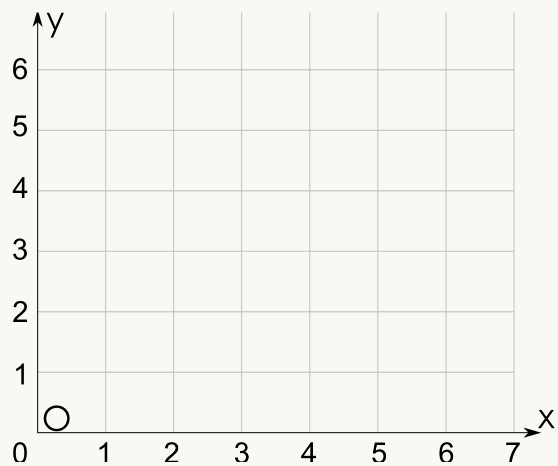


Ubicar puntos en el sistema de coordenadas

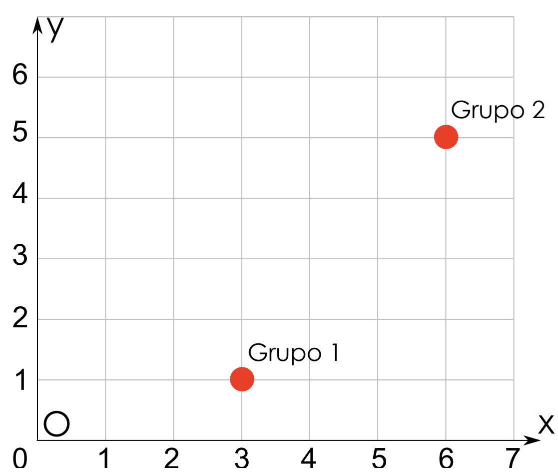
En esta sección, se va a realizar el proceso inverso al explicado en la parte anterior. En esta ocasión se darán las coordenadas y se deberá ubicar el punto en el sistema de coordenadas.

Ejemplo 3.4

En un centro turístico en Sarchí se realizan paseos en carreta típica tirada por bueyes. Para ubicar los puntos donde se inician los recorridos, se usa un mapa de coordenadas. Este mapa está sincronizado con una aplicación móvil. Dos grupos de turistas quieren hacer el recorrido en carreta. Uno de los grupos deberá iniciar el recorrido en el punto $(3,1)$ y el otro grupo en la coordenada $(6,5)$. Ubique los lugares en donde estarán ubicadas las carretas típicas para iniciar el recorrido.



Solución: En la siguiente imagen considere que cada punto corresponde a la carreta con la cual cada grupo de turistas iniciará el recorrido.



Sabías que...

El 11 de julio de 1988 se declaró a la carreta como símbolo nacional del trabajo. La carreta pintada se ha convertido en un símbolo que identifica a Costa Rica, principalmente en las localidades de Sarchí y Puriscal. Fue declarada por la UNESCO, como Patrimonio de la Humanidad. Puede encontrar más información es este sitio web **https://www.imprentanacional.go.cr/editorialdigital/libros/historiaygeografia/simbolos_nacionales_2018_edincr.pdf**.

Figura 3.1: Nota. Carreta Tipica de Costa Rica. (Fotografía) por Rafael Alvarez, 2009. Flickr. **https://www.flickr.com/photos/nickodemo/3790350505/**. CC BY-NC-ND 2.0

Video 3.6

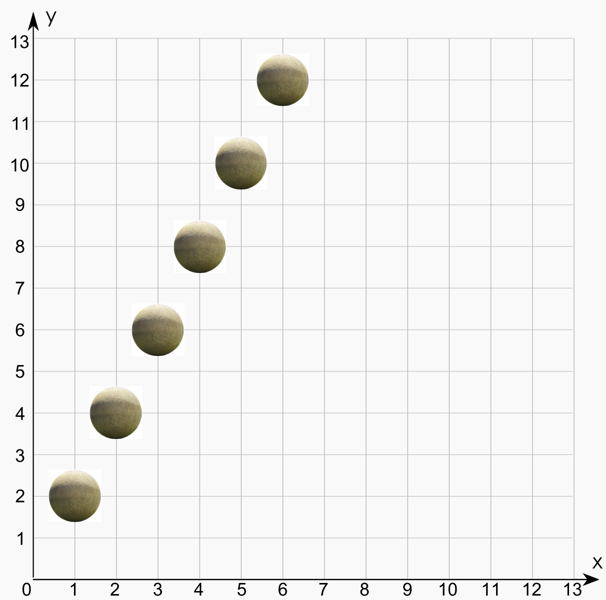
En este video se muestra con un problema contextualizado, como ubicar puntos en el plano cartesiano.

3.2.1 Ley de formación de puntos en un plano de coordenadas

Reconocer un patrón gráficamente

Analice

Un arqueólogo que se encuentra en el Pacífico Sur del país se encuentra seis esferas de piedra precolombinas que están alineadas como se muestra a continuación:



El arqueólogo sospecha que esa alineación sigue algún patrón en específico.

Ayude al arqueólogo y determine las coordenadas de cada una de las esferas precolombinas y analice si existe algún patrón entre las coordenadas x y y de cada uno de los puntos. Para ayudarse con la solución, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Las esferas siguen un patrón en específico o simplemente están alineadas al azar?

b) ¿Si existe un patrón, podría determinar la ubicación de las dos esferas siguientes si es que existiera un patrón?

Solución:

a) Las coordenadas de las esferas son (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10) y (6,12).

Note que las coordenadas x de los puntos son 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Observe que estos valores van aumentando de uno en uno. Además, las coordenadas y corresponden a los valores 2, 4, 6, 8 10 y 12, los cuales siguen un patrón de ir aumentado de dos en dos.

También se puede ver que la coordenada y es el doble de la coordenada x. Por lo que se puede decir que las esferas siguen un patrón.

b) En caso de seguirse el patrón, las dos esferas siguientes se encontrarían en las posiciones (7, 14) y (8, 16) respectivamente.

Sabías que...

Las esferas indígenas precolombinas de Costa Rica fueron declaradas símbolo patrio el 30 de julio del 2014. Estas esferas se consideran únicas en el mundo por su número, tamaño y perfección.

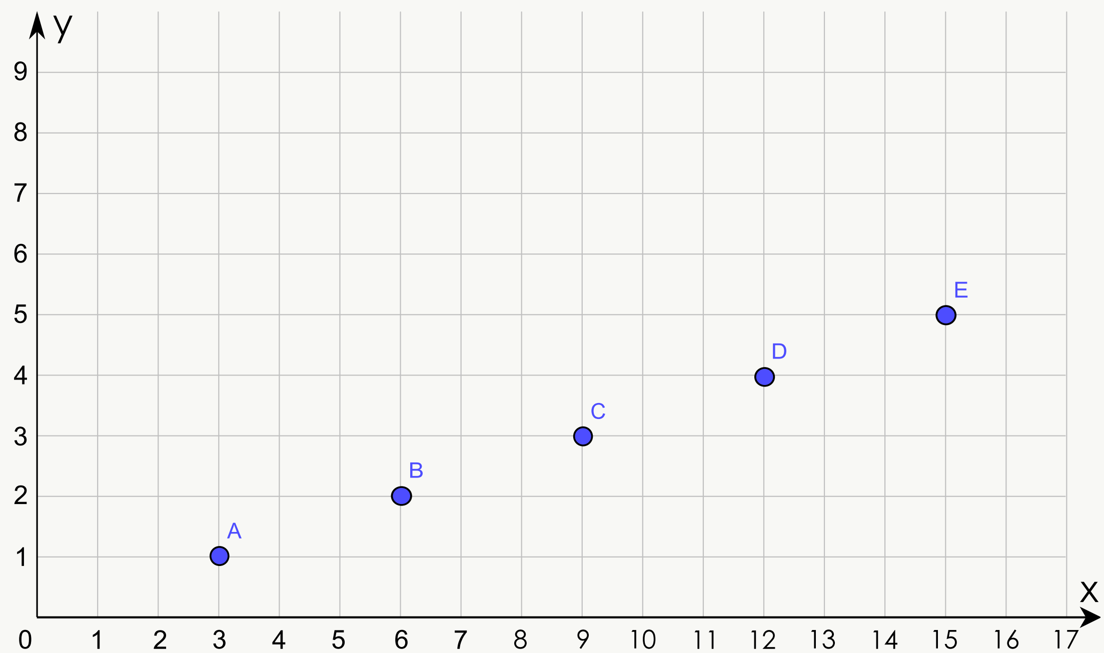
Las esferas están ubicadas principalmente en el sur del país, como en la llanura aluvial del delta del río Diquís, en la península de Osa y en la Isla del Caño. Puede conocer más información en el sitio web: **https://guiascostarica.info/simbolos/esferas-precolombinas-simbolo-patrio/**.

Figura 3.2: Nota. Esferas de piedra de Diquis, Costa Rica. (Fotografía) por Mario Duran-Ortiz, 2020. Flickr. **https://www.flickr.com/photos/30998987@N03/49400622572**. CC BY-SA 2.0

Analice el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.5

Observe los siguientes puntos en un plano de coordenadas:



Los puntos A, B, C, D y E siguen un patrón. Si se quiere representar otros dos puntos F y G, de forma que sigan el mismo patrón ¿cuáles serían las coordenadas de cada uno de estos nuevos puntos?

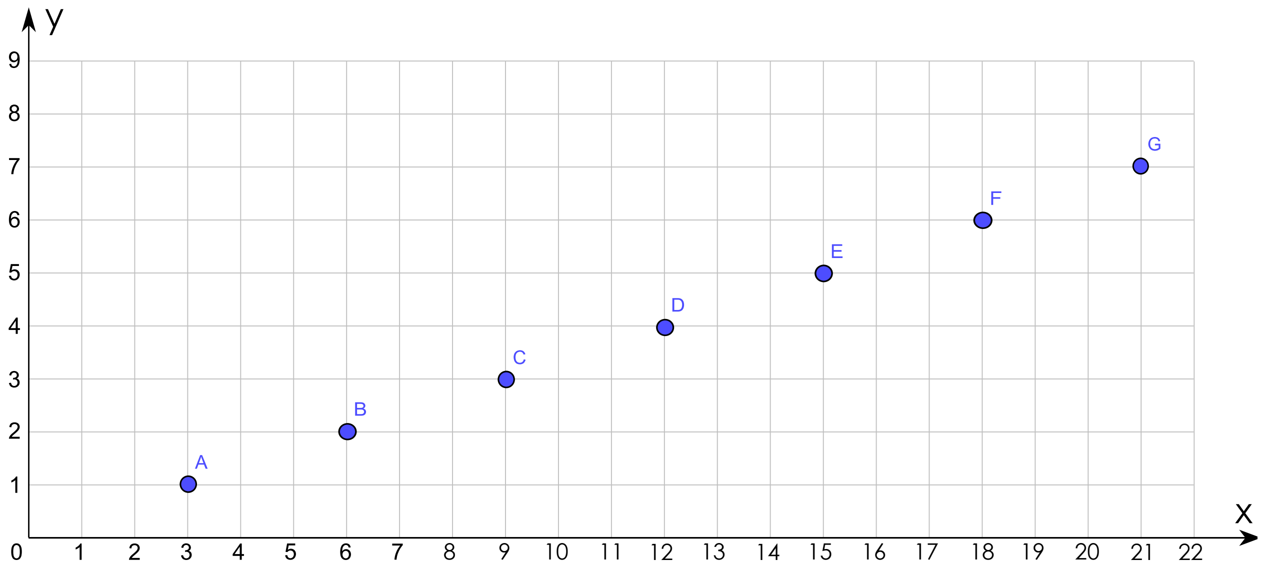
Solución: Primero se deben determinar las coordenadas de los puntos A, B, C, D y E, así se tiene:

$$A=(3,1),\quad B=(6,2),\quad C=(9,3),\quad D=(12,4)\quad \text{y}\quad E=(15,5)$$

Se puede observar que las coordenadas en x aumentan de tres en tres, mientras que las coordenadas en y aumentan de uno en uno. También se puede deducir que la coordenada en y es la tercera parte de la coordenada x. De esta forma se puede deducir que las coordenadas de los puntos F y G son:

$$F=(15+3,5+1)\qquad\qquad G=(18+3,6+1)$$
$$F=(18,6)\qquad\qquad G=(21,7)$$

De forma gráfica se tiene que:



Representar un patrón verbal en forma tabular o gráfica

Muchas situaciones que se presentan en la vida cotidiana pueden ser representadas en una tabla o en un sistema de coordenadas. Analice con cuidado las siguientes situaciones.

Analice

En un centro de fotocopiado, el precio por sacar una fotocopia a una hoja es de 20 colones. Así, se puede establecer una fórmula que permita calcular el total a pagar después de sacar una cierta cantidad de fotocopias.

El administrador del centro sabe que el precio total por pagar está dado por la fórmula $p = 20 \cdot n$ en donde n es la cantidad de fotocopias que se sacaron.

Con base en esa información ¿cuánto se pagaría, en total, al sacar 5, 10, 15, 20 y 25 fotocopias?.

Además, represente esta situación por medio de una tabla y en el plano de coordenadas.

Solución:
Se debe utilizar la fórmula $p = 20 \cdot n$ para calcular la compra de cada una de las cantidades de fotocopias.

Para el caso de 5 fotocopias se tiene que $n = 5$, por lo que se debe reemplazar en la fórmula, así:

$$p = 20 \cdot 5 = 100$$

Por lo tanto, si se sacan 5 fotocopias, se pagará un total de 100 colones. Para los demás casos se realiza el mismo cálculo:

- Para $n = 10$ se tiene $p = 20 \cdot 10 = 200$, por lo tanto se pagará 200 colones.
- Para $n = 15$ se tiene $p = 20 \cdot 15 = 300$, por lo tanto se pagará 300 colones.
- Para $n = 20$ se tiene $p = 20 \cdot 20 = 400$, por lo tanto se pagará 400 colones.
- Para $n = 25$ se tiene $p = 20 \cdot 25 = 500$, por lo tanto se pagará 500 colones.

Con los datos anteriores se puede construir una tabla donde, en una columna se tenga la cantidad de fotocopias por sacar y en la otra el precio total a pagar en colones (el que se calculó con la fórmula). Así, se tiene:

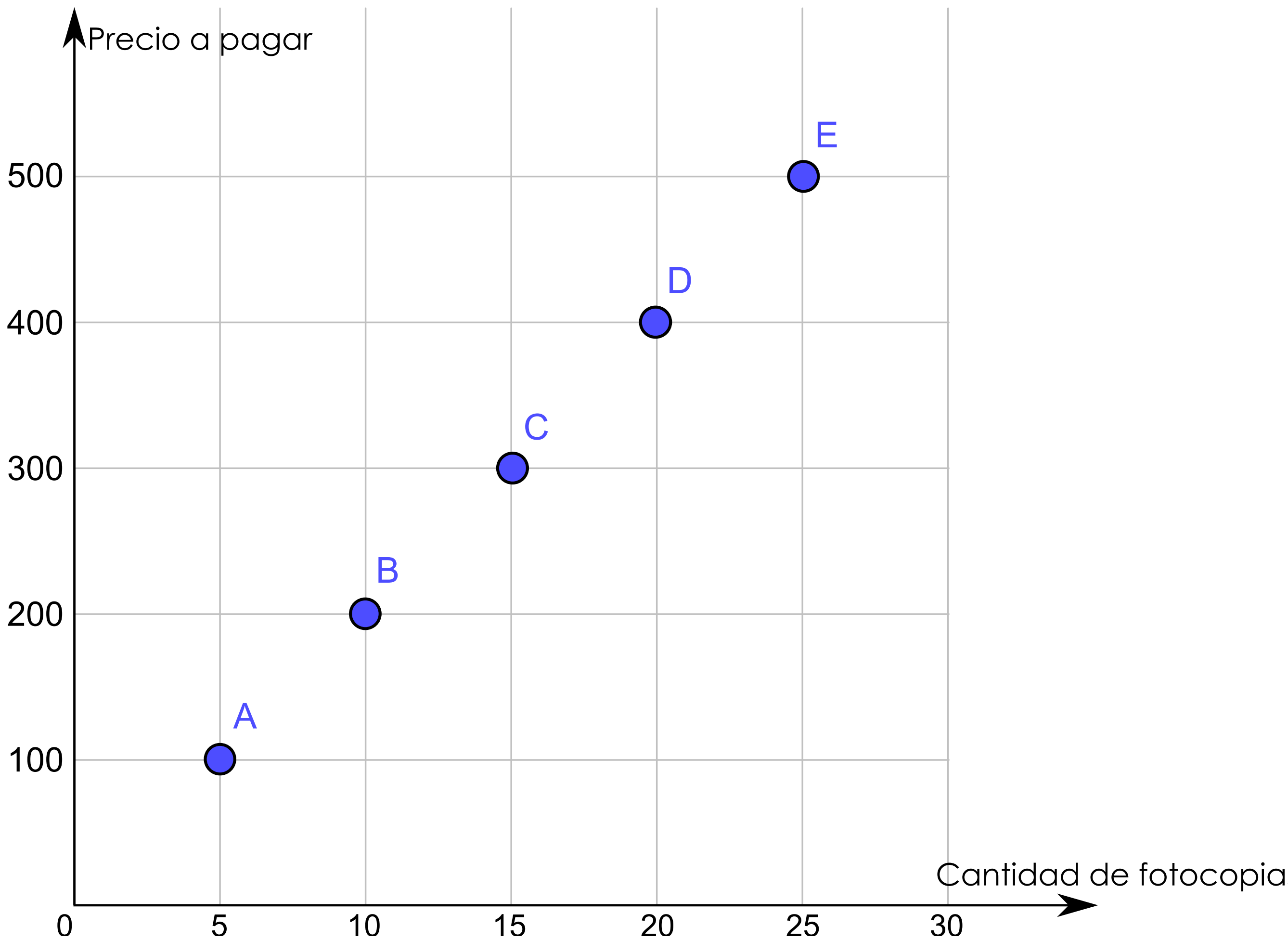
Cantidad de fotocopias (n)	**Total a pagar en colones (p)**
5	100
10	200
15	300
20	400
25	500

También se puede representar en un sistema de coordenadas la cantidad de copias sacadas con respecto al total en colones a pagar. En este caso la coordenada x representa la cantidad de fotocopias y la coordenada y el total a pagar en colones. Así los datos se pueden representar por medio de los puntos:

$$A = (5, 100)$$
$$B = (10, 200)$$
$$C = (15, 300)$$
$$D = (20, 400)$$
$$E = (25, 500)$$

Observe que representar el **eje** x (cantidad de copias sacadas) de una unidad en una unidad podría ser muy laborioso por lo que, en este caso, es más conveniente representar esas coordenadas de 5 en 5 unidades. Así, se construirá el **eje** x colocando sólo múltiplos de 5. A este proceso, se conoce como **determinar una escala apropiada**.

Una situación similar ocurre con el **eje** y (cantidad pagada en colones), en este caso es más conveniente representar esas coordenadas de 100 en 100 unidades. Así, se construirá el **eje** y colocando sólo múltiplos de 100. Gráficamente se tiene:



Ejemplo 3.6

Represente la siguiente situación por medio de una tabla y además, en el plano de coordenadas:

"Ana Lucía es 4 años mayor que su hermano Ernesto"

Solución: Como Ana Lucía es 4 años mayor que su hermano Ernesto, esto quiere decir que su hermano nació cuando Ana Lucía tenía 4 años. Siguiendo esta diferencia se tiene que cuando:

- Ana Lucía tenga 5 años su hermano tendrá $5 - 4 = 1$ año.
- Ana Lucía tenga 6 años su hermano tendrá $6 - 4 = 2$ años.
- Ana Lucía tenga 7 años su hermano tendrá $7 - 4 = 3$ años.
- Ana Lucía tenga 8 años su hermano tendrá $8 - 4 = 4$ años.

Con los datos anteriores se puede construir una tabla donde, en una columna se tenga la edad de Ana Lucía y en la otra la edad de su hermano Ernesto. Así, se tiene:

Edad de Ana Lucía	Edad de Ernesto
4	0
5	1
6	2
7	3
8	4

También se puede representar en un sistema de coordenadas la edad de Ana Lucía con respecto a la edad de Ernesto. En este caso la coordenada x representa la edad de Ana y la coordenada y la edad de su hermano. Así los datos se pueden representar por medio de los puntos:

$$A = (4,0)$$

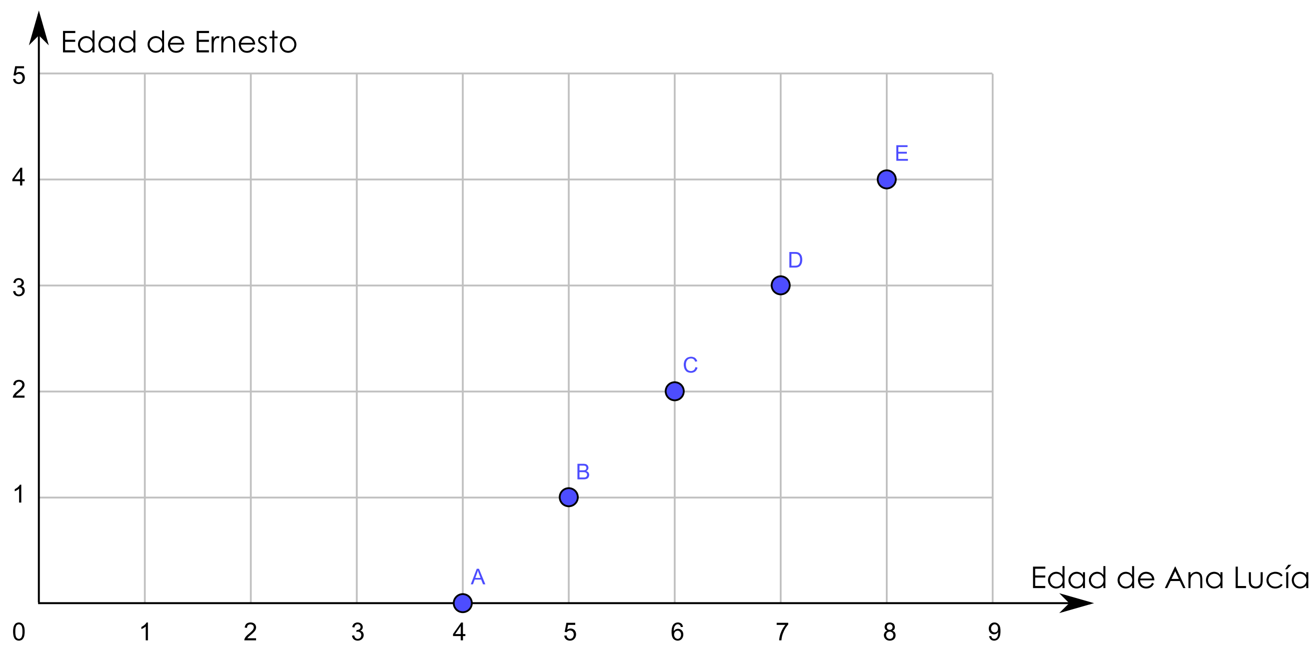
$$B = (5,1)$$

$$C = (6,2)$$

$$D = (7,3)$$

$$E = (8,4)$$

En este caso tanto en el **eje** x como en el **eje** y se utilizarán coordenadas que avancen de 1 en 1 unidad. Gráficamente se tiene:



Video 3.7

En este video se explica la ley de formación de puntos en el plano de coordenadas mediante un problema contextualizado.

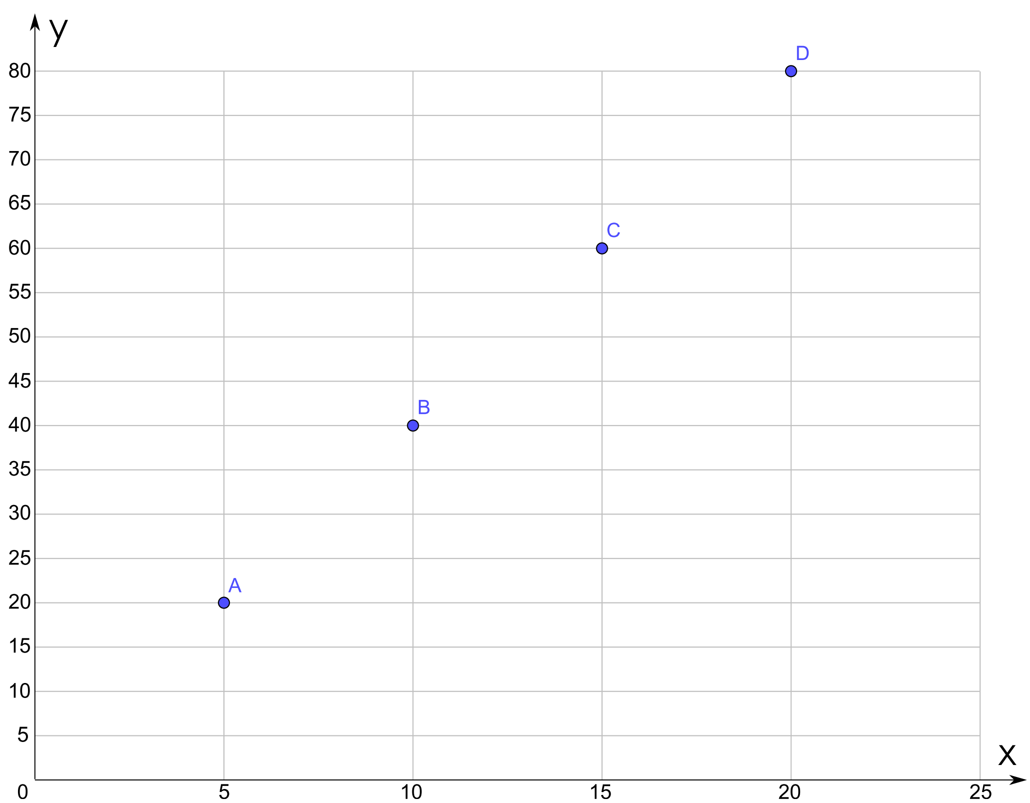
Video 3.8

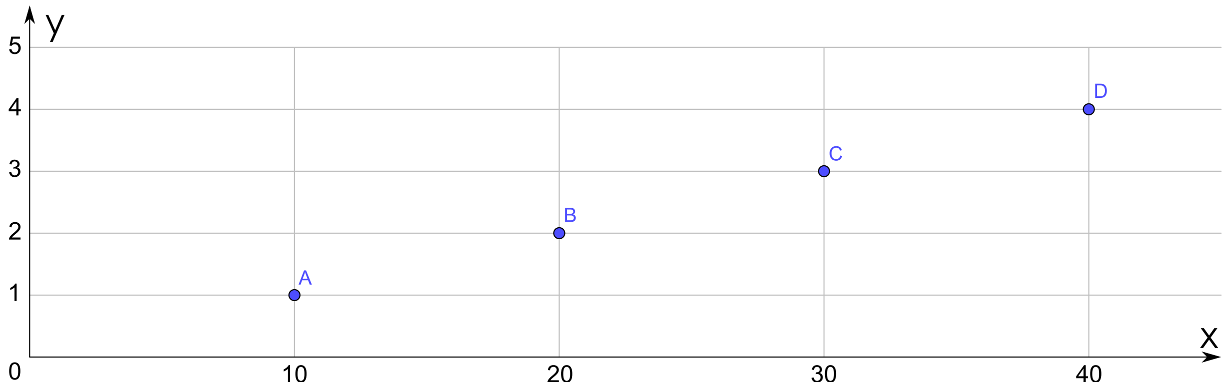
En este video se explica la ley de formación de puntos en el plano de coordenadas mediante un segundo problema contextualizado.

3.3 Práctica: representación algebraica y en el plano de coordenadas

3.3.1 Observe cuidadosamente los puntos representados en el sistema de coordenadas. Luego, describa en forma verbal el patrón que siguen.

a)



b) 

3.3.2 Roberto dedica **1 hora diaria** en su computadora para revisar redes sociales, pero Alejandro, su hijo, dedica **5 horas diarias** en su computadora pues le encantan los videojuegos. El papá le explica que no es saludable estar tanto tiempo frente a la computadora y que debe salir a jugar con sus amigos y a hacer deporte.

Roberto quiere demostrarle a su hijo, que él está pasando muchas horas a la semana usando tecnología. Para esto:

a) Complete la siguiente tabla, donde se muestra la cantidad de horas acumuladas que tanto Alejandro como su papá dedican al uso de la computadora durante los días lectivos de la semana (de lunes a viernes). Esto es necesario para ayudar a que el papá le explique a su hijo que es necesario que salga a hacer más deportes y tenga un estilo de vida más saludable.

	Acumulado de horas frente a la computadora	
Día de la semana	**Roberto**	**Alejandro**
lunes	1	5
martes	2	$5+5=10$
miércoles	3	$10+5=15$
jueves	4	
viernes	5	

b) Si se cuenta sábado y domingo, asumiendo que se sigue el mismo comportamiento, ¿Cuántas horas semanales dedica Alejandro a jugar en la computadora?

c) Represente en un sistema de coordenadas las horas que dedican padre e hijo a usar la computadora, considerando las horas de Roberto en el **eje** x y las horas de Alejandro en el **eje** y.

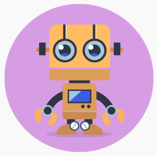
3.3.3 Sofía y Antonio son un matrimonio costarricense que se dedica a la confección de distintos muebles utilizando maderas de árboles de Guanacaste, Cenízaro o Cedro. Su hija, Luciana, les ayuda con la publicidad del negocio en distintas redes sociales. Los padres de Luciana le han indicado que por cada mueble que se venda cuyo comprador haya realizado contacto con el negocio por medio de una red social, le darán una tercera parte de la ganancia a Luciana. Con base en esta información:

a) Complete la siguiente tabla con las ganancias que recibirá Luciana por la venta de los muebles:

	Ganancia en colones	
Tipo de mueble	**Para el negocio**	**Comisión para Luciana**
Estante	30 000	
Mesas de noche	60 000	
Sillón individual	90 000	
Sillón doble	120 000	
Alacena	150 000	
Cama	180 000	

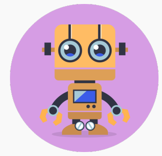
b) Represente en un sistema de coordenadas la ganancia para el negocio y la ganancia de Luciana, considerando la ganancia para el negocio en el **eje** x y la ganancia de Luciana en el **eje** y.

Aplicaciones tecnológicas



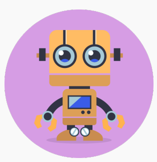
En el siguiente enlace, encontrará una actividad tecnológica donde podrá repasar el lenguaje algebraico. Seleccione siempre la opción que crea correcta.
Aplicación interactiva

Aplicaciones tecnológicas



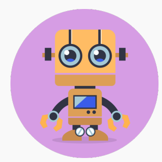
En el siguiente enlace, encontrará una actividad tecnológica donde deberá ubicar correctamente las coordenadas que se muestran en el gato que aparece.
Aplicación interactiva

Aplicaciones tecnológicas



En el siguiente enlace encontrará una aplicación tecnológica donde deberá formar una figura usando el rompecabezas y las coordenadas que se dan para cada una de las piezas.
Si coloca mal alguna pieza, el rompecabezas no tendrá sentido y deberá arreglarlo.
Aplicación interactiva

Aplicaciones tecnológicas



En el siguiente enlace encontrará una aplicación tecnológica donde podrá desafiar a la computadora en un juego llamado Battleship. Necesitará tener un buen manejo de los ejes de coordenadas para poder vencer. La idea es hundir los barcos de tu rival, antes de que este encuentre los suyos. ¡Suerte!
Aplicación interactiva

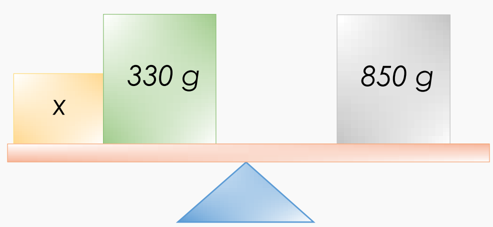
Capítulo 4

Ecuaciones

Analice

Zule está ayudando en su comunidad a armar paquetes de comestible para ser donados a familias de escasos recursos. Todas las ayudas recibidas son colocadas en balanzas para que se pueda distribuir, la cantidad de gramos, de forma más equitativa. Zule está trabajando en la confección de paquetes de granos, sin embargo, algunos de los que se reciben no vienen etiquetados con la cantidad de gramos del producto y en total se decide dar a cada familia el equivalente a 850 gramos de frijoles de cualquier tipo.

Zule solamente cuenta con una balanza como la que se muestra en la figura adjunta. Hay un paquete que se recibió del que se desconoce su masa en gramos. Zule lo coloca junto con un paquete de 330 gramos en un extremo de la balanza y en el otro extremo se coloca un paquete de 850 gramos. La balanza queda equilibrada, tal como se muestra en la siguiente imagen:



Si se nombra con una x al paquete del que se desconoce su masa, utilizando la situación planteada ¿cuál es la masa en gramos de este paquete?

Solución: Como la balanza debe estar equilibrada la suma de los dos artículos del lado izquierdo debe ser igual a 850 g. Así:

$$x + 330 = 850$$

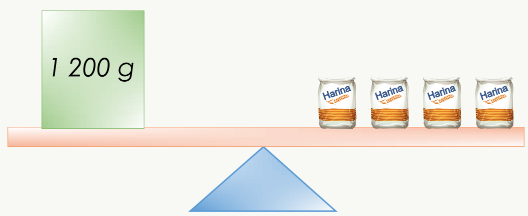
Por tanto, por medio de operaciones básicas, se calcula cuánto le falta a 330 para llegar a 850, así se obtiene que x = 520. Por lo que el paquete de granos que no está etiquetado pesa 520 gramos.

Ejemplo 4.1

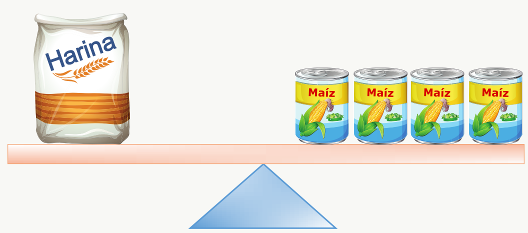
Carlos está colaborando en la creación de cajas para entregar comida a los niños del comedor de la escuela donde trabaja. Él sabe que la cantidad total, en gramos, de una caja debe ser 1 200. Él desea determinar la masa de los siguientes productos, sabiendo que los productos iguales tienen igual cantidad:

Paquete de harina Lata de maíz Frasco de condimento

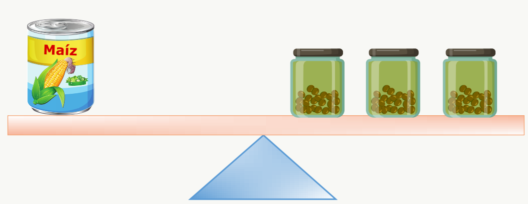
Ayude a Carlos a encontrar la masa de cada producto si se sabe lo siguiente:



Balanza 1



Balanza 2



Balanza 3

Solución: De la balanza 1 se puede observar que los 1200 gramos equivalen a cuatro paquetes de harina, entonces para cada saber cuanto masa tiene cada paquete de harina se debe realizar la siguiente operación:

$$1\,200 \div 4 = 300$$

Así, cada paquete de harina contiene 300 gramos.

Como ya se sabe que cada paquete de harina contiene 300 gramos y, según la balanza 2, un paquete de harina equivale a cuatro latas de maíz, entonces para saber cuántos gramos contiene cada lata se debe realizar la siguiente operación:

$$300 \div 4 = 75$$

Así, cada lata de maíz contiene 75 gramos.

Finalmente, cada lata de maíz contiene 75 gramos y, según la balanza 3, equivale a tres frascos de condimento, entonces para saber cuántos gramos contiene cada frasco se debe realizar la siguiente operación:

$$75 \div 3 = 25$$

Así, cada frasco de condimento contiene 25 gramos.

Sabías que...

El álgebra tuvo sus primeros avances en las civilizaciones de Babilonia y Egipto, entre el cuarto y tercer milenio antes de Cristo. Estas civilizaciones usaban el álgebra para resolver ecuaciones. Puede encontrar más información en el artículo disponible en:
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/5607

Sabías que...

Es importante recalcar que masa y peso tienen dos significados muy diferentes que, en la cotidianidad, tienden a mezclarse. La masa representa la cantidad de materia que tiene un cuerpo y el instrumento que se utiliza para medirla es una balanza. Por otro lado, el peso es la fuerza con la que el cuerpo es atraído por la gravedad y depende de la masa del cuerpo, el instrumento que se usa para medir esta magnitud es el dinamómetro.

Usualmente, en la vida diaria, cuando se quiere saber la cantidad de materia de un cuerpo se utiliza la palabra "peso". Pero como se explicó anteriormente, peso y masa tienen significados físicos diferentes. Lo ideal es usar frases como "voy a determinar la cantidad de materia de ..." y no "voy a determinar el peso de ...".

Definición 4.1 Ecuación

Una ecuación es una igualdad que se cumple para un valor específico de la variable.
Es importante notar que en una ecuación existen dos términos relacionados por un signo de igualdad, donde en alguno de los términos o en ambos, se encuentra una variable (un término desconocido).

Por ejemplo, en la ecuación:

$$x + 8 = 23$$

El miembro izquierdo está compuesto por la suma $x + 8$ y el miembro derecho está compuesto por el número 23.

La pregunta que se debe hacer es: ¿cuánto se debe sumar a 8 para obtener 23 como resultado?.

En este caso el único valor posible es 15, que sería el valor que toma la x para hacer verdadera esa igualdad, pues $15 + 8 = 23$. Si se probara con otros valores diferentes a 15, esa igualdad no sería verdadera.

La operación entre números de una ecuación puede ser también una resta, una multiplicación o una división. Por ejemplo, en la ecuación

$$x \cdot 8 = 72$$

El miembro izquierdo está compuesto por la multiplicación $x \cdot 8$ y el miembro derecho está compuesto por el número 72.

La pregunta que se debe hacer es: ¿por cuál número se debe multiplicar el 8 para obtener 72 como resultado? En este caso el único valor posible es 9, que sería el valor que toma la x para hacer verdadera esa igualdad, pues:

$$9 \cdot 8 = 72$$

Si se prueba con otros valores diferentes a 9, esa igualdad no es verdadera.

Video 4.1

En este video se explican mediante dos ejemplos, el concepto de ecuaciones.

Analice ahora casos que involucran las diferentes operaciones fundamentales:

- **División:**

Ejemplo 4.2

Determine el valor de n en la ecuación:

$$n \div 6 = 14$$

Solución: En dicha ecuación, el miembro izquierdo está compuesto por la división $n \div 6$ y el miembro derecho está compuesto por el número 14. La pregunta que se debe hacer, para encontrar el valor de n es:

¿Qué número dividido por 6 da 14 como resultado?

En este caso el único valor posible es 84, que sería el valor que toma la x para hacer verdadera esa igualdad, pues:

$$84 \div 6 = 14$$

Si se prueba con otros valores diferentes a 84, esa igualdad no es verdadera.

En el siguiente ejemplo se invierten las posiciones de los números y de la incógnita, así la incógnita se coloca en el divisor en vez de en el dividendo:

Ejemplo 4.3

Determine el valor de n en la ecuación:

$$84 \div n = 14$$

Solución: En dicha ecuación, el miembro izquierdo está compuesto por la división $84 \div n$ y el miembro derecho está compuesto por el número 14. La pregunta que se debe hacer es:

¿Qué número divide al 84 para que su resultado sea 14?

En este caso el único valor posible es 6, que sería el valor que toma la x para hacer verdadera esa igualdad, pues:

$$84 \div 6 = 14$$

Si se prueba con otros valores diferentes a 6, esa igualdad no es verdadera.

Note que, en la división, la pregunta en ambos casos es distinta pues en uno de los casos se quiere encontrar el dividendo y en el otro caso, el divisor.

- **Resta:**

Ejemplo 4.4

Determine el valor de n en la ecuación:

$$n - 6 = 14$$

Solución: En dicha ecuación, el miembro izquierdo está compuesto por la resta $n - 6$ y el miembro derecho está compuesto por el número 14. La pregunta que se debe hacer es:

¿A qué número debo restarle 6 para obtener 14 como resultado?

En este caso el único valor posible es 20, que sería el valor que toma la x para hacer verdadera esa igualdad, pues:

$$20 - 6 = 14$$

Si se prueba con otros valores diferentes a 20, esa igualdad no es verdadera.

En el siguiente ejemplo se invierten las posiciones de los números y de la incógnita, así la incógnita se coloca en el sustraendo en vez de en el minuendo:

Ejemplo 4.5

Determine el valor de n en la ecuación:

$$20 - n = 14$$

Solución: En dicha ecuación, el miembro izquierdo está compuesto por la resta $20 - n$ y el miembro derecho está compuesto por el número 14. La pregunta que se debe hacer es:

¿Qué número debe restarse al 20 para obtener como resultado 14?

En este caso el único valor posible es 6, que sería el valor que toma la x para hacer verdadera esa igualdad, pues:

$$20 - 6 = 14$$

Si se prueba con otros valores diferentes a 6, esa igualdad no es verdadera.

Note que, en la resta, la pregunta en ambos casos es distinta pues en uno de los casos se quería encontrar el minuendo y en el otro caso, el sustraendo.

Recuerde que la resta y la división no son conmutativas, por tanto, debo de ser muy cuidadoso para resolver las operaciones.

- **Suma y Multiplicación:**

En el caso de la suma y la multiplicación que sí sin conmutativas, por lo que para efectos de resolver ecuaciones, es equivalente tener $3 \cdot x = 15$ o $x \cdot 3 = 15$, la pregunta, en ambos casos es la misma:

¿Qué número multiplicado por 3 me da 15 como resultado?

De igual forma con la suma: $x + 3 = 8$ o $3 + x = 8$, la pregunta sería: ¿Qué número sumado con 3 me da 8 como resultado?

Sabías que...

Las incógnitas pueden estar tanto al lado izquierdo como al lado derecho de la igualdad. El proceso para resolver una igual es el mismo sin importar en donde se encuentre la incógnita. Por ejemplo: $x + 3 = 8$ es equivalente a escribir $8 = 3 + x$.

4.1 Identificar si un número es solución de una ecuación dada

Para conocer si un número es solución o no, de una ecuación dada, basta con sustituir ese número en la igualdad y debe obtenerse el mismo resultado en ambos miembros de la ecuación (miembro izquierdo y miembro derecho).

Ejemplo 4.6

En la ecuación:

$$72 = n - 14$$

Verifique si 90 puede ser solución de esa ecuación.

Solución: Lo que se debe realizar es sustituir el 90 en el valor de la variable n. Al hacer esto se obtiene que:

$$90 - 14 = 76$$

Dado que el resultado debía ser 72, el 90 **no es solución** de la ecuación.

Alternativamente, se puede probar con 86. Al sustituir el 86 en el valor de la variable n, se obtiene que:

$$86 - 14 = 72$$

Dado que el resultado debía ser 72, el 86 **sí es solución** de la ecuación.

Ejemplo 4.7

En la ecuación:

$$96 \div n = 3$$

Verifique si 30 puede ser solución de esa ecuación.

Solución: Lo que se debe realizar es sustituir el 30 en el valor de la variable n, se obtiene que:

$$96 \div 30 = 0,3$$

Dado que el resultado debía ser 3, el 30 **no es solución** de la ecuación.

Alternativamente, se puede probar con 32. Al sustituir el 32 en el valor de la variable n, se obtiene que

$$96 \div 32 = 3$$

Dado que el resultado debía ser 3, el 32 **sí es solución** de la ecuación.

4.2 Plantear y resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado

En situaciones de la vida, es necesario el planteo y resolución de ecuaciones que me permitan obtener la respuesta a la problemática planteada.

Ejemplo 4.8

Suponga que se tiene que amarrar dos cajas grandes con un cordel de 62 metros y se corta el cordel de forma tal que uno de los trozos mide 19 metros y se emplea para amarrar la caja pequeña, ¿cuántos metros de cordel quedan para amarrar la caja grande?

Solución: En este caso se puede plantear una ecuación. Cómo se dice que los 19 m de cordel sumado a otro número que se desconoce, tiene que dar como resultado el total de 62 m, por tanto la ecuación que permite resolver dicha situación corresponde a:

$$19 + z = 62$$

Para resolver esta ecuación se debe preguntar:

¿Cuánto le falta a 19 para llegar a 62?

En este caso, la respuesta correcta es es 43 metros.

Analice otro ejemplo:

Ejemplo 4.9

En el patio de una casa, hay un árbol de mango que mide 28 metros de altura. Si por año, el árbol crece aproximadamente 4 metros, ¿cuántos años ha tardado en crecer para llegar hasta la altura actual?

Solución: Para plantear este problema, se debe saber que cada año el árbol crece 4 metros y ya ha pasado cierta cantidad de años hasta alcanzar los 28 metros de altura, por tanto la ecuación que permite solucionar este problema corresponde a:

$$4 \cdot x = 28$$

De donde se puede que deducir el número correcto que completa esa igualdad es 7.

Con ese resultado se puede decir que el árbol ha tardado 7 años en alcanzar esa altura.

Como se ha visto, las ecuaciones se utilizan para resolver innumerables situaciones.

Video 4.2

En este video se explica cómo determinar las edades de dos hermanos, primero de forma intuitiva y luego utilizando ecuaciones.

4.3 Práctica: ecuaciones

4.3.1 Determine si el número que se indica es o no solución de la ecuación dada.

a. $54 = x + 12$ $\quad x = 38$

b. $y \div 7 = 15$ $\quad y = 104$

c. $z - 23 = 87$ $\quad z = 110$

d. $196 - x = 95$ $\quad x = 101$

e. $23 = 115 \div x$ $\quad x = 5$

f. $47 \cdot z = 376$ $\quad z = 8$

4.3.2 Determine el valor numérico de cada figura, de forma que se satisfaga la ecuación dada:

a) ✸ $\cdot\, 8 = 128$

b) ♥ $\div\, 6 = 31$

c) ● $+\, 453 = 815$

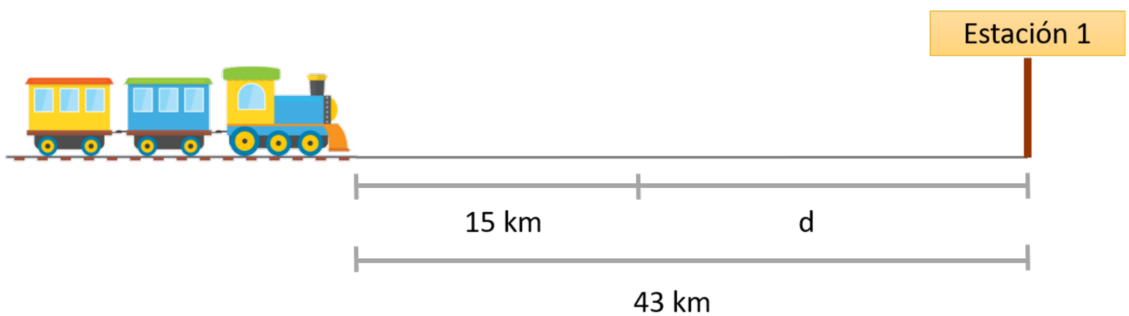
d) ■ $-\, 345 = 607$

e) $459\, -$ ⬟ $= 187$

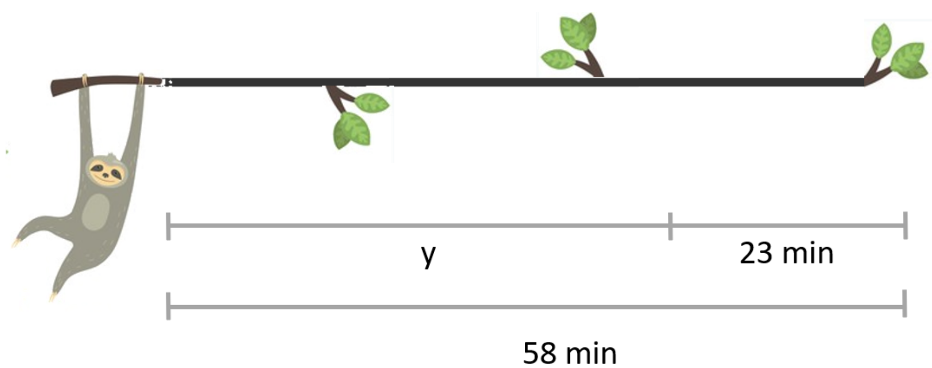
f) $891\, \div$ ◆ $= 297$

4.3.3 Escriba una ecuación, que permita encontrar el valor de la incógnita, para cada una de las situaciones que se muestran a continuación (no es necesario resolverla):

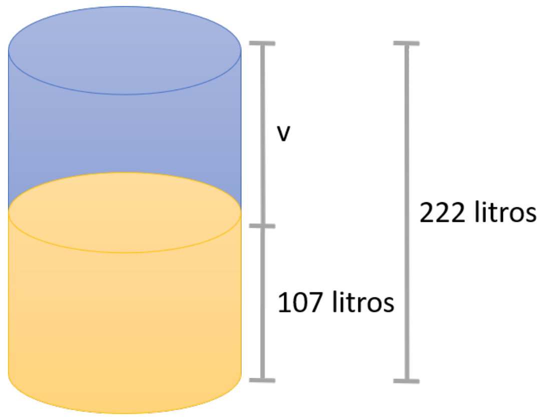
a) Un tren desea desplazarse desde un punto hasta la "Estación 1", en la imagen se le presenta información relacionada con el recorrido en kilómetros.



b) Un perezoso se acaba de levantar de su siesta y desea alimentarse de cuántas hojas que están en una rama. En la siguiente imagen, se presenta la duración en minutos que tarda el perezoso en recorrer toda la rama hasta llegar a su lugar de alimentación.

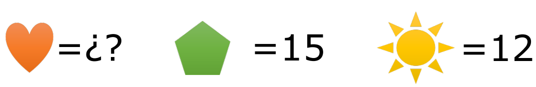


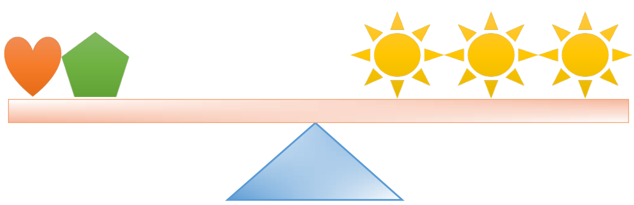
c) Se tiene un estañón con una cierta cantidad de líquido utilizado por una máquina en una fábrica. En la siguiente imagen, se presenta una representación gráfica del mismo.



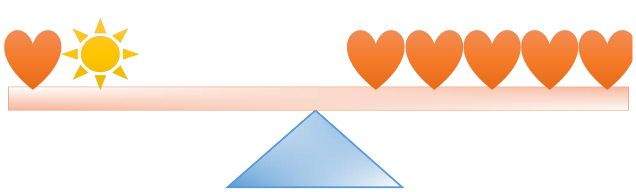
4.3.4 Si se sabe que las siguientes balanzas están equilibradas, determine el valor numérico de la figura desconocida:

a)

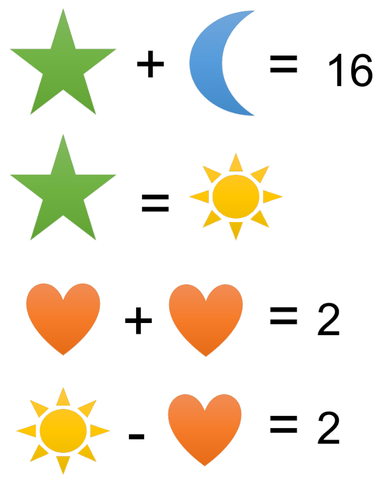




b)



4.3.5 Considere las siguientes igualdades con figuras:



Utilice las cuatro igualdades anteriores para determinar el valor numérico de la estrella, la luna, el sol y el corazón.

4.3.6 Plantee una ecuación para cada uno de los problemas que se muestran e intente encontrar el número que satisface la igualdad planteada:

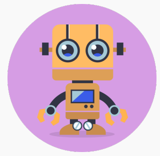
a) El área de un lote cuadrangular es de 576 m^2. ¿Cuánto mide cada lado?

b) Una vara de madera para construcción mide 12 m, si al cortarlo, se usaron 8 m, ¿cuántos metros quedan disponibles?

c) Gaby y Ale suman juntos 26 años, si Gaby tiene 14 años, ¿qué edad tiene Ale?

d) Si en una fiesta de cumpleaños tengo una caja con 168 confites y quiero hacer bolsitas para 14 niños, ¿cuántos confites habrá en cada bolsita?

Aplicaciones tecnológicas



Accesando al siguiente enlace, tendrá que determinar visualmente el valor de cada uno de los animales que se presentan. Es recomendable tener un papel y lápiz a la par. Si se equivoca, el juego te muestra la solución. Hay varios retos. ¡Suerte!

Aplicación interactiva

Capítulo 5

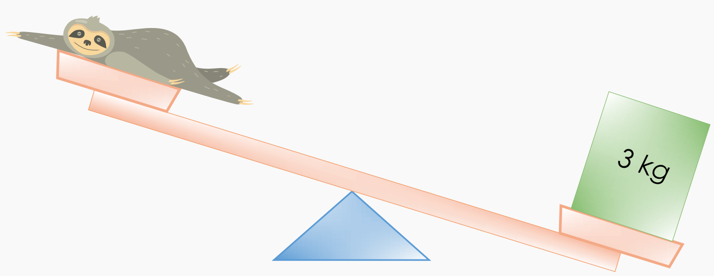
Inecuaciones

Teorema

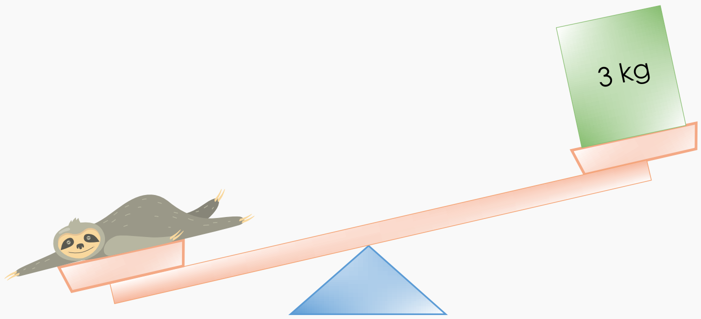
En Cahuita, un lugar de la provincia de Limón en Costa Rica, se encuentra el "Santuario de Perezosos", lugar que se encarga de preservar la vida de muchos perezosos que son recuperados por maltrato animal, algunos de ellos son crías que deben ser cuidados porque falleció su madre, entre muchas otras situaciones.

En el santuario constantemente se está midiendo la masa que tienen las crías de perezoso para tener información nutricional de los mismos. El procedimiento se realiza utilizando una báscula. Para que una cría pueda ser cambiada a un recinto más grande, en donde pueda socializar con otros animales, debe superar una masa de tres kilogramos. Observe las siguientes balanzas, en donde se muestra la masa de los perezosos Uvita, Beans y Rondon:

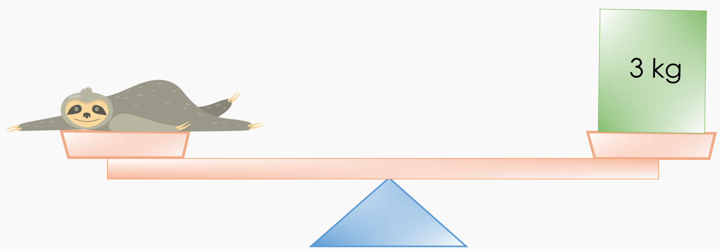
Perezoso Uvita



Perezoso Beans



Perezoso Rondon



Las balanzas utilizan un bloque de 3 kilogramos para comparar la masa de los perezosos. Con base en esta información, determine:

a) ¿Cuál de las crías anteriores sí puede pasar al recinto de socialización?

b) ¿Por qué, sin saber la masa exacta de la cría, puede determinar si cumple el requisito de ser mayor que tres kilogramos?

c) Como la masa de las crías es desconocida se le puede nombrar con la letra "p", ¿de qué forma se puede utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar las situaciones expuestas en las balanzas de los perezosos Uvita, Beans y Rondon?

Solución:

a) La única cría que podría pasar al recinto de socialización es el osito Beans pues, podemos observar que la balanza se inclina de forma tal que el bloque de tres kilogramos tiene menor masa que la cría.

Por otro lado la cría Uvita aún tiene una masa menor que el bloque de tres kilogramos y el Rondon pesa la misma cantidad del bloque así que no cumple la condición "mayor que".

b) Si la balanza está equilibrada, significa que hay una igualdad. Para poder pasar a una cría al área de socialización, ésta debe tener una masa de más de 3 kg, por tanto, debe existir una desigualdad y como la cría debe pesar más de 3 kg la balanza debe mostrar que el perezoso tiene más masa y por tanto inclinarse hacia él.

c) Se tendría las siguiente tres situaciones:

- Uvita: $p < 3$
- Beans: $p > 3$
- Rondon: $p = 3$

Sabías que...

El perezoso es el animal que más recientemente fue incorporado como símbolo nacional de Costa Rica el 14 de julio del 2021. Esto se hizo dentro de un proyecto de Ley, en donde el Ministerio de Ambiente y Energía (Minae) debe velar por el bienestar de estos animales. Por otro lado, el Instituto Costarricense de Turismo (ICT) tiene autorización para utilizar la imagen del perezoso como publicidad para el país y el Instituto Costarricense de Electricidad (ICE) debe aplicar medidas para evitar electrocuciones de estos animales en los cableados eléctricos. Puede encontrar más información en el sitio web: **https://costaricamedios.cr/2021/07/15/el-perezoso-es-el-nuevo-simbolo-nacional/**.

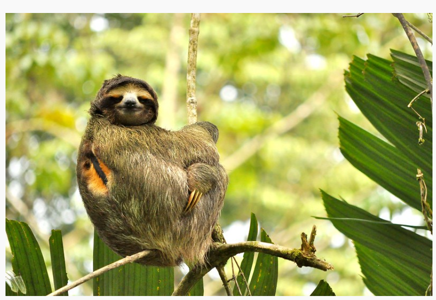


Figura 5.1: Nota. Perezoso. (Fotografía) por Ronald Zúñiga, 2009. Flickr. **https://www.flickr.com/photos/ronald_zuniga/4237765187/**. CC BY-NC-ND 2.0

Ejemplo 5.1

Carlos tiene 19 años menos que Zule. Si las edades de ambos suman menos de 70 años. ¿Cómo se puede plantear esta situación?

Solución: Al leer un problema como este, se tiene que pensar si existe alguna palabra clave que diga si se está en presencia de una ecuación o una inecuación. En el apartado anterior, se aprendió que en las ecuaciones se trabaja con igualdades. Ahora bien, en las inecuaciones se tienen desigualdades.

En este problema la clave está en la frase: "menos de 70" pues eso indica que la suma que se está buscando, de ambas edades, no es igual a 70, sino que es un número menor que 70.

Para plantear el problema, se sabe que Zule tiene una edad desconocida, denotemos x a su edad. Carlos, por otro lado, tiene 19 años menos que Zule, por tanto, se sabe que la edad de Carlos es $x - 19$ (la edad de Zule que es x menos 19 años). Ahora bien, la suma de ambas edades debe ser menor que 70, entonces se tiene que:

$$x + x - 19 < 70$$

De esa forma se plantea la situación y se indica que se está en presencia de una inecuación.

Sabías que...

Según los lineamientos nacionales para la vigilancia de la enfermedad con COVID-19 en Costa Rica, constituye un caso sospechoso aquella persona que presente fiebre y tos, dificultad respiratoria, dolor de garganta u otros. Para considerar una persona con fiebre debe tener más de 37,8 °C, por tanto, podemos escribir una inecuación $p > 37{,}8$ °C.

Puede encontrar más información en este **enlace** del Ministerio de Salud.

Sabías que...

Se estima que cada 1 000 metros de altura el punto de ebullición del agua varía 3 °C. A nivel del mar el agua hierve a 100 °C. En la cumbre del Everest, que se ubica a 8 850 metros sobre el nivel del mar, hervirá a unos 75 °C.

Esto nos lleva a plantearnos que, si estamos a nivel del mar, el agua está hirviendo si tiene más de 100 °C de temperatura, por tanto, tenemos la inecuación de $a > 100$.

Puede encontrar más información en este **enlace** del periódico Excelsior.

Definición 5.1 Inecuación

Una inecuación es una expresión que posee 2 miembros (izquierdo y derecho), donde en alguno de los términos o en ambos, se encuentra una variable (un término desconocido) pero en este caso se relacionan, no a través de una igualdad, sino con los símbolos: $<$ "menor que" ó $>$ "mayor que".

Es importante notar que en una inecuación existen dos términos relacionados por un signo de desigualdad, donde en alguno de los términos o en ambos, se encuentra una variable (un término desconocido). Al igual que en las ecuaciones, la incógnita puede estar en cualquier lado de la desigualdad.

Por ejemplo, la inecuación :

$$x + 8 > 23$$

El miembro izquierdo está compuesto por la suma $x + 8$ y el miembro derecho está compuesto por el número 23, por tanto la inecuación se puede leer como "un número (es una variable representada por la letra x) más ocho es mayor que ventitrés". Además, se sabe que $5 + 8 = 15$, por tanto, cualquier número mayor que 15 va a cumplir la desigualdad, por ejemplo 17, pues $17 + 8 = 25$ que es un número mayor que 23.

Si se prueba con otros valores menores a 15, esa desigualdad no es verdadera, por ejemplo 13, pues $13 + 8 = 21$ que es un número menor que 23.

Analice otro ejemplo:

La inecuación:

$$n - 6 < 14$$

El miembro izquierdo está compuesto por la resta $n - 6$ y el miembro derecho está compuesto por el número 14, por tanto la inecuación se puede leer como "un número (es una variable representada por la letra n) menos seis es menor que catorce". Se sabe que $20 - 6 = 14$, por tanto, cualquier número menor que 20 va a cumplir la desigualdad, por ejemplo 18, pues $18 - 6 = 12$ que es un número menor que 14.

Si se prueba con otros valores mayores a 20, esa desigualdad no es verdadera, por ejemplo 23, pues $23 - 6 = 17$ que es un número mayor que 14.

Video 5.1

En este video se explican mediante dos ejemplos, el concepto de inecuaciones.

5.1 Identificar si un número es solución de una inecuación dada

Para conocer si un número es o no solución de una inecuación dada, basta con sustituir ese número en la desigualdad y debe obtenerse una proposición verdadera.

Ejemplo 5.2

En la inecuación:

$$n - 14 > 72$$

Verifique si el 90 o el 84 podrían ser solución de esa inecuación.

Solución Note que esa inecuación se lee: "un número menos catorce es mayor que setenta y dos"

Al sustituir el 90 en el valor de la variable n, se obtiene que:

$$90 - 14 = 76$$

Dado que 76 es mayor que 72, se tiene una proposición verdadera, por lo que el 90 **sí** es solución de la inecuación.

Por otro lado, con al sustituir el 84 en el valor de la variable n, se obtiene que:

$$84 - 14 = 70$$

Dado que 70 es menor que 72, o sea, no es mayor como pide la inecuación, se tiene que el 84 **no** es solución de la inecuación.

Ejemplo 5.3

En la inecuación:

$$n + 56 < 122$$

Verifique si el 50 o el 91 podrían ser solución de esa inecuación.

Solución: Note que esa inecuación se lee: "un número más cincuenta y seis es menor que ciento veintidós"

Al sustituir el 50 en el valor de la variable n, se obtiene que:

$$50 + 56 = 106$$

Dado que 106 es menor que 122, se tiene una proposición verdadera, por lo que el 50 **sí** es solución de la inecuación.

Ahora, al sustituir el 91 en el valor de la variable n, se obtiene que:

$$81 + 56 = 137$$

Dado que 137 es mayor que 122, no menor como pide la inecuación, se tiene que el 91 **no** es solución de la inecuación.

5.2 Plantear problemas que involucren inecuaciones de primer grado

En situaciones de la vida, es necesario el planteo de inecuaciones que permiten obtener una respuesta a una problemática planteada.

Ejemplo 5.4

Para financiar sus estudios, Fernanda hace postres que vende a 1 500 colones cada uno. Ella debe hacer un pago de 45 000 colones este semestre y quiere que le sobre algún dinero. ¿Cuántos postres debe vender?

Solución: Se sabe que cada postre cuesta 1 500 colones, se denota x a la cantidad de postres que debe vender Fernanda. Como debe pagar 45 000 colones y se quiere que le sobre algún dinero se tiene como planteo la siguiente inecuación:

$$1\,500 \cdot x > 45\,000$$

Ejemplo 5.5

El Bono Proteger es una ayuda económica estatal que se dio por tres meses a quienes perdieron su empleo o se le redujo su jornada laboral debido a la pandemia COVID-19. El monto mensual fue de 125 000 colones (puede encontrar más información en esta **noticia** del periódico: La República.

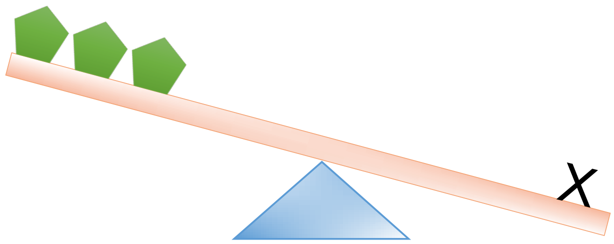
Si una familia consta de tres integrantes y sólo se recibe ese aporte mensual en la casa, si la distribución de ese dinero se hace de forma equitativa ¿cómo se puede representar el monto máximo que se puede gastar?

Solución: Suponiendo que sólo hay tres personas en el núcleo familiar. Lo que gasta cada uno, suponiendo que sea equitativo, no debe exceder en total los 125 000 colones del bono. Así se puede representar con la inecuación:

$$3 \cdot x < 125\,000$$

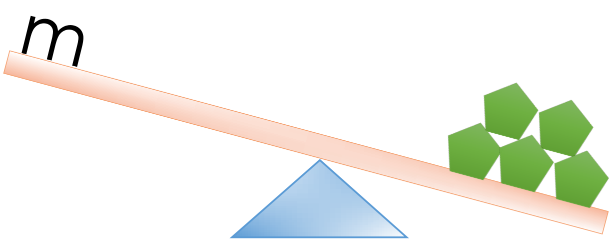
5.3 Práctica: inecuaciones

5.3.1 Observe las balanzas que se muestran y escriba la desigualdad correspondiente sabiendo que cada figura con forma pentagonal representa una unidad de masa. Se puede guiar por el siguiente ejemplo:

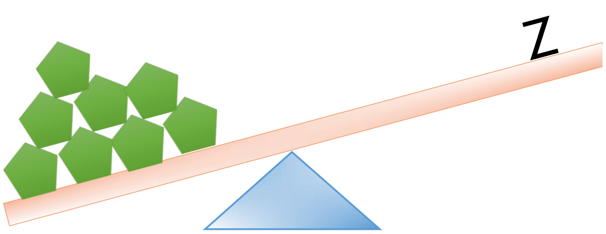


La inecuación es $x > 3$

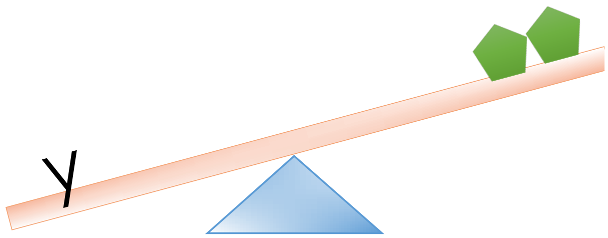
a)



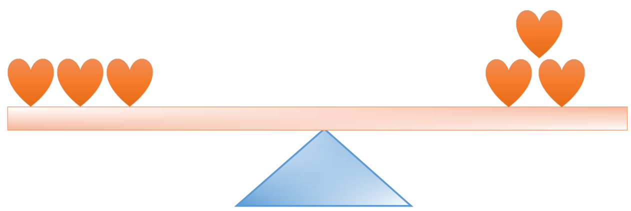
b)



c)



5.3.2 Resuelva el siguiente ejercicio, para el cual debe realizar lo que se le indica en cada instrucción, realizar el dibujo de la balanza y escribir la expresión algebraica que se obtiene. Suponga que cada corazón representa una unidad de masa. **Cada instrucción debe realizarla sobre la balanza que se obtuvo en cada paso anterior.**
Balanza inicial:



Expresión $3 = 3$

Indicaciones:

1) Sume una unidad al lado izquierdo de la balanza.
2) Reste dos unidades al lado derecho de la balanza.
3) Reste tres unidades al lado izquierdo de la balanza.
4) Sume 4 unidades al lado derecho de la balanza

5.3.3 Determine si el número que se indica es o no solución de la inecuación dada.

a. $y + 5 > 32$ $\quad y = 40$

b. $x \div 8 < 32$ $\quad x = 256$

c. $40 > z - 14$ $\quad z = 58$

5.3.4 Plantee una inecuación para cada uno de los problemas que se muestran e intente encontrar algún número que satisface la desigualdad planteada:

a) En la última Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares realizada en 2018-2019 se realizaron entrevistas en más de 7 000 viviendas.

   Fuente: **https://semanariouniversidad.com/pais/el-nuevo-consumo-de-los-hogares-100-000-menos-que-hace-5-anos/**

b) Con una altura de 3 820 metros, la máxima altitud del territorio costarricense se encuentra en el cerro Chirripó. Por tanto, si usted está escalando esa montaña se encuentra por debajo de esa altitud. Fuente: **https://www.chirripo.org/info/cerro-chirripo/**

Capítulo 6

Soluciones a las prácticas

Soluciones del Capítulo 1: Relaciones

Práctica: razones

1.2.1 Este ejercicio tiene múltiples soluciones, a continuación se muestra una de ellas:

a) El antecedente es mayor que el consecuente.

$$\begin{array}{r c} \text{Antecedente} \longrightarrow & 3 \\ \hline \text{Consecuente} \longrightarrow & 2 \end{array}$$

b) El antecedente es un número par y el consecuente un número impar.

$$\begin{array}{r c} \text{Antecedente} \longrightarrow & 8 \\ \hline \text{Consecuente} \longrightarrow & 3 \end{array}$$

c) El antecedente es un número primo que está entre 12 y 15; el consecuente es un múltiplo de 5.

$$\begin{array}{r c} \text{Antecedente} \longrightarrow & 13 \\ \hline \text{Consecuente} \longrightarrow & 15 \end{array}$$

d) El antecedente es el sucesor del consecuente.

$$\begin{array}{r c} \text{Antecedente} \longrightarrow & 9 \\ \hline \text{Consecuente} \longrightarrow & 8 \end{array}$$

e) El antecedente es el antecesor del consecuente.

$$\begin{array}{r} \text{Antecedente} \longrightarrow \\ \text{Consecuente} \longrightarrow \end{array} \dfrac{4}{5}$$

1.2.2 Se tiene:

	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5
Razón de mujeres entre hombres	$\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$	$\frac{14}{16} = \frac{7}{8}$	$\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$	$\frac{16}{16} = 1$	$\frac{16}{18} = \frac{8}{9}$
Significa que	En la 6-1, por cada cinco mujeres hay seis hombres.	En la 6-2, por cada siete mujeres hay ocho hombres.	En la 6-3, por cada cinco mujeres hay tres hombres.	En la 6-4, por cada mujer hay un hombre.	En la 6-5, por cada ocho mujeres hay nueve hombres.

1.2.3 A continuación, se muestra un cuadro resumen de cada una de las situaciones:

Situación	Razón	Significado
a)	$\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$	Por cada 4 mujeres en el equipo de natación, hay 3 hombres.
b)	$\frac{25}{50} = \frac{1}{2}$	El precio de un confite es la mitad del precio de dos confites.
c)	$\frac{150}{75} = \frac{2}{1}$	El total de animales es dos veces (el doble) de la cantidad de gallinas ponedoras.
d)	$\frac{7}{49} = \frac{1}{7}$	Lucas tomó la sétima parte de la cantidad de dulces que tomó Melissa.
e)	$\frac{27}{45} = \frac{3}{5}$	Por cada 3 horas que don Hugo trabajó la semana pasada, esta semana trabajó 5 horas.
f)	$\frac{3}{60} = \frac{1}{20}$	Por cada niño se compran 20 hojas blancas.

Práctica: proporciones

1.4.1 Se tiene que las dimensiones originales del afiche son 20 cm de largo y 13 cm de ancho. Si se desea duplicar el tamaño del afiche, se debe duplicar cada dimensión, de esta forma:

- El largo se duplica al multiplicar por 2:

$$2 \cdot 20 = 40$$

  Así, la nueva versión va a tener una dimensión de 40 cm de ancho.

- El ancho se duplica al multiplicar por 2:

$$2 \cdot 13 = 26$$

  Así, que la nueva versión va a tener una dimensión de 26 cm de ancho.

Se pueden establecer las relaciones largo / ancho, de la siguiente manera

Afiche original	**Nuevo afiche**
$\frac{20}{13}$	$\frac{40}{26}=\frac{20}{13}$

Por lo tanto, las nuevas dimensiones son 40 cm de ancho por 26 cm de largo.

1.4.2

a) Pareja 1:

$\frac{15}{20}$	$\frac{28}{21}$
Fracciones simplificadas:	
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$

Por lo tanto, dichas fracciones no representan una proporción, pues :

$$\frac{3}{4}\neq\frac{4}{3}$$

b) Pareja 2:

$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{8}$
Fracciones simplificadas:	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Por lo tanto, dichas fracciones sí representan una proporción, pues:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

De este modo, su constante de proporcionalidad es:

$$\frac{1}{2}$$

O sea, el antecedente de cada fracción equivale a la mitad de su respectivo consecuente.

c) Pareja 3:

$\frac{15}{36}$	$\frac{25}{65}$
Fracciones simplificadas:	
$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{13}$

Por lo tanto, dichas fracciones no representan una proporción, pues:

$$\frac{5}{12} \neq \frac{5}{13}$$

d) Pareja 4:

$\frac{8}{33}$	$\frac{16}{66}$
Fracciones simplificadas:	
$\frac{8}{33}$	$\frac{8}{33}$

Note que $\frac{8}{33}$ no se simplificó pues ya se encuentra en su forma canónica. Por lo tanto, dichas fracciones sí representan una proporción, pues:

$$\frac{8}{33} = \frac{8}{33}$$

De este modo, su constante de proporcionalidad es:

$$\frac{8}{33}$$

O sea, por cada ocho unidades del antecedente en cada fracción, su respectivo consecuente equivale a treinta y tres unidades.

Práctica: regla de tres

1.6.1 Note que el paquete A tiene 7 chocolates por 2 100 colones y el paquete B tiene 9 chocolates por 3 600 colones. Así:

a) Determine el precio de cada chocolate si se compra el paquete A:

$$\frac{\text{Precio total}}{\text{Cantidad de chocolates}} = \frac{2\,100}{7} = 300$$

Por lo tanto, el precio de cada chocolate del paquete A es de 300 colones.

b) Determine el precio de cada chocolate si se compra el paquete B.

$$\frac{\text{Precio total}}{\text{Cantidad de chocolates}} = \frac{3\,600}{9} = 400$$

Por lo tanto, el precio de cada chocolate del paquete B es de 400 colones.

c) ¿Cuál es la mejor opción entre los dos paquetes?

Es mejor comprar el paquete A pues cada chocolate cuesta menos que los chocolates del paquete B.

d) ¿Cuál será la cantidad de chocolates que debe tener el paquete B para que el precio por chocolate sea proporcional a los chocolates del paquete A?

$$\frac{\text{Precio paquete A}}{\text{Cantidad chocolates A}} = \frac{\text{Precio paquete B}}{\text{Cantidad chocolates B}}$$

$$\frac{2\,100}{7} = \frac{3\,600}{x}$$

$$x = \frac{\cancel{3\,600} \cdot 7}{\cancel{2\,100}} = \frac{36 \cdot \cancel{7}}{\cancel{21}} = \frac{\cancel{36} \cdot 1}{\cancel{3}} = \frac{12}{1} = 12$$

Por tanto, para que el precio del paquete B sea proporcional al paquete A, debe contener 12 chocolates.

1.6.2

1) $\frac{m}{5} = \frac{6}{4}$

$$m = \frac{\cancel{6} \cdot 5}{\cancel{4}}$$

$$m = \frac{3 \cdot 5}{2}$$

$$m = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

Por lo tanto, el valor de m es $\frac{15}{2} = 7{,}5$.

2) $\frac{1}{c} = \frac{8}{3}$

$$c = \frac{1 \cdot 3}{8}$$

$$c = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Por lo tanto, el valor de c es $\frac{3}{8} = 0{,}375$

3) $\frac{7}{4} = \frac{y}{2}$

$$y = \frac{7 \cdot \cancel{2}}{\cancel{4}}$$

$$y = \frac{7 \cdot 1}{2}$$

$$y = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

Por lo tanto, el valor de y es $\frac{7}{2} = 0{,}375$.

4) $\dfrac{2}{3} = \dfrac{b}{7}$

$$b = \frac{2 \cdot 7}{3} = \frac{14}{3}$$

Por lo tanto, el valor de b es $\dfrac{14}{3}$.

1.6.3 Para resolver el problema se puede establecer la siguiente regla de tres:

$$\frac{70 \text{ bolitas}}{4\,550 \text{ colones}} = \frac{95 \text{ bolitas}}{x}$$

$$x = \frac{\cancel{4\,550} \cdot 95}{\cancel{70}} = \frac{\cancel{455} \cdot 95}{\cancel{7}} = \frac{65 \cdot 95}{1} = 6\,175$$

Por tanto, el costo de comprar 95 bolitas es 6 175 colones.

Práctica: porcentajes

1.8.1 Se tiene:

Porcentual	Fraccionaria	Decimal
3 %	$\frac{3}{100}$	0,03
30 %	$\frac{30}{100}$	0,30
53 %	$\frac{53}{100}$	0,53
80 %	$\frac{80}{100}$	0,80
67 %	$\frac{67}{100}$	0,67
2 %	$\frac{2}{100}$	0,02
10 %	$\frac{10}{100}$	0,10

1.8.2 Para esta respuesta se sugiere una manera de descomposición de cantidades, sin embargo, cada estudiante debe encontrar la forma de descomponer que le sea más útil:

a) El 25 % de 500.

Esto significa la cuarta parte de 500:

$$\begin{array}{ccc} 500 = & 400 & +\ 100 \\ & \downarrow & \downarrow \\ & 100 & +25 \end{array}$$

Así, el 25 % de 500 corresponde a $100 + 25 = 125$.

b) El 50 % de 800.

Esto significa la mitad de 800:

$$\begin{array}{ccc} 800 = & 400 & +\,400 \\ & \downarrow & \downarrow \\ & 200 & +200 \end{array}$$

Así, el 50 % de 800 corresponde a $200 + 200 = 400$.

c) El 20 % de 1500.

Esto significa la quinta parte de 1500:

$$\begin{array}{ccc} 1\,500 = & 1\,000 & +\,500 \\ & \downarrow & \downarrow \\ & 200 & +100 \end{array}$$

Así, el 20 % de 1 500 corresponde a $200 + 100 = 300$.

d) El 10 % de 990.

Esto significa la décima parte de 990:

$$\begin{array}{ccc} 990 = & 900 & +\,90 \\ & \downarrow & \downarrow \\ & 90 & +9 \end{array}$$

Así, el 10 % de 990 corresponde a $90 + 9 = 99$.

e) El 50 % de 2 100.

Esto significa la mitad de 2 100:

$$\begin{array}{ccc} 2\ 100 = & 2\ 000 & +\ 100 \\ & \downarrow & \downarrow \\ & 1\ 000 & +50 \end{array}$$

Así, el 50 % de 2 100 corresponde a $1\ 000 + 50 = 1\ 050$.

f) El 25 % de 444.

Esto significa la cuarta parte de 444:

$$\begin{array}{cccc} 444 = & 400 & +\ 40 & +4 \\ & \downarrow & \downarrow & \\ & 1\ 000 & +10 & +1 \end{array}$$

Así, el 25 % de 444 corresponde a $100 + 10 + 1 = 111$.

1.8.3

a) El 25 % de 500:

$$\frac{25}{100} = \frac{x}{500}$$

$$x = \frac{25 \cdot \cancel{500}}{\cancel{100}} = \frac{25 \cdot 5}{1} = \frac{125}{1} = 125$$

b) El 70 % de 770:

$$\frac{70}{100} = \frac{x}{770}$$

$$x = \frac{\cancel{70} \cdot \cancel{770}}{100} = \frac{7 \cdot 77}{1} = 539$$

c) El 5 % de 7900:

$$\frac{5}{100} = \frac{x}{7900}$$

$$x = \frac{5 \cdot \cancel{7900}}{\cancel{100}} = \frac{5 \cdot 79}{1} = 395$$

d) El 40 % de 90:

$$\frac{40}{100} = \frac{x}{90}$$

$$x = \frac{\cancel{40} \cdot \cancel{90}}{\cancel{100}} = \frac{4 \cdot 9}{1} = 36$$

e) El 50 % de 1350:

$$\frac{50}{100} = \frac{x}{1350}$$

$$x = \frac{\cancel{50} \cdot \cancel{1350}}{\cancel{100}} = \frac{5 \cdot 135}{1} = 675$$

1.8.4

a) El 10 % de 4490 corresponde a 130. **Falso**: pues el resultado sería 449.

b) El 25 % de 600 corresponde a 150. **Verdadero**.

c) El 10 % de 8 950 corresponde a 895. **Verdadero**.

d) El 50 % de 1 300 corresponde a 650. **Verdadero**.

e) El 90 % de 1 990 corresponde a 1790. **Falso**: pues el resultado sería 1 791.

1.8.5

a) Primero, se debe determinar el total del precio de los dos juguetes:

$$15\,400 + 28\,750 = 44\,150$$

Luego, el 13 % de 44 150 se puede calcular al multiplicar:

$$\frac{13}{\cancel{100}} \cdot \cancel{44\,150} = \frac{13}{10} \cdot 4415 = \frac{13}{2} \cdot 883 = \frac{11\,479}{2} = 5\,739,5$$

Por tanto, el precio final que pagó fue de $44\,150 + 5\,739,5 = 49\,889,5$ colones.

b) El 5 % de 24 580 se puede calcular al multiplicar

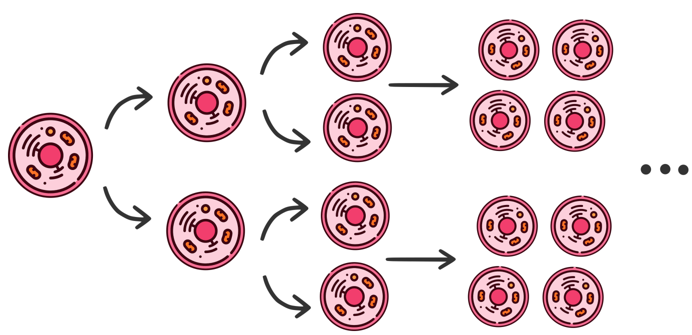
$$\frac{5}{\cancel{100}} \cdot \cancel{24\,580} = \frac{5}{\cancel{10}} \cdot \cancel{2\,458} = \frac{5}{5} \cdot 1\,229 = 1 \cdot 1\,229 = 1\,229$$

Por tanto, el precio final que pagó fue de $24\,580 - 1\,229 = 23\,351$ colones.

Soluciones del Capítulo 2: Sucesiones

Práctica: sucesiones

2.1.1 Piense primero cómo se divide una sola célula. En la siguiente imagen, se puede notar cómo se divide la célula en tres ocasiones.



Sin embargo, el ejercicio dice que cada célula se debe dividir 7 veces, note que la cantidad de células se duplica en cada proceso, es decir, 1, 2, 4, 8, etc. Entonces, la cantidad de células en la séptima ocasión se calcula de la siguiente forma:

Proceso de mitosis	**Cantidad de células**
0	1
1	$2 \cdot 1 = 2$
2	$2 \cdot 2 = 4$
3	$2 \cdot 4 = 8$
4	$2 \cdot 8 = 16$
5	$2 \cdot 16 = 32$
6	$2 \cdot 32 = 64$
7	$2 \cdot 64 = 128$

Es decir, una célula después de 7 mitosis, va a engendrar 128 células. Se puede notar que el ejercicio indica que al inicio hay 3 células. Por tanto la cantidad total de células está dada por

$$3 \cdot 128 = 384$$

2.1.2 Para saber cuál fue la diferencia entre la producción de ambas máquinas, se debe contar cuánto tiempo pasó desde las 8:00 am hasta las 11:56 am

8:00 a 8:59	9:00 a 9:59	10:00 a 10:59	11:00 a 11:56	Total
60 min	60 min	60 min	56 min	236 min

Se sabe que la máquina 1 y la máquina 2 producen 4 y 3 artículos por minuto respectivamente, entonces se puede calcular la cantidad de productos fabricados en 236 minutos.

Productos en 236 min	
Máquina 1	$4 \cdot 236 = 944$
Máquina 2	$3 \cdot 236 = 708$

De esta forma al calcular la diferencia (resta) entre las cantidades se obtiene:

$$944 - 708 = 236$$

Es decir, la diferencia entre la producción de la máquina 1 y la máquina 2 fue de 236 artículos.

2.1.3

a) Analice la medida de la cuerda resultante mediante una tabla

Corte número	**Tamaño de cuerda**
0	200 cm
1	100 cm
2	50 cm
3	25 cm
4	12,5 cm
5	6,25 cm

b) Note que el proceso se basa en dividir la cuerda resultante justo a la mitad “n” cantidad de veces. Es decir

Corte número	**Tamaño de cuerda**	**Resultado**
0	200	200 cm
1	$\frac{200}{2} = 200 \cdot \frac{1}{2}$	100 cm
2	$\frac{\frac{200}{2}}{2} = 200 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 200 \cdot \frac{1}{2^2}$	50 cm
3	$\frac{\frac{\frac{200}{2}}{2}}{2} = 200 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 200 \cdot \frac{1}{2^3}$	25 cm
4	$200 \cdot \frac{1}{2^4}$	12,5 cm
5	$200 \cdot \frac{1}{2^5}$	6,25 cm

Así, para calcular el tamaño $t(n)$ de la cuerda resultante al aplicarle n cortes, se utiliza la siguiente operación

$$t(n) = 200 \cdot \frac{1}{2^n}$$

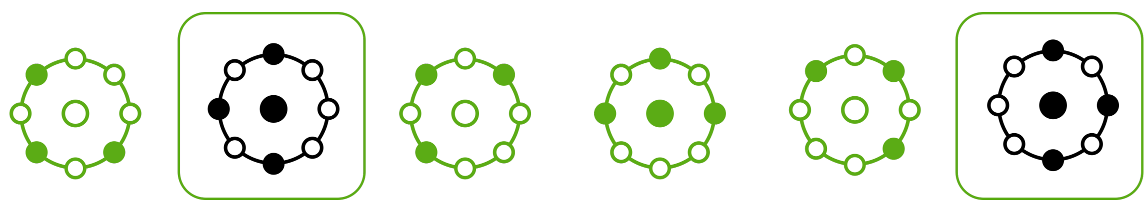
2.1.4 Note que la imágenes se pueden partir de forma vertical de modo que quede un número y su reflejo. De esta forma, las figuras que completan el patrón son las siguientes:

2.1.5 Si se aplica la regla que el ejercicio nos indica, se obtiene lo siguiente:

Término	Número
1	$3 \cdot 1^2 = 3$
2	$3 \cdot 2^2 = 12$
3	$3 \cdot 3^2 = 27$
4	$3 \cdot 4^2 = 48$
5	$3 \cdot 5^2 = 75$
6	$3 \cdot 6^2 = 108$
7	$3 \cdot 7^2 = 147$

De esta forma, la diferencia entre el quinto y el sétimo término es $147 - 75 = 72$.

2.1.6 Observe que la figura gira 45° en sentido horario y además, la bolita del centro se colorea de blanco en las posiciones impares mientras que las coloreadas de verde aparecen en las posiciones pares. Así se tiene:



2.1.7

a_n	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
Note que los números aumentan en dos unidades, además, es decir, $a_n = 2\cdot n$	2	4	$2\cdot 3 = 6$	8	10
$a_n = 3n+1$	$3\cdot 1+1$ $=4$	$3\cdot 2+1$ $=7$	$3\cdot 3+1$ $=10$	$3\cdot 4+1$ $=13$	$3\cdot 5+1$ =16
Note que $9=3\cdot 3...$ $27=3\cdot 3\cdot 3...$ Es decir, $a_n=3^n$	3	9	27	81	$3^5=243$
Note que el denominador tiene la forma 2,4,8,... Es decir, son potencias de 2. $a_n = \frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$
$a_n = \frac{n}{4n-1}$	$\frac{1}{4\cdot 1-1}$ $=\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4\cdot 2-1}$ $=\frac{2}{7}$	$\frac{3}{4\cdot 3-1}$ $=\frac{3}{11}$	$\frac{4}{4\cdot 4-1}$ $=\frac{4}{15}$	$\frac{5}{4\cdot 5-1}$ $=\frac{5}{19}$
$a_n = 2^n - n$	$2^1-1=1$	$2^2-2=2$	$2^3-3=5$	$2^4-4=12$	$2^5-5=27$

Soluciones del Capítulo 3: Representación

Práctica: representación algebraica y en el plano de coordenadas

3.3.1

a) Se puede observar que en los puntos (5,20), (10, 40), (15, 60) y (20, 80) la coordenada y es cuatro veces la coordenada x. Así:

- Para el punto (5,20) se cumple que $20 = 4 \cdot 5$.
- Para el punto (10,40) se cumple que $40 = 4 \cdot 10$.
- Para el punto (15,60) se cumple que $60 = 4 \cdot 15$.
- Para el punto (20,80) se cumple que $80 = 4 \cdot 20$.

b) Se puede observar que en los puntos (10,1), (20, 2), (30, 3) y (40, 4) la coordenada y es la décima parte de la coordenada x. Así:

- Para el punto (10,1) se cumple que $1 = 10 \div 10$
- Para el punto (20,2) se cumple que $2 = 20 \div 10$
- Para el punto (30,3) se cumple que $3 = 30 \div 10$
- Para el punto (40,4) se cumple que $4 = 40 \div 10$

3.3.2

a) Note que se pide el acumulado de horas. Así, para el caso de Roberto, se tiene:

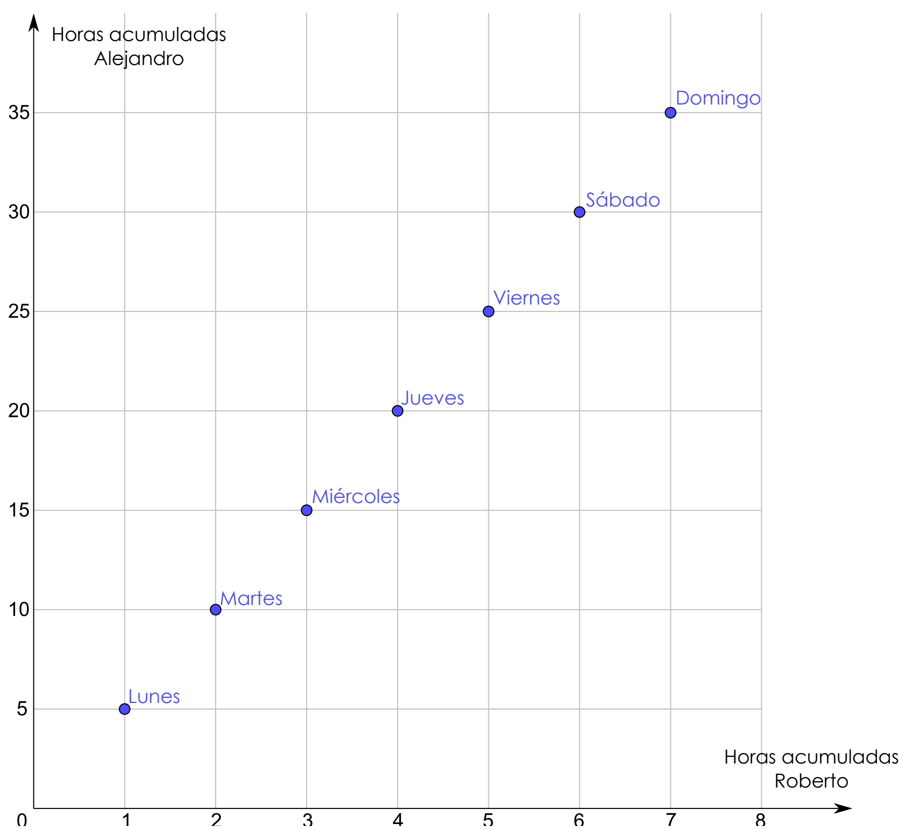
- El día lunes habrá dedicado 1 hora.
- El día martes habrá acumulado $1 + 1 = 2$ horas.
- El día miércoles habrá acumulado $2 + 1 = 3$ horas.
- El día jueves habrá acumulado $3 + 1 = 4$ horas.
- El día viernes habrá acumulado $4 + 1 = 5$ horas.

Si se aplica la misma lógica para el caso de Alejandro se tendrá:

	Acumulado de horas frente a la computadora	
Día de la semana	**Roberto**	**Alejandro**
lunes	1	5
martes	2	10
miércoles	3	15
jueves	4	20
viernes	5	25

b) De lunes a viernes Alejandro dedica en total un acumulado de 25 horas a jugar en la computadora. Si se le agregan las 5 horas del sábado y las 5 horas del domingo, en total durante la semana habrá dedicado 35 horas a jugar con su computadora, lo cual puede no ser saludable.

c)

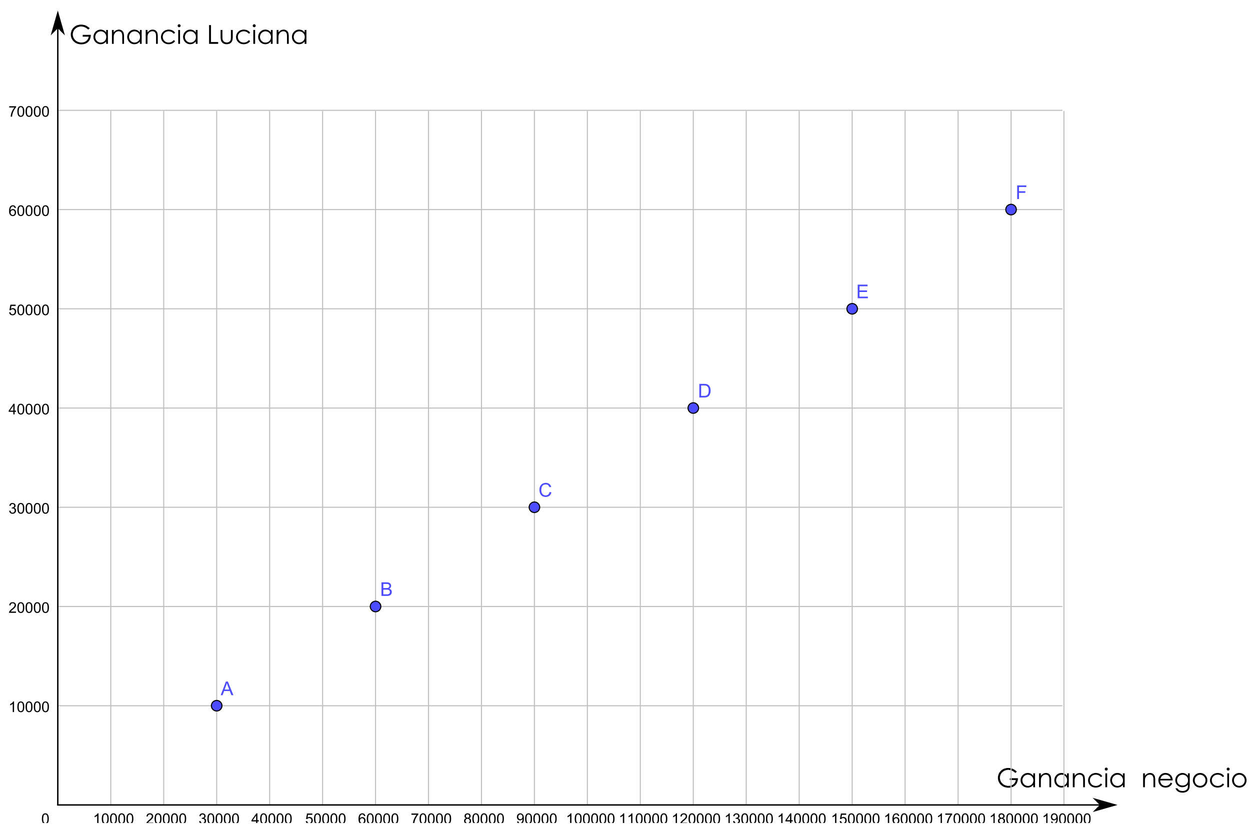


3.3.3

a)

	Ganancia en colones	
Tipo de mueble	**Para el negocio**	**Comisión para Luciana**
A. Estante	30 000	10 000
B. Mesas de noche	60 000	20 000
C. Sillón individual	90 000	30 000
D. Sillón doble	120 000	40 000
E. Alacena	150 000	50 000
F. Cama	180 000	60 000

b)



Soluciones del Capítulo 4: Ecuaciones

Práctica: ecuaciones

4.3.1

a) Se tiene que $54 \neq 38 + 12$ pues $38 + 12 = 50$, por tanto, $x = 38$ **no** es solución de la ecuación dada.

b) Se tiene $104 \div 7 = 14 \neq 15$, por tanto, $y = 104$ **no** es solución de la ecuación dada.

c) Se tiene que $110 - 23 = 87$, por tanto, $z = 110$ **sí** es solución de la ecuación dada.

d) Se tiene que $196 - 101 = 95$, por tanto, $x = 101$ **sí** es solución de la ecuación dada.

e) Se tiene que $23 = 115 \div 5$, por tanto, $x = 5$ **sí** es solución de la ecuación dada.

f) Se tiene que $47\cdot = 384 \neq 376$, por tanto, $z = 8$ **no** solución de la ecuación dada.

4.3.2

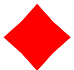
a) ★ $\cdot\ 8 = 128$. ¿Qué número multiplicado por 8 me da como resultado 128? La respuesta es 16, pues $16 \cdot 8 = 128$.

b) ♥ $\div\ 6 = 31$. ¿Qué número al dividirlo por 6 me da como resultado 31? La respuesta es 186, pues $186 \div 6 = 31$.

c) ● $+\ 453 = 815$. ¿Qué número al sumarlo con 453 me da como resultado 815? La respuesta es 362, pues $362 + 453 = 815$.

d) ■ $-\ 345 = 607$. ¿Qué número al restarle 345 me da como resultado 607? La respuesta es 952, pues $952 - 345 = 607$.

e) $459 -$ ⬟ $= 187$. ¿Qué número debo restarle a 459 para obtener un resultado de 187? La respuesta es 272, pues $459 - 272 = 187$.

f) $891 \div$  $= 297$. ¿Por cual número debo dividir el 891 para obtener como resultado 297? La respuesta es 3, pues $891 \div 3 = 297$.

4.3.3

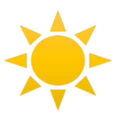
a) $15 + d = 43$

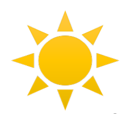
b) $y + 23 = 58$

c) $107 + v = 222$

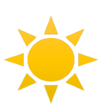
Recuerde que la suma es conmutativa, por tanto, el orden en que pone los sumandos no afecta el resultado.

4.3.4

a) El valor del corazón es 21 pues  +  tiene que dar el mismo resultado que 3 veces . Como se sabe que el sol tiene un valor de 12, 3 veces 12 da como resultado 36, por tanto, como el pentágono tiene un valor de 15, se debe preguntar ¿cuánto se le debe sumar a 15 para obtener 36? Y el resultado es 21.

b) El valor del sol es 12 pues pues se tiene que es  +  es igual a 5 veces el corazón. Como se sabe que el corazón tiene un valor de 3, cinco veces 3 da como resultado 15, por tanto, se debe preguntar ¿cuánto se le debe a 3 para obtener 15? Y el resultado es 12.

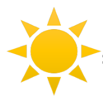
4.3.5 Con esta igualdad  +  =2 se puede deducir que cada corazón tiene un valor de 1.

De esta igualdad  $-$  = 2 se puede deducir, si el corazón vale 1, el sol tiene que valer 3 para que la igualdad sea cierta.

Se tiene que  = , por tanto, la estrella tiene el mismo valor que el sol que valía 3.

Por último se tiene que  +  = 16, con esta igualdad y sabiendo que la estrella tiene un valor de 3, la luna tiene que valer 13 para que lo que se afirma sea verdadero.

En resumen:

 = 1  = 3  = 3 y  = 13

4.3.6

a) Como el lote es cuadrangular, el área se halla con la fórmula $l \cdot l = 576$, donde l corresponde al lado del lote. Esa sería la ecuación que se plantea para resolver el problema. Si se quiere hallar la solución se debe preguntar ¿qué número multiplicado por él mismo da como resultado 576? La respuesta es 24, por tanto, cada lado del lote mide 24 metros.

b) La ecuación corresponde a $12 - 8 = x$, donde x es la cantidad de metros disponibles. Si de los 12 metros ya se usó 8 metros, eso significa que me quedan aún 4 metros disponibles.

c) Sea x a la edad de Ale, pues ya se sabe que Gaby tiene 14 años. Entonces la ecuación que permite resolver el problema es $14 + x = 26$ y eso nos lleva a preguntarnos ¿qué número se debe sumar a 14 para obtener 26? El resultado es 12. Por tanto, Ale tiene 12 años.

d) Se debe repartir 168 confites entre 14 niños, por tanto, la ecuación es $168 \cdot 14 = x$, donde x es la cantidad de confites en cada bolsa. Al realizar la división se obtiene 12. Por tanto, a cada niño le tocan 12 confites en las bolsitas.

Soluciones del Capítulo 5: Inecuaciones

Práctica: inecuaciones

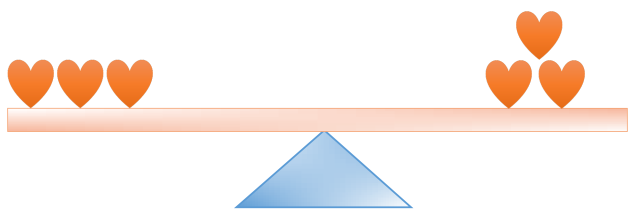
5.3.1

a) $m < 5$ ó $5 > m$

b) $8 > z$ ó $z < 8$

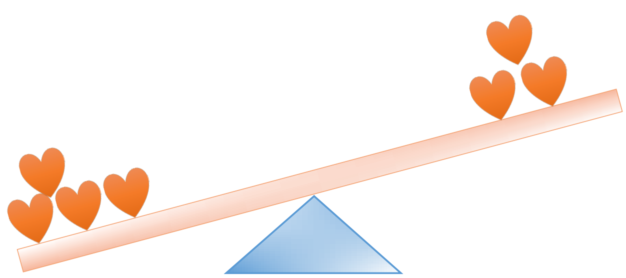
c) $y > 2$ ó $2 > y$

5.3.2 Tomando como base la siguiente balanza, tenemos:



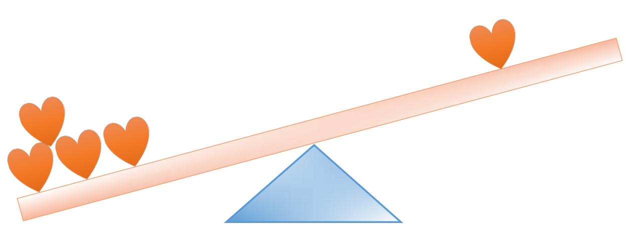
Expresión $3 = 3$

1) Sume una unidad al lado izquierdo de la balanza.



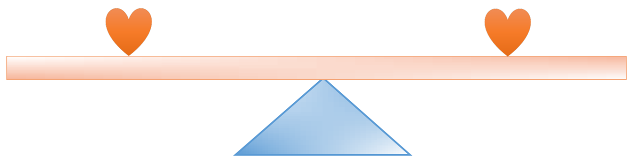
Expresión $4 > 3$

2) Reste dos unidades al lado derecho de la balanza.



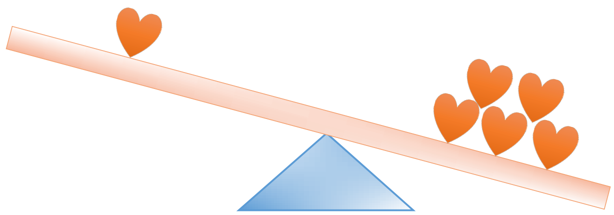
Expresión $4 > 1$

3) Reste tres unidades al lado izquierdo de la balanza.



Expresión $1 = 1$

4) Sume 4 unidades al lado derecho de la balanza



Expresión $1 < 5$

5.3.3

a) Se sustituye $y = 40$ en la inecuación y se obtiene $40 + 5 > 32$, lo cual equivale a $45 > 32$ y es verdadeo. Por lo tanto, $y = 40$ **sí** es solución.

b) Se sustituye $x = 256$ en la inecuación y se obtiene $256 \div 8 < 32$, lo cual equivale a $32 < 32$ y es falso. Por lo tanto, $x = 256$ **no** es solución.

c) Se sustituye $z = 58$ en la inecuación y se obtiene $40 > 58 - 14$, lo cual equivale a $40 > 44$ y es falso. Por lo tanto, $z = 58$ **no** es solución.

5.3.4

a) Se realizaron entrevistas en más de 7 000 viviendas, por tanto, si se denota "e" a las entrevistas se tiene que $e > 7\,000$. Cualquier número mayor que 7 000 sería solución de esa inecuación, por ejemplo 7015 entrevistas.

b) Si se denota x a la altura a la que se encuentra al escalar el cerro Chirripó se tiene que $x < 3\,820$. Cualquier número menor a 3 820 satisface esa inecuación, por ejemplo 2 400.