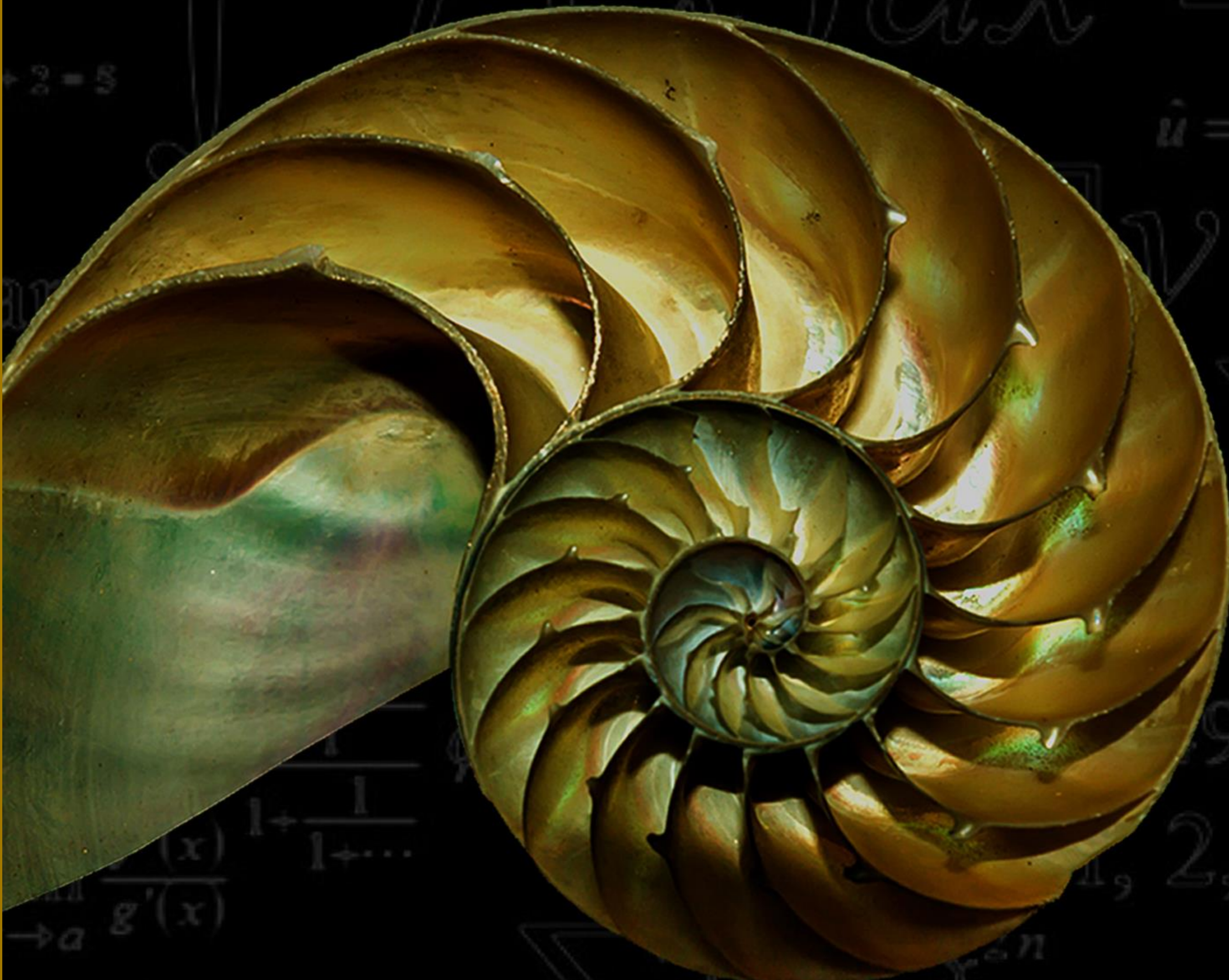
Fundamentos de Matemática I



Compilación de teoría y ejercicios

Reiman Acuña Chacón
Alcides Astorga Morales
Jeffrey Chavarría Molina
Marco Gutiérrez Montenegro
Edwin Quesada Solano
Greivin Ramírez Arce
Bryan Ramírez Obando
Natalia Rodríguez Granados
Giovanni Sanabria Brenes

Reiman Acuña Chacón
Alcides Astorga Morales
Jeffrey Chavarría Molina
Marco Gutiérrez Montenegro
Edwin Quesada Solano
Greivin Ramírez Arce
Bryan Ramírez Obando
Natalia Rodríguez Granados
Giovanni Sanabria Brenes

Compilación de Teoría y Ejercicios

Fundamentos de Matemática I

2025

Revista digital Matemática Educación e Internet (https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/).
Correo Electrónico: reiacuna@itcr.ac.cr
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Apdo. 159-7050, Cartago
Teléfono (506) 25502225.

Acuña Chacón, R., Astorga Morales, A., Chavarría Molina, J., Gutiérrez Montenegro, M.,
Quesada Solano, E., Ramírez Arce, G., Ramírez Obando, B., Rodríguez Granados, N., Sanabria Brenes, G.
Fundamentos de Matemática I. 1ra ed.
– Escuela de Matemática,Instituto Tecnológico de Costa Rica. 2025.
339 pp.
ISBN Obra Independiente: 978-9930-617-89-2
1. Demostración de implicaciones.
2. El conjunto de los números reales.
3. El conjunto de los números complejos.
4. Expresiones algebraicas.
5. Ecuaciones algebraicas.
6. Inecuaciones.

Revista digital
Matemática, Educación e Internet.
https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/.

Citar como:
Acuña Chacón, R., Astorga Morales, A., Chavarría Molina, J., Gutiérrez Montenegro, M., Quesada Solano, E., Ramírez Arce, G., Ramírez Obando, B., Rodríguez Granados, N., Sanabria Brenes, G. (2024). *Fundamentos de Matemática*. Revista digital Matemática, Educación e Internet . https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/. ISBN 978-9930-617-89-2.

Índice

Prólogo

Este libro está dedicado a los fundamentos de la matemática, una disciplina que no solo subyace en el corazón de todas las ciencias naturales, sino que también constituye la base de nuestro razonamiento lógico cotidiano. A lo largo de estas páginas, se realiza una exploración rigurosa de conceptos esenciales como las demostraciones de implicaciones, el conjunto de los números reales, el conjunto de los números complejos y el tratamiento de expresiones y ecuaciones algebraicas.

Nuestro objetivo es proporcionar una introducción accesible a estos temas, garantizando que el lector desarrolle una comprensión profunda y un aprecio por la estructura lógica de la matemática. Cada capítulo ha sido cuidadosamente estructurado para ofrecer una exposición progresiva de los temas, acompañada de ejemplos que ilustran tanto las aplicaciones prácticas como las teóricas de los conceptos tratados.

Este texto está diseñado tanto para estudiantes que se inician en los estudios matemáticos como para aquellos que desean consolidar y profundizar sus conocimientos. Se han incluido ejercicios diseñados para que el lector aplique lo aprendido, promoviendo así un aprendizaje activo y reflexivo.

Confiamos en que este libro se convertirá en un recurso valioso para entender los principios fundamentales del pensamiento matemático y en una herramienta esencial para quienes se dedican al estudio serio de esta disciplina.

Cartago, 2025 — LOS AUTORES

1 — Demostración de Implicaciones

1.1 Introducción

Las demostraciones, consideradas problemas de conclusión conocida, engendran en el estudiante una nueva concepción de matemática muy distinta a la de secundaria. En esta nueva concepción se introducen conceptos desconocidos en su mayoría: axiomas, teoremas, definiciones entre otros; sin dejar de lado la práctica de habilidades como conjeturar, realizar un contraejemplo, inducir, deducir, justificar y generalizar.

El éxito surge, sin dudas, en proporción al aprendizaje y desarrollo de éstas habilidades. Por ende, es importante que el estudiante se eduque en la forma de articular sus pensamientos para resolver un problema de conclusión conocida, y una forma de lograrlo es mediante una comprensión adecuada de los métodos de demostración.

Generalmente, la enseñanza de la demostración de una implicación se desarrolla de dos maneras:

1. **Desde la lógica matemática:** Usando conectivas lógicas, las tablas de verdad, las leyes de la lógica, las inferencias lógicas y, posteriormente, la demostración de proposiciones de la forma
$$H \Rightarrow C$$
Ejemplo de ello son las proposiciones
   (a) Si $A \subset B$ entonces $A \cap B = A$.
   (b) Si a y b son números consecutivos entonces ab es par.
2. **Desde la lógica intuitiva:** Se recurre a una interpretación intuitiva del implica, en donde se le enseña al estudiante que para demostrar teoremas de la forma
$$H \Rightarrow C$$

se asume la hipótesis H y se utiliza junto con axiomas, definiciones y teoremas demostrados para deducir la conclusión C. Aquí es común introducir la demostración junto con la estructura de campo totalmente ordenado de $\mathbb{R}$ o con la teoría de conjuntos.

Para esquematizar esto, se presentan los métodos de demostración por medio de pequeñas estructuras axiomáticas, para evitar las dificultades tradicionales de esbozar toda una teoría y hacer indistiguible el proceso de demostrar junto a esta. De este modo, la presentación siguiente se realizará desde la lógica matemática. **Encomendamos al lector a repasar las reglas de inferencia lógica y el uso de tablas de verdad.**

1.2 ¿Cómo demostrar que $\mathbf{H} \to \mathbf{C}$ es verdadero?

Observe la tabla de verdad del implica

H	C	$H \to C$	
V	V	V	
V	F	F	(*)
F	V	V	
F	F	V	

Table 1.1: Tabla del Implica

Si se quiere que $H \Rightarrow C$ sea verdadero , basta probar el caso (*) no se cumple. Es decir, es suficiente demostrar si H es verdadero entonces se puede deducir que C es verdadero y por lo tanto no se puede dar el caso en que $H \Rightarrow C$ sea falso. De lo anterior, parece razonable denominar a H **hipótesis** (proposición cuyo valor de verdad se asume) y a C **conclusión** (proposición cuyo valor de verdad se desea averiguar). Si por el contrario a partir de H y de otras proposiciones verdaderas de la teoría se deduce $\neg C$ entonces $H \Rightarrow C$ es una contingencia y no una falacia.

En un proceso de demostración de $H \Rightarrow C$ se utiliza además de H otras "hipótesis" que no son mencionadas, las cuales pueden ser **axiomas** o **teoremas**.

De esta manera se concluye que para demostrar una implicación, debe asumirse a veracidad de la hipótesis y se deduce que la conclusión es verdadera. Esta conclusión se debe evidenciar en la demostración de implicaciones:

Teorema: $H \Rightarrow C$

Prueba
Hipótesis: H se asume
H.q.m. (Hay que mostrar): C se deduce

Desarrollo de la deducción de C a partir de H

La manera en que se realice la deducción de C a partir de H obedece a un método de demostración, por el cual entenderemos a un modelo a seguir para resolver el problema de la prueba. Desde este enfoque no se considera a la contrapositiva como un método de demostración de implicaciones, sino como una herramienta que permite transformar el problema. El uso de la contrapositiva en la demostración sigue el siguiente modelo:

Teorema: $H \Rightarrow C$

Prueba
Utilizando la contrapositiva el teorema es equivalente a

$$\neg C \Rightarrow \neg H$$

Por lo tanto se procede a demostrar esta proposición
Hipótesis: $\neg C$ se asume
H.q.m.: $\neg H$ se deduce

Desarrollo de la deducción de $\neg H$ a partir de $\neg C$

Como se observa, la contrapositiva transforma la implicación en otra implicación, donde la deducción de la conclusión a partir de la hipótesis se debe realizar utilizando algunos de los métodos de demostración

1.2.1 Método Directo

En este método se parte de que H es verdadero y por medio de las reglas de inferencias, leyes de la lógica, axiomas, definiciones o teoremas se deduce que C es verdadero. Un modelo para este método es

Hipótesis: H
H.q.m.: C

	Supongamos H verdadero	H se asume verdadero
1)	$\Rightarrow C_1$ verdadero	(Por Teorema, Definición, Axioma...)
2)	$\Rightarrow C_2$ verdadero	(Por Teorema, Definición, Axioma...)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n)	$\Rightarrow C_n$ verdadero	(Por Teorema, Definición, Axioma...)
$n+1$)	$\Rightarrow C$ verdadero	(Por Teorema, Definición, Axioma...)

$\therefore C$ verdadero

Notas

1. Note que en realidad, a partir de los teoremas, definiciones o axiomas, entre otros, se tienen las siguientes implicaciones tautológicas:

$$\begin{array}{cc} 1) & H \Rightarrow C_1 \\ 2) & (H \wedge C_1) \Rightarrow C_2 \\ \vdots & \vdots \\ n+1) & (H \wedge C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \Rightarrow C \end{array}$$

Al asumir que H es verdadero, aplicando las reglas de inferencia (*Modus Ponens* y *Adjunción*) se tiene que C es verdadero. En efecto, si

$$H \text{ es verdadero} \tag{1.1}$$

por *Modus Ponens* a (1.1) y (Paso 1) se tiene que

$$C_1 \text{ es verdadero}$$

Por *Adjunción*, se tiene que

$$(H \wedge C_1) \text{ es verdadero} \tag{1.2}$$

y nuevamente por *Modus Ponens* a (1.2) y (Paso 2) se tiene que

$$C_2 \text{ es verdadero}$$

El proceso de deducción continúa hasta llegar a que C es verdadero.

2. En el modelo, cada deducción es conveniente justificarla, indicando las premisas, reglas, axiomas o teoremas en que se basó.
3. **Deben utilizarse todos los axiomas, en caso de que no se haga mención de ningún teorema previo.**

Ejemplo 1.1

Sea A un conjunto de números reales que cumple los siguientes axiomas:

$$\begin{array}{lc} \text{Axioma } 1) & 3 \in A \\ \text{Axioma } 2) & (x \in A) \Rightarrow (3x+1) \in A \\ \text{Axioma } 3) & (x \in A) \wedge (y \in A) \Rightarrow (x+y) \in A \end{array}$$

Pruebe los siguientes teoremas
Teorema 1: Si $7 \in A$ entonces $25 \in A$.
Teorema 2: Si $2 \in A$ entonces $27 \in A$.

Prueba: Utilizaremos el método directo para demostrarlos

Demostración del Teorema 1

Hipótesis: $7 \in A$
H.q.m.: $25 \in A$

1)	$7 \in A$	Se asume verdadero
2)	$\Rightarrow 3 \cdot 7 + 1 = 22 \in A$	(Axioma2)
3)	$\Rightarrow (22 \in A) \wedge (3 \in A)$	(Adjunción del Axioma 1 al Paso 2)
4)	$\Rightarrow 25 \in A$	(Axioma 3)

$\therefore 25 \in A$ es verdadero

Demostración del Teorema 2

Hipótesis: $2 \in A$
H.q.m.: $27 \in A$

1)	$2 \in A$	Se asume verdadero
2)	$\Rightarrow 3 \cdot 2 + 1 = 7 \in A$	(Axioma 2)
3)	$\Rightarrow 25 \in A$	(Teorema 1 con base en el Paso 2)
4)	$\Rightarrow (25 \in A) \wedge (2 \in A)$	(Adjunción del Paso 3 al Paso 1)
5)	$\Rightarrow 27 \in A$	(Axioma 3)

$\therefore 27 \in A$ es verdadero

1.2.2 Contradicción

Este método sigue el siguiente modelo

Hipótesis: H (se asume verdadera **pero no se usa**)
H.q.m.: C

	$\neg C$ es verdadero	Supongamos, por contradicción, que $\neg C$ es verdadero
1)	$\Rightarrow I_1$ verdadero	(Por Teorema, Definición, Axioma...)
2)	$\Rightarrow I_2$ verdadero	(Por Teorema, Definición, Axioma...)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n)	$\Rightarrow I_n$ verdadero	(Por Teorema, Definición, Axioma...)
$n+1$)	$\Rightarrow \neg H$ verdadero	(Por Teorema, Definición, Axioma...)

$\therefore \neg H$ verdadero. **Pero** H **se asume verdadero**, por lo que se llega a una contradicción[a]. Por lo tanto, lo supuesto ($\neg C$) es falso, es decir C es verdadero.

[a] simbolizada mucha veces por "$\Rightarrow\Leftarrow$´´

Para entender el uso del método de contradicción, tomemos en cuenta el siguiente ejemplo, siguiendo la misma estructura del método directo

Ejemplo 1.2

Sea A un conjunto de números reales que cumple los siguientes axiomas:

$$\text{Axioma 1)} \quad 5 \in A$$
$$\text{Axioma 2)} \quad (x \in A) \wedge (y \in A) \Rightarrow (x+y) \in A$$

Pruebe los siguientes proposiciones
Proposición 1: $13 \notin A \Rightarrow 4 \notin A$.
Proposición 2: Si $(3x-6) \notin A$ entonces $(x \notin A \vee -11 \notin A)$.

Prueba: Utilizaremos el método de contradicción para demostrarlos

Demostración de la Proposición 1

Hipótesis: $13 \notin A$
H.q.m.: $4 \notin A$

1)	$4 \in A$	Se asume verdadero (Suposición por contradicción[a])
2)	$\Rightarrow (4 \in A) \wedge (4 \in A)$	(Idempotencia al Paso 1)
3)	$\Rightarrow 4+4 = 8 \in A$	(Axioma 2)
4)	$\Rightarrow (8 \in A) \wedge (5 \in A)$	(Adjunción del Paso 3 con el Axioma 1)
5)	$\Rightarrow 8+5 = 13 \in A$	(Axioma 2)

$\therefore$ $13 \in A$ es verdadero. $(\Rightarrow\Leftarrow)$ Ya que contradice la hipótesis. Por lo tanto, lo supuesto es falso, es decir $4 \notin A$.

Demostración de la Proposición 2

Hipótesis: $(3x-6) \notin A$
H.q.m.: $x \notin A \vee -11 \notin A$

1)	$x \in A \wedge -11 \in A$	Se asume verdadero (Suposición por contradicción[b])
2)	$2x \in A \wedge -11 \in A$	(Axioma 2 con Idempotencia)
3)	$3x \in A \wedge -11 \in A$	(Axioma 2 aplicados a Pasos 1 y 2)
4)	$\Rightarrow (3x-11) \in A$	(Axioma 2 al Paso 3)
5)	$\Rightarrow (3x-11) \in A \wedge 5 \in A$	(Adjunción del Axioma 1 con Paso 5)
6)	$\Rightarrow (3x-6) \in A$	(Axioma 2 al Paso 5)

$\therefore$ $(3x-6) \in A$ es verdadero. $(\Rightarrow\Leftarrow)$ Ya que contradice la hipótesis. Por lo tanto, lo supuesto es falso, es decir $x \notin A \vee -11 \notin A$.

[a] **Negación:** $\neg(4 \notin A) = 4 \in A$
[b] **Ley de Morgan:** $\neg(x \notin A \vee -11 \notin A) = \neg(x \notin A) \wedge \neg(-11 \notin A) = x \in A \wedge -11 \in A$

1.2.3 Reducción al Absurdo

Este método suele ser confundido con el método de contradicción. La diferencia importante, es que aquí **si** se utiliza la hipótesis (siempre se asume verdadera) y **se llega a una contradicción con alguno de los axiomas, teoremas, u otras proposiciones de naturaleza verdadera** (F_0). Cuando se realiza una prueba utilizando reducción al absurdo se suele seguir el siguiente modelo

Hipótesis: H (se asume verdadera **y se usa**)
H.q.m.: C

	$\neg C$ es verdadero	Supongamos, por contradicción, que $\neg C$ es verdadero
1)	$\Rightarrow (\neg C \wedge H)$ verdadero	(Adjunción de la Hipótesis)
2)	$\Rightarrow I_1$ verdadero	(Por Teorema, Definición, Axioma…)
3)	$\Rightarrow I_2$ verdadero	(Por Teorema, Definición, Axioma…)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n)	$\Rightarrow I_n$ verdadero	(Por Teorema, Definición, Axioma…)
$n+1$)	$\Rightarrow F_0$ verdadero	(Por Teorema, Definición, Axioma…)

$\therefore$ F_0 verdadero. **Pero** F_0 **es falsa**, por lo que se llega a una contradicción. Note que el supuesto $\neg C$ **nos lleva a un absurdo**. Por lo tanto lo supuesto $(\neg C)$ es falso, es decir, C es verdadero.

Ejemplo 1.3

Sea B un conjunto de números reales que cumple los siguientes axiomas:

Axioma 1)	$3 \in B$
Axioma 2)	$(x \in B) \wedge (y \in B) \Rightarrow (xy) \in B$
Axioma 3)	$(6 \notin B)$

Pruebe los siguientes teoremas

Teorema 1: $\dfrac{5}{2} \in B \Rightarrow \dfrac{4}{5} \notin B$.

Teorema 2: Si $\dfrac{1}{x} \in B$ entonces $\sqrt{2}x \notin B$.

Prueba: Utilizaremos el método de contradicción para demostrarlos

Demostración del Teorema 1

Hipótesis: $\dfrac{5}{2} \in B$

H.q.m.: $\dfrac{4}{5} \notin B$

1)	$\dfrac{4}{5} \in B$	Se asume verdadero (Suposición por contradicción[a])
2)	$\Rightarrow \left(\dfrac{4}{5} \in B\right) \wedge \left(\dfrac{5}{2} \in B\right)$	(Adjunción de la Hipótesis al Paso 1)
3)	$\Rightarrow \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{4}{5} = 2 \in B$	(Axioma 2)
4)	$\Rightarrow (2 \in B) \wedge (3 \in B)$	(Adjunción del Paso 3 con el Axioma 1)
5)	$\Rightarrow 2 \cdot 3 = 6 \in B$	(Axioma 2)

$\therefore$ $6 \in B$ es verdadero. $(\Rightarrow\Leftarrow)$ (**Absurdo**) Ya que contradice el **Axioma 3**. Por lo tanto, lo supuesto es falso, es decir $\frac{4}{5} \notin B$.

Demostración del Teorema 2

Hipótesis: $\frac{1}{x} \in B$
H.q.m.: $\sqrt{2}x \notin B$

1)	$\sqrt{2}x \in B$	Se asume verdadero (Suposición por contradicción)
2)	$(\sqrt{2}x \in B) \wedge \left(\frac{1}{x} \in B\right)$	(Adjunción de la Hipótesis al Paso 1)
3)	$\sqrt{2}x \cdot \frac{1}{x} = \sqrt{2} \in B$	(Axioma 2)
4)	$\Rightarrow (\sqrt{2} \in B) \wedge (\sqrt{2} \in B)$	(Idempotencia al Paso 3)
5)	$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in B$	(Axioma 2)
6)	$\Rightarrow (2 \in B) \wedge (3 \in B)$	(Adjunción del Paso 5 con el Axioma 1)
7)	$\Rightarrow 2 \cdot 3 = 6 \in B$	(Axioma 2)

$\therefore$ $6 \in B$ es verdadero. $(\Rightarrow\Leftarrow)$ (**Absurdo**) Ya que contradice el **Axioma 3**. Por lo tanto, lo supuesto es falso, es decir $\sqrt{2}x \notin B$.

[a] **Negación:** $\neg\left(\frac{4}{5} \notin B\right) = \frac{4}{5} \in B$

1.3 Combinación de Métodos

Es posible combinar los métodos vistos para realizar una demostración. La clave se encuentra en el orden de las ideas y la práctica constante. Veamos un ejemplo referido al respecto donde la lógica y el sistema formal imperan más allá del significado implementado. Para tal caso, observe que los primeros que aparecen son las definiciones o leyes que delimitan el contexto del Sistema. Le siguen los axiomas (verdades absolutas) y por últimos los teoremas o proposiciones **que se deben demostrar**.

Ejemplo 1.4

Definición 1: Una palabra es invertible, si es permitida y la palabra que se obtiene al invertir el orden de sus letras es permitida.

Definición 2: Se dice que X es una palabra permitida si X es una sucesión de las letras tomadas de $\{G, R, E\}$ que es permitida.

Axioma 1: GRE es permitida.

Axioma 2: Si una palabra con dos E seguidas es permitida entonces la palabra que se obtiene al eliminar las dos E seguidas es permitida.

Axioma 3: Una palabra con una R es permitida si y solo si la palabra que se obtiene al cambiar la R por RE es permitida.

Axioma 4: Si X y Y son permitidas entonces la palabra XY es permitida.

Axioma 5: GRG no es permitida.

A partir de estos axiomas, pruebe los siguientes teoremas
Teorema 1: Se tiene que GR es permitida.
Teorema 2: Si $GERE$ es invertible, entonces $GERRGGR$ es permitida.
Teorema 3: Si $EGGE$ no es invertible, entonces EGE no es permitida
Teorema 4: Si GE es permitida, entonces GRE no es invertible

Ejemplo 1.5

Realicemos la prueba de los teoremas mencionadas en el ejemplo anterior

Demostración del Teorema 1

Comentario: Note que el Teorema 1 **no es una implicación**. No obstante se puede considerar que es una implicación donde las hipótesis son los cinco axiomas y la conclusión es "GR es permitida".

Hipótesis: Todos los axiomas.
H.q.m.: GR es permitida.

1)	$G\boxed{RE}$ es permitida	(Axioma 1)
2)	$\Rightarrow G\boxed{R}$ es permitida	(Axioma 3)

$\therefore$ GR es permitida. (¿Cuál método de demostración se utilizó?)

Demostración del Teorema 2

Comentario: Utilizaremos el método directo de demostración.

Hipótesis: $GERE$ es invertibe.
H.q.m.: $GERRGGR$ es permitida.

1)	$GERE$ es invertibe	Hipótesis
2)	$\Rightarrow$ ($GERE$ es permitida) $\wedge$ ($EREG$ es permitida)	(Definición 1)
3)	$\Rightarrow \boxed{GERE}\boxed{EREG} = GER\underline{EE}REG$ es permitida	(Axioma 4)
4)	$\Rightarrow$ ($GER\underline{RE}G$ es permitida)	(Axioma 2)
5)	$\Rightarrow$ ($GER\underline{R}G$ es permitida)	(Axioma 3)
6)	$\Rightarrow$ ($GERRG$ es permitida)$\wedge$ (GR es permitida)	(Adjunción Teorema 1 al Paso 5)
7)	$\Rightarrow \boxed{GERRG}\boxed{GR} = GERRGGR$ es permitida	(Axioma 4)

$\therefore$ $GERRGGR$ es permitida.

Demostración del Teorema 3

Comentario: Utilizaremos el método directo de contradicción.

Hipótesis: $EGGE$ no es invertible.
H.q.m.: EGE no es permitida.

1)	EGE es permitida	Se asume verdadero
2)	$\Rightarrow$ (EGE es permitida) $\wedge$ (EGE es permitida)	(Idempotencia al Paso 1)
3)	$\Rightarrow \boxed{EGE}\boxed{EGE} = EG\underline{EE}GE$ es permitida	(Axioma 4)
4)	$\Rightarrow EGGE$ es permitida	(Axioma 2)
5)	$\Rightarrow EGGE$ es invertible[a]	(Definición 1)

$\therefore$ $EGGE$ es invertible. ($\Rightarrow\Leftarrow$) Ya que contradice la hipótesis. Por lo tanto, lo supuesto es falso, es decir, EGE no es permitida.

Demostración del Teorema 4

Comentario: Utilizaremos el método de reducción al absurdo.

Hipótesis: GE es permitida.
H.q.m.: GRE no es invertible.

1)	GRE es invertible	Se asume verdadero
2)	$\Rightarrow$ (GRE es invertible)$\wedge$ (GE es permitida)	(Adjunción de la Hipótesis al Paso 1)
3)	$\Rightarrow$ (ERG es permitida)$\wedge$ (GE es permitida)	(Definición 1)
4)	$\Rightarrow$ (GE es permitida)$\wedge$ (ERG es permitida)	(Conmutatividad de la conjunción)
5)	$\Rightarrow \boxed{GE}\boxed{ERG} = G\underline{EE}RG$ es permitida	(Axioma 4)
6)	GRG es permitida	(Axioma 2)

$\therefore$ GRG es permitida. ($\Rightarrow\Leftarrow$) (**Absurdo**) Ya que contradice el **Axioma 5**. Por lo tanto, lo supuesto es falso, es decir GRE no es invertible.

[a] Note que al invertir las letras de $EGGE$ se obtiene la misma secuencia. Esto se conoce como un **Anagrama**

Esperamos que las notas hayan sido de utilidad al lector. A continuación, se exponen una serie de ejercicios relacionados con el capítulo

Ejercicios 1.1

1.1 Sea A un conjunto de números reales que cumple las siguientes axiomas

Axioma 1)	$5 \in A$
Axioma 2)	$(x \in A) \Rightarrow (3x+2) \in A$
Axioma 3)	$(x \in A) \wedge (y \in A) \Rightarrow (x+y) \in A$
Axioma 4)	$(7 \notin A)$

Demuestre los siguientes teoremas utilizando el método indicado.

a.) $3 \in A \Rightarrow 16 \in A$ (Directo)
b.) $4 \in A \Rightarrow 23 \in A$ (Directo)
c.) $11 \in A \Rightarrow (28 \in A \vee 31 \notin A)$ (Directo)
d.) $3 \in A \wedge 11 \in A \Rightarrow 51 \in A$ (Directo)
e.) $x \in A \wedge y \in A \Rightarrow (3x+2y+17) \in A$ (Directo)
f.) $x \in A \wedge y \in A \Rightarrow (7x+3y+16) \in A$ (Directo)
g.) $11 \notin A \Rightarrow 3 \notin A$ (Contradicción)
h.) $24 \notin A \Rightarrow (4 \notin A \vee 12 \in A)$ (Contradicción)
i.) $(3y+z+7) \notin A \Rightarrow (y \notin A \vee \frac{z}{2} \notin A)$ (Contradicción)
j.) $(3y \notin A \wedge (z+10) \notin A) \Rightarrow (y \notin A \wedge z \notin A)$ (Contradicción)
k.) $3 \in A \Rightarrow 1 \notin A$ (Reducción al Absurdo)
l.) $21 \in A \Rightarrow -31 \notin A$ (Reducción al Absurdo)
m.) $x \in A \wedge y \in A \Rightarrow (-3-3x-y) \notin A$ (Reducción al Absurdo)
n.) $2 \notin A$
o.) $(\exists x \in A)(x^2-17x+70=0)$

1.2 Sea A un conjunto de números reales que cumple: (axioma)

$$(\forall n \in \mathbb{Z})[n \in A \Rightarrow (n+1) \in A]$$

Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Si son verdaderas, demuéstrelas y si no, brinde un *contraejemplo*. (Indique un conjunto A que cumple con las hipótesis pero no la conclusión). Nota $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$.
a.) $10 \in A \Rightarrow 13 \in A$
b.) $11 \in A \Rightarrow 9 \in A$
c.) $-9 \in A \Rightarrow 9 \in A$
d.) A puede ser el conjunto $\{4,5,6,7,8,\ldots\}$
e.) A puede ser el conjunto $\{-1+\sqrt{5},5,6,7,8,\ldots\}$
f.) A puede ser el conjunto $\{\sqrt{2}\}$
g.) $1 \in A \Rightarrow A = \mathbb{N}$
h.) $1 \in A \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq A$
i.) $c \in A \wedge c \in \mathbb{N} \Rightarrow (c+3) \in A$
j.) $d \in A \Rightarrow (d+1) \in A$
k.) $m \in A \Rightarrow (\forall p \in \mathbb{N})[(n+p) \in A]$
l.) $-c \in A \wedge c \in \mathbb{N} \Rightarrow c \in A$
m.) $1 \in A \wedge A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A = \mathbb{N}$

1.3 Construcción del conjunto de los números naturales

La idea es construir formalmente este conjunto (suponga que no lo conoce) a partir de 5 axiomas: (**Los Axiomas de Peano**)

Axioma 1: 1 es un número natural.

Axioma 2: Para todo n número natural, existe un único número natural n^+ llamado el sucesor de n.

Axioma 3: El número natural 1 no es sucesor de algún número natural.

Axioma 4: Si n y m son números naturales tales que $n^+ = m^+$ (el sucesor de n es igual al sucesor de m) entonces $n = m$.

Axioma 5: Si A es un conjunto formado por números naturales que cumple:

$$\begin{array}{ll} 1) & 1 \in A \\ 2) & b \in A \Rightarrow b^+ \in A \end{array}$$

entonces A es el conjunto de los números naturales, denotado por $\mathbb{N}$.

Se denota $1^+ := 2$ y $(1^+)^+ := 3$. Utilice estos axiomas para demostrar los siguientes teoremas.

a.) Pruebe que no existe un número natural a tal que $(a^+)^+ = 1^+$

b.) Pruebe que $2^+ = 3$ y $2 \neq 3$.

c.) Si $a \neq 2$ entonces $a^+ \neq 3$

d.) Se define la suma de números naturales como la operación $+$ que cumple:

$$\begin{cases} a+1 = a^+ \\ a+b^+ = (a+b)^+ \end{cases}$$

Pruebe que $1+2=3$, $2+1=1+2$ y $(a+b)+1 = a+(b+1)$.

e.) Se define el producto de números naturales como la operación $\cdot$ que cumple:

$$\begin{cases} a\cdot 1 = a \\ a\cdot b^+ = a\cdot b + a \end{cases}$$

Pruebe que $2\cdot 2 = 3^+$, $2\cdot 3 = 3\cdot 2$ y $(a\cdot b)\cdot 1 = a\cdot (b\cdot 1)$.

2 — El conjunto de los Números Reales

2.1 Introducción

El álgebra elemental, el cálculo diferencial e integral y el análisis matemático están relacionados de diferentes maneras con el conjunto de los números reales, de aquí la importancia de conocer y comprender este conjunto y sus principales propiedades.

Existen diferentes métodos para introducir el conjunto de los números reales, uno de estos métodos consiste en "construir" este conjunto a partir de conjuntos más elementales, como el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números enteros o el conjunto de los números racionales. Si bien es cierto, esta forma de introducir los números reales es importante y además interesante, no lo haremos de esta manera debido a que, como base para el álgebra, el cálculo o el análisis, nos interesa más las propiedades de los números reales que los métodos usados para construirlos.

Por las razones anteriores, en esta sección consideramos a los números reales como objetos no definidos, con los cuales podemos realizar algunas operaciones que satisfagan ciertos **axiomas**[1] y a partir de éstos se podrán demostrar las propiedades fundamentales del álgebra elemental.

De esta manera, comenzaremos por aceptar la existencia de unos ciertos objetos (los cuales aceptaremos que existen) y que llamaremos **números reales**, y el conjunto que contiene estos objetos lo llamaremos el **conjunto de los números reales** y lo denotaremos con el símbolo $\mathbb{R}$.

Aceptaremos además que en $\mathbb{R}$ están definidas dos operaciones: la adición $(+)$ y la multiplicación $(\cdot)$ y que estas operaciones satisfacen los siguientes axiomas:

[1] Dichos axiomas son propuestos por el matemático alemán David Hilbert (1862-1943). En textos actuales de cálculo y análisis matemático aparecen enunciados equivalentes al de Hilbert.

2.2 Axiomas de los Números Reales

Axioma 2.1 (Ley de cerradura)

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ se cumple que $\boxed{a+b \in \mathbb{R}}$ **(A0)** y $\boxed{a \cdot b \in \mathbb{R}}$ **(M0)**

Axioma 2.2 (Ley conmutativa)

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ se cumple que $\boxed{a+b = b+a}$ **(A1)** y $\boxed{a \cdot b = b \cdot a}$ **(M1)**

Axioma 2.3 (Ley Asociativa)

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ se cumple que $\boxed{(a+b)+c = a+(b+c)}$ **(A2)** y $\boxed{(a \cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)}$ **(M2)**

Axioma 2.4 (Elemento Neutro)

$\exists 0, 0 \in \mathbb{R}$ tal que $\boxed{a+0 = 0+a = a}$, $\forall a \in \mathbb{R}$ **(A3)**

$\exists 1, 1 \in \mathbb{R}$ tal que $\boxed{a \cdot 1 = 1 \cdot a = a}$, $\forall a \in \mathbb{R}$ **(M3)**

Axioma 2.5 (Elemento Inverso)

$\forall a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R}$ tal que $\boxed{a+(-a) = (-a)+a = 0}$ **(A4)**

$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists\, a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $\boxed{a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1}$ **(M4)**

N **Notación**

1. Si $a \neq 0$ entonces $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$
2. $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = ab$

Además de las propiedades anteriores, **la multiplicación es distributiva respecto a la adición**; es decir:

Axioma 2.6 (Ley Distributiva)

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ se cumple $\boxed{a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c = b\cdot a + c\cdot a = (b+c)\cdot a}$

Por cumplirse las propiedades anteriores, se dice que junto con la adición y la multiplicación constituye una estructura de campo, y se escribe:

$$(\mathbb{R}, +, \cdot) \text{ es un campo}$$

2.3 Propiedades de los Números Reales

Asumiremos, además, que en $\mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades:

Propiedades en $\mathbb{R}$

1. **(P1)** $\forall a \in \mathbb{R}, a = a$ (Reflexiva)
2. **(P2)** $\forall a, b \in \mathbb{R}, a = b \Rightarrow b = a$ (Simétrica)
3. **(P3)** $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$ (Transitiva)
4. **(P4)** $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a = b \Rightarrow a + c = b + c$ (Propiedad aditiva de la igualdad)
5. **(P5)** $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$ (Propiedad multiplicativa de la igualdad)

Las tres primeras propiedades establecen que el **igual** $(=)$ es una **relación de equivalencia**, lo cual denotamos por

$$(\mathbb{R}, =)$$

al ser $\mathbb{R}$ un campo. Las dos últimas propiedades permiten la preservación de la igualdad ante la suma y la multiplicación definidas. **Cabe aclarar la extensión de estas propiedades mediante los axiomas anteriores.**

Con las propiedades enunciadas hasta aquí, se pueden demostrar todos los teoremas (o resultados) del álgebra elemental, relacionadas con la adición y con la multiplicación. En las líneas siguientes enunciamos los que consideramos de uso más frecuente y demostramos algunos de ellos a manera de ilustración, otros se dejan como ejercicio para el estudiante.

2.4 Demostración de Teoremas en $\mathbb{R}$

Teorema 2.1

$\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple que $a \cdot 0 = 0$

Prueba: Utilizaremos el método directo para demostrarlo. Note que al final, al ser a **arbitrario** (puede tomar cualquier valor real), se concluye la demostración en $\mathbb{R}$.
Hipótesis: Axiomas de la adición y multiplicación y las propiedades de $\mathbb{R}$
H.q.m.: $a \cdot 0 = 0$

1)	$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$	(A3 y P1)
2)	$\Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$	(Ley Distributiva)
3)	$\Rightarrow a \cdot 0 + -(a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + -(a \cdot 0)$	(P4)
4)	$\Rightarrow 0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + -(a \cdot 0))$	(A4 y A2)
5)	$\Rightarrow 0 = a \cdot 0 + 0$	(A4)
6)	$\Rightarrow 0 = a \cdot 0$	(A3)

$\therefore a \cdot 0 = 0$ es verdadero

Teorema 2.2
$\forall a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

Prueba: Utilizaremos el método directo para demostrarlo. No obstante, la presencia de un "si y solo si" ($\Leftrightarrow$) nos indica la realización de dos demostraciones: una donde de la hipótesis es $a \cdot b = 0$ y la conclusión es $a = 0 \vee b = 0$ y la otra en el sentido opuesto. Observe los detalles en esta prueba.

"$\Rightarrow$"

Hipótesis: $a \cdot b = 0$
H.q.m.: $a = 0 \vee b = 0$

1)	$a \cdot b = 0$	(Se asume verdadera)
2)	$\Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0$	(P5 suponiendo $a \neq 0$)
3)	$\Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0$	(M2 y Teorema 2.1)
4)	$\Rightarrow 1 \cdot b = 0$	(M4)
5)	$\Rightarrow \boxed{b = 0}$	(M3)
6)	$\Rightarrow (a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0 \cdot b^{-1}$	(P5 suponiendo $b \neq 0$) (Se retoma Paso 1)
7)	$\Rightarrow a \cdot (b \cdot b^{-1}) = 0$	(M2 y Teorema 2.1)
8)	$\Rightarrow a \cdot 1 = 0$	(M4)
9)	$\Rightarrow \boxed{a = 0}$	(M3)
10)	$\Rightarrow \boxed{a = 0} \vee \boxed{b = 0}$	(Adición del Paso 9 con el Paso 5)

$\therefore a = 0 \vee b = 0$ es verdadero.

"$\Leftarrow$"

Hipótesis: $a = 0 \vee b = 0$
H.q.m.: $a \cdot b = 0$

1)	$a = 0 \vee b = 0$	(Se asume verdadera)
2)	$\Rightarrow (a \cdot b = 0 \cdot b) \vee (a \cdot b = a \cdot 0)$	(P5 en ambas proposiciones)
3)	$\Rightarrow a \cdot b = 0 \vee a \cdot b = 0$	(Teorema 2.1 en ambas proposiciones)
4)	$\Rightarrow a \cdot b = 0$	(Idempotencia en el Paso 3)

$\therefore a \cdot b = 0$ es verdadero

De ambas implicaciones se concluye el enunciado del teorema.

Teorema 2.3
1. El elemento neutro para la adición es único. (Ver A3)
2. El elemento neutro para la multiplicación es único. (Ver M3)
3. $\forall a \in \mathbb{R}$ su inverso aditivo es único. (Ver A4)
4. $\forall a \in \mathbb{R}$ su inverso multiplicativo es único, con $a \neq 0$. (Ver M4)

5. $\forall a,b \in \mathbb{R}\left[a \cdot b \neq 0 \Rightarrow (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}\right]$
6. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}\,[a+c = b+c \Rightarrow a = b]$
7. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}, c \neq 0 : [a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b]$
8. $\forall a \in \mathbb{R}, -(-a) = a$
9. $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \Rightarrow \left(a^{-1}\right)^{-1} = a$
10. $0 = -0$
11. $(1)^{-1} = 1$
12. $\forall a \in \mathbb{R}, -a = -1 \cdot a$
13. $(-1) \cdot (-1) = 1$
14. $\forall a,b \in \mathbb{R} : [(-a) \cdot (-b) = a \cdot b]$
15. $\forall a,b \in \mathbb{R} : [a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)]$

A manera de ejemplo demostraremos las propiedades 2, 3, 6 y 11, la demostración del resto de las propiedades queda como ejercicio para el estudiante. Como actividad adicional, para los ejercicios 6 y 11, ordene la demostración en la estructura que se ha trabajado, es decir, justifique los pasos.

Ejemplo 2.1 Demostración del punto 2 en el Teorema 2.3

Hipótesis: Todos los axiomas, propiedades y teoremas previos
H.q.m.: El elemento neutro para la multiplicación es único

1)	Suponga que el elemento neutro para la multiplicación **no** es único, es decir $\exists\, n_1 \wedge n_2 \in \mathbb{R}, n_1 \neq n_2$ elementos neutros	(Suposición por contradicción)
2)	$\Rightarrow n_1 = n_1 \cdot n_2 \wedge n_1 \cdot n_2 = n_2$	(M3 para ambos neutros)
3)	$\Rightarrow n_1 = n_2$	(P3)

$\therefore n_1 = n_2$ es verdadero ($\Rightarrow\Leftarrow$). Por lo tanto, lo supuesto es falso, es decir, el elemento neutro para la multiplicación es único.

Ejemplo 2.2 Demostración del punto 3 en el Teorema 2.3

Hipótesis: Todos los axiomas, propiedades y teoremas previos
H.q.m.: $\forall a \in \mathbb{R}$, el inverso aditivo es único

1)	Suponga que existe un número real a tal que su inverso aditivo **no** es único, es decir $\exists\, a_1 \wedge a_2 \in \mathbb{R}, a_1 \neq a_2$ inversos aditivos	(Suposición por contradicción)
2)	$\Rightarrow 0 = a_1 + a \wedge a + a_2 = 0$	(A4 en ambos inversos aditivos de a)
3)	$\Rightarrow 0 + a_2 = (a_1 + a) + a_2 \wedge (a + a_2) + a_1 = 0 + a_1$	(P4 en ambas proposiciones)
4)	$\Rightarrow a_2 = a_1 + a_2 + a \wedge a_1 + a_2 + a = a_1$	(A1,A2 y A3)
5)	$\Rightarrow a_1 = a_2$	(P3)

$\therefore a_1 = a_2$ es verdadero. ($\Rightarrow\Leftarrow$) Ya que contradice A4. Por lo tanto, lo supuesto es falso, es decir, el inverso aditivo es único.

Ejemplo 2.3 **Demostración del punto 6 en el Teorema 2.3**

Supongamos que $a+c=b+c$. Hay que demostrar que $a=b$. De esta forma

$$\begin{aligned} a+c=b+c &\Rightarrow (a+c)+-c=(b+c)+-c && \text{(¿Porque?)}\\ &\Rightarrow a+(c+-c)=b+(c+-c) && \text{(¿Porque?)}\\ &\Rightarrow a+(0)=b+(0) && \text{(¿Porque?)}\\ &\Rightarrow a=b && \text{(¿Porque?)} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4 **Demostración del punto 11 en el Teorema 2.3**

Esta propiedad se deduce directamente del hecho de que $1\cdot 1=1$, y de aplicar la propiedad 4 (el inverso multiplicativo es único) Por ende, $(1)^{-1}=1$.

Definición 2.1 (Sustracción en $\mathbb{R}$)

Sean $a,b\in\mathbb{R}$. Llamamos sustracción de a y b la denotamos $a-b$, a la operación definida por:

$$a-b=a+(-b)$$

Definición 2.2 (División en $\mathbb{R}$)

Sean $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$. Llamamos división de a por b y la denotamos $a\div b$, a la operación definida por:

$$a\div b=a\cdot(b^{-1})$$

Notación

$a\div b$ también se denota $\frac{a}{b}$; o sea $a\div b=\frac{a}{b}$.

Teorema 2.4

1. $\forall a,b\in\mathbb{R}:[a-b=-(b-a)]$
2. $\forall a,b\in\mathbb{R}:[-a-b=-(a+b)]$
3. $\forall a,b,c\in\mathbb{R}:[(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c)]$
4. $\forall a,b,c\in\mathbb{R}:[a+c=b\Leftrightarrow a=b-c]$

5. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}, c \neq 0 : \left[a \cdot c = b \Leftrightarrow a = \frac{b}{c} \right]$

Demostración del Punto 1 en el Teorema 2.4

Prueba: Se utilizará el método directo de demostración
Hipótesis: Todos los axiomas, propiedades y teoremas previos.
H.q.m.: $a-b=-(b-a)$

1)	$b+(-b)=0$	(A4)
2)	$\Rightarrow (b+0)+(-b)=0$	(A3)
3)	$\Rightarrow b+((-a)+a)+-b=0$	(A4)
4)	$\Rightarrow (b+-a)+(a+-b)=0$	(A2)
5)	$\Rightarrow (b-a)+(a-b)=0$	(Definición de Sustracción (2.1))
6)	$\Rightarrow a-b=-(b-a)$	(Unicidad del Neutro en la adición (2.3.3))

$\therefore a-b=-(b-a)$ es verdadero.

Demostración del Punto 2 en el Teorema 2.4

Prueba: Se utilizará el método directo de demostración
Hipótesis: Todos los axiomas, propiedades y teoremas previos.
H.q.m.: $-a-b=-(a+b)$

1)	$b+(-b)=0$	(A4)
2)	$\Rightarrow (b+0)+(-b)=0$	(A3)
3)	$\Rightarrow b+((-a)+a)+-b=0$	(A4)
4)	$\Rightarrow b+(a+(-a))+-b=0$	(A1)
5)	$\Rightarrow (a+b)+(-a+-b)=0$	(A1 y A2)
6)	$\Rightarrow (a+b)+(-a-b)=0$	(Definición de Sustracción (2.1))
7)	$\Rightarrow (-a-b)=-(a+b)$	(Unicidad del Neutro en la adición (2.3.3))

$\therefore -a-b=-(a+b)$ es verdadero.

Demostración del Punto 3 en el Teorema 2.4

Prueba: Se utilizará el método directo de demostración
Hipótesis: Todos los axiomas, propiedades y teoremas previos.
H.q.m.: $(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$

1)	$(a-b)\cdot c=(a+-b)\cdot c$	(Definición de Sustracción (2.1))
2)	$\Rightarrow (a-b)\cdot c=a\cdot c+(-b)\cdot c$	(Ley Distributiva)
3)	$\Rightarrow (a-b)\cdot c=a\cdot c+-(b\cdot c)$	(Teorema 2.3.15)
5)	$\Rightarrow (a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$	(Definición de Sustracción (2.1))

$\therefore (a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$ es verdadero.

Demostración del Punto 4 en el Teorema 2.4

Prueba: Utilizaremos el método directo para demostrarlo. No obstante, la presencia de un "si y solo si" ($\Leftrightarrow$) nos indica la realización de dos demostraciones: una donde la hipótesis es $a+c=b$ y la conclusión es $a=b-c$ y la otra en el sentido opuesto. Observe los detalles en esta prueba.

"$\Leftarrow$"

Hipótesis: $a=b-c$.
H.q.m.: $a+c=b$

1)	$a=b-c$	(Se supone verdadera)
2)	$\Rightarrow a=b+(-c)$	(Definición de Sustracción (2.1))
3)	$\Rightarrow a+c=(b+-c)+c$	(P4)
4)	$\Rightarrow a+c=b+(-c+c)$	(A2)
5)	$\Rightarrow a+c=b+0$	(A4)
6)	$\Rightarrow a+c=b$	(A3)

$\therefore a+c=b$ es verdadero.

"$\Rightarrow$"

Hipótesis: $a+c=b$.
H.q.m.: $a=b-c$

1)	$a+c=b$	(Se supone verdadera)
2)	$\Rightarrow (a+c)+(-c)=b+(-c)$	(P4)
3)	$\Rightarrow (a+c)+-c=b-c$	(Definición de Sustracción (2.1))
4)	$\Rightarrow a+(c+-c)=b-c$	(A2)
4)	$\Rightarrow a+0=b-c$	(A4)
5)	$\Rightarrow a=b-c$	(A3)

$\therefore a=b-c$ es verdadero.

Demostración del Punto 5 en el Teorema 2.4

Prueba: Utilizaremos el método directo para demostrarlo. No obstante, la presencia de un "si y solo si" ($\Leftrightarrow$) nos indica la realización de dos demostraciones: una donde la hipótesis es $a\cdot c=b$ y la conclusión es $a=\dfrac{b}{c}$ y la otra en el sentido opuesto ($c\neq 0$). Observe los detalles en esta prueba.

"$\Rightarrow$"

Hipótesis: $a\cdot c=b$.
H.q.m.: $a=\dfrac{b}{c}$

1) $a\cdot c=b$ (Se supone verdadera con $c\neq 0$)
2) $\Rightarrow (a\cdot c)\cdot c^{-1}=b\cdot c^{-1}$ (P5)
3) $\Rightarrow a\cdot(c\cdot c^{-1})=b\cdot c^{-1}$ (M2)
4) $\Rightarrow a\cdot 1=b\cdot c^{-1}$ (M4)
5) $\Rightarrow a=b\cdot c^{-1}$ (M3)
6) $\Rightarrow a=\dfrac{b}{c}$ (Definición de División (2.2))

$\therefore a=\dfrac{b}{c}$ es verdadero.

“$\Leftarrow$”

Hipótesis: $a=\dfrac{b}{c}$.
H.q.m.: $a\cdot c=b$

1) $a=\dfrac{b}{c}$ (Se supone verdadera con $c\neq 0$)
2) $\Rightarrow a=b\cdot c^{-1}$ (Definición de División (2.2))
3) $\Rightarrow a\cdot c=(b\cdot c^{-1})\cdot c$ (P5)
4) $\Rightarrow a\cdot c=b\cdot(c^{-1}\cdot c)$ (M2)
4) $\Rightarrow a\cdot c=b\cdot 1$ (M4)
5) $\Rightarrow a\cdot c=b$ (M3)

$\therefore a\cdot c=b$ es verdadero.

Ejercicios 2.1

2.1 Demuestre los siguientes teoremas.

a.) El elemento neutro para la adición es único. (Ver A3)
b.) $\forall a\in\mathbb{R}$ su inverso multiplicativo es único. (Ver M4)
c.) $\forall a,b\in\mathbb{R}\left[a\cdot b\neq 0\Rightarrow (a\cdot b)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1}\right]$
d.) $\forall a,b,c\in\mathbb{R}, c\neq 0:[a\cdot c=b\cdot c\Rightarrow a=b]$
e.) $\forall a\in\mathbb{R}, -(-a)=a$
f.) $\forall a\in\mathbb{R}, a\neq 0\Rightarrow (a^{-1})^{-1}=a$
g.) $0=-0$
h.) $\forall a\in\mathbb{R}, -a=(-1)\cdot a$
i.) $(-1)\cdot(-1)=1$
j.) $\forall a,b\in\mathbb{R}:[(-a)\cdot(-b)=a\cdot b]$
k.) $\forall a,b\in\mathbb{R}:[a\cdot(-b)=(-a)\cdot b=-(a\cdot b)]$

2.2 Realice las operaciones indicadas y simplifique. Justifique los pasos que le llevaron a la simplificación

a.) $2-5\cdot(3\div 2\cdot 6)$

b.) $5-4(2+3\cdot 5-7)\div 5+4\cdot 2$
c.) $5-2\cdot(3\cdot(7-4)-(-12+3))-6$
d.) $\dfrac{7-4\cdot(1-9)}{7-4\cdot 1-9}$
e.) $1+2+3+\cdots+99+100$
f.) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{98}{99}\cdot\dfrac{99}{100}$
g.) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}$

2.3 Cada una de las siguientes igualdades es verdadera en el sistema de los números reales. Indique la razón de su veracidad, respecto de los axiomas y propiedades vistos.
a.) $2+(3+5)=(2+5)+3$
b.) $0+5=5$
c.) $(x+y)+z=z+(y+x)$
d.) $(x+2)\cdot y=y\cdot x+2\cdot y$
e.) $(4\cdot 4^{-1})-1=0$

Asumiremos la existencia de un subconjunto no vacío del conjunto de los números reales. A este conjunto lo llamaremos conjunto de los números reales positivos y lo denotaremos por $\mathbb{R}^+$

2.5 Las propiedades de orden en $\mathbb{R}$

2.5.1 Axiomas de orden en el conjunto de los números reales

El conjunto $\mathbb{R}^+$ satisface las siguientes propiedades conocidas como problemas de orden en el conjunto de los números reales.

Axioma 2.7 (O1)

$\forall a,b\in\mathbb{R}^+ : [(a+b)\in\mathbb{R}^+]$

Axioma 2.8 (O2)

$\forall a,b\in\mathbb{R}^+ : [(a\cdot b)\in\mathbb{R}^+]$

Axioma 2.9 (O3)(Ley de Tricotomía)

$\forall a\in\mathbb{R}$ se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones
1. $a\in\mathbb{R}^+$
2. $a=0$
3. $-a\in\mathbb{R}^+$

Como se titula, el axioma O3 se conoce como la **ley de tricotomía** y la condición 3 determina la existencia de un subconjunto del conjunto de los números reales, llamado el conjunto de los **números**

reales negativos el cual denotaremos con el símbolo $\mathbb{R}^-$ y que se define de la siguiente manera

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} | -x \in \mathbb{R}^+\}$$

De esta manera se tiene que

$$\boxed{\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+}$$

Definición 2.3 (La relación menor que en $\mathbb{R}$)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se dice que "a es menor que b" si y solo sí $(b-a) \in \mathbb{R}^+$

Notas

1. "a es menor que b" se escribe "$a < b$" y, por lo tanto, $a < b \Leftrightarrow (b-a) \in \mathbb{R}^+$.
2. "$a < b$" también se puede escribir como "$b > a$" y se lee "b es mayor que a", por lo tanto $a < b \Leftrightarrow b > a$.

Definición 2.4 (La relación menor o igual que en $\mathbb{R}$)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se dice que "a es menor o igual que b" y se escribe $a \leq b$ si y solo sí se cumple que $a < b$ o $a = b$, es decir

$$a \leq b \Leftrightarrow [a < b \vee a = b]$$

.

Notas

1. "$a \leq b$" también se puede escribir como "$b \geq a$" y se lee "b es mayor o igual que a", por lo tanto $a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$.

Usando los axiomas de orden y la definición de la relación "menor que" se pueden demostrar, entre otras, las propiedades que se enuncian en el siguiente teorema.

Teorema 2.5

1. Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces se cumple una y solo una de las siguientes condiciones
   i. $a < b$
   ii. $b < a$
   iii. $b = a$
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\,[a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c]$
3. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\,[a < b \Leftrightarrow a + c < b + c]$
4. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\,[a + c < b \Leftrightarrow a < b - c]$
5. $\forall a \in \mathbb{R}\,[a < 0 \Leftrightarrow -a \in \mathbb{R}^+]$
6. $\forall a \in \mathbb{R}\,[a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+]$
7. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\,[a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c]$
8. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\,[a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c]$

A manera de ejemplo demostraremos las propiedades 1 y 7, el resto de propiedades quedan como ejercicio para el estudiante.

Ejemplo 2.5

Demostración del Punto 1 en el Teorema 2.5

Prueba: Se utilizará el método directo de demostración
Hipótesis: Todos los axiomas, propiedades y teoremas previos. Además existen $a, b \in \mathbb{R}$
H.q.m.: $(a < b) \vee (b < a) \vee (a = b)$

1)	$b - a \in \mathbb{R}$	(Definición de Sustracción y A0)
2)	$\Rightarrow [(b-a) \in \mathbb{R}^+] \vee [-(b-a) \in \mathbb{R}^+] \vee [b - a = 0]$	(O3)
3)	$\Rightarrow (a < b) \vee [-(b-a) \in \mathbb{R}^+] \vee [b - a = 0]$	(Definición 2.3)
4)	$\Rightarrow (a < b) \vee [(a-b) \in \mathbb{R}^+] \vee [b - a = 0]$	(Teorema 2.4 punto 1)
5)	$\Rightarrow (a < b) \vee (b < a) \vee [b - a = 0]$	(Definición 2.3)
6)	$\Rightarrow (a < b) \vee (b < a) \vee (b = a)$	(P4,A2,A3 y A4)

$\therefore (b > a) \vee (b < a) \vee (b = a)$ es verdadero.

La propiedad anterior es equivalente al axioma 2.9.

Ejemplo 2.6

Demostración del Punto 7 en el Teorema 2.5

Prueba: Se utilizará el método directo de demostración
Hipótesis: Todos los axiomas, propiedades y teoremas previos. Además $a < b \wedge c > 0$
H.q.m.: $a \cdot c < b \cdot c$

1)	$a < b \wedge c > 0$	(Hipótesis)
2)	$\Rightarrow [(b-a) \in \mathbb{R}^+] \wedge [(c-0) \in \mathbb{R}^+]$	(Definición 2.3)
3)	$\Rightarrow [(b-a) \in \mathbb{R}^+] \wedge [c \in \mathbb{R}^+]$	$(c - 0 = c + -0 = c + 0 = c)$
4)	$\Rightarrow (b-a)c \in \mathbb{R}^+$	(O2)
5)	$\Rightarrow b \cdot c - a \cdot c \in \mathbb{R}^+$	(Teorema 2.4 punto 3)
6)	$\Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$	(Definición 2.3)

$\therefore a \cdot c < b \cdot c$ es verdadero.

Notas

1. Si $a < b$ y $b < c$ escribimos $a < b < c$. **(Transitividad Extendida)**
2. Propiedades similares se satisfacen para los otros símbolos de desigualdad. $(\leq, \geq, >)$

Ejercicios 2.2

2.4 Demuestre cada una de las siguientes propiedades

a.) $\forall a,b,c \in \mathbb{R}\,[a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c]$
b.) $\forall a,b,c \in \mathbb{R}\,[a < b \Leftrightarrow a+c < b+c]$
c.) $\forall a,b,c \in \mathbb{R}\,[a+c < b \Leftrightarrow a < b-c]$
d.) $\forall a \in \mathbb{R}\,[a < 0 \Leftrightarrow -a \in \mathbb{R}^+]$
e.) $\forall a \in \mathbb{R}\,[a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+]$
f.) $\forall a,b,c \in \mathbb{R}\,[a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c]$

2.5 Demuestre el Teorema 2.5 pero ahora con los símbolos $\leq$, $\geq$ y $>$.

2.6 Demuestre cada una de las siguientes proposiciones

a.) Si $a \neq 0$ entonces $a \cdot a > 0$
b.) **Corolario:** Como $1 \neq 0$ entonces $1 > 0$
c.) Si $a > 0$ entonces $a^{-1} > 0$
d.) Si $0 < a < b$ entonces $b^{-1} < a^{-1}$
e.) Si $a^2 = a \cdot a$ entonces $a^2 + 1 > 0$

2.5.2 Representación geométrica de los números reales

Es posible establecer una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos de una recta (recta numérica), de la siguiente manera: Consideremos una línea recta (preferiblemente en posición horizontal), seleccionamos un punto arbitrario de la recta para representar el cero, luego otro punto a la derecha del cero para representar el uno, y dividimos toda le recta en segmentos que tengan la misma longitud que el segmento de cero a uno, de esta manera se representan los números 1,2, 3, 4, ... a la derecha del cero y los números -1, -2, -3, -4, ... a la izquierda del cero como se muestra en la figura siguiente. El resto de los números reales (racionales e irracionales) se

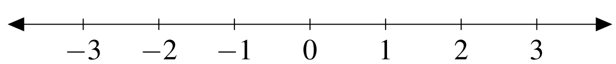


Figura 2.1: Recta Numérica

representan usando su expansión decimal como se muestra en la figura siguiente. Note que

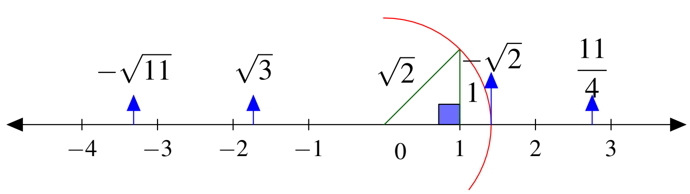


Figura 2.2: Algunos valores sobre la recta numérica

$$-\sqrt{11} \approx -3,166 \;\; ; \;\; -\sqrt{3} \approx -1,732 \;; \;\; \sqrt{2} \approx 1,414 \;\; ; \;\; \frac{11}{4} \approx 2,75 \;\; ; \;\; \sqrt{23} \approx 4,795$$

los números reales que se representan a la derecha del cero son los números reales positivos, y los que se representan a la izquierda del cero son los números reales negativos

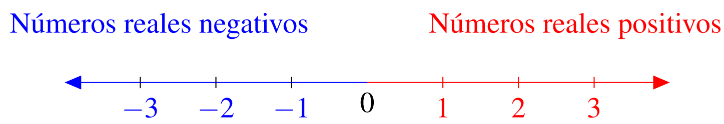


Figura 2.3: Números Reales positivos y negativos

2.6 Algunos subconjuntos del conjunto de los números reales

A continuación consideramos algunos subconjuntos importantes del conjunto de los números reales, es posible que estos subconjuntos sean ya conocidos por el estudiante por lo que serán tratados aquí en forma breve.

2.6.1 El conjunto de los números naturales

Este es el conjunto que nos permite "contar". Es el conjunto cuyos elementos, escritos en forma decimal, son $1,2,3,\ldots$

Se denota por $\mathbb{N}$ y se puede escribir como $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$

Los axiomas de Peano (Guiseppe Peano, italiano, 1858-1932)

Se construye los números naturales de manera axiomática, a través de los axiomas de Peano, que consisten en los siguientes:

Axioma 1. 1 es un número natural.

Axioma 2. A cada número natural a se le asocia un único número natural a^+ que se le llama el **sucesor** de a. También se dice, en este caso, a es el **predecesor de** a^+.

Axioma 3. El número natural 1 no tiene predecesor.

Axioma 4. Si a y b son números naturales tales que $a^+ = b^+$ entonces $a = b$.

Axioma 5. Si un conjunto A, formado por números naturales, es tal que

$$\begin{aligned} (a)\ 1 &\in A \\ (b)\ b &\in A \Rightarrow b^+ \in A \end{aligned}$$

entonces todo número natural pertenece a A, es decir $A = \mathbb{N}$.

El axioma 1 establece que el conjunto de los números naturales no es vacío, contiene al elemento 1 que no tiene predecesor según el axioma 3. El axioma 2 establece una relación de $\mathbb{R}$ en sí mismo (la relación sucesor) y es inyectiva según axioma 4. El axioma 5 es llamado, **axioma de inducción matemática,** establece que cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ que contenga a 1 y sea cerrado bajo la formación de sucesores, tiene que ser necesariamente igual a $\mathbb{N}$.

Ejercicios 2.3

2.7 Investigue sobre la naturaleza de primeros teoremas que se generan con los axiomas de Peano. ¿Se cumplen los axiomas y propiedades de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{N}$ hasta ahora estudiadas?

2.8 ¿Qué es el **principo del buen ordenamiento**?

2.6.2 El conjunto de los números enteros

El reconocimiento de los números enteros fue aún más tardío que el de los números naturales, pues era difícil aceptar números negativos, ya que no tenía mucho significado. Sin embargo, si se toma en cuenta que puede entenderse como una representación que da la cantidad y además la magnitud, entonces se acepta la implementación de términos o frases tales como pasos hacia atrás, abajo, pérdida, temperaturas bajo cero, entre otras.

En $\mathbb{N}$ se analizó previamente que si $a,b \in \mathbb{N}$, entonces la ecuación $a+x=b$ tiene solución $x \in \mathbb{N}$ si y sólo si $a<b$. Se va a denotar esa solución como $x=b-a$, que diremos que es la resta de b menos a, o bien diferencia de b menos a. Luego, es posible construir el conjunto de números enteros, denotado por $\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$, de modo que la ecuación $a+x=b$ pueda resolverse en ese conjunto, es decir que la sustracción $b-a$ siempre se pueda realizar.

Además, se requiere que en este conjunto se pueda definir la adición, la multiplicación y el orden, manteniendo las propiedades de $\mathbb{N}$.

Ejercicios 2.4

2.9 ¿Se cumplen los axiomas y propiedades de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Z}$ hasta ahora estudiadas?

2.10 ¿Es la **Ley de cancelación** en $\mathbb{Z}$ igual en $\mathbb{R}$ para el producto y la suma ?

Elementos de teoría de números

Es importante aclarar, como ejemplo, que $\forall\, a,b \in \mathbb{Z}$, la suma es cerrada ($a+b \in \mathbb{Z}$) y el producto es cerrado ($ab \in \mathbb{Z}$). Por el contrario $a \div b = \dfrac{a}{b}$ no necesariamente pertenece a $\mathbb{Z}$. Por ejemplo $\dfrac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$. Ante esto, es necesario definir **la divisibilidad** de a entre b.

Definición 2.5 (Divisibilidad1)

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \text{ si } \exists\, q \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = bq$$

En este caso decimos que b es divisor de a o también que a es un múltiplo de b. Si b divide a a se escribe como:

$$b|a \Leftrightarrow \exists\, q \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = bq, b \neq 0$$

Ejemplo 2.7

$2|10$, pues $\exists\, 5 \in \mathbb{Z}$ tal que $10 = 2 \cdot 5$

Teorema 2.6

Sean $a, b, m \in \mathbb{Z}$ entonces

1. $1|a$.
2. Si $m \neq 0$ entonces $m|0$.
3. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, $a|b$ y $b|a$ entonces $a = \pm b$.

Prosa de las pruebas

1. Esto se cumple por que $\exists\, a \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 1 \cdot a$.
2. Se cumple por que $\exists\, 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $0 = 0 \cdot m$
3. Como $a|b \Rightarrow \exists\, q_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $b = aq_1$ (1)
   Como $b|a \Rightarrow \exists\, q_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bq_2$ (2)
   Sustituyendo (1) en (2) tenemos
   $a = aq_1q_2$, por ley de cancelación
   $1 = q_1q_2$, como q_1 y $q_2 \in \mathbb{Z}$
   $q_1 = q_2 = 1$
   $q_1 = q_2 = -1$
   Así en ambos casos $a = \pm b$

Teorema 2.7 (Algoritmo de la división).

Dados dos enteros m y n, con $n > 0$, $\exists\, q \wedge r \in \mathbb{Z}$ únicos tales que $m = qn + r$ con $0 \leq r < n$

Prosa de la prueba

1. **Prueba de la Existencia**
   (a) $\boxed{m \geq 0}$. Consideremos $m \geq 0$ y la sucesión

$$m, m-n, m-2n, m-3n, \ldots, m-qn, m-(q+1)n, \ldots (*)$$

Puesto que $\mathbb{N}$ es un conjunto ordenado en la sucesión $(*)$ tarde o temprano aparecerá un número negativo. Sea r el último de los términos no negativos, o sea el más pequeño de los no negativos y supongamos que es $r = m - qn$, es decir $m = r + qn$. **Mostremos que** $r < n$.

Supongamos que $r \geq n$. **(Contradicción)**

$$m - qn \geq n \Leftrightarrow m - qn - n \geq 0 \Leftrightarrow m - (q+1)\,n \geq 0$$

Llegamos a una contradicción de que r era el más pequeño de la sucesión.

(b) $\boxed{m < 0}$. Consideremos $m < 0$ y la sucesión

$$-m, -m-n, -m-2n, -m-3n, \ldots, -m-qn, -m-(q+1)\,n, \ldots (*)$$

Puesto que $\mathbb{N}$ es un conjunto ordenado en la sucesión $(*)$ tarde o temprano aparecerá un número negativo. Sea r el último de los términos no negativos, o sea el más pequeño de los no negativos y supongamos que es $r = -m - qn$, es decir $m = -r - qn = r_* + q_* n$, donde $-r = r_*$ y $-q = q_*$. **Mostremos que $r < n$.**

Supongamos que $r \geq n$ **(Contradicción)**

$$-m - qn \geq n \Leftrightarrow -m - qn - n \geq 0 \Leftrightarrow -m - (q+1)\,n \geq 0$$

Llegamos a una contradicción de que r era el más pequeño de los no negativos de la sucesión.

Así, en ambos casos es lo que se quería probar.

2. **Prueba de la Unicidad.**

Demostraremos que q_1 y r_2 son únicos.

Supongamos que **(Contradicción)**

$$m = nq_1 + r_1 \qquad (1)$$

y

$$m = nq_2 + r_2 \qquad (2)$$

tales que $q_1 \neq q_2$ y $r_1 \neq r_2$ enteros. Igualando (1) y (2) se tiene que

$$nq_1 + r_1 = nq_2 + r_2 \Leftrightarrow n\,(q_1 - q_2) = r_2 - r_1 \Rightarrow n\,|q_1 - q_2| = |r_1 - r_2| < n$$

Pero las condiciones se pueden escribir como

$$0 \leq r_1 < |n| \text{ y } 0 \leq r_2 < |n|$$

de las cuales se sigue que

$$0 \leq r_1 < |n| \text{ y } -|n| < -r_2 \leq 0$$

Sumando las desigualdades $-|n| \leq r_1 - r_2 \leq |n| \Rightarrow |r_1 - r_2| \leq |n|$

Lema.

Si $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$, $r_1 < n$ y $r_2 < n \Rightarrow |r_1 - r_2| < n$.

Tenemos que

$$n\,|q_1 - q_2| < n \wedge |q_1 - q_2| < 1$$

pero es un contradicción, porque q_1 y q_2 son enteros, por lo que $q_2 = q_1$ y por tanto

$$r_1 = r_2$$

.

Ejemplo 2.8

Al dividir 23 entre 7 se tiene que

$$23 = 3 \cdot 7 + 2$$

Ejercicios 2.5

2.11 Hemos visto que al dividir dos números a y b, si el residuo es cero, entonces decimos que a es divisible entre b. Sin embargo, realizar la división para determinar si b divide a a puede ser un proceso largo y tedioso. Afortunadamente, existen **criterios de divisibilidad** que permiten determinar de manera rápida si a es divisible entre b sin necesidad de efectuar la división completa. Estos criterios son particularmente útiles para números como 2, 3, 5, 7, 9, 11 y 13. Investigue la naturaleza de estos criterios

2.12 **Máximo Común Divisor (MCD)**. Tomemos los números 18 y 24

$18 : 1,2,3,6,9$ y 18 sus divisores naturales.

$24 : 1,2,3,4,6,8,12$ y 24 sus divisores naturales.

El mayor número que divide a ambos es el 6, así que

$$MCD\,[18,24] = 6$$

Sean a y b dos enteros ambos no cero, decimos que c es su máximo común divisor $MCD\,[a,b] = c$, si c es tal que:

1. $c > 0$
2. $c|a \wedge c|b$
3. Si $d|a \wedge d|b$ entonces $d|c$

En este mismo ejemplo $d = 3$, pues $3|18 \wedge 3|24$, entonces $3|6$, es decir d divide a ambos, pero no es el mayor de todos. Con base en toda esta información demuestre el siguiente teorema

> Sean a y b enteros ambos no cero tal que $MCD\,[a,b] = c$ entonces $c = m_0 b + n_0 a$ para cierto m_0 y n_0 no necesariamente únicos.

Por ejemplo,

$$MCD\,[4,10] = 2$$

Sin embargo, este se puede escribir como

$$2 = 4 \cdot -2 + 10 \cdot 1, \text{ o bien}$$
$$2 = 3 \cdot 4 + 10 \cdot -1, \text{ o bien}$$
$$2 = 3 \cdot 10 + 4 \cdot -7$$

2.13 **Mínimo Común Múltiplo (mcm)**. Los siguientes conjuntos de números naturales son los múltiplos de 2 y 3 respectivamente:

$m_2 = \{2, 4, [6], 8, 10, [12], ...\}$

$m_3 = \{3, [6], 9, [12], 15, 18, ...\}$

El menor de los números que son múltiplos de ambos se le llama **mínimo común múltiplo**. En este caso el $mcm[2,3] = 6$. El mínimo común múltiplo de dos o más números naturales es el menor número natural que es múltiplo de cada uno de los números dados. Con base en esto, compruebe que

$$\text{mcm}[12, 18, 24] = 72$$

y genere un problema asociado con este mcm.

2.6.3 El conjunto de los números racionales

Cualquier número que se puede expresar como el cociente de dos números enteros (excluyendo la división entre cero) se conoce como un número racional.

La representación de este conjunto será por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

A a se le llama numerador y a b denominador de la fracción. Una fracción $\frac{a}{b}$ es **irreducible** si los únicos factores comunes de a y b son 1 y -1. En tal caso, se dice dice que esta es la **representación canónica** de ese número.

Cualquier número entero se puede escribir de esta forma, pues se puede dividir él mismo entre 1, así que tenemos que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Además, los números racionales se pueden expresar en forma decimal mediante un proceso de división normal.
La expansión decimal de un número racional es finita o bien infinita periódica.

Ejemplo 2.9

Pruebe que $47,\overline{126}$ es racional.

Prueba:
Sea $x = 47,\overline{126}$
$\Rightarrow 1000x = 47126,\overline{126}$
$\Rightarrow 1000x - x = 47126,\overline{126} - 47,\overline{126}$
$\Rightarrow 999x = 47079$
$\Rightarrow x = \left(\dfrac{47079}{999}\right) \in \mathbb{Q}$

$\therefore 47,\overline{126}$ es racional.

Ejercicios 2.6

2.14 **Orden en $\mathbb{Q}$.** Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ y $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con $b > 0$, $d > 0$ y $q > 0$, decimos que $\frac{a}{b}$ es menor que $\frac{c}{d}$ y lo escribimos

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

si $ad < bc$. O bien podemos decir que $\frac{c}{d}$ es mayor que $\frac{a}{b}$.

También podemos decir que $\frac{a}{b}$ es menor o igual que $\frac{c}{d}$ y lo escribimos como

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$$

si

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ o bien } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Con base en esto, muestre que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} < \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{p}{q}$$

2.15 **Densidad en $\mathbb{Q}$.** A diferencia de los números enteros consecutivos m y $m+1$, para los cuales entre ellos no hay otro número, entre dos números racionales siempre es posible encontrar otro número racional. A esta propiedad se le llama **densidad del conjunto de números racionales**. De esta manera, demuestre que el conjunto de los números racionales es denso. Para ello, considere dos números racionales representados por $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, donde $b > 0$ y $d > 0$ y suponga que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Luego muestre que

$$\frac{a}{b} < \frac{ad+bc}{2bd} < \frac{c}{d}$$

para $\dfrac{ad+bc}{2bd}$ el valor medio entre $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{c}{d}$.

2.16 Determine la representación fraccionaria canónica de cada uno de los siguientes números racionales. (La línea que se encuentra sobre algunos números en su parte decimal se denomina **mantisa** e indica que dichos números se repiten)

a.) 6
b.) 1.4
c.) 1.1257
d.) $12.232323\ldots$
e.) $1.2\overline{43}$
f.) $31.12\overline{123}$
g.) 3.41
h.) $3.4\overline{1}$
i.) $38.24\overline{512}$

2.6.4 El conjunto de los números irracionales

Hay números cuya expansión decimal es infinita no periódica, a estos se les llama números irracionales y se denotan como $\mathbb{I}$. Empezaremos por probar la existencia de esos números.

Teorema 2.8

El número $\sqrt{2}$ es un número irracional

Demostación en prosa

Por contradicción supongamos que $\sqrt{2}$ es irracional, por lo que se puede expresar de la forma canónica como

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

Elevando al cuadrado se obtiene

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2\ (*)$$

Esto revela que p^2 es **divisible entre dos** y en consecuencia que $p = 2n$ para algún entero n. Sustituyendo en $(*)$

$$4n^2 = 2q^2 \Rightarrow 2n^2 = q^2$$

lo que muestra que q^2 es **divisible entre dos** y en consecuencia que $q = 2m$ para algún entero m.

Pero llegamos **a una contradicción**, por que p y q no tienen divisores comunes al ser escrita en forma canónica.

Por lo tanto $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Ejercicios 2.7

2.17 Demostrar que $\sqrt{19}$ es un número irracional. Esto significa que no se puede expresar $\sqrt{19}$ como una fracción $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$ en forma irreducible.

2.18 Pruebe que entre dos números racionales siempre es posible encontrar uno irracional. Para ello, considere $x, y \in \mathbb{Q}$ tales que $x < y$. Es necesario mostrar que existe $z \in \mathbb{I}$ con $x < z < y$. Parta del hecho de que

$$(x-y)(\sqrt{2}-1) < 0$$

2.6.5 Intervalos

Un caso particular de subconjuntos del conjunto de los números reales lo conforman los intervalos, éstos son de uso frecuente principalmente en la solución de inecuaciones. Existen diferentes tipos de intervalos los cuales procedemos a definir.
Sean a y b números reales y supongamos que $a < b$. Se define:

Definición 2.6 (El intervalo abierto de extremos a y b)

El intervalo abierto de extremos a y b, denotado $]a,b[$ de la siguiente manera

$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

Note que los extremos a y b no se incluyen.

Definición 2.7 (El intervalo cerrado de extremos a y b)

El intervalo cerrado de extremos a y b, denotado $[a,b]$ de la siguiente manera

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

Note que los extremos a y b se incluyen.

Además se definen los siguientes intervalos

Definición 2.8

$$[a,b[=\{x\in\mathbb{R}/a\leq x<b\}$$

Definición 2.9

$$]a,b]=\{x\in\mathbb{R}/a<x\leq b\}$$

Definición 2.10

$$[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}/a\leq x\}$$

Definición 2.11

$$]-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}/x\leq b\}$$

Ejercicios 2.8

2.19 Defina y represente los siguientes intervalos

a.) $]a,+\infty[$
b.) $]-\infty,b[$
c.) $]-\infty,+\infty[$
d.) $[3,5]\cup]2,6]$
e.) $[3,5]\cap]2,6]$
f.) $[5,8]\cup]3,6]$
g.) $[5,8]\cap[2,6]$

2.20 Realice las operaciones con intervalos indicadas y escriba la respuesta en notación de intervalo.

a.) $\left]-\sqrt{2},3\right[\cap]2,5[$
b.) $]2,4]\cap[1,6[$

c.) $]1,4[\cup \left]\frac{7}{2},7\right[$
d.) $]2,4] \cup]4,6[$
e.) $[-1,4] \cap]1,+\infty[$
f.) $]-\infty,3] \cup]4,6[$
g.) $(]2,5] \cap]-1,4[) \cup ([-2,3] \cap [-3,1[)$
h.) $[-7,5] \cap]5,+\infty[$
i.) $\left]-\infty,\frac{2}{3}\right] \cup \left]\frac{2}{3},+\infty\right[$
j.) $\left(\left]-4,-\frac{1}{2}\right] -]-2,0[\right) \cup \left(\left[-\frac{1}{2},0\right] \cup]0,2]\right)$
k.) $]-5,7] -]4,7[$
l.) $]-1,0[- \left]-7,\frac{1}{2}\right]$

2.21 Si $A = [-1,5]$, $B = [3,7]$ y $C =]2,6[$; defina y represente, mediante las siguientes operaciones de conjuntos, los intervalos resultantes.
a.) $(A \cup B) \cup C$
b.) $(A \cap C) \cap B$
c.) $(A \cap B) \cup C$
d.) $\overline{B} \cap C$

2.7 Potencias en el conjunto de los números reales

Definición 2.12 (Potencia de un número real)

Sean $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n > 1$, se define la enésima potencia de a, la cual se denota como a^n, de la siguiente manera

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces } a}$$

Además se define
1. $\forall a \in \mathbb{R}, a^1 = a$
2. $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, a^0 = 1$

En la expresión $a^n = b$, a se llama **base** de la potencia, n se llama **exponente** de la potencia y b se llama **potencia**.

Ejemplo 2.10

1. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
2. $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$
3. $(-31)^1 = -31$

4. $(-17)^0 = 1$

Definición 2.13 (Potencia de base real con exponente entero negativo)

$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ se define a^{-n} de la siguiente manera

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo 2.11

1. $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$
2. $(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5}$

2.7.1 Propiedades de las potencias

Teorema 2.9 (Propiedades de las potencias)

1. Producto de potencias de igual base: $\forall a \in \mathbb{R}; \forall m,n \in \mathbb{N} : [a^m \cdot a^n = a^{m+n}]$
2. Potencia de una potencia: $\forall a \in \mathbb{R}; \forall m,n \in \mathbb{N} : [(a^m)^n = a^{m \cdot n}]$
3. Producto de potencias de igual exponente: $\forall a,b \in \mathbb{R}; \forall m \in \mathbb{N} : [(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m]$
4. Cociente de potencias de igual exponente: $\forall a,b \in \mathbb{R}, b \neq 0; \forall m \in \mathbb{N} : \left[\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\right]$
5. Cociente de potencias de igual base: $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0; \forall m,n \in \mathbb{N} : \left[\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \vee \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}\right]$

Las demostraciones quedan como ejercicio al lector.

Ejemplo 2.12

1. $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$
2. $(3^5)^2 = 3^{5 \cdot 2} = 3^{10}$
3. $(4 \cdot 3)^5 = 4^5 \cdot 3^5$
4. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$

N **Notación**

Es importante observar que

$$-a^n = -(a^n)$$

Ejemplo 2.13

1. $-3^4 = -(3^4) = -81$
2. $-5^3 = -(5^3) = -125$

Ejercicios 2.9

2.22 Demuestre las propiedades de las potencias del teorema 2.9

2.23 ¿Qué condiciones debe cumplir n para que $-a^n$ sea igual a $(-a)^n$?

2.24 Simplique y justifique cada paso en las siguientes operaciones

a.) $\dfrac{2+\dfrac{1}{2^3}}{1-3}$

b.) $(2^{2015}+2^{2015})^{-1}\cdot\dfrac{6^{2016}}{3^{2016}}$

c.) $\dfrac{(5^{-2}-(-4)^{-4})^{-1}}{5-\dfrac{5(-2)}{5-2}}$

d.) $2^{-1}+3^{-1}+7^0$

2.8 Algunas identidades importantes

Como consecuencia de la definición de potencias en el conjunto de los números reales y de sus propiedades se puede demostrar las siguientes identidades, de uso frecuente en la solución de ecuaciones e inecuaciones, en factorización, en racionalización, entre otros.

Teorema 2.10

$\forall a,b\in\mathbb{R}$ se cumple

1. $(a+b)^2 = a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$
3. $(a-b)\cdot(a+b) = a^2-b^2$
4. $(a-b)\cdot(a^2+a\cdot b+b^2) = a^3-b^3$
5. $(a+b)\cdot(a^2-a\cdot b+b^2) = a^3+b^3$
6. $(a+b)^3 = a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$
7. $(a-b)^3 = a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3$

Las demostraciones quedan como ejercicio al lector.

Ejemplo 2.14

El uso de las fórmulas anteriores nos garantiza la veracidad de las siguientes igualdades

- $(2 \cdot x - 3 \cdot y)^2 = 4 \cdot x^2 - 12 \cdot x \cdot y + 9 \cdot y^2$
- $(4 \cdot x + 3)^2 = 16 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 9$
- $27 \cdot x^3 - 8 = (3 \cdot x - 2) \cdot (9 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 4)$
- $y^2 - 1 = (y - 1) \cdot (y + 1)$

Ejercicios 2.10

2.25 Demuestre las identidades del teorema 2.10

2.26 Demuestre que si $a, b, c \in R$ entonces

$$(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \geq 27abc$$

2.27 Pruebe que $\forall a, b, c \in R$ se cumple que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

2.28 Demuestre que para cualesquiera números reales a, b, c y d se cumple que:

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$$

2.29 Demuestre que, para $x \geq 0$ y $y \geq 0$

$$x^2 > y^2 \Leftrightarrow x > y$$

2.30 Demuestre que

$$(a + b)^4 = a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4$$

2.9 Radicales en el conjunto de los números reales

Definición 2.14 (Radical de un número real)

Sean $a \in \mathbb{R}$; $a \geq 0$; $n \in \mathbb{N}$; $n > 1$. Se define la raíz enésima de a y se denota $\sqrt[n]{a}$ como el único número real no negativo b que satisface la igualdad $b^n = a$, o sea:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Definición 2.15 (Radical de un número real negativo)

Sean $a \in \mathbb{R}$; $a \geq 0$; $n \in \mathbb{N}$; $n > 1$ y n impar. Se define la raíz enésima de a y se denota $\sqrt[n]{a}$ como el único número real **negativo** b que satisface la igualdad $b^n = a$, o sea:

$$\sqrt[a]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Notas

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ con $a \geq 0$ para n par y $a \in \mathbb{R}$ para n impar.
2. $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ con $a \geq 0$
3. En la expresión $\sqrt[n]{a}$, a recibe el nombre de **subradical**, n el de **índice del radical** y $\sqrt{\ }$ se le llama **símbolo radical**.

Ejemplo 2.15

1. $\sqrt[5]{32} = 2$ pues $2^5 = 32$.
2. $\sqrt[3]{-27} = -3$ pues $(-3)^3 = -27$.
3. $\sqrt[4]{16} = 2$ pues $2^4 = 16$.
4. $\sqrt{169} = 13$ pues $13^2 = 169$

Notas
Note que, radicales con subradical negativo, están definidos en $\mathbb{R}$ únicamente si el índice es impar. Además la raíz enésima de un número real positivo es otro número real positivo, y la raíz enésima de un número real negativo es otro número real negativo.

2.9.1 Algunas propiedades de los radicales

Teorema 2.11 (Propiedades de los radicales)

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}$ (Según n par o impar) $: [\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}]$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0; \forall n \in \mathbb{N}$ (Según n par o impar) $: \left[\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right]$
3. $\forall a \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}$ (Según n par o impar) $: [\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}]$
4. $\forall a, j, k \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}$ (Según n par o impar) $: [j \cdot \sqrt[n]{a} + k \cdot \sqrt[n]{a} = (j+k) \cdot \sqrt[n]{a}]$
5. $\forall a \in \mathbb{R}; \forall n, m \in \mathbb{N}, m > 1$ (Según n par o impar) $: [\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}]$
6. $\forall a \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}$ (Si n es impar) $: [\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}]$

Las demostraciones quedan como ejercicio al lector.

Ejemplo 2.16

1. $\sqrt[4]{3 \cdot 2} = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{2}$
2. $\sqrt[3]{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}$
3. $\sqrt[11]{3^2} = 3^{\frac{2}{11}}$
4. $3\sqrt[7]{8} + 10\sqrt[7]{8} = (3+10)\sqrt[7]{8} = 13\sqrt[7]{8}$
5. $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$

Ejercicios 2.11

2.31 Demuestre las propiedades de los radicales del teorema 2.11

2.32 Demuestre que, para $x \geq 0$ y $y \geq 0$

$$x > y \Leftrightarrow \sqrt{x} > \sqrt{y}$$

2.33 Simplifique la siguiente expresión

$$\left((-3)^2 \div 9^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\right)^{-1} - \left(\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}\right) \cdot 2^{\frac{-1}{3}} - 4 \cdot 4^{-1}$$

2.34 Simplifique la siguiente expresión

$$\left((-1)^2 - 2^{-3} \div \frac{1}{2}\right)^{-1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\right) - 3^0 \cdot 3^2$$

2.35 Verifique que

$$\sqrt[6]{8\sqrt{2}\left(7+4\sqrt{3}\right)} \cdot \sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt{2} - 2\sqrt{6\sqrt{2}}}} = 2\sqrt[6]{2}$$

2.36 Sea

$$A = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - 2\right)\sqrt{\sqrt{3} + 2}$$

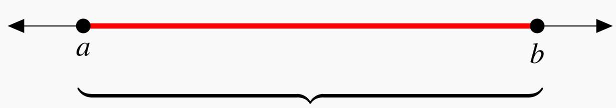
Calcule A^2 y deduzca el valor de A

2.10 Valor absoluto en $\mathbb{R}$

En álgebra elemental, en cálculo, y en análisis es bastante frecuente tener que realizar cálculos con desigualdades. Un caso de particular importancia lo conforman aquellas desigualdades que están relacionadas con el concepto de valor absoluto, por esta razón dedicamos parte de esta sección al estudio de dicho concepto

Definición 2.16

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y supongamos que $a \leq b$, se llama distancia entre a y b, y la denotamos $d(a,b)$ al número no negativo $b - a$.



$$d(a,b) = b - a$$

Ejemplo 2.17

1. $d(1,4) = 4 - 1 = 3$
2. $d(-3,2) = 2 - (-3) = 5$
3. $d(-11\,,-3) = -3 - (-11) = 8$
4. $d(-17\,,\,0) = 0 - (-17) = 17$

De particular importancia es el caso de encontrar la distancia entre un número real y el cero. A esta distancia se le llama **valor absoluto** de x y se denota por $|x|$.

Definición 2.17
Sea $x \in \mathbb{R}$. Se define el valor absoluto de x por

$$|x| = d(x,0) = d(0,x) = \begin{cases} x - 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En términos formales

$$\forall x \in \mathbb{R} : [(x \geq 0 \Rightarrow x = |x|) \vee (x < 0 \Rightarrow -x = |x|)]$$

Ejemplo 2.18

1. $|5| = 5 - 0 = 5$
2. $|0| = 0 - 0 = 0$
3. $|-7| = 0 - (-7) = 7$

2.10.1 Propiedades del valor absoluto

Las siguientes propiedades del valor absoluto son de gran utilidad para la solución de ecuaciones e inecuaciones que incluyen valores absolutos, así como para la descripción de algunos conjuntos particulares.

Teorema 2.12

1. $\forall x \in \mathbb{R} : [|x| \geq 0]$
2. $\forall x \in \mathbb{R} : [|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0]$
3. $\forall x \in \mathbb{R} : [\sqrt{x^2} = |x|]$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} : [|x \cdot y| = |x| \cdot |y|]$
5. $\forall x \in \mathbb{R} : [|-x| = |x|]$
6. $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 : [|x^{-1}| = |x|^{-1}]$
7. $\forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0 : \left[\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}\right]$
8. $\forall x \in \mathbb{R}, k > 0 : [|x| = k \Leftrightarrow (x = k) \vee (x = -k)]$

9. $\forall x \in \mathbb{R}, k > 0 : [|x| < k \Leftrightarrow (-k < x < k)]$ [a]
10. $\forall x \in \mathbb{R}, k > 0 : [|x| > k \Leftrightarrow (x > k) \vee (x < -k)]$[b]
11. $\forall x \in \mathbb{R} : [-|x| \leq x \leq |x|]$
12. $\forall x, y \in \mathbb{R} : [|x + y| \leq |x| + |y|]$
13. $\forall x, y \in \mathbb{R} : [||x| - |y|| \leq |x - y|]$

[a] Similarmente con $|x| \leq k$
[b] Similarmente con $|x| \geq k$

A manera de ejemplo consideramos la demostración de las propiedades 1,3, 4, 8, 9 y 13, el resto de las demostraciones se dejan como ejercicio para el estudiante

Ejemplo 2.19 Demostración del Punto 1 en el Teorema 2.12

Prueba: Se utilizará el método directo de demostración
Hipótesis: Todos los axiomas, propiedades y teoremas previos. Además se tiene $x \in \mathbb{R}$
H.q.m.: $|x| \geq 0$

1)	$x \in \mathbb{R}$	(Hipótesis)
2)	$\Rightarrow [x \in \mathbb{R}^+] \vee [-x \in \mathbb{R}^+] \vee [x = 0]$	(O3)
3)	$\Rightarrow [x - 0 \in \mathbb{R}^+] \vee [0 - x \in \mathbb{R}^+] \vee [x = 0]$	$(-x = 0 + -x = 0 - x$ y $x = x + 0 = x - 0)$
4)	$\Rightarrow (0 < x) \vee (x < 0) \vee (x = 0)$	(Definición 2.3)
5)	$\Rightarrow (x < 0) \vee [(0 < x) \vee (x = 0)]$	(Asociación y conmutación de la disyunción)
6)	$\Rightarrow (x < 0) \vee (0 \leq x)$	(Definición 2.4)
7)	$\Rightarrow (x < 0) \vee (x \geq 0)$	(Definición 2.4)
8)	$\Rightarrow (|x| = -x > 0) \vee (|x| = x \geq 0)$	(Teorema 2.5 punto 8 con $c = -1$)
9)	$\Rightarrow |x| \geq 0$	(Definición 2.17 e Idempotencia)

$\therefore |x| \geq 0$ es verdadero.

Ejemplo 2.20 Demostración del Punto 3 en el Teorema 2.12

Prueba: Se utilizará el método directo de demostración
Hipótesis: Todos los axiomas, propiedades y teoremas previos.
H.q.m.: $\sqrt{x^2} = |x|$

1)	$\sqrt{x^2} = c \Leftrightarrow x^2 = c^2$	(P1 y Definición 2.14 con $c > 0$ y $x^2 \geq 0$)
2)	$\Rightarrow x^2 - c^2 = 0$	(P4, A4 y A3)
3)	$\Rightarrow (x-c)(x+c) = 0$	(Teorema 2.10 punto 3)
4)	$\Leftrightarrow [x-c=0] \vee [x+c=0]$	(Teorema 2.1)
5)	$\Rightarrow [x=c] \vee [x=-c]$	(P4,A4 y A3)
6)	$\Rightarrow [x=c>0] \vee [x=-c<0]$	(Paso 1 y Teorema 2.5 punto 8 con $c=-1$)
7)	$\Rightarrow [\lvert x\rvert = c] \vee [\lvert x\rvert = -x = c > 0]$	(Teorema 2.5 punto 8 con $c=-1$ y Definición 2.17)
8)	$\Rightarrow (\lvert x\rvert = c) \vee (\lvert x\rvert = c)$	(Simplificación)
9)	$\Rightarrow \lvert x\rvert = c$	(Idempotencia)

$\therefore \sqrt{x^2} = |x|$ es verdadero.

Un **corolario** importante de esta demostración es que

Corolario 2.1 Equivalencia de la raíz cuadrado con el valor absoluto

$$\sqrt{x^2} = |x| \Leftrightarrow x^2 = |x|^2$$

implementando la definición de **radical de un número real** en el corolario 2.1.

Ejemplo 2.21 Demostración del Punto 4 en el Teorema 2.12

Prueba: Se utilizará el método directo de demostración
Hipótesis: Todos los axiomas, propiedades y teoremas previos. Además se tiene $x, y \in \mathbb{R}$
H.q.m.: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

1)	$\lvert x \cdot y\rvert = \lvert x \cdot y\rvert$	(P1)
2)	$\Rightarrow \lvert x \cdot y\rvert = \sqrt{(xy)^2}$	(Teorema 2.12 punto 3)
3)	$\Rightarrow \lvert x \cdot y\rvert = \sqrt{x^2 \cdot y^2}$	(Teorema 2.9 punto 3)
4)	$\Rightarrow \lvert x \cdot y\rvert = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2}$	(Teorema 2.11 punto 1)
5)	$\Rightarrow \lvert x \cdot y\rvert = \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$	(Teorema 2.12 punto 3)

$\therefore |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ es verdadero.

Ejemplo 2.22 Demostración del Punto 8 en el Teorema 2.12

Prueba: Se utilizará el método directo de demostración con un bicondicional tautológico ($k > 0$ en todo caso).
Hipótesis: Todos los axiomas, propiedades y teoremas previos. Además se tiene $x = k \vee x = -k / |x| = k$
H.q.m.: $|x| = k / x = k \vee x = -k$

1)	$x = k \vee x = -k$	(Hipótesis o lo que se debe mostrar)
2)	$\Leftrightarrow x - k = 0 \vee x + k = 0$	(P4, A4 y A3)
3)	$\Leftrightarrow (x-k)(x+k) = 0$	(Teorema 2.1)
4)	$\Leftrightarrow x^2 - k^2 = 0$	(Teorema 2.10 punto 3)
5)	$\Leftrightarrow x^2 = k^2$	(P4,A3 y A4)
6)	$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = k$	(Definición 2.14)
7)	$\Leftrightarrow \|x\| = k$	(Teorema 2.12 punto 3. También hipótesis o la tesis)

$\therefore |x| = k \Leftrightarrow (x = k \vee x = -k)$ es verdadero. Note que es posible "devolvernos".

Ejemplo 2.23 Demostración del Punto 9 en el Teorema 2.12

Prueba: Se utilizará el método directo de demostración con un bicondicional tautológico ($k > 0$ en todo caso).
Hipótesis: Todos los axiomas, propiedades y teoremas previos. Además se tiene $|x| < k / -k < x < k$
H.q.m.: $-k < x < k / |x| < k$

1)	$-k < x < k$	(Hipótesis o tesis)
2)	$\Leftrightarrow -k < x \wedge x < k$	(Transitividad Extendida)
3)	$\Leftrightarrow 0 < x + k \wedge x - k < 0$	(Teorema 2.5 punto 3 y A4)
4)	$\Leftrightarrow 0 = 0 \cdot (x-k) > (x+k) \cdot (x-k)$	(Teorema 2.5 punto 8)
5)	$\Leftrightarrow 0 > x^2 - k^2$	(Teorema 2.10 punto 3)
6)	$\Leftrightarrow k^2 > x^2$	(Teorema 2.5 punto 3 y A4)
7)	$\Leftrightarrow k^2 > \|x\|^2$	(Corolario del Teorema 2.12 punto 3)
8)	$\Leftrightarrow k > \|x\|$	(Ejercicio 2.29)

$\therefore |x| < k \Leftrightarrow (-k < x < k)$ es verdadero. Note que es posible "devolvernos" siempre y cuando se analice adecuadamente el signo en el producto $(x+k)(x-k)$.

Un **lema** antes de mostrar la siguiente propiedad es que

$$|a-b| = |1 \cdot a + -b| = |(-1) \cdot (-1) \cdot a + (-1) \cdot b| = |(-1)((-1)a+b)|$$

$$= |-1| \cdot |-a+b| = |b-a|$$

De esta forma $|a-b| = |b-a|$ donde se utilizo el Teorema 2.12 punto 4 por mencionar

Ejemplo 2.24 Demostración del Punto 13 en el Teorema 2.12

Prueba: Se utilizará el método directo de demostración.
Hipótesis: Todos los axiomas, propiedades y teoremas previos.
H.q.m.: $||x| - |y|| \leq |x| - |y|$

1)	$x, y \in \mathbb{R}$	(Hipótesis)
2)	$\Rightarrow \lvert x\rvert \geq 0 \wedge \lvert y\rvert \geq 0$	(Teorema 2.12 punto 1)
3)	$\Rightarrow \lvert x-y+y\rvert \geq 0 \wedge \lvert y-x+x\rvert \geq 0$	(A4)
4)	$\Rightarrow \lvert x-y+y\rvert \leq \lvert x-y\rvert + \lvert y\rvert \wedge \lvert y-x+x\rvert \leq \lvert y-x\rvert + \lvert x\rvert$	(Teorema 2.12 punto 12)
5)	$\Rightarrow \lvert x\rvert \leq \lvert x-y\rvert + \lvert y\rvert \wedge \lvert y\rvert \leq \lvert y-x\rvert + \lvert x\rvert$	(A4)
6)	$\Rightarrow \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \leq \lvert x-y\rvert \wedge \lvert y\rvert - \lvert x\rvert \leq \lvert y-x\rvert$	(Teorema 2.5 punto 3 y A4)
7)	$\Rightarrow \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \leq \lvert x-y\rvert \wedge \lvert y\rvert - \lvert x\rvert \leq \lvert x-y\rvert$	(Lema $\lvert b-a\rvert = \lvert a-b\rvert$)
8)	$\Rightarrow \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \leq \lvert x-y\rvert \wedge \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \geq -\lvert x-y\rvert$	(Varios Teoremas (¿Cuáles?))
9)	$\Rightarrow \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \leq \lvert x-y\rvert \wedge -\lvert x-y\rvert \leq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$	(Definición 2.4)
9)	$\Rightarrow -\lvert x-y\rvert \leq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \wedge \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \leq \lvert x-y\rvert$	(Conmutatividad de $\wedge$)
10)	$\Rightarrow -\lvert x-y\rvert \leq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \leq \lvert x-y\rvert$	(Transitividad Extendida)
11)	$\Rightarrow \lvert\lvert x\rvert - \lvert y\rvert\rvert \leq \lvert x-y\rvert$	(Teorema 2.12 punto 9)

$\therefore \lvert\lvert x\rvert - \lvert y\rvert\rvert \leq \lvert x-y\rvert$ es verdadero.

Ejercicios 2.12

2.37 Demuestre las propiedades restantes del teorema 2.12

2.38 Sean $a,\ b,\ c$ números reales tales que $c < b$, $a+c > b$ y $a+c \neq 0$. Simplifique la expresión

$$\frac{|a-|c-b||+b}{a+c}$$

2.39 Sabiendo que $a < b, c < a, a < 0, b > 0$, simplifique la siguiente expresión

$$\frac{\sqrt{a^2-2ab+b^2} - \sqrt{a^2+2ac+c^2}}{|a\cdot c| - |a\cdot b|}$$

2.40 Sean $a < b < 0$. Simplifique al máximo la siguiente expresión

$$A = \frac{\sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{(a+b)^2}}{-2}$$

y calcule $A+|A|$.

3 — El conjunto de los números complejos

3.1 Introducción

La historia de la matemática está constituida de momentos donde se presenta un problema que no puede ser resuelto con las herramientas existentes, fue así, como surgió el conjunto de los números racionales y el de los irracionales. Consideremos la ecuación cuadrática $x^2+1=0$. Si intenta resolver dicha ecuación con el método de la fórmula general se obtiene que su discriminante es igual a -4, resultado que sugiere que no existen números reales que satisfagan la ecuación planteada. Si intentáramos despejar el valor de la incógnita, tendríamos que:

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$$

Como no existe un número real cuyo cuadrado sea -1, tales "raíces" no tienen sentido matemático dentro del contexto estudiado, y su aceptación contradice algunas de las propiedades que tiene el conjunto de los números reales, producto de la relación de orden definida en éste. En consecuencia, dichos números fueron considerados "imposibles" o "imaginarios", y por lo tanto descartados.

> "Los babilonios (alrededor del año 2000 antes de Cristo) ya conocían esencialmente el método para resolver ecuaciones cuadráticas, pero los matemáticos de aquellos tiempos no especulaban acerca de la naturaleza de las raíces imaginarias. La especulación empezó en los siglos XVI y XVII y poco a poco se encontró que las reglas del álgebra podían aplicarse a cantidades imaginarias y que la introducción de estas cantidades simplificaban ciertos problemas. Hacia el siglo XVIII, los números imaginarios se utilizaban con tanta frecuencia que Euler encontró conveniente introducir la i para representar a $\sqrt{-1}$. En la actualidad, esta notación se usa casi universalmente, excepto en ingeniería eléctrica, donde se utiliza j en vez de i.[1]"

Si bien es cierto, al inicio se resolvían problemas utilizando los llamados números imaginarios, sin mucho rigor y formalización, un reto que se le planteó a los matemáticos del siglo XVIII y del

[1] Polya, G. y Latta G. (1976) *Variable Compleja*, Editorial Limusa: México

siglo XIX, fue formalizar dichos números, y sobre todo crear una estructura algebraica que fuera consistente y ampliara el conjunto de los números reales.

Un primer paso que se dio es llamar a estos nuevos números, con el nombre de complejos, en vez del esotérico término imaginario y la estructura algebraica que los contiene, se denominó como el *conjunto de los números complejos* y se representó con el símbolo $\mathbb{C}$.

El siguiente paso es establecer una definición de número complejo que sea consistente con el enfoque de los números reales estudiada hasta el momento, de forma tal que se cumpla que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

A continuación se presenta un enfoque breve de los números complejos, con el fin de tener una herramienta matemática que nos permita, en primera instancia, resolver ecuaciones polinomiales de grado dos.

N **Notas**

1. La expresión $\sqrt{-1}$ la denotaremos con la letra i, por lo que escribiremos $i = \sqrt{-1}$, o en forma equivalente diremos que $i^2 = -1$.
2. Note que, de acuerdo con lo anterior, si a es un número real, entonces se tiene que:
$$\sqrt{-a} = \sqrt{-1 \cdot a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a} = i\sqrt{a}$$
Por ejemplo:
$$\sqrt{-4} = i\sqrt{4} = i2 = 2i$$

Definición 3.1 (Número Complejo)

Sean a y b números reales entonces las expresiones de la forma $a+bi$, donde $i = \sqrt{-1}$, reciben el nombre de *número complejo*. El conjunto de los números complejos, denotado $\mathbb{C}$, se define de la siguiente forma

$$\mathbb{C} = \{z = a+bi | a,b \in \mathbb{R}\}$$

El número a es la parte real de z, denotado $\text{Re}(z)$ y el número b es la parte imaginaria de z denotado $\text{Im}(z)$

Ejemplo 3.1

1. Los números $z = 4+2i$ y $p = -7i$ son complejos pues $\text{Re}(z) = 4$ e $\text{Im}(z) = 2$. Además, $\text{Re}(p) = 0$ e $\text{Im}(p) = -7$.¿Y qué pasa con el número $q = 5$ es complejo?
2. Resolver la ecuación $x^2+x+1 = 0$
$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ y } x_2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
3. Factorizar el polinomio x^2+9
$$x^2-(-9) = x^2 - \left(\sqrt{-9}\right)^2 = x^2-(3i)^2 = (x-3i)(x+3i)$$

Observe que si a es un número real entonces:

$$a = a + 0i$$

por lo que, se deduce que todo número real es un número complejo y se cumple que

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Dicha idea es la prueba del siguiente teorema (estructurar los detalles)

Teorema 3.1 ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)
El conjunto de los números reales es un subconjunto del conjunto de los números complejos

3.2 Operaciones con números complejos

Definición 3.2 (Igualdad entre números complejos)
Sean a, b, c y d números reales, entonces:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

La definición anterior lo que afirma es que dos números complejos son iguales si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria.

En forma similar que en los números reales, es posible realizar operaciones entre números complejos, las cuales se definen a continuación.

Definición 3.3 (Adición entre números complejos)
Sean a, b, c y d números reales, entonces se define

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Note que en la definición anterior el símbolo + se usa en dos formas diferentes: en una se utiliza como una operación que relaciona números reales, y en la otra relaciona números complejos.

Definición 3.4 (Sustracción entre números complejos)
Sean a, b, c y d números reales, entonces se define

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Definición 3.5 (Multiplicación entre números complejos)
Sean a, b, c y d números reales, entonces se define

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Nota

Para multiplicar números complejos no es necesario que recuerde la fórmula anterior, sino que puede obtener el mismo resultado multiplicando los dos números complejos como si fueran binomios y luego reemplazando i^2 por -1, de la siguiente forma:

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = ac+adi+bci-bd = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Teorema 3.2 (Neutro Aditivo complejo)

Existe un número complejo, denotado 0, para el cual $x+0=0+x=x, \forall x \in \mathbb{C}$

Prosa de la prueba

Sean $x=a+bi$ y $0=0+0i$ entonces:

$$x+0=(a+bi)+(0+0i)=(a+0)+(b+0)i=a+bi$$

$$0+x=(0+0i)+(a+bi)=(0+a)+(0+b)i=a+bi$$

El número $0+0i$ recibe el nombre de neutro aditivo de la adición definida en el conjunto de los números complejos.

Teorema 3.3 (Conmutatividad Aditiva compleja)

Sean x, y números complejos, entonces se cumple que $x+y=y+x$

Prosa de la prueba

Sean $x=a+bi$ y $y=c+di$ entonces se tiene que

$$x+y=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i=(c+a)+(d+b)=(c+di)+(a+bi)=y+x$$

La adición es conmutativa en el conjunto de los números complejos

Teorema 3.4 (Inverso Aditivo complejo)

Sea x un número complejo tal que $x=a+bi$, entonces el inverso aditivo de x es el número complejo $-x$, donde $-x=-(a+bi)=-a+(-b)i$

Prosa de la prueba

Para que $-x$ sea el inverso de x, se debe demostrar que

$$\begin{aligned} 0 = &\ x + -x \\ = &\ -x + x \\ = &\ (a+bi) - (a+bi) \\ = &\ a + bi - a - bi \\ = &\ a + bi - a - bi \end{aligned}$$

Como la adición es conmutativa, entonces se tiene el resultado $-x + x = 0$

Teorema 3.5 (Producto conmutativo complejo)
Sean x, y números complejos, entonces se cumple que $x \cdot y = y \cdot x$

Prosa de la prueba

Sean $x = a + bi$ y $y = c + di$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned} x \cdot y = &\ (a+bi) \cdot (c+di) \\ = &\ ac + adi + bci - bd \\ = &\ ca + cbi + dai - db \\ = &\ (c+di) \cdot (a+bi) \\ = &\ y \cdot x \end{aligned}$$

Por lo tanto, La multiplicación es conmutativa en el conjunto de los números complejos.

Teorema 3.6 (Neutro del producto complejo)
Existe un número complejo, denotado 1, para el cual $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ para todo $x \in \mathbb{C}$.

Prosa de la prueba

Sean $x = a + bi$ y $1 = 1 + 0i$, entonces

$$x \cdot 1 = (a+bi)\cdot(1+0i) = a\cdot 1 + a\cdot 0 + bi \cdot 1 - b \cdot 0 = a + bi = x$$

Como la multiplicación es conmutativa, entonces se tiene el resultado $1 \cdot x = x$

Teorema 3.7 (Inverso del producto complejo)

Sea x un número complejo tal que $x = a + bi$ con $a \neq 0$ o $b \neq 0$, entonces el inverso multiplicativo de x es el número complejo x^{-1}, donde

$$x^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Prosa de la prueba

Para que x^{-1} sea el inverso multiplicativo de x se debe cumplir que $x \cdot x^{-1} = 1$. De esta manera

$$\begin{aligned}
x \cdot x^{-1} &= (a+bi)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right) \\
&= \frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2}i + \frac{ba}{a^2+b^2}i + \frac{b^2}{a^2+b^2} \\
&= \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \\
&= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Similarmente, que en los resultados anteriores, como la multiplicación definida en el conjunto de los números complejos es conmutativa, entonces se cumple que $x^{-1} \cdot x = 1$.

Ejemplo 3.2

Para determinar el inverso multiplicativo de $3 + 2i$, y en vez de aplicar la fórmula dada en el teorema anterior, procedemos de la siguiente forma:

$$(3+2i)^{-1} = \frac{1}{3+2i}$$

$$= \frac{1}{3+2i} \cdot \frac{\mathbf{3-2i}}{\mathbf{3-2i}} \qquad \text{A esto se le llama el neutro conjugado de } 3+2i$$
$$= \frac{3-2i}{9-6i+6i+4}$$
$$= \frac{3-2i}{13}$$
$$= \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$$

Por ende, el inverso multiplicativo de $3+2i$ es $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

Definición 3.6 (Conjugado Complejo)

Sea $x \in \mathbb{C}$ tal que $x = a+bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Se define el **conjugado** de x por $\overline{x}$ tal que

$$\overline{x} = \overline{a+bi} = a - bi$$

Ejemplo 3.3

1. $z = 5+7i \Rightarrow \overline{z} = 5-7i$
2. $z = -\frac{1}{2} - 4i \Rightarrow \overline{z} = -\frac{1}{2} + 4i$

Teorema 3.8 (Cociente Complejo)

Sean x, y dos números complejos tales que $x = a+bi$ y $y = c+di$, entonces el cociente $\frac{a+bi}{c+di}$ es un número complejo de la forma $e+fi$ tal que

$$e = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \text{ y } f = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

El ejercicio queda al lector. No obstante la prueba sigue la idea del ejemplo anterior, es decir, multiplicando por el **neutro conjugado** de $c+di$.

Ejemplo 3.4

Expresar en la forma $a+bi$ el número complejo $\frac{1+2i}{2-3i}$ conlleva el uso de teorema anterior. Esto es

$$\frac{1+2i}{2-3i} = \frac{1+2i}{2-3i} \cdot \frac{\mathbf{2+3i}}{\mathbf{2+3i}} \qquad \text{A esto se le llama el neutro conjugado de } 2-3i$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2+3i+4i-6}{4+6i-6i+9} \\
&= \frac{-4+7i}{13} \\
&= \frac{-4}{13} + \frac{7}{13}i
\end{aligned}
$$

Definición 3.7 (Módulo Complejo)

Sea $x \in \mathbb{C}$ tal que $x = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Se define el **módulo** de x por $|x|$ tal que

$$|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Geométricamente, el módulo de un número complejo representa una aplicación del **Teorema de Pitágoras** al **plano complejo** y define la distancia del número al origen. Esto es, existe la posibilidad de representar los números complejos como pares ordenados en un plano cuyo eje x viene a ser **el eje real** y el eje y **el eje imaginario**, como se muestra en la figura.

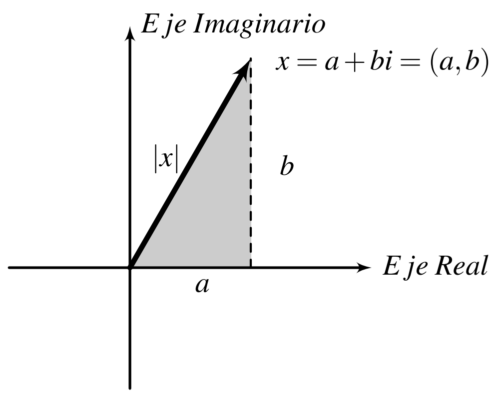


Figura 3.1: Representación de los números complejos en el Plano Complejo

Ejemplo 3.5

1. $z = -3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
2. $z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{5}i \Rightarrow |z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{61}{100}} = \frac{\sqrt{61}}{10}$

Teorema 3.9 (Relación entre el módulo y conjugado complejo)

Sea z un número complejo, entonces se cumple que

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

Prosa de la prueba

Sea $z = a + bi$, entonces:

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (a+bi)\cdot(a-bi) \\ &= a^2 - abi + abi + b^2 \\ &= a^2 + b^2 \\ &= (\sqrt{a^2+b^2})^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

Ejercicios 3.1

3.1 Demuestre el Teorema 3.8

3.2 Realice las operaciones indicadas y simplifique la expresión

$$(2i + 3i^2 + 4i^{21} - i^{30})^3$$

3.3 Determine el valor numérico de la expresión $5x^2 - 2x + 1$ si $x = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}i$, $x = -\frac{3}{2}i$ y $x = \frac{1}{2} - \frac{2}{5}i$

3.4 Realice las operaciones indicadas y exprese el resultado en la forma $a + bi$

a.) $\left(\frac{2i}{\sqrt{2}+i}\right)^3$

b.) $\frac{1-2i}{1+2i} + \frac{1+2i}{1-2i}$

c.) $i^{31} + i^{32} + i^{33}$

d.) i^{220}

e.) $(5+6i)^4$

3.5 Si $P(x) = x^3 + 3x^2 - 16$, calcule $P(2-i)$

3.6 Muestre que si $x = 1 - \sqrt{2}i$ entonces se cumple que

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{3}$$

3.7 Verifique que

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i$$

si $x=2+3i$

3.8 Determine para qué valores de x, y es cierta la siguiente igualdad

$$[x+y+(x-y+2)\,i]\,[x-2y+(x+2y-4)\,i]=0$$

3.9 Realice las operaciones indicadas y exprese el resultado en la forma $a+bi$

a.) $\sqrt{-5}\left(\sqrt{15}-\sqrt{-5}\right)$

b.) $\left(2-\sqrt{-9}\right)\div\left(2+\sqrt{-9}\right)$

c.) $\sum_{n=3}^{10} i^n$

3.10 Determine el número complejo z que cumple las condiciones dadas

a.) $\begin{cases} |2-z|=\sqrt{5} \\ z\cdot\bar{z}=7 \end{cases}$

b.) $\begin{cases} |z+1|=\sqrt{3}\,|z-1| \\ |z|=1 \end{cases}$

c.) $\begin{cases} |z|=1 \\ z\cdot\bar{z}=1 \end{cases}$

3.11 Si u y v son números complejos entonces

a.) $\overline{u\pm v}=\bar{u}\pm\bar{v}$

b.) $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}=\frac{\bar{u}}{\bar{v}}$ si $v\neq 0.$

c.) $\bar{\bar{u}}=u$

d.) $\operatorname{Re}(u)=\frac{u+\bar{u}}{2}$

e.) $\operatorname{Im}(u)=\frac{u-\bar{u}}{2i}$

f.) u es un número real si y solo si $u=\bar{u}$

3.12 Determine el valor de x y y que satisfacen

$$(1-i)x+2yi=4+2i$$

3.13 Si z y w son números complejos entonces

a.) $|z|\geq 0$

b.) $|z|=0\Leftrightarrow z=0$

c.) $\operatorname{Re}(z)\leq|z|$

d.) $\operatorname{Im}(z)\leq|z|$

e.) $|z+w|\leq|z|+|w|$

4 — Expresiones Algebraicas

4.1 Introducción

El manejo de expresiones algebraicas requiere un profundo entendimiento de su desarrollo y fundamentos. Por ello, es esencial examinar detalladamente los aspectos cruciales que incluyen su sintaxis, simbología y significado. En este contexto, el álgebra se posiciona como la disciplina matemática dedicada al estudio de la combinación de elementos pertenecientes a estructuras abstractas según reglas específicas. En sus inicios, estos elementos se concebían principalmente como números o cantidades, lo que sitúa al álgebra como una evolución y ampliación conceptual de la aritmética.

4.2 Definiciones y valor numérico

Definición 4.1 Expresión Algebraica

Una expresión se considera algebraica cuando se forma a partir de símbolos que se combinan mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. Por conveniencia, se suele omitir el signo de multiplicación $(\cdot)$ cuando este se encuentra entre letras, o entre un número y una letra, y se reemplaza por un espacio reducido $(a \cdot b = ab)$.

De acuerdo con 4.1

Ejemplo 4.1

Algunos ejemplos de expresiones algebraicas, son:

$$\frac{1}{4}r^2\sqrt{mnp}+8,\ \ \triangle^2+8-\frac{x}{2x-4},\ \ x^{\frac{1}{2}}y+xmnz-2$$

Sin embargo, para efectos prácticos, los símbolos algebraicos a utilizar son las letras minúsculas de nuestro alfabeto quedando claro que el álgebra consta de símbolos y no de letras.

Los símbolos algebraicos representan cantidades conocidas o no.

Ejemplo 4.2

Considere que la altura de una puerta es de 2.5 metros. La notación “2.5 m” no constituye una expresión algebraica, ya que el símbolo m hace referencia a “metros” y no representa una cantidad numérica. Sin embargo, si m designara el número de puertas en una casa, entonces la expresión $25m$ se clasificaría como una expresión algebraica

Definición 4.2 (Tipo de símbolos)

Los símbolos algebraicos pueden ser

1. **Constantes:** Son cantidades fijas. Entre este tipo de cantidades están los números y símbolos cuyo valor se conoce o se sabe que tiene un único valor.
2. **Variables:** Son símbolos cuyo valor varia en un subconjunto de $\mathbb{R}$. En veces ese subconjunto no se especifica, por que se asume, se desconoce o no interesa.

Ejemplo 4.3

Los símbolos mencionados, como 3, π, y $2\pi + e - 5$, representan constantes. Es importante recordar que π y e son números irracionales, lo que significa que tienen expansiones decimales infinitas no repetitivas. Concretamente, π es aproximadamente $3.1415\ldots$ y e es aproximadamente $2.7183\ldots$. Estos valores no pueden expresarse como una fracción exacta de dos enteros, lo que subraya su naturaleza irracional.

Ejemplo 4.4

Imagine que el símbolo a representa el valor numérico 2 y que h corresponde a un valor específico, como la altura de un objeto. En este escenario, tanto a como h se consideran constantes, aunque a es una constante numérica fija y h representa un valor concreto que, en este caso, es la altura. Las operaciones que combinan a y h, tales como $a+h$, $a-h$, y $\frac{2a+h}{\pi}$, generan expresiones algebraicas. Es importante destacar que estas expresiones integran los valores de a y h de manera que reflejan relaciones matemáticas definidas, independientemente de que h pueda variar en función del objeto específico al que se refiere.

Ejemplo 4.5

Las variables, en algunas ocasiones y contextos, pueden representar descripciones dentro de un conjunto dado. Algunos ejemplos son:

Variable	**Conjunto**
x : la estatura de un costarricense en metros	$x \in [0,3]$
y : la temperatura de Costa Rica en celsius	$y \in [0,55]$
z : la edad de los estudiantes de cierto colegio en años	$z \in \{11,12,\ldots,20\}$

Note que en la variable debe aparecer las unidades en que se va a medir la variable, pues esto determina el conjunto. Así, en el ejemplo anterior, si x se mide en cm, y en Kelvin, z en meses; los conjuntos cambian.

Ejemplo 4.6

Considere las incógnitas x y w, las cuales están sujetas a las ecuaciones

$$x+1=2 \text{ y } w^2-3w=0$$

Dichas incógnitas son denominadas así debido a que sus valores no son conocidos inicialmente. Surge la interrogante de si estas incógnitas serán tratadas como constantes o variables. Mediante la aplicación de métodos de resolución de ecuaciones, se determina que $x=1$. En el caso de w, se establece que puede asumir los valores 0 o 3, lo cual se representa como $w \in \{0,3\}$. Esto demuestra que x se considera una constante, al tener un valor único y determinado, mientras que w se clasifica como variable, debido a su capacidad de adoptar múltiples valores.

En el ámbito matemático, existen restricciones específicas para ciertas expresiones, como las fracciones con denominador cero, que son indefinidas, o las raíces cuadradas de números negativos (dentro del conjunto de los números reales), que no poseen solución. Tales restricciones permiten limitar los valores posibles para una variable, garantizando que las operaciones y expresiones matemáticas sean válidas y coherentes dentro de los parámetros definidos.

Ejemplo 4.7

Considere las siguientes expresiones variables y observe sus restricciones

	Variable	**Restricción**
1)	x^4-2x^2+5	No hay. La expresión es un polinomio con potencias pares. No hay divisiones por cero ni raíces cuadradas de números negativos
2)	$\dfrac{4+w}{w-3}$	$w \neq 3$
3)	$\sqrt{t^2-3t}$	$t^2-3t \geq 0$
4)	$\dfrac{m^2-3}{\sqrt[4]{m-2n}}$	$m-2n \geq 0$

En el caso 3 : ¿Puede la variable t tomar el valor de 2?. Note que si t es 2 entonces

$$t^2 - 3t = 2^2 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

Dado que $t^2 - 3t = -2$ no cumple la restricción $t^2 - 3t \geq 0$, entonces t no puede ser 2. Por el contrario, verifique que t si puede ser -4 o 6.

Ejemplo 4.8

Determine condiciones sobre las variables para que se cumpla que $\dfrac{2}{a-2} \in \mathbb{R}$.

Para que una fracción sea un número real se debe cumplir que tenga denominador diferente de cero, por lo tanto se debe cumplir a $a \neq 2$.

Ejemplo 4.9

Determine condiciones sobre las variables para que $(a+b-3)^{b-a+1} \in \mathbb{R}$. Como 0^0 es indefinido, la expresión de indefine cuando simultáneamente

$$\begin{cases} a+b-3 = & 0 \\ b-a+1 = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b & = 3 \\ b-a & = -1 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema se obtiene que $b = 1$ y $a = 2$. Por ende, $(a+b-3)^{b-a+1} \in \mathbb{R}$ si $(a,b) \neq (2,1)$.

Podemos determinar el valor de una expresión algebraica para determinados valores de sus variables.

Ejemplo 4.10

Determine el valor numérico de la siguiente expresión cuando $x = -2$, $y = -\dfrac{1}{3}$

$$2xy + x^2 - 7\frac{x}{y}$$

Se tiene que

$$2xy + x^2 - 7\frac{x}{y} = 2(-2)\left(-\frac{1}{3}\right) + (-2)^2 - 7\frac{(-2)}{\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{3} + 4 - \frac{-14}{-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{4}{3} + 4 - 42 \\
&= -\frac{110}{3}
\end{aligned}
$$

Definición 4.3 (Monomio)

Un monomio es una expresión algebraica formada por el producto de números y símbolos algebraicos. Así, en un monomio las variables involucradas no tiene restricciones.

Ejemplo 4.11

Las siguientes expresiones algebraicas son monomios:

$$2x^2y, \quad \frac{3w^2r^4}{2\pi}, \quad 5, \quad \frac{2\pi}{x^{-2}}, \quad \sqrt{2}xy$$

En efecto:

- $\mathbf{2x^2y}$: Esta expresión es un monomio porque consiste en variables (x y y) elevadas a potencias enteras no negativas (2 y 1, respectivamente) y multiplicadas por un coeficiente real (2). No hay divisiones por una variable ni potencias negativas o fraccionarias de las variables, lo que cumple con la definición de un polinomio.
- $\mathbf{\frac{3w^2r^4}{2\pi}}$: Aunque esta expresión involucra una división, el divisor es 2π, un número real constante, y no una variable. Las variables w y r están elevadas a potencias enteras no negativas (2 y 4, respectivamente). Por lo tanto, esta expresión también se considera un monomio porque el coeficiente $\frac{3}{2\pi}$ es constante, y la expresión solo involucra sumas, restas, multiplicaciones, y potencias enteras no negativas de las variables.
- **5**: Esta es la forma más simple de un monomio. No contiene variables, lo cual es aceptable en la definición de monomios. Un número solo, sin variables, se considera un monomio de grado cero.
- $\mathbf{\frac{2\pi}{x^{-2}}}$: Esta expresión puede ser engañosa a primera vista. Aunque inicialmente parece incluir una división por una variable, al reescribirse, se convierte en $2\pi x^2$. La variable x está elevada a una potencia entera no negativa (2), lo que transforma la expresión en un monomio. La confusión puede surgir debido a la forma original de la expresión, pero al simplificarla, queda claro que cumple con los criterios de un monomio.
- $\mathbf{\sqrt{2}xy}$: Esta expresión es un monomio porque $\sqrt{2}$ es un coeficiente real constante, y las variables x y y están elevadas a la primera potencia (lo que implícitamente es 1, una potencia entera no negativa). No hay operaciones que violen las reglas de formación de

polinomios, como divisiones por variables o potencias negativas/fraccionarias de las variables.

Cada una de estas expresiones, después de un análisis detallado, cumple con la definición de monomio al estar compuestas únicamente por multiplicaciones y potencias enteras no negativas de variables, acompañadas de coeficientes reales.

Ejemplo 4.12

Las siguientes expresiones algebraicas no son monomios

$$2x+y, \quad 2\sqrt{x}, \quad 2x^{-3}, \quad p^{-5}$$

- $\mathbf{2x+y}$: Esta expresión consta de dos términos distintos, $2x$ y y, separados por un signo de suma. La presencia de más de un término automáticamente la descarta como monomio, ya que un monomio debe consistir en un único término.
- $\mathbf{2\sqrt{x}}$: Esta expresión equivale a $2x^{1/2}$. Aunque consta de un solo término, el exponente de la variable x es fraccionario $(1/2)$, lo cual no cumple con la condición de que las variables en un monomio deben estar elevadas a potencias enteras no negativas. Las raíces (en este caso, la raíz cuadrada) representan potencias fraccionarias, lo que excluye a esta expresión de ser considerada un monomio.
- $\mathbf{2x^{-3}}$: Aunque esta expresión contiene un solo término, la variable x está elevada a una potencia negativa (-3). Las potencias negativas indican una inversión (es decir, $x^{-3} = 1/x^3$), lo cual viola la regla de que en un monomio, las variables deben tener potencias enteras no negativas. Por lo tanto, esta expresión no se considera un monomio.
- $\mathbf{p^{-5}}$: Similar al caso anterior, esta expresión tiene un solo término, pero la variable p está elevada a una potencia negativa (-5). Aunque cumple con el criterio de tener un solo término, la potencia negativa excluye a esta expresión de ser clasificada como monomio, ya que todas las variables en un monomio deben tener potencias enteras no negativas.

Para que una expresión sea considerada un monomio, debe cumplir con dos criterios fundamentales: consistir en un solo término y que cualquier variable presente esté elevada a una potencia entera no negativa. Las expresiones dadas no cumplen con estos criterios debido a la presencia de más de un término, potencias fraccionarias, o potencias negativas.

Ejercicios 4.1

R **4.1** Investigue sobre la definición de cada una de las siguientes nociones matemáticas

a.) Factor numérico de un monomio
b.) Factor literal de un monomio
c.) Monomios semejantes
d.) Binomio, trinomio y polinomio

e.) Grado de un monomio

4.2 Defina una expresión algebraica cuyo resultado ofrezca en cualquier sustitución (para un número real), un número entero

4.3 Operaciones con Polinomios

Las operaciones con polinomios se basan fundamentalmente en las propiedades de las operaciones $+$ y $\cdot$ en $\mathbb{R}$: distributividad, conmutatividad de la $+$ y $\cdot$, asociatividad de la $+$ y $\cdot$.

Suma y resta de monomios

Ejemplo 4.13

Simplifique al máximo la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} -14xy^2+7x^2y-12xy^2+45x^2y+5xy^2 &= -14xy^2-12xy^2+5xy^2+7x^2y+45x^2y \\ &= (-14xy^2-12xy^2+5xy^2)+(7x^2y+45x^2y) \\ &= (-14-12+5)xy^2+(7+45)x^2y \\ &= -21xy^2+52x^2y \end{aligned}$$

Del ejemplo anterior se desprenden los siguientes pasos para realizar la suma o resta de monomios:

1. Pasar las restas a sumas. (No es necesario).
2. Agrupar los monomios semejantes.
3. Se suman solo los monomios semejantes por la propiedad distributiva de $\mathbb{R}$: Si X es el factor literal de los monomios entonces

$$aX+bX=(a+b)X$$

Multiplicación o división de monomios

Ejemplo 4.14

Simplifique al máximo la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} 3x^2y^2z \cdot 4x^5y^3z^2w^5 &= 12(x^2 \cdot x^5)(y^2 \cdot y^3)(z \cdot z^2)w^5 \text{ (Comutatividad y asociatividad del } \cdot) \\ &= 12x^7y^5z^3w^5 \text{ (Ley de potencia: } a^n \cdot a^m = a^{n+m}) \end{aligned}$$

En general, se siguen los siguientes pasos:

1. Se multiplican o dividen los factores numéricos.
2. Se multiplican o dividen los factores literales, usando las leyes de potencia correspondiente

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

En tal caso $a \neq 0$.

Ejemplo 4.15

Se tiene:

$$3x^2y^4 \cdot 5xy^4w = 15wx^3y^8$$

$$\frac{15xy^2z^2}{9xy^2} = \frac{5}{3}z^2$$

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Esta operación se basa en la ley de distributividad:

$$a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Ejemplo 4.16

Simplifique la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} -5x^2y(3x^2y+4x^2-3xy^2) &= -5x^2y(3x^2y+4x^2+-3xy^2) \;\; (Definicion\ de\ resta) \\ &= -5x^2y \cdot 3x^2y - 5x^2y \cdot 4x^2 - 5x^2y \cdot -3xy^2 \;\; (Distributividad) \\ &= -15x^4y^2 - 20x^4y + 15x^3y^3 \;\; (Leyes\ de\ potencia) \end{aligned}$$

División de polinomios

La división de polinomios es un concepto fundamental en álgebra que permite descomponer polinomios en componentes más simples, facilitando su análisis y solución de ecuaciones polinomiales. Este proceso es análogo a la división de números enteros, pero aplicado a expresiones algebraicas. La división de polinomios puede realizarse mediante varios métodos, siendo los más comunes la división larga de polinomios y la división sintética.

División de un polinomio por un monomio

Recuerde que, si $c \neq 0$, se tiene

$$(a+b) \div c = \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Esta propiedad nos permite realizar de división de un monomio por un polinomio.

Ejemplo 4.17

Note que:

$$\begin{aligned} 16x^4y^2 + -8x^3y^3 - 21x^2y + 24x) \div 6xy &= \frac{16x^4y^2 + -8x^3y^3 + -21x^2y + 24x}{6xy} \\ &= \frac{16x^4y^2}{6xy} + \frac{8x^3y^3}{6xy} + \frac{-21x^2y}{6xy} + \frac{24}{6xy} \\ &= \frac{8}{3}x^3y + \frac{-4}{3}x^2y^2 + \frac{-7}{2}x + \frac{4}{y} \end{aligned}$$

División entre polinomios: Método General

La división de polinomios es una generalización de la división de enteros, recordemos esta división:

$$\begin{array}{r|l} 1234 & 43 \\ \cline{2-2} -93 & 2 \\ \cline{1-1} 304 & \end{array} \qquad \text{Continuando:} \qquad \begin{array}{r|l} 1234 & 43 \\ \cline{2-2} -93 & 27 \\ \cline{1-1} 304 & \\ -301 & \\ \cline{1-1} 3 \end{array}$$

Fórmulas Notables

Las fórmulas notables son abreviaciones para realizar ciertas distribuciones de una manera más rápida:

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$

- $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$
- $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$

Ejemplo 4.18

Justifique la fórmula notable: $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$
Se tiene que:

$$\begin{aligned}(x-y)(x^2+xy+y^2) &= x^3+x^2y+xy^2-yx^2-xy^2-y^3 && (Distributividad)\\ &= x^3+y^3 && (Cancelaciondeterminos)\end{aligned}$$

Ejemplo 4.19

Note que:

$$\begin{aligned}(2xy-x^{2n})^3 &= (2xy+-x^{2n})^3\\ &= (2xy)^3+3\cdot(2xy)^2\cdot -x^{2n}+3\cdot 2xy\cdot(-x^{2n})^2+(-x^{2n})^3\\ &= 8x^3y^3+3\cdot 4x^2y^2\cdot -x^{2n}+3\cdot 2xy\cdot x^{4n}+-x^{6n}\\ &= 8x^3y^3+-12x^{2+2n}y^2+6x^{1+4n}y+-x^{6n}\end{aligned}$$

4.4 Divisibilidad y factorización de polinomios

La divisibilidad y factorización de polinomios son conceptos fundamentales en álgebra que han sido estudiados a lo largo de la historia de las matemáticas. Estos conceptos no solo son cruciales para el entendimiento de la estructura algebraica de los polinomios, sino que también tienen aplicaciones prácticas en diversas áreas de las matemáticas y ciencias. La historia de su desarrollo está íntimamente ligada al avance general del álgebra y la teoría de números.

Definiciones

Definición 4.4 (Divisor o factor)

El polinomio $P(x)$ es divisible por el polinomio $Q(x)$ si el residuo de la división $(P(x)\div Q(x))$ es cero. Es decir:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x)=0 & C(x) \end{array}$$

Note que el resultado de la división es:

$$P(x) \div Q(x) = C(x) + \frac{0}{Q(x)}, \quad o \ \ sea: \quad P(x) \div Q(x) = C(x)$$

$$Pasando \ \ Q(x) \ \ a \ \ multiplicar: \quad P(x) = Q(x) \cdot C(x)$$

Tanto a $Q(x)$ como $C(x)$ se les llama divisores o factores de $P(x)$.

Ejemplo 4.20

Sea $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ y $Q(x) = x - 2$. Para encontrar $C(x)$, el cociente de la división de $P(x)$ por $Q(x)$, se hará la división respectiva.

$$\begin{array}{rrr|l} x^3 & -3x^2 & +2x & x-2 \\ \cline{4-4} -x^3 & +2x^2 & & x^2 - x \\ \cline{1-2} & -x^2 & +2x & \\ & x^2 & -2x & \\ \cline{2-3} & & 0 & \end{array}$$

Esto significa que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ sin dejar residuo, y el cociente de esta división es $C(x) = x^2 - x$. Resumiendo, la división completa es:

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x - 2} = x^2 - x$$

Ejemplo 4.21

Sea $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ y $Q(x) = x^2 - 5x + 6$. Para encontrar $C(x)$, el cociente de la división de $P(x)$ por $Q(x)$, se hará la división respectiva.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -6x^2 & +11x & -6 & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{5-5} -x^3 & +5x^2 & -6x & & x - 1 \\ \cline{1-3} & -x^2 & +5x & -6 & \\ & x^2 & -5x & +6 & \\ \cline{2-4} & & & 0 & \end{array}$$

Esto significa que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ sin dejar residuo, y el cociente de esta división es $C(x) = x - 1$. Resumiendo, la división completa es:

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 5x + 6} = x - 1$$

Definición 4.5 (Cero de un polinomio))

Un número real α es cero, raíz o solución de un polinomio $P(x)$ si:

$$P(\alpha) = 0$$

Ejemplo 4.22

Determine si los número:s $1, -2, \frac{3}{2}$ y $\sqrt{2}$; son ceros del polinomio:

$$P(x) = 2x - 7x^2 - x^3 + 2x^4 + 6$$

Sustituyendo se obtiene que:

$$P(1) = 2(1) - 7(1)^2 - (1)^3 + 2(1)^4 + 6 = 2$$
$$P(-2) = 2(-2) - 7(-2)^2 - (-2)^3 + 2(-2)^4 + 6 = 14$$
$$P\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 7\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^4 + 6 = 0$$
$$P\left(\sqrt{2}\right) = 2\left(\sqrt{2}\right) - 7\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^3 + 2\left(\sqrt{2}\right)^4 + 6 = 0$$

Por lo tanto, solo $\frac{3}{2}$ y $\sqrt{2}$ son ceros de $P(x)$.

Teoremas importantes

Algunos teoremas implicados con los ceros de un polinomio son el Teorema del residuo, su generalización y el teorema del factor, así como los ceros enteros y racionales de un polinomio. La importancia de dichos teoremas es que Permiten calcular el valor de un polinomio en un valor dado de manera eficiente, sin necesidad de realizar la división polinomial completa; o bien, para determinar raíces las cuales están involucradas en la solución de ecuaciones polinomiales.

Teorema 4.1 (Teorema del residuo)

El residuo de la división de un polinomio $P(x)$ entre $(x - \theta)$ es $P(\theta)$.

Justificación:
Veamos primero un caso particular: si $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, note que realizando la división sintética por $(x - \theta)$ se obtiene que:

$$\begin{array}{ccccc|c}
 & a & b & c & d & \theta \\
 & & a\theta & a\theta^2+b\theta & a\theta^3+b\theta^2+c\theta & \\
\hline
 & a & a\theta+b & a\theta^2+b\theta+c & \underbrace{a\theta^3+b\theta^2+c\theta+d}_{P(\theta)} &
\end{array}$$

Por lo que, para este caso, el residuo es $P(\theta)$. En general, si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, note que realizando la división sintética se obtiene que:

$$\begin{array}{cccccc|c}
a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & \theta \\
 & a_n\theta & \cdots & a_n\theta^{n-1}+\ldots+a_2\theta & a_n\theta^n+\ldots+a_2\theta^2+a_1\theta & & \\
\hline
a_n & a_n\theta+a_{n-1} & \cdots & a_n\theta^{n-1}+\ldots+a_2\theta+a_1 & \underbrace{a_n\theta^n+\ldots+a_2\theta^2+a_1\theta+a_0}_{P(\theta)} & &
\end{array}$$

Así el residuo es $P(\theta)$.

Ejemplo 4.23

Considere el primer ejemplo: "¿$x-1$ es factor de x^3-1? ". Como $P(1) = 0$ entonces el residuo de la división $(x^3-1) \div (x-1)$ es cero y por lo tanto: $x-1$ es factor de x^3-1.

Note que no fue necesario realizar la división sintética para determinar si es o no factor, sin embargo, si se quiere determinar cuál es el factor $C(x)$ que multiplicado por $(x-1)$ da x^3-1 es necesario realizar la división.

Ejemplo 4.24

Determine el residuo de la división $(x^{2007} - 3x^{100} + 4) \div (x+1)$.
Aquí se nota la importancia del teorema del residuo pues es casi imposible realizar la división.
Sea $P(x) = x^{2007} - 3x^{100} + 4$, entonces el residuo de $P(x) \div (x+1)$ es:

$$P(-1) = (-1)^{2007} - 3(-1)^{100} + 4 = -1 - 3 + 4 = 0$$

¿Es $(x+1)$ factor de $P(x)$? Si, pues el residuo es cero.

Ejemplo 4.25

Determine el residuo de la división $(x^4 - x^3 + 2x - 1) \div (2x+3)$.
Así como se encuentra no se puede aplicar el teorema sin embargo se puede maniobrar esta expresión para utilizarlo (al igual que se realizó con división sintética):

$$(x^4 - x3 + 2x - 1) \div (2x+3) = \frac{x^4 - x^3 + 2x - 1}{2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4 - x^3 + 2x - 1}{x + \frac{3}{2}}$$

Note que el cociente para la división original se modifico, esta vez es $\frac{C(x)}{2}$, pero el residuo es el mismo $\frac{71}{16}$. Se concluye que el residuo de la división $(x^4 - x^3 + 2x - 1) \div (2x+3)$ es $\frac{71}{16}$

Nota

1. El ejemplo anterior nos permite obtener el teorema generalizado del teorema del residuo.
2. Para entender por qué se extrae el factor $\frac{1}{2}$ al final en el proceso de división del polinomio $x^4 - x^3 + 2x - 1$ por $2x+3$ es útil que el divisor tenga la forma $x - c$. Esto se debe a que estas técnicas se simplifican considerablemente cuando se trabaja con divisores lineales de coeficiente de grado uno.

   De esta forma, para transformar $2x+3$ en una forma que se asemeje a $x - c$, se puede factorizar el 2 del divisor, obteniendo:

$$2x+3 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

   Al intentar dividir el polinomio original $x^4 - x^3 + 2x - 1$ directamente por $x + \frac{3}{2}$, se está cambiando efectivamente el problema original por uno ligeramente diferente debido al coeficiente 2 que hemos "omitido" en el divisor. Para compensar este cambio y mantener la equivalencia de la división original, se multiplica el resultado de la nueva división por $\frac{1}{2}$, el inverso multiplicativo del coeficiente que se factorizó.

   Esta transformación permite aplicar técnicas como el teorema del residuo o la división sintética de una manera más sencilla, ya que ahora el divisor tiene la forma deseada $x - c$, donde $c = -\frac{3}{2}$.
   En resumen, se extrae el factor $\frac{1}{2}$ para ajustar la división al factorizar el coeficiente 2 del divisor original, manteniendo la equivalencia de la división inicial. Esto simplifica el uso de herramientas algebraicas para encontrar el residuo de la división.

Teorema 4.2 (Generalización del Teorema del residuo)

El residuo de la división de un polinomio $P(x)$ entre $(ax - b)$ es $P\left(\frac{b}{a}\right)$.

Justificación del teorema

$$P(x) \div (ax-b) = \frac{P(x)}{ax-b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{P(x)}{a-\frac{b}{a}} \qquad (*)$$

Al realizar la división $\dfrac{P(x)}{x-\frac{b}{a}}$ se obtiene un cociente $C(x)$ y un residuo $R(x) = P\left(\frac{b}{a}\right)$ (por el Teorema del residuo), por lo tanto:

$$\frac{P(x)}{x-\frac{b}{a}} = C(x) + \frac{P\left(\frac{b}{a}\right)}{x-\frac{b}{a}} \qquad (**)$$

De $(*)$ y $(**)$ se obtiene que:

$$P(x) \div (ax-b) = \frac{C(x)}{a} + \frac{P\left(\frac{b}{a}\right)}{ax-b}$$

así el residuo de $P(x) \div (ax-b)$ es $P\left(\frac{b}{a}\right)$.

Ejemplo 4.26

Repitamos el ejemplo anterior.
Determine el residuo de la división: $(x^4 - x^3 + 2x - 1) \div (2x+3)$.
Note que $a = 2$ y $b = -3$, por lo tanto el residuo es:

$$P\left(\frac{-3}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}\right)^4 - \left(\frac{-3}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{-3}{2}\right) - 1 = \frac{71}{16}$$

Teorema 4.3 (Teorema del factor)

$(x-\theta)$ es un factor de $P(x)$ si y solo si θ es un cero de $P(x)$.

Justificación del teorema

Si $(x-\theta)$ es un factor de $P(x)$ entonces existe otro factor $C(x)$ de $P(x)$ que cumple

$$P(x) = (x-\theta)C(x)$$

Si se calcula $P(\theta)$ se obtiene que:

$$P(\theta) = (\theta-\theta)C(\theta) = 0 \cdot C(\theta) = 0$$

Por lo tanto el número θ es cero de $P(x)$.
Por otro lado, si θ es un cero de $P(x)$ entonces:

$$P(\theta) = 0$$

Es decir, de acuerdo al teorema del residuo, el residuo del la división $P(x) \div (x-\theta)$ es $P(\theta) = 0$, por lo tanto $(x-\theta)$ es un factor de $P(x)$.

Ejemplo 4.27

Considere el polinomio $P(x) = 2x-7x^2-x^3+2x^4+6$, anteriormente vimos que $\sqrt{2}$ y $\frac{3}{2}$ son ceros de este polinomio por lo tanto $(x-\sqrt{2})$ y $\left(x-\frac{3}{2}\right)$ son factores de $P(x)$, entonces existe un factor $C(x)$ de $P(x)$ que cumple que:

$$2x-7x^2-x^3+2x^4+6 = (x-\sqrt{2})\left(x-\frac{3}{2}\right)C(x)$$

Si se quiere averiguar $C(x)$ simplemente se despeja. Así si se pasa a dividir $\left(x-\frac{3}{2}\right)C(x)$ se obtiene:

$$\frac{2x-7x^2-x^3+2x^4+6}{x-\frac{3}{2}} = (x-\sqrt{2})C(x)$$

Realizando por división sintética la división de la izquierda se obtiene:

$$\frac{2x-7x^2-x^3+2x^4+6}{x-\frac{3}{2}} = 2x^2-4x+2x^3-4 \qquad \Rightarrow \qquad 2x^2-4x+2x^3-4 = (x-\sqrt{2})C(x)$$

De donde se obtiene:

$$\frac{2x^2-4x+2x^3-4}{x-\sqrt{2}} = C(x)$$

Realizando de nuevo la división de la izquierda se obtiene: $\dfrac{2x^2-4x+2x^3-4}{x-\sqrt{2}} = 2x+2x^2+2\sqrt{2}+2x\sqrt{2}$. Así se tiene que:

$$C(x) = 2x+2x^2+2\sqrt{2}+2x\sqrt{2}$$

Teorema 4.4 Número de ceros de un polinomio
Si el polinomio $P(x)$ es de grado n entonces tiene a lo sumo n ceros.

Justificación del teorema

Supongamos que tiene $n+1$ ceros: $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n, \theta_{n+1} C(x)$, entonces por el teorema del factor se conocen $n+1$ factores:

$$P(x) = (x-\theta_1)(x-\theta_2)\dots(x-\theta_{n+1})C(x)$$

Sin embargo si se realiza la multiplicación de la derecha se va a obtener un x^{n+1} pero $P(x)$ no tiene el monomio x^{n+1}, pues es de grado n. Por lo tanto $P(x)$ no tiene $n+1$ ceros.

Ejemplo 4.28

El polinomio $P(x) = x^5+3x^3-5x^2$ tiene a lo sumo 5 ceros.

Teorema 4.5 Ceros racionales de un polinomio
Considere el polinomio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o$$

Si este polinomio posee un cero θ racional (es decir $\theta \in \mathbb{Q}$) entonces $\theta = \dfrac{s}{r}$, donde r es divisor positivo de a_n y s es divisor positivo o negativo de a_0.

Ejemplo 4.29

Determine los posibles ceros racionales del polinomio $P(x) = -3+7x-4x^3$.
Note que el polinomio esta ordenado ascendentemente por lo tanto $n = 3$, $a_n = -4$, $a_0 = -3$.
Los divisores positivos de -4 son: $1, 2, 4$.

Los divisores positivos y negativos de -3 son ± 1 y ± 3, por lo tanto los posibles ceros de $P(x)$ son:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{-3}{1}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}$$

En la lista anterior puede suceder que algunos elementos se repitan, lo cual puede simplificar la lista de posibles ceros. En este ejemplo lo queda es verificar cuáles son ceros utilizando el teorema del residuo. Esto es:

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$
$P(x)$	0	0	-0.32	6	3.0	1.17	-270	-9.0	0.42	-252	0	4.92

Los resultados muestran que $P(x)$ es igual a 0 para $x = 1$, $x = 1/2$, y $x = -3/2$, indicando que estos son ceros del polinomio. Los otros valores de x no satisfacen $P(x) = 0$, lo que significa que no son ceros del polinomio dado. Observe que por el Teorema del factor $(x-1)$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ y $\left(x--\frac{3}{2}\right)$ son factores de $P(x)$.

Métodos de Factorización

La factorización de polinomios es un proceso matemático que consiste en descomponer un polinomio en el producto de polinomios más simples. Este proceso es fundamental en diversas áreas de las matemáticas, ya que permite simplificar expresiones y resolver ecuaciones polinómicas. Existen varios métodos de factorización, cada uno adecuado para diferentes tipos de polinomios. La elección del método adecuado depende de la forma y grado del polinomio, así como de los coeficientes y términos que lo componen. A continuación, se presenta una breve explicación de los métodos más comunes

Factor Común

Cuando multiplicamos un monomio por un polinomio, utilizamos la propiedad distributiva para multiplicar el monomio por cada uno de los términos:

$$a(b+c) = ab + ac \qquad \text{(distributividad)}$$

Al factorizar un polinomio por factor común, aplicamos el proceso inverso de multiplicación, es decir en lugar de distribuir se extrae el término que se repite o factor común

$$ab + ac = a(b+c)$$

Así, se procede de la siguiente manera:

1. Se extrae el máximo común divisor de los coeficientes numéricos. El número más grande que divide a todos los coeficientes numéricos .

2. Se extrae el máximo común divisor del factor literal utilizando leyes de potencias, este esta formado por las variables que se repiten en todos los términos y con el exponente más pequeño.

Ejemplo 4.30

Factorice $30a^5b^4 - 10a^2b^3$
Note que $MCD(30,10) = 10$, por lo tanto:

$$30a^5b^4 - 10a^2b^3 = 10a^2b^3(3a^3b - 1)$$

Así los factores de la expresión dada son: $10a^2b^3$ y $(3a^3b - 1)$.

Ejemplo 4.31

Factorice $30a^5b^4 - 10a^2b^3$
Note que $MCD(30,10) = 10$, por lo tanto:

$$30a^5b^4 - 10a^2b^3 = 10a^2b^3(3a^3b - 1)$$

Así los factores de la expresión dada son $10a^2b^3$ y $(3a^3b - 1)$.

Ejemplo 4.32

$$\begin{aligned} 4x(x-1) - x + 1 &= 4x(x-1) + -x + 1 \\ &= 4x(x-1) + (-x+1) \\ &= 4x(x-1) - (x-1) \\ &= (x-1)(4x-1) \end{aligned}$$

Los factores de la expresión dada son $(x-1)$ y $(4x-1)$.

Ejercicios 4.2

4.3 Factorice completamente los siguientes polinomios.

a.) $12ab^2 + 4a^2b^3$

b.) $\frac{5}{2}a^3b^3m - \frac{15}{4}a^2b^5 - \frac{25}{6}a^3b^3$

c.) $(x-2)^2 - (x-2)$

d.) $\dfrac{x^2}{75} - \dfrac{2x^3}{15} - \dfrac{x}{6}$
e.) $7(x+y)^3 - 8(x+y)^2 - 12(x+y)$
f.) $2x^{n+1} - x^{2n+1}$
g.) $3b(x-3y) - 2m(3y-x)$
h.) $p(x-3y) - (x-2p)(3y-x)$
i.) $-12ab^2 - 4a^2b^3 - 36a^3$
j.) $4y(-y+1) - 1 + y$
k.) $b^{n+1}x^{n-1} - b^n x^{n+1}$

Factorización por agrupación

A veces un polinomio no tiene factor común visible en todos sus términos, pero puede separarse en grupos que si tienen factores comunes entre ellos.
Procedimientos:

- Se señalan los términos que se van a factorizar entre si.
- Se colocan a la par y se factorizan.

Ejemplo 4.33

Factorice $a+bx+ax+b$.

$$\begin{aligned} a+bx+ax+b &= a+ax+bx+b \\ &= a(1+x)+b(x+1) \\ &= (x+1)(a+b) \end{aligned}$$

Los factores de la expresión anterior son: $(x+1)$ y $(a+b)$.

Observación: Cuando se factoriza por grupos se trata de hacer dos tipos de factorización:

- Factorización local (En cada grupo).
- Factorización global (En general).

Ejemplo 4.34

Factorice : $2a^3 - na^2 + 2ab^2 - nb^2 - 3n + 6a$
Forma 1:

$$\begin{aligned} 2a^3 - na^2 + 2ab^2 - nb^2 - 3n + 6a &= a^2(2a-n) + b^2(2a-n) + 3(-n+2a) \\ &= (2a-n)(a^2+b^2+3) \end{aligned}$$

Forma 2:

$$
\begin{aligned}
2a^3 - na^2 + 2ab^2 - nb^2 - 3n + 6a &= (2a^3 + 2ab^2 + 6a) + (-na^2 - nb^2 - 3n) \\
&= 2a(a^2 + b^2 + 3) + -n(a^2 + b^2 + 3) \\
&= (a^2 + b^2 + 3)(2a - n)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.35

Factorice $a(a-1) + -b(b+1)$

$$
\begin{aligned}
(a-1) + -b(b+1) &= a^2 - a + -b^2 - b \\
&= a^2 - b^2 - a + -b \\
&= (a-b)(a+b) + -(a-b) \\
&= (a-b)((a+b) + -1) \qquad = (a-b)(a+b+-1)
\end{aligned}
$$

Ejercicios 4.3

4.4 Factorice completamente los siguientes polinomios.

a.) $3p(m-2p) - 2mp + 4p^2$
b.) $10xy - 8wx + 15cy + 4bw - 12cw - 5by$
c.) $\frac{7}{3}a - \frac{7}{3} - ab + b$
d.) $x + y - px + qx - py + qy$
e.) $2p(a-b) - ax + bx$
f.) $(y-1)(y+1) - y + 1$
g.) $m^2 - mx + bm - bx - (b+m)(m-x)$

Factorización por fórmula notable

La ideas es utilizar las reglas:

- $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$
- $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$
- $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
- $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
- $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y)$

Ejemplo 4.36

Factorice $4x^2+y^4+4xy^2$ Ordenado esta expresión se tiene que: $y^4+4xy^2+4x^2$, note que $y^4=(y^2)^2$, $4x^2=(2x)^2$, $2\cdot y^2\cdot 2x=4xy^2$, por lo tanto:

$$4x^2+y^4+4xy^2=(2x+y^2)^2$$

Ejemplo 4.37

$$\begin{aligned} x^2-y^2+1+2x &= x^2+2x+1-y^2 && (se\ ordena) \\ &= (x+1)^2-y^2 && (por\ la\ primera\ formula\ notable) \\ &= (x+1+y)(x+1-y) && (por\ la\ tercera\ formula\ notable) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.38

Aplicando la tercera fórmula notable se tiene que:

$$\begin{aligned} (x+1)^2-(x-1)^2 &= [(x+1)-(x-1)][(x+1)+(x-1)] \\ &= 2(2x) \end{aligned}$$

Trinomio de Segundo Grado

Por inspección:

Note que:

$$\begin{aligned} (p_1x+q_1)(p_2x+q_2) &= p_1p_2x^2+p_1q_2x+p_2q_1x+q_1q_2 \\ &= \underbrace{p_1p_2}_{a}x^2+\underbrace{(p_1q_2+p_2q_1)}_{b}x+\underbrace{q_1q_2}_{c} \end{aligned}$$

Se desea factorizar un polinomio de la forma ax^2+bx+c, entonces se siguen los siguientes pasos:

1. Buscar dos números p_1x y p_2x que multiplicados den el 1^{er} término: ax^2, es decir $p_1p_2=a$
2. Buscar dos números q_1 y q_2 que multiplicados den el 2^{do} término: c, es decir $q_1q_2=c$.
3. El término central bx será igual a la suma de los productos en cruz:

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{ax^2} & +bx+ & \underbrace{c} \\ p_1x & & q_1 \\ p_2x & & q_2 \end{array} \qquad bx=\underbrace{(p_1q_2+p_2q_1)}_{b}x$$

Ejemplo 4.39

Factorice $7x+x^2+12$.

$$\underbrace{x^2}+7x+\underbrace{12}$$
$$\begin{array}{ccc} x & & 3 \\ x & & 4 \\ & 4x+3x=7x & \end{array}$$

Los factorización es: $(x+3)$ y $(x+4)$.

Ejemplo 4.40

Factorice $64a^2-16a+1$.

$$\underbrace{64a^2}-16a+\underbrace{1}$$
$$\begin{array}{ccc} 8a & & -1 \\ 8a & & -1 \\ & -8a+-8a=-16a & \end{array}$$

Por lo tanto $64a^2-16a+1=(8a-1)(8a-1)$, note que también se puede factorizar por fórmula notable.

Ejemplo 4.41

Factorice $49(x+1)^2-42(x+1)+9$.
Note que esta expresión es cuadrática donde la variable es $(x+1)$.

$$\underbrace{49(x+1)^2}-42(x+1)+\underbrace{9}$$
$$\begin{array}{ccc} 7(x+1) & & -3 \\ 7(x+1) & & -3 \\ & -21(x+1)+21(x+1)=-42(x+1) & \end{array}$$

La factorización es: $(7(x+1)-3)(7(x+1)-3)$ es decir $(7x+4)(7x+4)$.

Por fórmula general

Dado el polinomio ax^2+bx+c, si:

$$\Delta=b^2-4ac<0$$

entonces $P(x)$ no se puede factorizar, en caso contrario, los ceros de $P(x)$son:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Y por el teorema del factor:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Nota: Si $\Delta=0$, entonces $x_1=x_2$
Para consultar la demostración del teorema de la fórmula general, ver cap.5, Teorema 5.2.

Ejemplo 4.42

Los siguientes polinomios de grado dos no se pueden factorizar en términos de polinomios con coeficientes reales.

1. x^2+x+1, ya que $\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(1)(1)=1-4=-3<0$
2. $2x^2+4x+5$, ya que $\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4(2)(5)=16-40=-24<0$
3. $3x^2+6x+10$, ya que $\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4(3)(10)=36-120=-84$

Ejemplo 4.43

Factorice $2x^2-7x+6$. En este caso:

$$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot 2\cdot 6=1>0$$

Por lo tanto:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7+\sqrt{1}}{2\cdot 2}=\frac{8}{4}=2$$
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7-\sqrt{1}}{2\cdot 2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Así:

$$\begin{aligned}2x^2-7x+6 &= 2\,(x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)\\ &= (x-2)\,2\left(x-\frac{3}{2}\right)\\ &= (x-2)(2x-3)\end{aligned}$$

Ejemplo 4.44

Factorice $49x^2-42x+9$. En este caso:

$$\Delta=b^2-4ac=(-42)^2-4\cdot 49\cdot 9=0$$

Por lo tanto:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{42+\sqrt{0}}{2\cdot 49} = \frac{3}{7}$$

Así:

$$\begin{aligned} 49x^2-42x+9 &= 49\left(x-\frac{3}{7}\right)\left(x-\frac{3}{7}\right) \\ &= 7^2\left(x-\frac{3}{7}\right)^2 \\ &= (7x-3)^2 \end{aligned}$$

Por el método de completar cuadrados

Dado un polinomio cuadrático en la forma ax^2+bx+c, donde a, b, y c son constantes y $a \neq 0$, el objetivo es reescribirlo en la forma $(dx+e)^2+f$, donde d, e, y f son nuevas constantes.
Algunos pasos posibles para su abordaje son los siguientes:

1. **Asegurar que el coeficiente principal es 1**: Si $a \neq 1$, se divide toda la ecuación por a para obtener $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$.
2. **Trabajar solo con los términos x^2 y x**: Ignorar temporalmente la constante c o $\frac{c}{a}$ si se divide por a.
3. **Completar el cuadrado:** Esto es:
    - Se toma el coeficiente de x, que es b o $\frac{b}{a}$ si se ha dividido por a.
    - Se divide ese coeficiente por 2: $\frac{b}{2}$ o $\frac{b}{2a}$.
    - Se eleva al cuadrado el resultado: $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ o $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.
4. **Agregar y sustraer el término cuadrado encontrado en el paso 3 dentro del polinomio**. Esto no cambia el valor del polinomio pero permite reorganizarlo.
5. **Reescribir el polinomio:** Esto es:
    - Agrupar el x^2 y el nuevo término x juntos para formar un cuadrado perfecto.
    - Esto nos deja con una expresión de la forma $(x+\text{algún número})^2$.
    - Se ajusta la constante al final para compensar lo que se agregó.

Ejemplo 4.45

Para el polinomio x^2+6x+5 observe que:

1. No necesita ajuste ya que el coeficiente de x^2 es 1.
2. Se hace el enfoque en x^2+6x.
3. Se completa el cuadrado para la parte x^2+6x, es decir:
    - La mitad de 6 es 3, y su cuadrado es 9.
    - Se agrega y sustrae 9: $x^2+6x+9-9+5$.

- Se reescribe la expresión por $(x+3)^2-4$.

Entonces, x^2+6x+5 se convierte en $(x+3)^2-4$, completando el cuadrado. Aquí el resultado corresponde a una expresión que se puede factorizar por diferencia de cuadrados, por lo que

$$(x+3)^2-4 = ((x+3)-2)((x+3)+2) = (x+1)(x+5)$$

Ejemplo 4.46

Factorice $4x^2-20x+9$.
Note que $4x^2=(2x)^2$, entonces se considera $2x$ con el primer término, luego $20x$ debe ser dos veces el primer término por el segundo término, como $20x = 2\cdot 2x\cdot 5$, el segundo término es 5. Por lo tanto, completando la fórmula notable:

$$\begin{aligned}
4x^2-20x+9 &= (2x)^2-2\cdot 2x\cdot 5+5^2-5^2+9\\
&= (2x-5)^2-5^2+9\\
&= (2x-5)^2-16\\
&= (2x-5-4)(2x-5+4)\\
&= (2x-9)(2x-1)
\end{aligned}$$

Ejercicios 4.4

4.5 Factorice completamente los siguientes polinomios.

a.) $x^3-12x+20x$
b.) $x^2-18+7x$
c.) $x^2-12xy+32y^2$
d.) $20+6x-2x^2$
e.) $49(x-1)^2-42(x+1)+9$
f.) $(x+7)^2-4x-24$
g.) $6m^2-15mn-9n^2$
h.) $a^2-\frac{5}{6}a+\frac{1}{6}$
i.) $120y^2-23xy+x^2$
j.) $(x-2y)^2-12(x-2y)+32$

Factorización de un polinomio $P(x)$ por división sintética:

Ente método consiste en los siguientes pasos para factorizar $P(x)$:

1. Aplicar el teorema **Ceros racionales de un polinomio** para averiguar los posibles ceros racionales.
2. Evaluar $P(x)$ en cada uno de los posibles ceros hasta encontrar un cero: θ.

3. Por el teorema del factor $(x-\theta)$ es factor de $P(x)$ por lo tanto existe otro factor $C(x)$ tal que:
$$P(x) = (x-\theta)C(x)$$
4. Averiguar $C(x)$ realizando la división $\dfrac{P(x)}{x-\theta}$ por división sintética.
5. Factorizar $C(x)$.

Ejemplo 4.47

Factorice el polinomio:

$$160x^6 + 240x^5 - 592x^4 + 352x^3 - 90x^2 + 17x - 3$$

Los divisores positivos del coeficiente del término constante son: 1, 3.
Los divisores positivos del coeficiente del término de mayor grado son:

$$1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 32, 40, 80, 160$$

Por lo tanto, los posibles ceros racionales del polinomio son:

$$1, -1, 3, -3, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{-3}{4}$$

Evaluando en $P(x)$, se obtiene que un cero racional es -3. Factorizando el polinomio por división sintética se obtiene:

$$\begin{aligned} &160x^6 + 240x^5 - 592x^4 + 352x^3 - 90x^2 + 17x - 3 \\ &= (160x^5 - 240x^4 + 128x^3 - 32x^2 + 6x - 1)(x+3) \end{aligned}$$

Ahora se factoriza $Q(x) = 160x^5 - 240x^4 + 128x^3 - 32x^2 + 6x - 1$. Los posibles ceros racionales del polinomio $Q(x)$ son:

$$1, -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{-1}{5}, \ldots$$

Evaluando estos en $Q(x)$, se obtiene que un cero racional de $Q(x)$ es $\frac{1}{2}$. Factorizando el polinomio por división sintética se obtiene:

$$\begin{aligned} &160x^6 + 240x^5 - 592x^4 + 352x^3 - 90x^2 + 17x - 3 \\ &= (160x^5 - 240x^4 + 128x^3 - 32x^2 + 6x - 1)(x+3) \\ &= (160x^4 - 160x^3 + 48x^2 - 8x + 2)(x-1)(x+3) \end{aligned}$$

Ahora se factoriza $R(x) = 160x^4 - 160x^3 + 48x^2 - 8x + 2$. Continuando con el procedimiento se obtiene:

$$\begin{aligned} &160x^6 + 240x^5 - 592x^4 + 352x^3 - 90x^2 + 17x - 3 \\ =\ &(160x^5 - 240x^4 + 128x^3 - 32x^2 + 6x - 1)(x+3) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (160x^4 - 160x^3 + 48x^2 - 8x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3) \\
&= (160x^3 - 80x^2 + 8x - 4)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x+3) \\
&= (160x^2 + 8)\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 (x+3)
\end{aligned}
$$

Combinación de métodos

Dado que no todos los polinomios o expresiones se pueden factorizar utilizando un único método, combinar diferentes enfoques puede ser muy eficaz. La clave de la combinación de métodos de factorización es identificar qué técnica aplicar en cada paso del proceso para simplificar la expresión lo máximo posible. En algunos casos, el primer paso puede ser todo lo que se necesita; en otros, varios pasos y métodos diferentes serán necesarios para completar la factorización.

Ejemplo 4.48

Factorizar la expresión: $2x^3 - 10x^2 + 12x$.

1. **Sacar factor común:** Primero, se identifica el mayor factor común, que es $2x$, y se extrae, quedando:
$$2x(x^2 - 5x + 6)$$
2. **Factorización por fórmula general:** El trinomio cuadrático dentro del paréntesis tiene discriminante positivo, es decir
$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 > 0$$
De esta manera, se tiene que
$$x_1 = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$
$$x_2 = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
Así, $(x^2 - 5x + 6) = (x-3)(x-2)$

De esta forma
$$2x(x^2 - 5x + 6) = 2x(x-3)(x-2)$$

Ejemplo 4.49

Factorizar la expresión: $(x^2-2x)^2-1$.

1. **Diferencia de cuadrados:** Primero se observa que $(x-2)$ se eleva al cuadrado al igual que $1=1^2$. Como entre ambos términos hay una diferencia se procede a aplicar la estrategia. Esto es

$$(x^2-2x)^2-1=((x^2-2x)-1)((x^2-2x)+1)=(x^2-2x-1)(x^2-2x+1)$$

2. **Factorización por fórmula notable:** El trinomio x^2-2x+1 corresponde a una fórmula notable, con lo cual se puede factorizar como

$$(x-1)^2$$

3. **Factorización por fórmula general:** Por otro lado, el trinomio x^2-2x-1se puede factorizar ya que

$$\Delta=(-2)^2-4(1)(-1)=4+4=8>0$$

Solo puede por este método porque al calcular su raíz esta no es exacta, situación que sucede con los casos de fórmula notable o inspección. De esta manera, se tiene que

$$x_1=\frac{2+\sqrt{8}}{2}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$$

$$x_2=\frac{2-\sqrt{8}}{2}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$$

Así, $(x^2-2x-1)=(x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2}))=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

De esta forma

$$(x^2-2x)^2-1=(x-1)^2(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$$

Ejemplo 4.50

Factorizar $6x^2y-4x^2+30xy-20x$

1. **Sacar factor común:** Se identifica el factor común. En este caso es $2x$, y se extrae, quedando

$$2x(3xy-2x+15y-10x)$$

2. **Agrupación y factor común:** el polinomio entre paréntesis se puede agrupar adecuadamente para notar un factor común. Así:

$$2x((3xy-2x)+(15y-10x))=2x(x(3y-2)+5(3y-2))=2x((3y-2)(x+5))$$

De esta forma

$$6x^2y-4x^2+30xy-20x=2x(3y-2)(x+5)$$

Ejercicios 4.5

4.6 Factorice las siguientes expresiones algebraicas utilizando el método de Factor Común.

a.) $(x+1)x^2+(x+1)x$
b.) $16a^3b^4c^2-64a^2b^3c^3+72a^2b^2c^2$
c.) $m(n-1)-x(1-n)$
d.) $9x^{3a+2}-7x^{2a+1}, a>0$
e.) $(x^2-y^2)(x+y)-(x^2-y^2)(x-y)$

4.7 Factorice las siguientes expresiones algebraicas utilizando Fórmula Notable.

a.) $x^2-2xy+y^2$
b.) $4a^2+12a+9$
c.) $\frac{1}{4}x^2+1+x$
d.) $16a^2b^8-4x^6$
e.) $(a+b)^3-a^3$
f.) $64a^3-27b^9$
g.) $36xy+16y-10x^2$
h.) $(x-16)^2-25$
i.) x^3+8
j.) $1-r^3$
k.) a^6+b^6
l.) $1-8a^9$
m.) $(x^3+3)^3+1$
n.) $(m+1)^3+m^3$

4.8 Factorice las siguientes expresiones algebraicas utilizando Agrupación.

a.) $ax+a-x-1$
b.) $mx+ny+nx+my$
c.) x^3-2x^2+x-2
d.) $x+y-px+qx-py+qy$
e.) $xa-ya+za+x-y+z$
f.) $ax+by+ay+bx$
g.) $36xy+16y-10x^2$

4.9 Factorice los siguientes trinomios.

a.) $a^2-12a+20$
b.) x^2-5x+6
c.) $x^2+13x+40$
d.) $5x^2-13x-6$
e.) $6a^2+ab-15b^5$
f.) $10x^2-13x-3$
g.) x^2+x+1
h.) $x^2+14x+49$
i.) $3x^2+7x+2$
j.) $32x^2+18x-17$
k.) $2x^4-3x^3-4x^2-11x-12$
l.) $6y^4+37y^3-92y^2-28y+32$
m.) y^3+3y^2-9y+5
n.) $2z^3-7z^2-28z-12$
o.) $3x^3+4x^2-3x+2$

4.10 Factorice las siguientes expresiones algebraicas utilizando Agrupación.

a.) x^3-3x+2
b.) $4x^2-3x+x^3-18$
c.) $12x+13x^2+6x^3+x^4+4$
d.) $8x-7x^2+2x^3-3$
e.) $27x^3-9x^2-3x+1$
f.) $166x^2-140x+84x^3+9x^4+25$

4.5 Operaciones con fracciones algebraicas

Las operaciones con fracciones algebraicas son similares a las operaciones con fracciones numéricas. Las fracciones algebraicas consisten en numeradores y denominadores que son expresiones algebraicas. Las operaciones básicas son la suma, resta, multiplicación y división.

Simplificación

Si el numerador y el denominador son polinomios de grado 1

Ejemplo 4.51

$$\frac{5x-\frac{5}{3}}{3x-1}=\frac{5\left(x-\frac{1}{3}\right)}{3x-\frac{3}{3}}=\frac{5\left(x-\frac{1}{3}\right)}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\frac{5}{3}$$

Ejercicios 4.6

4.11 Simplifique al máximo las siguientes expresiones.

a.) $\dfrac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}}{6x-2}$

b.) $\dfrac{5x-2}{\frac{12}{5}-6x}$

c.) $\dfrac{\frac{2x}{3}-\frac{1}{12}}{\frac{4x}{5}-\frac{1}{10}}$

d.) $\dfrac{\frac{15x}{2}+\frac{5}{4}}{\frac{4}{2}+12x}$

Ejemplo 4.52

Simplifique $\dfrac{8x-5x^2+x^3-4}{3x^2-7x+2}$

A. Factorizando el numerador: $P(x)=x^3-5x^2+8x-4$. Los posibles ceros racionales de $P(x)$ son los divisores positivos y negativos de 4, estos son: $\pm1,\pm2,\pm4$.Como $P(2)=0$, entonces $(x-2)$ es factor de $P(x)$. Utilizando división sintética se tiene que:

$$\begin{aligned} P(x)\div(x-2) &= x^2-3x+2 \\ &= (x-1)(x-2) \end{aligned}$$

Por lo tanto $P(x)=(x-1)(x-2)^2$.

B. Factorizando el denominador: $Q(x) = 3x^2 - 7x + 2 = (3x-1)(x-2)$.
C. Simplificando:

$$\frac{8x - 5x^2 + x^3 - 4}{3x^2 - 7x + 2} = \frac{(x-1)(x-2)^2}{(3x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(3x-1)}$$

Ejercicios 4.7

4.12 Simplifique las siguientes expresiones. Suponga que están bien definidas, es decir, tienen las restricciones necesarias

a.) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2}$

b.) $\dfrac{22x^2 - 8x - 24x^3 + 9x^4 + 1}{3x^3 - x^2 - 3x + 1}$

c.) $\dfrac{-x^2 + 8x - 5x^3 + x^4 + x^5 - 4}{2x^3 - x + x^4 - 2}$

d.) $\dfrac{8x + 2x^2 - 4x^3 + x^4 - 8}{x^4 - 8x - 8\sqrt{2} + x^3\sqrt{2}}$

e.) $\dfrac{15 - 20x + 8x^2 - 4x^3 + x^4}{x^6 - 7x^4 - 25x^2 + 17}$

Otras operaciones

En los ejemplos anteriores, se analizó la situación donde se intentó factorizar el numerador y el denominador de la fracción dada. Los siguientes ejemplos explorarán contextos en los que están presentes la suma, la resta, la multiplicación y la división. En los casos de suma y resta, es necesario factorizar los denominadores. Posteriormente, se identifica el mínimo común múltiplo (m.c.m) y se utiliza como referencia para obtener "nuevos" denominadores. Esto permite combinar las fracciones en una sola, que se procesa de la misma manera que en los ejemplos previamente descritos. En el caso de multiplicaciones se factorizan numeradores y denominadores y se cancelan los factores repetidos. En el caso de la divisiones se invierte la fracción a la derecha del símbolo "$\div$" y el símbolo cambia a multiplicación, procediendo luego con el procedimiento descrito. En este caso se usa la propiedad

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

O bien

$$\frac{a}{b} \div \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{f}{e}$$

Ejemplo 4.53

Note que:

$$\frac{2x-3}{2x^2-2}-\frac{x+1}{2x^2-2x}-\frac{-3x+2}{3(x+1)}=\frac{2x-3}{2(x-1)(x+1)}-\frac{x+1}{2x(x-1)}-\frac{-3x+2}{3(x+1)}$$

En este parte se han factorizado todos los denominadores. Luego el m.c.m de $2(x-1)(x+1)$, $2x(x-1)$ y $3(x+1)$ es $6x(x-1)(x+1)$. Para este caso, la regla es que si el término se repite, se toma solo una vez con el mayor grado de entre los repetidos. Si no se repite se agrega al término que representará el m.c.m. al igual que el m.c.m. que se calcula para los números en cada denominador. Así

$$=\frac{3x(2x-3)-3(x+1)^2-2x(x-1)(-3x+2)}{6x(x-1)(x+1)}$$

En el paso anterior note que se llega a cada cálculo al dividir el denominador de cada fracción entre el m.c.m.. El resultado multiplica al numerador de la fracción que se trabaja en el momento. Simplificando y factorizando luego el denominador se tiene que:

$$=\frac{(2x+1)(3x^2-5x-3)}{6x(x+1)(x-1)}$$

Es importante explicar al lector que no se han hecho restricciones sobre los valores que pueden anular cada denominadores. No obstante se supone que los cálculos están bien definidos para comprender, en primer lugar, la naturaleza del procedimiento.

Ejemplo 4.54

Note que:

$$\begin{aligned}
\frac{x^{2n}-y^{2n}}{x^{3n-1}+2x^{2n-1}y^n+x^{n-1}y^{2n}}\div\frac{x^{2n}-x^ny^n}{x^{2n}} &= \frac{x^{2n}-y^{2n}}{x^{3n-1}+2x^{2n-1}y^n+x^{n-1}y^{2n}}\cdot\frac{x^{2n}}{x^{2n}-x^ny^n}\\
&= \frac{(x^n+y^n)(x^n-y^n)}{x^{n-1}(x^{2n}+2x^ny^n+y^{2n})}\cdot\frac{x^{2n}}{x^n(x^n-y^n)}\\
&= \frac{(x^n+y^n)(x^n-y^n)}{x^{n-1}(x^n+y^n)^2}\cdot\frac{x^n\cdot x^n}{x^n(x^n-y^n)}\\
&= \frac{1}{x^{n-1}(xn+yn)}\cdot\frac{x^n}{1}\\
&= \frac{x^{n-(n-1)}}{x^n+y^n}=\frac{x}{x^n+y^n}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.55

Note que:

$$\frac{xy^{-2}+8x^{-2}y}{2x^{-1}+y^{-1}}\cdot\left(\frac{x^2}{x-2y}-2y\right)^{-1}=\frac{\left(\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{8y}{x^2}\right)}{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}}\cdot\left(\frac{x^2-2xy+4y}{x-2y}\right)^{-1}$$

Recuerde que para una base no nula se cumple que $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$. En general $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-1}=\dfrac{1}{\frac{x}{y}}=\dfrac{y}{x}$, lo cual indica que $\left(\dfrac{x^2-2xy+4y}{x-2y}\right)^{-1}=\dfrac{x-2y}{x^2-2xy+4y}$. Así:

$$\begin{aligned}
&=\frac{\dfrac{x^3+8y^3}{y^2x^2}}{\dfrac{2y+x}{xy}}\cdot\frac{x-2y}{x^2-2xy+4y^2}\\
&=\frac{(2y+x)(x^2-2xy+4y^2)}{xy(2y+x)}\cdot\frac{x-2y}{x^2-2xy+4y^2}\\
&=\frac{x-2y}{xy}
\end{aligned}$$

Ejercicios 4.8

4.13 Simplifique las siguientes expresiones. Suponga que están bien definidas, es decir, tienen las restricciones necesarias

a.) $\dfrac{x^3-27}{x^2-x-6}\cdot\dfrac{x^2+2x}{x^2+3x+9}$

b.) $\dfrac{xy}{x^2-y^2}\div\dfrac{xy}{(x+y)^2}$,

c.) $\dfrac{-6+11x-6x^2+x^3}{-2+5x-4x^2+x^3}\cdot\dfrac{x-1}{x-3}$

d.) $\dfrac{x^2}{x^2+4x+4}\cdot\dfrac{x+2}{3x}\div\dfrac{1}{x+2}$

e.) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^3-y^3}\div\dfrac{x-y}{x^2+xy+y^2}\cdot\dfrac{x+y}{2}$

f.) $\dfrac{-3+x+x^2+x^3}{x-1}\cdot\dfrac{2x^2+3x+4}{-4+x+x^2+2x^3}$

g.) $\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{2x^3+4x^2-10x-12}\div\dfrac{2x+2}{x^2-4}$

h.) $\dfrac{6x^3+5x^2-2x-1}{3x^3+x^2+9x+3}\cdot\dfrac{2x^3-x^2+6x-3}{2x^3+3x^2-1}$

i.) $\dfrac{x^2y-xy^2}{x^2y^2}\cdot\dfrac{x^3y-x^2y^2+xy^3}{x^3+y^3}$

j.) $\dfrac{-1+x-x^2+x^3}{12-10x+2x^2}\cdot\dfrac{2x-6}{1-x-x^2+x^3}\cdot\dfrac{x-2}{x^2+1}$

k.) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}$

l.) $\dfrac{3x}{x-2}-\dfrac{4}{x+3}$

m.) $\dfrac{2x}{(x-1)^2}-\dfrac{3}{(x-1)^3}$

n.) $\dfrac{3x}{(x+2)^2}-\dfrac{4}{(x+2)^3}+\dfrac{5}{x(x+2)}$

o.) $\dfrac{4x}{x+1}-\dfrac{3}{x^2-1}+\dfrac{5}{x-1}$

p.) $\dfrac{3x}{x^2-4}-\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{5}{x^2+2x+1}$

q.) $\dfrac{5}{x^3-1}-\dfrac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+x+1)}+4$

r.) $\dfrac{2x+1}{(x^2-1)(x^3+1)}+\dfrac{3x-2}{(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}+\dfrac{5x-4}{x^2+x+1}$

s.) $\left(\dfrac{2}{-6x-x^2+x^3}-\dfrac{x}{2x^2+x^3}\right)\left(\dfrac{x}{x^2-9}\right)^{-1}$

t.) $\left(\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}\right)\left(\dfrac{x-y}{x^2-y^2}-\dfrac{x-y}{x^2-2xy+y^2}\right)$

4.6 Valor absoluto y radicales

El valor absoluto y los radicales tienen una relación significativa en matemáticas, reflejando la evolución y el refinamiento de conceptos esenciales en la teoría de números y el análisis. El valor absoluto, introducido formalmente por Jean-Robert Argand en el siglo XIX, proporciona una medida de magnitud sin considerar la dirección, fundamental para la geometría y la teoría de funciones. Los radicales, con raíces históricas en la antigua Babilonia y Egipto, fueron sistematizados en el Renacimiento, permitiendo la solución de ecuaciones polinómicas más complejas. La intersección de estos conceptos es crucial en el análisis de expresiones algebraicas y la simplificación de ecuaciones, facilitando la resolución de problemas en física e ingeniería. La capacidad de manejar magnitudes y raíces cuadradas, por ejemplo, se aplica en la teoría de errores, las ecuaciones diferenciales y la modelización de fenómenos naturales, demostrando la importancia histórica y práctica de estos conceptos en la evolución de las matemáticas.

El valor absoluto

El valor absoluto de un número real es una medida de su magnitud, independientemente de su signo. Se denota como $|x|$, donde x es cualquier número real.

Definición de valor absoluto

En términos matemáticos, el valor absoluto de x se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Alguno ejemplos sobre su uso son los siguientes:

1. Para -7, al ser negativo, la definición indica que

$$|-7| = -(-7) = 7$$

2. Considere dos puntos en la recta numérica, $a = -3$ y $b = 4$. La distancia entre estos dos puntos se calcula usando el valor absoluto de la diferencia entre ellos:

$$|a-b| = |-3-4| = |-7| = 7$$

   Por lo tanto, la distancia entre -3 y 4 es 7 unidades.

3. Al calcular $|x-2|$ se tiene que

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si } x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \end{cases}$$

   Por lo tanto, si los valores son mayores o iguales que 2, se tiene que $|x-2| = x-2$, es decir la resta se hace de manera usual. En el caso de que los valores sean menores que 2, se debe hacer la resta y proceder luego con un cambio de signo para que el resultado sea positivo.

Ejemplo 4.56

Definamos $|x^2-3x+1|$ por partes. Utilizando la definición de valor absoluto, tenemos que:

$$|x^2-3x+1| = \begin{cases} x^2-3x+1 & \text{si} \quad x^2-3x+1 \geq 0 \\ -(x^2-3x+1) & \text{si} \quad x^2-3x+1 < 0 \end{cases}$$

Observe que resolver $x^2-3x+1 \geq 0$ y $x^2-3x+1 < 0$ implica tener conocimientos de inecuaciones cuadráticas, lo cual requiere factorizar la expresión y prever el comportamiento del signo de los valores dentro y fuera del intervalo cuyos extremos son las raíces de esta cuadrática. Este análisis puede variar si la cuadrática es irreducible o tiene una raíz doble. Todos estos aspectos se tratan en el capítulo de inecuaciones.

Cálculo de valores absolutos

Ejemplo 4.57

Calcule $|x^3|$.
Utilizando la definición de valor absoluto se tiene que:

$$|x^3| = \begin{cases} x^3 & si \ x^3 & \geq & 0 \\ -x^3 & si \ x^3 & < & 0 \end{cases}$$

Como $x^3 \geq 0$ para todo $x \geq 0$ y $x^3 < 0$ para todo $x < 0$, entonces:

$$|x^3| = \begin{cases} x^3 & si \ x & \geq & 0 \\ -x^3 & si \ x & < & 0 \end{cases}$$

Ejemplo 4.58

Observe que $|x^4| = x^4$. Esto se debe a que, para cualquier valor real x, su cuarta potencia x^4 siempre es positiva o cero, independientemente del signo de x. Debido a que $x^4 \geq 0$ para todos los $x \in \mathbb{R}$, la definición del valor absoluto no requiere un análisis adicional en este caso.
En otras palabras, al elevar un número real a una potencia par, el resultado es siempre no negativo. Por lo tanto, la expresión $|x^4|$ simplifica directamente a x^4 sin necesidad de considerar casos separados para x positivo o negativo. Esto elimina la necesidad de un tratamiento por partes, ya que la igualdad $|x^4| = x^4$ se cumple universalmente.

Ejemplo 4.59

Calcule $|2-x|$ sabiendo que $x>2$.
Utilizando la definición de valor absoluto se tiene que:

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x & si \; 2-x \geq 0 \\ -(2-x) & si \; 2-x < 0 \end{cases} \quad (*)$$

Como $x>2$ entonces:

$$x>2$$
$$x-x>2-x$$
$$0>2-x$$

Es decir $2-x<0$, entonces por $(*)$ se tiene que:

$$|2-x| = -(2-x) = x-2$$

Ejemplo 4.60

Calcule $|x-3|$ sabiendo que $x<-1$.
Utilizando la definición de valor absoluto se tiene que:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & si \; x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & si \; x-3 < 0 \end{cases} \quad (**)$$

Como $x<-1$, entonces restando 3 a ambos lados, se tiene que $x-3<-1-3=-4$.
Por lo tanto $x-3<-4<0$ y por $(**)$ se obtiene que:

$$|x-3| = -(x-3) = 3-x$$

Ejemplo 4.61

Calcule los siguientes valores absolutos.

1. $\left|x-\frac{1}{3}\right|$, donde $4x<1$

$$4x<1$$
$$\Rightarrow x<\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow x-\frac{1}{3}<\frac{1}{4}-\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow x-\frac{1}{3}<\frac{-1}{12}$$

Es decir, $x - \dfrac{1}{3}$ es negativo, entonces $\left|x - \dfrac{1}{3}\right| = \left(x - \dfrac{1}{3}\right) = -x + \dfrac{1}{3}$

2. $|4x - 2y|$, donde $2x < y - 1$

4.7 Racionalización y desracionalización

La racionalización y desracionalización son técnicas utilizadas en álgebra para simplificar expresiones que contienen raíces.

4.7.1 Racionalización

Caso 1: El denominador es un monomio

Ejemplo 4.62

Racionalice la expresión: $\dfrac{2xy^2}{\sqrt{x^3y^2}}$

$$\begin{aligned}
\frac{2xy^2}{\sqrt{x^3y^2}} &= \frac{2xy^2}{|x||y|\sqrt{x}} && \textit{(Simplificación del radical)}\\
&= \frac{2xy^2}{x|y|\sqrt{x}} && \textit{(Pues } x > 0\textit{, si no } \sqrt{x} \textit{ no existe)}\\
&= \frac{2y^2}{|y|\sqrt{x}} && \textit{(Simplificación)}\\
&= \frac{2y^2}{|y|\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} && \textit{(Racionalizando)}\\
&= \frac{2y^2\sqrt{x}}{|y|x}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.63

Racionalice la expresión: $\dfrac{2x^3}{\sqrt[7]{x^{19}}}$

$$\begin{aligned}
\frac{2x^3}{\sqrt[7]{x^{19}}} &= \frac{2x^3}{x^2\sqrt[7]{x^5}} && \textit{(Simplificación del radical)}\\
&= \frac{2x}{\sqrt[7]{x^5}} && \textit{(Simplificación)}\\
&= \frac{2x}{\sqrt[7]{x^5}} \cdot \frac{\sqrt[7]{x^2}}{\sqrt[7]{x^2}} && \textit{(Racionalización)}\\
&= \frac{2x\sqrt[7]{x^2}}{x}
\end{aligned}$$

$$= 2\sqrt[7]{x^2}$$

Ejemplo 4.64

Racionalice la expresión: $\dfrac{4x^2+6x}{\sqrt{2x^2-7x-15}}$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{4x^2+6x}{\sqrt{2x^2-7x-15}} &= \frac{4x^2+6x}{\sqrt{2x^2-7x-15}} \cdot \frac{\sqrt{2x^2-7x-15}}{\sqrt{2x^2-7x-15}} \\
&= \frac{(4x^2+6x)\sqrt{2x^2-7x-15}}{2x^2-7x-15} \\
&= \frac{2x(2x+3)\sqrt{2x^2-7x-15}}{(2x+3)(x-5)} \\
&= \frac{2x\sqrt{2x^2-7x-15}}{x-5}
\end{aligned}$$

Caso 2: El denominador es un binomio y hay raíces cuadradas

Ejemplo 4.65

Racionalice la siguiente expresión: $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{3x+2}}$

Para eliminar las raíces cuadradas del denominador se utiliza la fórmula notable $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{3x+2}} &= \frac{2x}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{3x+2}} \cdot \frac{\sqrt{2x+2}+\sqrt{3x+2}}{\sqrt{2x+2}+\sqrt{3x+2}} \\
&= \frac{2x(\sqrt{2x+2}+\sqrt{3x+2})}{(\sqrt{2x+2})^2-(\sqrt{3x+2})^2} \\
&= \frac{2x(\sqrt{2x+2}+\sqrt{3x+2})}{2x+2-(3x+2)} \\
&= -2(\sqrt{2x+2}+\sqrt{3x+2})
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.66

Racionalice la expresión: $\dfrac{2x^2y+8xy^2}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$

Note que:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2y+8xy^2}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}} &= \frac{2x^2y+8xy^2}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}\cdot\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}\\
&= \frac{(2x^2y+8xy^2)(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})}{x+y-(x-y)}\\
&= \frac{2xy(x+4y)(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})}{2y}\\
&= x(x+4y)(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})
\end{aligned}$$

Caso 3: El denominador es un binomio y hay raíces cúbicas

Ejemplo 4.67

Racionalice la expresión: $\dfrac{2x}{\sqrt[3]{2x^3+3}-x}$

Para eliminar la raíz del denominador se utiliza la fórmula notable $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$:

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{\sqrt[3]{2x^3+3}-x} &= \frac{2x}{\sqrt[3]{2x^3+3}-x}\cdot\frac{(\sqrt[3]{2x^3+3})^2+x\sqrt[3]{2x^3+3}+x^2}{(\sqrt[3]{2x^3+3})^2+x\sqrt[3]{2x^3+3}+x^2}\\
&= \frac{2x((\sqrt[3]{2x^3+3})^2+x\sqrt[3]{2x^3+3}+x^2)}{(\sqrt[3]{2x^3+3})^3-x^3}\\
&= \frac{2x((\sqrt[3]{2x^3+3})^2)+x\sqrt[3]{2x^3+3}+x^2)}{2x^3+3-x^3}\\
&= \frac{2x((\sqrt[3]{2x^3+3})^2)+x\sqrt[3]{2x^3+3}+x^2)}{x^3+3}\\
&= -2(\sqrt{2x+2}+\sqrt{3x+2})
\end{aligned}$$

Ejercicios 4.9

4.14 Racionalice las siguientes expresiones.

a.) $\dfrac{-3x^6}{\sqrt[4]{x^{22}}}$

b.) $\dfrac{7x}{\sqrt{6x+2}-\sqrt{3x+2}}$

c.) $\dfrac{x+5}{\sqrt{-2x+2}-\sqrt{-3x-3}}$

d.) $\dfrac{x-1}{\sqrt{8x+1}-\sqrt{13x-4}}$

e.) $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}$

f.) $\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+2}}$

4.7.2 Desracionalizar

Desracionalización es el proceso inverso a la racionalización, aunque es menos comúnmente referido por este término. A veces se llama "introducción de radicales" o simplemente "deshacer la racionalización". Se usa principalmente en ciertos contextos de simplificación o en problemas donde se busca presentar la expresión en una forma que contiene raíces.

Ejemplo 4.68

Desracionalice la expresión: $\dfrac{\sqrt[5]{3x^{12}}}{x^3}$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[5]{3x^{12}}}{x^3} &= \frac{x^2\sqrt[5]{3x^2}}{x^3} = \frac{\sqrt[5]{3x^2}}{x} = \frac{\sqrt[5]{3x^2}}{x}\cdot\frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}} \\
&= \frac{x\sqrt[5]{3}}{x\sqrt[5]{x^3}} = \frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{x^3}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.69

Desracionalice la expresión: $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}} &= \frac{(\sqrt{x-1})^2-(\sqrt{x-3})^2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}} \\
&= \frac{x-1-(x-3)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}}
\end{aligned}$$

Ejercicios 4.10

4.15 Racionalice las siguientes expresiones.

a.) $\dfrac{-3x^6}{\sqrt[4]{x^{22}}}$

b.) $\dfrac{7x}{\sqrt{6x+2}-\sqrt{3x+2}}$

c.) $\dfrac{x+5}{\sqrt{-2x+2}-\sqrt{-3x-3}}$

d.) $\dfrac{x-1}{\sqrt{8x+1}-\sqrt{-2x-1}}$

e.) $\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+2}}$

f.) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}$

g.) $\dfrac{2}{13\sqrt{4-x}+5}$

h.) $\dfrac{12}{3\sqrt{5}-7}$

i.) $\dfrac{15}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$

j.) $\dfrac{12}{3\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{2}}$

k.) $\dfrac{x^2-4x-5}{\sqrt[3]{x^2+3x+6}-\sqrt[3]{x+5}}$

4.16 Desracionalice las siguientes expresiones.

a.) $\dfrac{\sqrt{y^2(x-2)^3}}{(x-2)^2}$

b.) $\dfrac{\sqrt{x^3(x-5)^5}}{x(x-5)^3}$

c.) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x-5}$

d.) $\dfrac{\sqrt{2x+4}-\sqrt{3x+3}}{x^2-1}$

e.) $\dfrac{\sqrt{3x^2-x-1}-\sqrt{2x^2-1}}{7x^2-6x-1}$

5 — Ecuaciones Algebraicas

5.1 Introducción

Uno de los temas que más ha captado la atención y el interés de los matemáticos durante cientos de años ha sido la resolución de ecuaciones. Su historia está permeada de diversos personajes y culturas a lo largo de muchos siglos. Gracias a la arqueología, sabemos que las ecuaciones de primer grado surgieron de modo primitivo en las grandes culturas orientales, tal como lo testifican algunos hallazgos de tablillas cuneiformes.

Estas ecuaciones se empleaban con el fin de resolver problemas ingenieriles en mediciones de terrenos o irrigación de parcelas, lo cual ha quedado registrado en papiros egipcios. Se han encontrado, además, problemas modelados en ecuaciones de segundo grado con sus respectivas soluciones en tablillas babilónicas. Por su parte, en la antigua China, cerca del 200 a.C., apareció el primer análisis de ecuaciones simultáneas o lo que usualmente denominamos sistemas de ecuaciones.

Con todo, el desarrollo de una teoría acerca de la solución de ecuaciones de grado n, ha requerido de varios siglos y entre los matemáticos más destacados en este campo se puede mencionar a D´Alembert (1717-1783), Gauss (1777-1855), Abel (1802-1829) y Galois (1811-1832). En los últimos dos siglos de nuestra historia, el estudio de las ecuaciones ha alcanzado gran relevancia debido a la amplia gama de problemas de la vida real y del mundo físico que pueden expresarse como ecuaciones.

En esta sección se abordará lo esencial en la resolución de ecuaciones y la terminología básica que describe este tópico, mismo que puede abreviarse estableciendo una conexión entre números reales y expresiones algebraicas. Como estos últimos ya han sido vistos y estudiados en las secciones anteriores, se utilizarán sus definiciones y propiedades.

5.2 Ecuaciones Algebraicas

Definición 5.1 (Intuitiva del concepto de ecuación algebraica)
Las igualdades entre expresiones algebraicas, denominadas *miembros*, que se cumplen solo para determinados valores de las variables se denominan *ecuaciones*.

Definición 5.2 (Terminología)

1. Una proposición matemática es una **ecuación en una variable** si se igualan dos expresiones, y al menos una de ellas contiene una única variable.
2. Las variables de una ecuación algunas veces se denominan **incógnitas**.

Ejemplo 5.1

Algunos ejemplos de ecuaciones algebraicas en una variable son:

$$x^2+1=0, \quad \frac{x+2x}{x-2}=1+\frac{3}{-2+x}, \quad 3x-2=x+2, \quad |2x-1|=3\sqrt{(x-5)^2}$$

Definición 5.3 (Solución de una ecuación)
Dada cualquier ecuación en x, al sustituir la variable x por un número a, tal que $a \in \mathbb{R}$, si se obtiene un enunciado verdadero (identidad), entonces a se denomina **solución o raíz de la ecuación**. El conjunto de todas las soluciones de la ecuación se denomina **conjunto solución** de la ecuación.

Ejemplo 5.2

Las siguientes ecuaciones se adjuntan con sus respectivas soluciones, a la luz de la **Definición 5.3**. Puede comprobar con una calculadora lo indicado.

a) Note que la solución de la ecuación $\dfrac{x+2x}{x-2}=1+\dfrac{3}{-2+x}$ es $x=\dfrac{1}{2}$, pues:

$$\frac{\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}-2}=1+\frac{3}{-2+\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad -1=-1 \quad \text{(Verdadero)}$$

b) La ecuación $x+3\sqrt{x}=5$ tiene como solución $x=\dfrac{19-3\sqrt{29}}{2}$, de modo que:

$$\begin{aligned} x+3\sqrt{x}=5 \quad &\Rightarrow \quad \frac{19-3\sqrt{29}}{2}+3\left(\frac{19-3\sqrt{29}}{2}\right)=5 \\ &\Rightarrow \quad 5=5 \quad \text{(Verdadero)} \end{aligned}$$

c) Siguiendo la idea de los dos ejemplos anteriores y sustituyendo, se verá fácilmente que la ecuación $x^3 + 8x = 15x^2$ tiene como soluciones a:

$$x = 0; \quad x = \frac{15 + \sqrt{193}}{2}; \quad x = \frac{15 - \sqrt{193}}{2}$$

Ejemplo 5.3

Resuelva la siguiente ecuación lineal

$$\sqrt{5}x + 2\sqrt{7} = \sqrt{13}$$

Solución: Para resolver la ecuación dada se siguen los siguientes pasos:

1. Aislar el término con x: Se resta $2\sqrt{7}$ en ambos lados de la ecuación para dejar el término con x solo en un lado. Esto es:

$$\sqrt{5}x = \sqrt{13} - 2\sqrt{7}$$

2. Despejar x: Dividimos ambos lados por $\sqrt{5}$ para resolver para x.

$$x = \frac{\sqrt{13} - 2\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$$

Entonces, la solución de la ecuación es:

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{13} - 2\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \right\}$$

En el caso del ejemplo anterior, si se cambia la ecuación $\sqrt{5}x + 2\sqrt{7} = \sqrt{13}$ por $ax + b = c$, donde $a = \sqrt{5}$, $b = 2\sqrt{7}$ y $c = \sqrt{13}$ se puede observar que su solución se decanta en

$$x = \frac{b - c}{a}$$

con la observación de que a no sea nulo. Este hecho se puede llevar a un escenario con ecuaciones literales, donde la estructura de algunas ecuaciones se puede generalizar. En algunos casos no se especifica la variables a despejar. Cuando esto suceda se toma tácitamente la varibale x por despejar.

5.3 Ecuaciones Literales

Definición 5.4 (Ecuación Literal)

Una ecuación literal es aquella ecuación que involucra más de una variable, es decir, que posee tanto incógnitas como expresiones literales que representan cantidades fijas o constantes.

Ejemplo 5.4

Las siguientes son ecuaciones literales:

$$E = mc^2 \qquad s = \frac{n(n+1)}{2} \qquad ax^2+bx+c=0 \qquad Fd = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2)$$

5.3.1 Despeje de variables indicadas

El lector debería pensar en las ecuaciones, de manera intuitiva, como si fueran acertijos en los que hay que descubrir las incógnitas. En este contexto, es importante recordar los siguientes principios:

1. Si un término se suma o resta en uno de los lados de la igualdad que contiene la variable, este término puede "pasarse al otro lado" de la ecuación aplicando el inverso aditivo a ambos lados. Esto asegura que se mantiene la igualdad.
2. Cualquier número o variable que sea un factor de la incógnita puede "pasarse al otro lado en el denominador," aplicando el inverso multiplicativo en ambos lados de la ecuación. Este proceso no cambia el signo.

¡Cuidado!

En relación con este segundo punto, es fundamental recordar que, al "pasar a dividir" un factor, este no puede ser igual a cero; de lo contrario, se pueden perder soluciones al intentar determinar el conjunto solución de la ecuación.

Se invita al lector a repasar las propiedades de la relación de igualdad expresadas en la **Sección 2.3**, es decir, las Propiedades de los Números Reales.

Ejemplo 5.5

La fórmula para convertir la temperatura de grados Celsius a Fahrenheit está dada por

$$C = \frac{9}{5}(F-32)$$

Despeje la variable F para encontrar la temperatura en grados Fahrenheit (F).

Solución: En primer lugar, se multiplica por el inverso multiplicativo de $\frac{9}{5}$ a ambos lados de la igualdad. Esto es

$$C = \frac{9}{5}(F-32) \Leftrightarrow \frac{5}{9} \cdot C = F - 32$$

Ahora, se suma 32 en ambos lados para despejar F:

$$F = \frac{5}{9} \cdot C + 32$$

Con esto, se ha encontrado una fórmula para encontrar F .

Ejemplo 5.6

Considere la siguiente ecuación literal $a+b=\dfrac{bx+a}{ax-b}$, donde a y b representan constantes reales. Demuestre que $\dfrac{b^2+ab+a}{a^2+ba-b}$ es solución de la ecuación dada.

Demostración: Sustituyendo la expresión $\dfrac{b^2+ab+a}{a^2+ba-b}$ por la incógnita de la ecuación, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
a+b=\frac{bx+a}{ax-b} \quad &\Longleftrightarrow \quad a+b=\frac{b\left(\dfrac{b^2+ab+a}{a^2+ba-b}\right)+a}{a\left(\dfrac{b^2+ab+a}{a^2+ba-b}\right)-b}\\
&\Longleftrightarrow \quad a+b=\frac{\dfrac{b^3+ab^2+ab}{a^2+ba-b}+a}{\dfrac{ab^2+a^2b+a^2}{a^2+ba-b}-b}\\
&\Longleftrightarrow \quad a+b=\frac{\dfrac{b^3+ab^2+ab+a(a^2+ba-b)}{\cancel{a^2+ba-b}}}{\dfrac{ab^2+a^2b+a^2-b(a^2+ba-b)}{\cancel{a^2+ba-b}}}\\
&\Longleftrightarrow \quad a+b=\frac{b^3+ab^2+ab+a^3+ba^2-ab}{ab^2+a^2b+a^2-ba^2-b^2a+b^2}\\
&\Longleftrightarrow \quad a+b=\frac{b^3+ab^2+ba^2+a^3}{a^2+b^2}\\
&\Longleftrightarrow \quad a+b=\frac{(b^3+ab^2)+(ba^2+a^3)}{a^2+b^2}\\
&\Longleftrightarrow \quad a+b=\frac{b^2(b+a)+a^2(b+a)}{a^2+b^2}\\
&\Longleftrightarrow \quad a+b=\frac{(b+a)\cancel{(a^2+b^2)}}{\cancel{a^2+b^2}}\\
&\Longleftrightarrow \quad a+b=a+b
\end{aligned}
$$

Dado que la igualdad anterior es una identidad, es decir, es verdadera, entonces se concluye que la expresión $\dfrac{b^2+ab+a}{a^2+ba-b}$ es solución de la ecuación dada.

Ejemplo 5.7

Una de las ecuaciones más importantes que describen el Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado está dada por: $x - x_0 = \left(\dfrac{v_{0x} + v_x}{2}\right) t$; determine la velocidad inicial (v_{0x}).

Solución:

$$\begin{aligned} x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right) t \quad &\Rightarrow \quad \frac{2(x-x_0)}{t} - v_x = \frac{2}{t}\left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right) t - v_x \\ &\Rightarrow \quad v_{0x} = \frac{2(x-x_0)}{t} - v_x \end{aligned}$$

$$\therefore v_{0x} = \frac{2(x-x_0)}{t} - v_x$$

Ejemplo 5.8

Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demuestre que $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ es una solución de dicha ecuación.

Demostración:

Sustituyendo $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en la ecuación dada:

$$\begin{aligned} & a\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) + c = 0. \\ \Longleftrightarrow \quad & a \cdot \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} + b\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) + c = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & a \cdot \frac{b^2 - 2b\sqrt{b^2 - 4ac} + (b^2 - 4ac)}{4a^2} + b \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + c = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{a \cdot [b^2 - 2b\sqrt{b^2 - 4ac} + (b^2 - 4ac)] + 2ab \cdot (-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) + 4a^2 c}{4a^2} = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & a \cdot [b^2 - 2b\sqrt{b^2 - 4ac} + (b^2 - 4ac)] + 2ab \cdot (-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) + 4a^2 c = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 2ab^2 - 4a^2 c - 2ab\sqrt{b^2 - 4ac} - 2ab^2 + 2ab\sqrt{b^2 - 4ac} + 4a^2 c = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 0 = 0 \end{aligned}$$

Nótese que la igualdad anterior es verdadera, por lo que $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ satisface la ecuación, es decir, es solución de $ax^2 + bx + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Teorema 5.1 (Teorema del factor cero)

Un producto de n factores entre expresiones algebriacas es igual a cero si y solo si uno o más de los factores es cero. Es decir, si x_1, x_2, x_3, ... , x_n son expresiones algebraicas, entonces:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = 0 \iff (x_1 = 0) \ \vee \ (x_2 = 0) \ \vee \ (x_3 = 0) \vee \ \ldots \ \vee \ (x_n = 0)$$

Prosa de la prueba

"$\Longrightarrow$"

Hip. $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = 0$
H.q.d.: $(x_1 = 0) \ \vee \ (x_2 = 0) \ \vee \ (x_3 = 0) \vee \ \ldots \ \vee \ (x_n = 0)$

Pba. Se debe probar que, al menos, uno de los factores es igual a cero.
Suponga, por contradicción, que ninguno de los factores es igual a cero, es decir,

$$x_1 \neq 0; x_2 \neq 0; x_3 \neq 0; \ldots ; x_n \neq 0$$

$$\Rightarrow \ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \neq 0 \ (\Rightarrow\Leftarrow)$$

La proposición anterior contradice la hipótesis.

$$\therefore \quad (x_1 = 0) \ \vee \ (x_2 = 0) \ \vee \ (x_3 = 0) \vee \ \ldots \ \vee \ (x_n = 0)$$

"$\Longleftarrow$"

Hip.: $(x_1 = 0) \ \vee \ (x_2 = 0) \ \vee \ (x_3 = 0) \vee \ \ldots \ \vee \ (x_n = 0)$
H.q.d.: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = 0$

Pba. Supóngase, por contradicción, que:
1) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \neq 0$
2) $\Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \neq 0 \quad \wedge \quad x_k = 0$ con $1 \leq k \leq n$ (Adjunción de la hipótesis)
3) $\Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot \ldots \cdot x_n \neq 0$
4) $\Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_k \neq 0$ (Conmutatividad)
5) $\Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot 0 \neq 0$ (Por Teorema 2.1).

Note que, si se realiza el producto del miembro izquierdo, teniendo como uno de sus factores al cero, el resultado siempre será cero, por Teorema 2.1.
6) $0 \neq 0 \equiv F_o$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

$$\therefore \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = 0$$

$$\therefore \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = 0 \iff (x_1 = 0) \ \vee \ (x_2 = 0) \ \vee \ (x_3 = 0) \vee \ \ldots \ \vee \ (x_n = 0)$$

Es importante indicar que el teorema del factor cero se puede extender a cualquier cantidad de expresiones algebraicas. En consecuencia, como veremos más adelante (Sección 5.4.2), es muy útil para hallar las soluciones de una ecuación que se encuentre factorizada. Para tales efectos, es indispensable que uno de los dos miembros de la ecuación sea igual a cero.

Ejemplo 5.9

Encuentre el conjunto solución de la ecuación $(ax+b)(b-x)=0$, si se sabe que a y b representan constantes reales.

$$\begin{aligned} (ax+b)(b-x)=0 \quad &\iff \quad ax+b=0 \quad \vee \quad b-x=0 \\ &\iff \quad x=\frac{-b}{a} \quad \vee \quad x=b \\ &\therefore \quad S=\left\{\frac{-b}{a},b\right\} \end{aligned}$$

Ejercicios 5.1

5.1 Haciendo uso de las propiedades de la igualdad, despeje en cada ecuación la variable que se le indica:

a.) $\dfrac{T+2}{8n}=\dfrac{R}{e+\dfrac{E}{2n}}$; n

b.) $M=\dfrac{9E\beta}{\alpha\beta-k}$; β

c.) $P=\dfrac{k}{\dfrac{mk+nl}{mn}-k}$; k

d.) $\dfrac{4S}{rR+r}=\dfrac{rR-r}{2r}+2Sr$; r

5.2 Dada la ecuación literal $e-fx=c-dx$, donde c, d, e y f son constantes reales. Demuestre que $x=\dfrac{c-e}{d-f}$ es solución de la ecuación dada cuando $d\neq f$.

5.3 Sea la ecuación $\dfrac{1}{r-sx}=\dfrac{1}{t-ux}$, donde r, s, t, y u son constantes reales. Demuestre que $x=\dfrac{r-t}{s-u}$ es solución de la ecuación dada cuando $s\neq u$ y $st\neq ru$

5.4 Sean a, b, m, y n constantes reales. Encuentre el conjunto solución de las siguientes ecuaciones en términos de la variable x:

a.) $\left(\dfrac{ax^2+b}{a}\right)\left(a-\dfrac{1}{x}\right)^3(a+bx)=0$

b.) $(xn-1)^2(m-9x)(m-1+\sqrt{nx})=0$

c.) $(2a-nx)(a^2+xm^2+bx)=0$

5.5 Sea la ecuación $\dfrac{A}{x}=\dfrac{B}{B-x}$, donde A y B son constantes reales. Determine la solución de esta ecuación en términos de la variable x y las condiciones para la existencia de esta solución.

5.4 Ecuaciones numéricas en una variable

Las ecuaciones numéricas en una variable son ecuaciones que involucran una incógnita y cuyos coeficientes y términos constantes son números específicos. Estas ecuaciones representan una igualdad entre dos expresiones matemáticas, y el objetivo es encontrar el valor de la variable que hace verdadera la ecuación. Las ecuaciones numéricas son un caso particular de las ecuaciones algebraicas, en las que las operaciones básicas—suma, resta, multiplicación y división—se aplican a números conocidos y a una única incógnita. Resolverlas implica aplicar principios algebraicos básicos para despejar la variable y determinar su valor.

Definición 5.5 (Números algebraicos y números trascendentes)

Sea $Q[x]$ el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales. Se dice que un número complejo α es **algebraico** si existe $P \in Q[x]$ con $P \neq 0$ tal que $P(\alpha) = 0$. Un número complejo α es **trascendente** si no es algebraico.

Ejemplo 5.10

- Dado que $\sqrt{2}$ es solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$, concluimos que $\sqrt{2}$ es un número algebraico.
- Puesto que e y π no son soluciones de ninguna ecuación polinomial con coeficientes racionales, se consideran números trascendentes.[a]

[a] Para las pruebas detalladas de la trascendencia de e y π, se recomienda consultar textos especializados como *An Introduction to the Theory of Numbers* de G.H. Hardy y E.M. Wright.

Teorema 5.2 Teorema Fundamental del Álgebra

Para toda ecuación polinomial $P(x) = 0$ de grado n, con coeficientes en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, se cumple que $P(x)$ tiene exactamente n soluciones en $\mathbb{C}$ (contando multiplicidades).

A primera vista, este teorema puede parecer poco revelador. Sin embargo, al combinarlo con el *Teorema del Factor* (ver **Teorema 4.3**), nos conduce a un corolario importante: *Toda ecuación polinomial $P(x) = 0$ de grado n tiene a lo sumo n raíces distintas* (ver **Teorema 4.4**). Esto significa que el número total de soluciones (considerando multiplicidades y raíces complejas) no excede el grado del polinomio.

Ejemplo 5.11

Analice las siguientes ecuaciones polinomiales y determine sus soluciones:

1. **Ecuación:** $3x^6 - 192 = 0$
   Solución:

$$\begin{aligned} 3x^6 - 192 &= 0 \\ x^6 &= 64 \\ x &= \sqrt[6]{64} \quad \text{y} \quad x = -\sqrt[6]{64} \end{aligned}$$

   Las raíces sextas de 64 son los números complejos que satisfacen $x^6 = 64$. Estos son:

$$x = 2, \quad x = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad x = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad x = -2, \quad x = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}, \quad x = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

   Conclusión: La ecuación tiene **6 soluciones complejas**, de las cuales **2 son reales**: $x = 2$ y $x = -2$.

2. **Ecuación:** $x^4 - 5x^2 = -4$
   Solución:

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= 0 \\ (x^2-4)(x^2-1) &= 0 \\ x^2 = 4 &\implies x = \pm 2 \\ x^2 = 1 &\implies x = \pm 1 \end{aligned}$$

   Conclusión: La ecuación tiene **4 soluciones reales**: $x = -2, x = -1, x = 1, x = 2$.

3. **Ecuación:** $x^3 - 15x - 8 = 0$
   Solución: Esta ecuación cúbica no tiene soluciones racionales obvias, pero se puede utilizar métodos numéricos o el Teorema de D'Alembert[a] para aproximar sus raíces. Note que:

$$f(-3) = (-27) + 45 - 8 = 10, \quad f(0) = 0 - 0 - 8 = -8, \quad f(2) = 8 - 30 - 8 = -30$$

   Observe que la función cambia de signo entre $x = -3$ y $x = 0$, y también entre $x = 0$ y $x = 2$, lo que indica la existencia de una raíz real en esos intervalos. Sin embargo, debido al comportamiento de las funciones cúbicas, se concluye que hay **una raíz real** y **dos raíces complejas conjugadas**.
   Conclusión: La ecuación tiene un total de **3 soluciones en** $\mathbb{C}$, como predice el Teorema Fundamental del Álgebra.

[a] El Teorema de D'Alembert, una forma temprana del Teorema Fundamental del Álgebra, establece que toda ecuación polinomial no constante con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja. Para más detalles, el lector puede consultar textos como *Introducción al Álgebra* de G. Birkhoff y S. Mac Lane.

Teorema 5.3 Teoremas de Paridad de Raíces

1. Para toda ecuación polinomial con coeficientes reales y de grado $n \geq 2$, si una de las raíces es $x_1 = a + bi$ con $b \neq 0$, entonces otra raíz es $x_2 = a - bi$.
2. Para toda ecuación polinomial con coeficientes racionales y de grado $n \geq 2$, si una raíz es $x_1 = a + \sqrt{b}$, donde b no es un cuadrado perfecto, entonces otra raíz es $x_2 = a - \sqrt{b}$.
3. Para toda ecuación polinomial con coeficientes racionales y de grado $n \geq 4$, si una raíz es $x_1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, con $a, b \in \mathbb{Q}$ y $\sqrt{a}, \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$, entonces también son raíces:

$$x_2 = \sqrt{a} - \sqrt{b}, \quad x_3 = -\sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad x_4 = -\sqrt{a} - \sqrt{b}.$$

El Teorema 5.3 facilita el hallazgo del conjunto solución de una ecuación cuando se conoce una de sus raíces y dicha raíz cumple las condiciones enunciadas. Esto evita la necesidad de repetir procedimientos similares para encontrar las otras soluciones, simplificando el proceso de resolución.

Ejemplo 5.12

A continuación se presentan algunas ecuaciones con sus respectivas soluciones:

- La ecuación $x^2+2x+5=0$ tiene como soluciones:

$$x_1=-1+2i, \quad x_2=-1-2i.$$

- La ecuación $x^2-4x-1=0$ tiene como soluciones:

$$x_1=2+\sqrt{5}, \quad x_2=2-\sqrt{5}.$$

- La ecuación $16x^4-80x^2+89=0$ tiene como soluciones:

$$x_1=\frac{\sqrt{10+\sqrt{11}}}{2}, \qquad x_2=-\frac{\sqrt{10+\sqrt{11}}}{2},$$
$$x_3=\frac{\sqrt{10-\sqrt{11}}}{2}, \qquad x_4=-\frac{\sqrt{10-\sqrt{11}}}{2}.$$

N Es posible verificar si una solución obtenida es correcta sustituyendo el valor de x en la ecuación original. Si al hacerlo la ecuación se convierte en una identidad verdadera, entonces el valor hallado es efectivamente una solución; en caso contrario, no lo es (ver Ejemplo 5.2).

Definición 5.6 Ecuaciones equivalentes
Dos ecuaciones que comparten el mismo conjunto de soluciones se denominan *ecuaciones equivalentes*.

Ejemplo 5.13

Las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$$4+81x=-\sqrt{5}+8x \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{4+\sqrt{5}}{73}$$

$$a+b=\frac{bx+a}{ax-b} \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{b^2+ab+a}{a^2+ab-b}, \quad \text{con} \quad a,b\in\mathbb{R}.$$

5.4.1 Ecuaciones lineales

Las ecuaciones lineales, de la forma $ax+b=0$, han sido una parte fundamental de las matemáticas desde la antigüedad.

Los babilonios ya resolvían ecuaciones lineales simples alrededor del año 2000 a.C. Durante el desarrollo de las matemáticas, se han creado métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, como la eliminación de Gauss y la regla de Cramer, aplicados a sistemas como:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Estas ecuaciones son esenciales en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería, y continúan siendo una herramienta crucial en la matemática moderna.

Definición 5.7 Ecuación lineal

Se define la *ecuación lineal* o **ecuación de primer grado** en la variable x como aquella que puede expresarse en la forma $ax + b = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Su única solución es $x = -\frac{b}{a}$, y su conjunto solución es $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Ejemplo 5.14

Considere las siguientes ecuaciones:

- **Ecuaciones lineales:** $81x + 4 = 8x - \sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{7}x + 4 = 3$.
- **Ecuaciones no lineales:** $x + 3\sqrt{x} = 5$ y $3x + 2y - z + xz = 4$.

Ejemplo 5.15

Determine si la ecuación $-3x(2-x) - 3x = 5 + 3x^2$ corresponde a una ecuación lineal.

Solución:

$$\begin{aligned} -3x(2-x) - 3x &= 5 + 3x^2 \\ -6x + 3x^2 - 3x &= 5 + 3x^2 \\ (-6x - 3x) + 3x^2 - 3x^2 - 5 &= 0 \\ -9x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Note que, mediante las propiedades de la igualdad, la ecuación pudo expresarse en la forma $ax + b = 0$, por lo que la ecuación dada corresponde a una ecuación lineal.

De acuerdo con la **Definición de ecuación lineal**, si se desea obtener la solución de esta ecuación, basta despejar la incógnita, encontrando así una ecuación equivalente a la original cuya solución es evidente. Así:

$$-9x-5=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=-\frac{5}{9}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $\mathbb{S}=\left\{-\frac{5}{9}\right\}$.

Ejemplo 5.16

Resuelva la siguiente ecuación[a]

$$(x-2)(10+3x)+4(2x+1)=2(4x-3)+(x-1)(3x+5)$$

Solución:

$$\begin{aligned}
& (x-2)(10+3x)+4(2x+1)=2(4x-3)+(x-1)(3x+5) \\
\Longleftrightarrow\ & (10x+3x^2-20-6x)+(8x+4)=(8x-6)+(3x^2+2x-5) \\
\Longleftrightarrow\ & (3x^2+12x-16)=(3x^2+10x-11) \\
\Longleftrightarrow\ & 3x^2+12x-16-(3x^2+10x-11)=0 \\
\Longleftrightarrow\ & 3x^2+12x-16-3x^2-10x+11=0 \\
\Longleftrightarrow\ & (12x-10x)+(-16+11)=0 \\
\Longleftrightarrow\ & 2x-5=0 \\
\Longleftrightarrow\ & 2x=5 \\
\Longleftrightarrow\ & x=\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es:

$$\mathbb{S}=\left\{\frac{5}{2}\right\}$$

[a] En adelante, resolver una ecuación equivale a encontrar su conjunto solución.

Cuando una ecuación lineal no tiene soluciones reales, significa que los dos lados de la ecuación (los miembros) representan geométricamente rectas paralelas con la misma pendiente pero distintos interceptos; por lo tanto, nunca se cruzan y no existe ningún valor de x que satisfaga la igualdad. En este caso, el conjunto solución es el *conjunto vacío*, expresado como $\varnothing$.

Por otro lado, cuando una ecuación lineal tiene infinitas soluciones, significa que los dos lados de la ecuación representan la misma recta, lo que implica que cualquier valor de x satisface la ecuación. Esto da lugar a un conjunto solución que incluye todos los números reales, es decir, $\mathbb{R}$.

Ejemplo 5.17

Resuelva la siguiente ecuación:

$$5(5+x)+3x(3x+2)+1=\frac{5}{2}(2x-2)+(1+3x)^2$$

Solución:

Paso 1: Se expanden ambos lados de la ecuación.
Lado izquierdo (L.I.):

$$\begin{aligned}5(5+x)+3x(3x+2)+1&=25+5x+9x^2+6x+1\\&=9x^2+11x+26\end{aligned}$$

Lado derecho (L.D.):

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}(2x-2)+(1+3x)^2&=(5x-5)+(1+6x+9x^2)\\&=9x^2+11x-4\end{aligned}$$

Paso 2: Se igualan ambos lados de la ecuación:

$$9x^2+11x+26=9x^2+11x-4$$

Paso 3: Se resta $9x^2+11x$ de ambos lados:

$$26=-4$$

Este resultado es una **igualdad falsa**, ya que $26\neq-4$. Esto implica que la ecuación original no tiene solución en $\mathbb{R}$.

$$\therefore \quad \mathbb{S}=\varnothing$$

Ejemplo 5.18

Resuelva la siguiente ecuación:

$$14(x+1)-7(3-2x^2)-35x=(14x-7)(x+1)-28x$$

Solución:

Paso 1: Se expanden ambos lados de la ecuación.
Lado izquierdo (L.I.):

$$14(x+1)-7(3-2x^2)-35x=14x+14-21+14x^2-35x$$

$$= 14x^2 - 21x - 7$$

Lado derecho (L.D.):

$$\begin{aligned}(14x-7)(x+1)-28x &= (14x^2+14x-7x-7)-28x\\ &= 14x^2+7x-7-28x\\ &= 14x^2-21x-7\end{aligned}$$

Paso 2: Se igualan ambos lados:

$$14x^2 - 21x - 7 = 14x^2 - 21x - 7$$

Esta es una **identidad verdadera** para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\therefore \quad \mathbb{S} = \mathbb{R}$$

Ejemplo 5.19

Encuentre el valor de a de modo que la ecuación

$$2(x-a) - 5x = a(1-2x) + 10(x+a) - 7$$

tenga como solución $x = \dfrac{173}{29}$.
Solución:

Se sustituye $x = \dfrac{173}{29}$ en la ecuación y se resuelve para a.
Paso 1: Se sustituye x en ambos lados.

$$2\left(\frac{173}{29} - a\right) - 5\left(\frac{173}{29}\right) = a\left(1 - 2\left(\frac{173}{29}\right)\right) + 10\left(\frac{173}{29} + a\right) - 7$$

Paso 2: Se simplifica cada término.

$$\begin{aligned}\text{Lado izquierdo (L.I.):} \quad & 2\left(\frac{173}{29} - a\right) - \frac{865}{29}\\ &= \frac{346}{29} - 2a - \frac{865}{29}\\ &= -2a - \frac{519}{29}\end{aligned}$$

Lado derecho (L.D.): $a\left(1-\dfrac{346}{29}\right)+\dfrac{1730}{29}+10a-7$

$$
\begin{aligned}
&= a\left(\frac{-317}{29}\right)+\frac{1730}{29}+10a-7\\
&= -\frac{317}{29}a+\frac{1730}{29}+10a-7
\end{aligned}
$$

Paso 3: Se iguala L.I. y L.D.:

$$-2a-\frac{519}{29}=-\frac{317}{29}a+\frac{1730}{29}+10a-7$$

Paso 4: Se pasan todos los términos con a al lado izquierdo y los términos constantes al lado derecho.

$$
\begin{aligned}
-2a+\frac{317}{29}a-10a &= \frac{1730}{29}+\frac{519}{29}-7\\
\left(-2a+\frac{317}{29}a-10a\right) &= \left(\frac{2249}{29}-7\right)
\end{aligned}
$$

Paso 5: Se simplifican los coeficientes de a.

$$
\begin{aligned}
-2a-10a+\frac{317}{29}a &= \left(-12a+\frac{317}{29}a\right)\\
\left(-12a+\frac{317}{29}a\right) &= \left(-\frac{348}{29}a+\frac{317}{29}a\right)\\
&= -\frac{31}{29}a
\end{aligned}
$$

Paso 6: Se simplifican los términos constantes.

$$
\begin{aligned}
\frac{2249}{29}-7 &= \frac{2249}{29}-\frac{203}{29}\\
&= \frac{2046}{29}
\end{aligned}
$$

Paso 7: Se igualan las expresiones simplificadas.

$$-\frac{31}{29}a=\frac{2046}{29}$$

Paso 8: Se multiplican ambos lados por 29 para eliminar denominadores.

$$-31a=2046$$

Paso 9: Se despeja a.

$$a = -\frac{2046}{31}$$

Paso 10: Se simplifica la fracción.

$$a = -66$$

Respuesta: El valor de a que hace que la ecuación tenga como solución $x = \frac{173}{29}$ es $a = -66$.

Ejercicios 5.2

5.6 Resuelva las siguientes ecuaciones:

a.) $y(y+1)+4y = y^2-9$

b.) $(x-7)(25x-8) = (5x-4)^2$

c.) $\frac{2}{7}n - \frac{1}{4}(4+n) = -2n+5$

d.) $2w(w-2)-3(2w-1) = 5+w(1+2w)$

e.) $2x(x+3)-2x^2 = -7-5x$

f.) $12m^2-8m+15+m(20m+7) = -8\left[-(2m+3)^2+3m\right]$

g.) $4x(2x-3)+4x = -4x(1-2x)-10x-7$

h.) $x^2-52-2x(x-4)^2 = -x\left[2\left(x-\frac{17+\sqrt{33}}{4}\right)\left(x-\frac{17-\sqrt{33}}{4}\right)\right]-52$

i.) $(x-3)(x+3) = (x-2)(x+2)$

j.) $(x-3)(x^2+3x+9) = (x-4)(x^2+4x+16)$

5.7 Encuentre el valor o valores de q para los cuales las siguientes ecuaciones son equivalentes, y cuya raíz corresponde a -4.

a.) $x^2-4(3q+2)x = 2(7x+3q)$

b.) $3q(x+5)-7q(2x+1) = 5(qx+2)$

5.4.2 Ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas han sido objeto de estudio desde la antigüedad, reflejando la profunda necesidad humana de resolver problemas relacionados con áreas, velocidades y trayectorias. Civilizaciones como la babilónica y la egipcia ya abordaban problemas equivalentes a la resolución de ecuaciones de segundo grado, utilizando métodos geométricos y numéricos. Más tarde, matemáticos griegos como Euclides y Diofanto desarrollaron métodos para resolver casos específicos de ecuaciones cuadráticas.

El avance significativo en la resolución general de ecuaciones cuadráticas se atribuye al matemático persa Al-Juarismi en el siglo IX, quien en su obra *"El Compendio de Cálculo por Restauración y Comparación"* presentó métodos sistemáticos para resolver ecuaciones cuadráticas completas e incompletas. Su trabajo sentó las bases del álgebra y proporcionó algoritmos que, traducidos al latín, introdujeron el término *"álgebra"* en la terminología matemática occidental.

La importancia de las ecuaciones cuadráticas radica en su amplia aplicación en diversas áreas de las matemáticas y las ciencias. Son fundamentales en la geometría para determinar propiedades de figuras cónicas como parábolas y círculos, en física para describir movimientos acelerados y trayectorias balísticas, y en economía para modelar funciones de costo y beneficio. Además, sirven como introducción a conceptos más avanzados en álgebra y análisis matemático, como funciones polinómicas, raíces complejas y la teoría de ecuaciones.

Comprender y resolver ecuaciones cuadráticas es esencial para el desarrollo del pensamiento matemático y para abordar problemas más complejos en disciplinas científicas y tecnológicas. Su estudio no solo permite resolver situaciones prácticas sino que también proporciona herramientas teóricas para el avance de la matemática pura.

Definición 5.8 Ecuación cuadrática

Sean a, b, $c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$; se define la ecuación cuadrática o de segundo grado con una incógnita como aquella igualdad algebraica que puede expresarse en la forma estándar:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

donde a es el coeficiente cuadrático, b es el coeficiente lineal y c es el término independiente. Si $b \neq 0$ y $c \neq 0$, se dice que la ecuación es *completa*.

Una de las principales diferencias entre la ecuación lineal y la cuadrática es el grado del polinomio. Las ecuaciones cuadrática y lineal, expresadas en su forma estándar, se diferencian en que la cuadrática posee un término adicional conocido como el *término cuadrático* (ax^2). Esto implica que no es posible despejar el valor de la incógnita sólo con las propiedades de la igualdad (propiedades en $\mathbb{R}$). Nótese que, según la Definición 5.8, si a, es decir, el coeficiente principal de una ecuación cuadrática (factor numérico del término cuadrático), es igual a cero, entonces la ecuación cuadrática se transforma en una ecuación lineal.

A continuación, se abordarán tres métodos para resolver una ecuación cuadrática: 1) completación de cuadrados; 2) factorización; y 3) fórmula general. Para aplicar estos métodos, es necesario que la ecuación esté expresada en su forma estándar.

Resolución de ecuaciones cuadráticas por completación de cuadrados

La técnica de *completación de cuadrados* se utiliza con el propósito de aplicar la Propiedad de la Raíz Cuadrada (ver Corolario 2.1 del Teorema 2.12, punto 3), la cual indica que si $x^2 = a$, con $a \geq 0$, entonces $x = \pm\sqrt{a}$. Esta propiedad es muy útil para resolver ecuaciones cuadráticas, especialmente cuando la ecuación carece del término lineal (bx), aunque también puede aplicarse en otros casos.

Ejemplo 5.20

Encuentre el conjunto solución de la ecuación $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Solución:

Se comienza reorganizando la ecuación y completando el cuadrado:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x - 7 &= 0 \\ x^2 + 6x &= 7 \\ x^2 + 6x + 9 &= 7 + 9 \quad \text{(se suma 9 a ambos lados)} \\ (x+3)^2 &= 16 \end{aligned}$$

Se aplica la propiedad de la raíz cuadrada:

$$\begin{aligned} x + 3 &= \pm\sqrt{16} \\ x + 3 &= \pm 4 \end{aligned}$$

Se despeja x en cada caso:

$$\begin{aligned} x &= -3 + 4 = 1 \\ x &= -3 - 4 = -7 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es:

$$S = \{-7, 1\}$$

Ejemplo 5.21

Encuentre el conjunto solución de la ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Solución:

Observe que el trinomio es un cuadrado perfecto, ya que:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Por lo tanto, la ecuación se puede escribir como:

$$(x-1)^2 = 0$$

Aplicando la propiedad de la raíz cuadrada:

$$x - 1 = 0$$

Despejando x:

$$x = 1$$

Por lo tanto, el conjunto solución es:

$$S = \{1\}$$

Cuando las ecuaciones están conformadas por trinomios cuadrados perfectos, es decir, un polinomio de tres términos que resulta de elevar al cuadrado un binomio, el conjunto solución estará conformado por un solo elemento. Sin embargo, el Teorema Fundamental del Álgebra (Teorema 5.2) sigue siendo válido para las ecuaciones cuadráticas de trinomios cuadrados perfectos. Estas ecuaciones tienen dos soluciones, pero ambas son iguales (una única solución real con multiplicidad 2). Es decir, cuando se resuelve un trinomio cuadrado perfecto, aunque parece que hay una sola solución, en realidad el polinomio tiene dos soluciones "idénticas" debido a la naturaleza del cuadrado del binomio.

Ejemplo 5.22

Encuentre el conjunto solución de la ecuación $2\left(x\ -\ 5\right)\left(x\ -\ 2\right)\ +\ 3x\ =\ -x^2\ +\ 8$

Solución:

$$\begin{aligned}
2\left(x\ -\ 5\right)\left(x\ -\ 2\right)\ +\ 3x\ =\ -x^2\ +\ 8 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x^2 - 4x - 10x + 20 + 3x = -x^2 + 8 \\
&\Longleftrightarrow \quad 2x^2 - 11x + 20 = -x^2 + 8 \\
&\Longleftrightarrow \quad 2x^2 - 11x + 20 + x^2 = 8 - 20 \\
&\Longleftrightarrow \quad 3x^2 - 11x = -12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff x^2-\frac{11}{3}x=-4\\
&\iff x^2-\frac{11}{3}x+\frac{121}{36}=-4+\frac{121}{36}\\
&\iff \left(x-\frac{11}{6}\right)^2=-\frac{23}{36}
\end{aligned}$$

Note que no es posible aplicar raíces a ambos lados de la igualdad ya que de acuerdo con la **Definición 2.14**, este resultado no está comprendido en $\mathbb{R}$.

$$\therefore \quad S=\varnothing$$

Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización

Una forma efectiva de resolver ecuaciones cuadráticas es mediante el método de factorización, el cual permite aplicar el Teorema del Factor Cero (TFC) (ver Teorema 5.1) para obtener las soluciones de las ecuaciones lineales resultantes. La factorización es viable debido a que, según la Definición 5.8, un polinomio cuadrático de la forma $P(x)=ax^2+bx+c$ puede ser descompuesto como $a(x-\alpha)(x-\beta)$, donde α y β son las raíces. En el caso de un polinomio mónico[1], la factorización toma la forma simplificada $(x-\alpha)(x-\beta)$.

Ejemplo 5.23

Encuentre el conjunto solución de la ecuación $6a^2+7a+1=0$.

Solución:

Factorizando por inspección:

$$\begin{array}{ccc}
\underbrace{6a^2} & +7a+ & \underbrace{1}\\
6a & & 1\\
a & & 1\\
 & 6a+a=7a &
\end{array}$$

Por lo tanto $6a^2+7a+1=(6a+1)(a+1)$. De esta forma se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
6a^2+7a+1=0 &\iff (6a+1)(a+1)=0\\
&\iff 6a+1=0 \quad\vee\quad a+1=0 \qquad \text{por TFC}\\
&\iff a=\frac{-1}{6} \quad\vee\quad a=-1\\
&\therefore \quad S=\left\{\frac{-1}{6},-1\right\}
\end{aligned}$$

[1]Un polinomio es mónico si el coeficiente del término de mayor grado es igual a 1, es decir, $a_n=1$ para un polinomio de la forma $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.

Ejemplo 5.24

Sea p una constante real. Encuentre el conjunto solución de la siguiente ecuación en términos de p.

$$11px + x^2 = 77p^2 + 7px$$

Solución:

$$\begin{aligned}
11px + x^2 = 77p^2 + 7px \quad &\Longleftrightarrow \quad 11px + x^2 - 77p^2 - 7px = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x(11p + x) - 7p(11p + x) = 0 \qquad \text{por Factor Común} \\
&\Longleftrightarrow \quad (11p + x)(x - 7p) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 11p + x = 0 \quad \vee \quad x - 7p = 0 \qquad \text{por TFC} \\
&\Longleftrightarrow \quad x = -11p \quad \vee \quad x = 7p
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad S = \{-11p, 7p\}$$

Ejemplo 5.25

Encuentre el conjunto solución de la ecuación $\quad 49(x+1)^2 - 42(x+1) + 9 = 0$.

Solución:

Note que esta expresión es cuadrática donde $(x+1)$ puede ser considerado como la variable del polinomio. De modo que, factorizando por inspección:

$$\begin{array}{ccc}
\underbrace{49(x+1)^2} & -42(x+1)+ & \underbrace{9} \\
7(x+1) & & -3 \\
7(x+1) & & -3
\end{array}$$

$$-21(x+1) + 21(x+1) = -42(x+1)$$

Por lo tanto $\quad 49(x+1)^2 - 42(x+1) + 9 = (7(x+1) - 3)(7(x+1) - 3)$.

De donde se tiene que:

$$\begin{aligned}
49(x+1)^2 - 42(x+1) + 9 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (7(x+1) - 3)(7(x+1) - 3) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (7x + 4)(7x + 4) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 7x + 4 = 0 \qquad \text{por TFC} \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-4}{7}
\end{aligned}$$

Note que se trata de una única solución real repetida, es decir, con multiplicidad 2.

$$\therefore \quad S = \left\{\frac{-4}{7}\right\}$$

Resolución de ecuaciones cuadráticas por fórmula general

Se puede prescindir de técnicas como la completación de cuadrados y la factorización si se utiliza directamente el resultado algebraico obtenido al completar cuadrados, conocido como la *fórmula general* (ver demostración del punto 1 del Teorema 5.4). Esta fórmula, que ofrece una solución universal para cualquier ecuación cuadrática, fue desarrollada gradualmente a lo largo de los siglos. Aunque Gerolamo Cardano y Lodovico Ferrari realizaron contribuciones importantes en el siglo XVI, el primer matemático en emplear el *formato moderno* de esta fórmula fue François Viète, cuya notación simbólica revolucionó el álgebra. Este método, a diferencia de los dos anteriores, nos permite, por medio de su **discriminante** (Definición 5.9), anticipar si las soluciones son reales o complejas, lo cual es clave por su gran potencial predictivo.

Definición 5.9 Discriminante de la ecuación cuadrática

Para un polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b, $c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, el valor $\Delta = b^2 - 4ac$ se denomina *discriminante* del polinomio.

Ejemplo 5.26

Calcule el discriminante de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $x^2 - 4x + 4 = 0$
3. $x^2 + 2x + 5 = 0$

Solución:

1. Para la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$.
   Calculando el discriminante:
   $$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$$
   En tal caso, $\Delta = 1 > 0$.
2. Para la ecuación $x^2 - 4x + 4 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -4$, $c = 4$.
   Calculando el discriminante:
   $$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$$
   En tal caso $\Delta = 0$.
3. Para la ecuación $x^2 + 2x + 5 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$.
   Calculando el discriminante:
   $$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16$$
   En tal caso $\Delta = -16 < 0$.

EL ejemplo anterior ilustra que el discriminante tiene tres posibles resultados: **positivo, nulo o negativo.** Esto es un insumo para caracterizar y formalizar esta idea en el siguiente teorema.

Teorema 5.4 Fórmula general para la resolución de ecuaciones de segundo grado

Dada la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, con $a,b,c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se tiene que:

1. Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas:
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
2. Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones en el conjunto de los números reales (las soluciones son complejas conjugadas).
3. Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una única solución real (raíz doble), es decir, $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$.

Demostración del Punto 1, Teorema 5.5

Hipótesis: Todos los axiomas, propiedades y teoremas previos, así como las definiciones anteriores.

H.q.m.: Para $ax^2+bx+c=0$ con $\Delta>0$, las únicas dos soluciones reales de la ecuación son:
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Prueba: Se utilizará el método directo de demostración.

1)	Como: $ax^2+bx+c=0$	(Definición 5.5)
2)	$\Rightarrow \dfrac{ax^2+bx+c}{a} = \dfrac{0}{a}$	(P5)
3)	$\Rightarrow x^2+\dfrac{bx}{a}+\dfrac{c}{a}=0$	(Distributividad)
4)	$\Rightarrow x^2+\dfrac{bx}{a}+\dfrac{c}{a}+\left(\dfrac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = 0+\left(\dfrac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2$	(P4 y P5)
5)	$\Rightarrow \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{c}{a}=\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$	(Compl. de Cuadrados)
6)	$\Rightarrow \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{c}{a}$	(P4)
7)	$\Rightarrow x+\dfrac{b}{2a}=\pm\sqrt{\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{c}{a}}$	(P4 y Def. Valor Absoluto)
8)	$\Rightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	(P4 y Prop. de los Radicales)

$$\therefore \; S=\left\{x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} / x\in\mathbb{R}\right\}, \text{ con } \Delta>0$$

Ejemplo 5.27

Halle el conjunto solución de la ecuación $(x-1)^2+7x^2+6x-41=5x(x+3)+x^2$.

Solución: Para encontrar los valores que se requieren en la fórmula general, es necesario expresar la ecuación dada en la forma estándar.

$$\begin{array}{rl} & (x-1)^2+7x^2+6x-41=5x(x+3)+x^2 \\ \iff & x^2-2x+1+7x^2+6x-41=5x^2+15x+x^2 \\ \iff & 8x^2+4x-40=6x^2+15x \\ \iff & 8x^2+4x-40-6x^2-15x=0 \\ \iff & 2x^2-11x-40=0 \end{array}$$

De lo anterior se tiene que $P(x)=2x^2-11x-40$, de donde se obtienen los coeficientes de la ecuación equivalente a la original, es decir:

$$a=2\,, \qquad b=-11\,, \qquad c=-40$$

Por lo que:

$$\Delta=(-11)^2-4(2)(-40)=441$$

Note que, como $\Delta>0$, entonces el polinomio $P(x)$ tiene dos ceros reales distintos, es decir, la ecuación posee dos soluciones reales diferentes (Teorema 5.4, punto 1), las cuales se pueden determinar aplicando la fórmula general:

$$x_1=\frac{-(-11)-\sqrt{441}}{2(2)} \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{-5}{2}$$

$$x_2=\frac{-(-11)+\sqrt{441}}{2(2)} \quad \Rightarrow \quad x_2=8$$

$$\therefore \quad S=\left\{\frac{-5}{2},\ 8\right\}$$

Ejemplo 5.28

Halle el conjunto solución de la ecuación $4(x+2)^2+12(2x-1)^2=12$.

Solución: Siguiendo la idea del ejemplo anterior.

$$\begin{array}{rl} & 4(x+2)^2+12(2x-1)^2=12 \\ \iff & 4(x^2+4x+4)+12(4x^2-4x+1)=12 \\ \iff & 4x^2+16x+16+48x^2-48x+12-12=0 \\ \iff & 52x^2-32x+16=0 \end{array}$$

De lo anterior: $\Delta=(-32)^2-4(52)(16)=-2304$. Luego, como $\Delta<0$, y con base en el Teorema 5.4.2, la ecuación no tiene soluciones reales, sino complejas.

$$\therefore \quad S=\varnothing$$

Ejemplo 5.29

Encuentre el valor o los valores de p para los cuales la ecuación

$$x^2+2(p+1)x+\frac{1}{3}(3+9p)=0$$

tiene una única solución, y encuéntrela.
Solución:
Note que se trata de una ecuación cuadrática en x. Para que una ecuación cuadrática tenga una única solución real (es decir, una raíz doble), su discriminante debe ser cero. Aplicando la **Definición del discriminante** y el punto 3 del **Teorema de la fórmula general**, se tiene:

$$\Delta = b^2-4ac=0$$

Identificando los coeficientes:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 2(p+1) \\ c &= \frac{1}{3}(3+9p) \end{aligned}$$

Calculando el discriminante:

$$\begin{aligned} \Delta &= [2(p+1)]^2-4\cdot 1\cdot \frac{1}{3}(3+9p)=0 \\ &= 4(p+1)^2-\frac{4}{3}(3+9p)=0 \\ &= 4(p+1)^2-\frac{4}{3}(3+9p)=0 \\ &= 4(p^2+2p+1)-\frac{4}{3}(3+9p)=0 \\ &= 4p^2+8p+4-\frac{4}{3}(3+9p)=0 \\ &= 4p^2+8p+4-(4+12p)=0 \\ &= 4p^2+8p+4-4-12p=0 \\ &= 4p^2+8p-12p=0 \\ &= 4p^2-4p=0 \\ &= 4p(p-1)=0 \end{aligned}$$

Igualando a cero cada factor:

$$4p=0 \quad \text{o} \quad p-1=0$$

Resolviendo se tiene que $p=0$ o $p=1$.

Para $p=0$**:**

Sustituyendo $p = 0$ en la ecuación original:

$$\begin{aligned} x^2 + 2(0+1)x + \frac{1}{3}(3+9\cdot 0) &= 0 \\ x^2 + 2(1)x + \frac{1}{3}(3+0) &= 0 \\ x^2 + 2x + \frac{1}{3}(3) &= 0 \\ x^2 + 2x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación se reduce a un trinomio cuadrado perfecto:

$$(x+1)^2 = 0$$

De donde su única solución es $x = -1$.

Para $p = 1$**:**

Sustituyendo $p = 1$ en la ecuación original:

$$\begin{aligned} x^2 + 2(1+1)x + \frac{1}{3}(3+9\cdot 1) &= 0 \\ x^2 + 2(2)x + \frac{1}{3}(3+9) &= 0 \\ x^2 + 4x + \frac{1}{3}(12) &= 0 \\ x^2 + 4x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación se convierte en otro trinomio cuadrado perfecto:

$$(x+2)^2 = 0$$

De donde su única solución es $x = -2$.

Por lo tanto, los valores de p para los cuales la ecuación tiene una única solución son $p = 0$ y $p = 1$. Las soluciones correspondientes son:

- Para $p = 0$, la única solución es $x = -1$.
- Para $p = 1$, la única solución es $x = -2$.

Ejercicios 5.3

5.8 Encuentre el o los valores de n para los cual $4nx^2 - 3(2+n)x + 7(4+3n) = 0$ tiene una única solución y encuéntrela.

5.9 Encuentre el valor o los valores de p para los cuales las siguientes ecuaciones tienen una raíz igual a -5.

a.) $x^2 - 4(3p+2)x + 2(1+7p)$ b.) $x^2 + 2(3+7p)x + 3(6p+1)$

5.10 Encuentre el o los valores de p para que se cumpla que:

$$4(1+p)x^2 + 7(p+1)x - 10 = 0,$$

tiene como única solución $x = 5$.

5.11 Demuestre que, si x_1 y x_2 son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, entonces se cumple que $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$, además $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$

5.12 Pruebe que, si $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfacen la desigualdad triangular:

$$|a-b| < c < a+b,$$

entonces la ecuación cuadrática

$$a^2x^2 + (b^2 + a^2 - c^2)x + b^2 = 0$$

no tiene soluciones reales.

5.4.3 Ecuaciones de grado mayor que 2

Ecuaciones reducibles a cuadráticas mediante cambio de variable

En algunas ocasiones nos encontraremos con ecuaciones algebraicas un tanto particulares o especiales que, sin ser de segundo grado, pueden resolverse mediante los recursos que el lector ha obtenido hasta el momento. Haciendo uso de un artificio matemático denominado **cambio de variable** o **sustitución de variable**, se puede reducir una ecuación a segundo grado de manera que se pueda aplicar los teoremas, propiedades y fórmulas que hemos visto hasta ahora.

Ejemplo 5.30

Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$$

Solución:

Identificar y Plantear: Note que, al ser una ecuación de grado 4, no es posible resolverla por medio de la fórmula del Teorema 5.4. Factorizando el miembro izquierdo de la ecuación, podríamos obtener una expresión que permita realizar un cambio de variable que simplifique los cálculos, de modo que se puedan utilizar los teoremas, definiciones y propiedades anteriores.

Ejecutar:

$$\begin{aligned} x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0 \quad &\Rightarrow \quad (x^2)^2-2(x^2)(x)+x^2-8x^2+8x+12=0 \\ &\Rightarrow \quad (x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0 \end{aligned}$$

$$\text{Sea } u=x^2-x \quad \Rightarrow \quad u^2-8u+12=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta=b^2-4ac=-8^2-4\cdot 12=16>0$$

$$\Rightarrow \quad u_1=\frac{8+\sqrt{\Delta}}{2}=6 \qquad \text{y} \qquad u_2=\frac{8-\sqrt{\Delta}}{2}=2$$

$$\Rightarrow \quad x^2-x=6 \qquad \text{y} \qquad x^2-x=2$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad x^2-x-6=0, \text{ con } \Delta>0 \qquad \text{y} \qquad x^2-x-2=0, \text{ con } \Delta>0 \\ &\Rightarrow \quad x_1=3 \quad \wedge \quad x_2=-2 \qquad \text{y} \qquad x_2=2 \quad \wedge \quad x_2=-1 \end{aligned}$$

$$\therefore S=\{3,-1,\pm 2\}$$

Ejercicios 5.4

5.13 Utilizando el método de cambio de variable, determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a.) $y^8-y^4-6=0$

b.) $-\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt[3]{x}+6=0$

c.) $2(x+3)^4-4(x+3)^2-2=0$

d.) $(x^2-1)^4=(1-x^2)^2$

Resolución de ecuaciones por división sintética

Las ecuaciones polinomiales de grado mayor o igual a 3 presentan características que dificultan su resolución mediante técnicas como el cambio de variable. En estos casos, es necesario considerar herramientas específicas para abordar este tipo de ecuaciones.

En la **sección 5.4** se establece que una ecuación puede interpretarse como un polinomio $P(x)$, es decir, una igualdad algebraica entre expresiones cuyos valores únicamente se satisfacen para ciertos valores de x. Para resolver ecuaciones polinomiales de grados superiores a 2, es fundamental aplicar el *teorema del factor* (ver **Teorema 4.3**), el cual establece una relación directa entre las soluciones de una ecuación y los factores del polinomio asociado.

La división sintética se presenta como una técnica eficiente para descomponer un polinomio y determinar sus soluciones de manera sistemática, siempre que se cuente con una raíz inicial o un candidato a raíz.

Ejemplo 5.31

Encuentre el conjunto solución de la siguiente ecuación:$-2x^4-6x^3+60x^2+12x=112$
Solución:

$$-2x^4-6x^3+60x^2+12x=112 \quad\Rightarrow\quad x^4+3x^3-30x^2-6x+56=0$$

Aplicando División Sintética se tiene que:

1. Los divisores del coeficiente del término de mayor grado son: $\{\pm 1\}$
2. Los divisores del término independiente son: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 8, \pm 14, \pm 28, \pm 56\}$
3. Por el **Teorema 4.5**, los posibles ceros racionales de la ecuación son todas las posibles combinaciones de la razón de los divisores del término independiente entre los divisores del término de mayor grado. En este caso particular, los posibles ceros racionales son los mismos que los divisores del término independiente. Lo anterior vale para todo polinomio mónico, es decir, de la forma: $P(x)=x^n+C_{n-1}x^{n-1}+\ldots+C_2x^2+C_0$.[a]

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & 3 & -30 & -6 & 56 & 4 \\ \cline{6-6} & 4 & 28 & -8 & -56 & \\ \hline 1 & 7 & -2 & -14 & 0 & \end{array}$$

De lo anterior, y por el *Teorema del Factor* (**ver Teorema 4.3**), $P(4)$ es un cero racional de la ecuación polinomial inicial. La división sintética posibilita reducir el grado del polinomio inicial, de manera que se tiene: $x^3+7x^2-2x-14=0$. Procedemos a aplicar de nuevo división sintética para bajar su grado a 2 y aplicar “Fórmula General” (**ver. Teorema 5.4**).

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 7 & -2 & -14 & -7 \\ \cline{5-5} & -7 & 0 & 14 & \\ \hline 1 & 0 & -2 & 0 & \end{array}$$

Nuevamente, el residuo de esta división forma la ecuación $x^2-2=0$, de donde $x=\pm\sqrt{2}$.

$$\therefore S=\{4,-7,\pm\sqrt{2}\}$$

[a] En lgunos libros que pueden servir de ayuda al lector, también se les denomina *polinomios normados* o *polinomios unitarios*.

Ejemplo 5.32

Encuentre el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$12x^5+28x^4-31x^3-19x^2+7x+3=0$$

Solución:
Aplicando División Sintética se tiene que:

1. Los divisores del coeficiente del término de mayor grado son:

$$Div.(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

2. Los divisores del término independiente son:

$$Div.(3) = \{\pm 1, \pm 3\}$$

3. Al igual que en el ejemplo anterior, por el **Teorema 4.5**, podemos encontrar un cero racional del polinomio dentro de las posibles combinaciones que surgen de dividir algún divisor del término independiente entre algunos de los divisores del coeficiente que acompaña a la variable de grado mayor. Después de probar algunas combinaciones, notamos que, al usar $-1/2$ como divisor, obtenemos como residuo cero, lo que implica que $x = -1/2$ es un cero o raíz de la ecuación.

$$\begin{array}{cccccc|l} 12 & 28 & -31 & -19 & 7 & 3 & \underline{-1/2} \\ & -6 & -11 & 21 & -1 & -3 & \\ \hline 12 & 22 & -42 & 2 & 6 & 0 & \end{array}$$

El residuo de esta división sintética forma la ecuación $12x^4 + 22x^3 - 42x^2 + 2x + 6 = 0$, a la cual aplicamos nuevamente división sintética hasta llegar a una ecuación de grado 2.

$$\begin{array}{ccccc|l} 12 & 22 & -42 & 2 & 6 & \underline{1} \\ & 12 & 34 & -8 & -6 & \\ \hline 12 & 34 & -8 & -6 & 0 & \end{array}$$

Aplicamos nuevamente división sintética a $12x^3 + 34x^2 - 8x - 6 = 0$:

$$\begin{array}{cccc|l} 12 & 34 & -8 & -6 & \underline{-3} \\ & -36 & 6 & 6 & \\ \hline 12 & -2 & -2 & 0 & \end{array}$$

De este último residuo se obtiene $12x^2 - 2x - 2 = 0$, la cual podemos resolver mediante el **Teorema 5.4**, cuyas raíces son: $x = 1/2$ y $x = -1/3$.

$$\therefore S = \{-3, \pm 1/2, -1/3, 1\}$$

5.4.4 Ecuaciones que involucran expresiones algebraicas racionales

Definición 5.10 (Ecuación fraccionaria)

Una ecuación de la forma $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ se denomina *ecuación fraccionaria* si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, y $q(x) \neq 0$.

¡Cuidado!

En ecuaciones que involucran más de una fracción algebraica en alguno o ambos miembros de la igualdad, puede ser útil aplicar el *principio del cociente nulo* (PCN), el cual establece que:

$$\text{Si } \frac{p(x)}{q(x)} = 0, \text{ entonces } p(x) = 0 \text{ y } q(x) \neq 0.$$

No obstante, es importante evitar el error de asumir que al "pasar a multiplicar" se obtiene una ecuación completamente equivalente a la original. La ecuación resultante puede contener soluciones adicionales que no forman parte del conjunto solución de la ecuación original. Esto ocurre debido a las restricciones inherentes a las fracciones, las cuales deben ser verificadas y descartadas en caso de no satisfacer la condición $q(x) \neq 0$.

Las soluciones de la ecuación original siempre estarán incluidas en el conjunto solución de la ecuación generada al aplicar el cociente nulo. Sin embargo, no todas las soluciones de la ecuación resultante serán válidas para la ecuación inicial.

Ejemplo 5.33

Resuelva la siguiente ecuación:

$$\frac{8x^2 + 2x}{16x^2 + 8x + 1} = 0$$

1) Factorizando numerador y denominador obtenemos: $\frac{2x \cdot (4x+1)}{(4x+1)^2} = 0$

2) Aplicamos el PCN, tomando en cuenta la restricción: $2x \cdot (4x+1) = 0$, con $x \neq -\frac{1}{4}$

3) Por el Teorema del Factor Cero (Teorema 5.1): $2x = 0 \quad \vee \quad 4x + 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{4}$$

Nótese que el conjunto solución de la ecuación del segundo paso, es decir, de $2x \cdot (4x+1) = 0$ corresponde a $\left\{\frac{-1}{4}, 0\right\}$. No obstante, $\frac{-1}{4}$ es una restricción de una de las fracciones de la ecuación original. Por lo tanto $\frac{-1}{4}$ no puede pertenecer al conjunto solución de la ecuación original.

$$\therefore \quad S = \{0\}$$

Ejemplo 5.34

Encuentre el conjunto solución de la siguiente ecuación: $\dfrac{w^2}{3}+\dfrac{3}{w^2}=5\left(\dfrac{w}{3}-\dfrac{1}{w}\right)$

$$\begin{aligned}
\frac{w^2}{3}+\frac{3}{w^2}=5\left(\frac{w}{3}-\frac{1}{w}\right) \quad &\Rightarrow \quad \frac{w^4+9}{3w^2}=\frac{5w^2-15}{3w} \\
&\Rightarrow \quad \frac{w^4+9-5w^3+15w}{3w^2}=0 \\
&\Rightarrow \quad w^4-5w^3+15w+9=0 \ \text{ con } \ w\neq 0
\end{aligned}$$

Note que, después de aplicar el principio del cociente nulo, se obtiene una ecuación de grado 4, la cual podemos resolver por medio de división sintética (**ver Sección 5.5.1**).

$$\therefore S=\{-1,3,\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}\}$$

Ejemplo 5.35

Resuelva la siguiente ecuación

$$\frac{7x-3}{2}-\frac{5x+1}{4}=2-\frac{3(2x-5)}{6}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{7x-3}{2}-\frac{5x+1}{4}=2-\frac{3(2x-5)}{6} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{4\,(7x-3)-2\,(5x+1)}{8}=\frac{12-3\,(2x-5)}{6} \\
&\Longleftrightarrow \quad 6\,[4\,(7x-3)-2\,(5x+1)]=8\,[12-3\,(2x-5)] \\
&\Longleftrightarrow \quad 6\,[28x-12-10x-2]=8\,[12-6x+15] \\
&\Longleftrightarrow \quad 6\,[18x-14]=8\,[-6x+27] \\
&\Longleftrightarrow \quad 108x-84=-48x+216 \\
&\Longleftrightarrow \quad 108x-84+48x-216=0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 156x-300=0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x=\frac{300}{156} \\
&\Longleftrightarrow \quad x=\frac{25}{13}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathbb{S}=\left\{\frac{25}{13}\right\}$$

5.4.5 Ecuaciones con valor absoluto

De acuerdo con la **Definición 2.17**, el valor absoluto de un número x, denotado como $|x|$, representa la distancia entre x y el origen en la recta numérica, independientemente de si x es positivo o negativo. Matemáticamente, el valor absoluto se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Una ecuación con valor absoluto es aquella que incluye una o más expresiones dentro de un valor absoluto. Estas ecuaciones resultan especialmente útiles para modelar situaciones en las que la magnitud es relevante, pero el signo no lo es, como ocurre en problemas relacionados con distancias, desviaciones en física, análisis económico y estadística.

Definición 5.11 (Definición intuitiva de ecuación con valor absoluto)
Una ecuación con valor absoluto es aquella en la que las variables se encuentran dentro de un valor absoluto.

Ejemplo 5.36

Analice la siguiente expresión

$$|x-7| = \begin{cases} x-7, & \text{si } \ x-7 \geq 0 \\ -(x-7), & \text{si } \ x-7 < 0 \end{cases}$$

Pero, como:

1) $x-7 \geq 0 \iff x \geq 7$

2) $x-7 < 0 \iff x < 7$

Luego,

$$|x-7| = \begin{cases} x & \text{si } \ x \geq 7 \\ -(x-7) & \text{si } \ x-7 < 0 \end{cases}$$

La información anterior se puede modelar en la siguiente tabla:

	$-\infty$ 7	$+\infty$
$\lvert x-7\rvert$	$-(x-7)$	$x-7$

Ejemplo 5.37

Analice la siguiente expresión:

$$|-2x+8| = \begin{cases} -2x+8, & \text{si } -2x+8 \geq 0 \\ -(-2x+8), & \text{si } -2x+8 < 0 \end{cases} \iff |-2x+8| = \begin{cases} -2x+8, & \text{si } x \geq 4 \\ -(-2x+8), & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

La información anterior se puede modelar en la siguiente tabla:

	$-\infty$ 4	$+\infty$
$\lvert -2x+8\rvert$	$-2x+8$	$-(-2x+8)$

Al resolver ecuaciones que involucran valores absolutos, resulta fundamental comprender y aplicar las propiedades básicas del valor absoluto. Estas propiedades permiten simplificar ciertas ecuaciones al utilizar directamente su definición, facilitando la obtención de soluciones de manera más eficiente. Por ello, es altamente recomendable revisar las propiedades del valor absoluto presentadas en el **Teorema 2.12** (págs. 52 y 53), ya que constituyen una herramienta esencial para abordar este tipo de problemas.

Ejemplo 5.38

Resuelva la ecuación $\left|\dfrac{x+1}{x-11}\right| = 3$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x+1}{x-11}\right| = 3 \quad &\Rightarrow \quad \frac{|x+1|}{|x-11|} = 3 \\
&\Rightarrow \quad |x+1| = 3|x-11| \\
&\Rightarrow \quad (|x+1|)^2 = (3\cdot|x-11|)^2 \\
&\Rightarrow \quad (x+1)^2 = 9(x-11)^2 \\
&\Rightarrow \quad (x+1)^2 = 9(x-11)^2 \\
&\Rightarrow \quad x^2+2x+1 = 9(x^2-22x+121) \\
&\Rightarrow \quad x^2+2x+1 = 9x^2-198x+1089 \\
&\Rightarrow \quad x^2+2x+1-9x^2+198x-1089 = 0 \\
&\Rightarrow \quad -8x^2+200x-1088 = 0 \\
&\Rightarrow \quad x_1 = 8 \quad \wedge \quad x_2 = 17 \\
&\quad \therefore \quad S = \{8,\ 7\}
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.39

Encuentre el conjunto solucón de la ecuación $x+|x+7| = 9$.
Solución: Se procederá a resolver esta ecuación mediante casos. Estos casos se desprenden del valor que hace que el valor absoluto se anule.

$$|x+7| = \begin{cases} -(x+7) & si \quad x < -7 \\ x+7 & si \quad x \geq -7 \end{cases}$$

- **Caso 1:** $x < -7$, en este caso se tiene que:

$$\begin{aligned}
x+|x+7| = 9 \quad &\Rightarrow \quad x-(x+7) = 9 \\
&\Rightarrow \quad x-x-7 = 9 \\
&\Rightarrow \quad -7 = 9 \text{ (Falso)} \\
\therefore \quad & S = \varnothing
\end{aligned}$$

- **Caso 2:** $x \geq -7$, en este caso se tiene que:

$$\begin{aligned}
x+|x+7| = 9 \quad &\Rightarrow \quad x+(x+7) = 9 \\
&\Rightarrow \quad x+x+7 = 9 \\
&\Rightarrow \quad 2x = 9-7 \\
&\Rightarrow \quad 2x = 2 \\
&\Rightarrow \quad x = 1
\end{aligned}$$

$\therefore$ Como $1 > -7$ entonces es solución.

$$\therefore S = \{1\}$$

Ejemplo 5.40

Resuelva la siguiente ecuación $|y+1|-1 = |3y-2|$.

Solución:

Se procederá a resolver esta ecuación mediante casos. Estos casos se desprenden de los valores que anulan los valores absolutos.

$$|y+1| = \begin{cases} y+1 & \text{si} \quad y \geq -1 \\ -(y+1) & \text{si} \quad y < -1 \end{cases} \qquad |3y-2| = \begin{cases} 3y-2 & \text{si} \quad y \geq \dfrac{2}{3} \\ \\ -(3y-2) & \text{si} \quad y < \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

- **Caso 1:** $y < -1$, en este caso se tiene que:

$$\begin{aligned} |y+1|-1 = |3y-2| \quad &\Rightarrow \quad -(y+1)-1 = -(3y-2) \\ &\Rightarrow \quad -y-1-1 = -3y+2 \\ &\Rightarrow \quad -y+3y = 2+2 \\ &\Rightarrow \quad 2y = 4 \\ &\Rightarrow \quad y = 2 \end{aligned}$$

Como $2 \not< -1$, entonces 2 no es solución.

$$\therefore \quad S_1 = \varnothing$$

- **Caso 2:** $-1 \leq y \leq \dfrac{2}{3}$, en este caso se tiene que:

$$\begin{aligned} |y+1|-1 = |3y-2| \quad &\Rightarrow \quad y+1-1 = -(3y-2) \\ &\Rightarrow \quad y = -3y+2 \\ &\Rightarrow \quad 4y = 2 \\ &\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como $-1 \leq \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{2}{3}$ entonces $y = \dfrac{1}{2}$ es solución.

$$\therefore \quad S_2 = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

- **Caso 3:** $y \geq \dfrac{2}{3}$, en este caso se tiene que:

$$\begin{aligned} |y+1|-1 = |3y-2| \quad &\Rightarrow \quad y+1-1 = 3y-2 \\ &\Rightarrow \quad y+1-1 = 3y-2 \\ &\Rightarrow \quad y-3y = -2 \\ &\Rightarrow \quad -2y = -2 \\ &\Rightarrow \quad y = 1 \end{aligned}$$

Como $1 \geq \frac{2}{3}$, entonces $y = 1$ es solución.

$$\therefore \quad S_3 = \{1\}$$

$$\therefore \quad S = S_1 \cup S_2 \cup S_3, \quad \text{es decir,} \quad S = \left\{\frac{1}{2},\ 1\right\}$$

El uso de una tabla para resolver ecuaciones con valores absolutos puede resultar más intuitivo y organizado que el método por casos, especialmente cuando la ecuación incluye múltiples valores absolutos. Este enfoque permite analizar de manera sistemática los diferentes intervalos donde las expresiones dentro de los valores absolutos cambian de signo, evitando la necesidad de trabajar simultáneamente con varias ecuaciones.

La construcción de la tabla comienza identificando los puntos críticos, es decir, aquellos valores donde las expresiones dentro de los valores absolutos se anulan. Estos puntos dividen la recta numérica en intervalos. Posteriormente, se evalúan los signos de cada expresión en cada intervalo y se aplica la definición del valor absoluto. Este procedimiento simplifica el proceso de resolución al presentar la información de forma visual y estructurada, facilitando la verificación de las soluciones dentro de cada intervalo.

Ejemplo 5.41

Encuentre el conjunto solución de la ecuación $|x+1| - 1 = |3x-2|$.

Solución:

Aplicando la definición 2.17, para cada término con valor absoluto:

1. $|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{si} \quad x+1 < 0 \end{cases} \iff |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$

2. $|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -(3x-2) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \iff |3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & \text{si} \quad x \geq \frac{2}{3} \\ -(3x-2) & \text{si} \quad x < \frac{2}{3} \end{cases}$

Con la información anterior, se puede construir la siguiente tabla:

	$-\infty$ -1	-1 $\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$ $+\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert 3x-2\rvert$	$-3x+2$	$-3x+2$	$3x-2$
$\lvert x+1\rvert-1=\lvert 3x-2\rvert$	$-x-1-1=-3x+2$ $-x-1-1=-3x+2$ $-x-2=-3x+2$ $-x+3x=2+2$ $2x=4$ $x=2$ Como $2\notin\,]-\infty,-1[$ $\therefore\ S_1=\varnothing$	$x+1-1=-3x+2$ $x=-3x+2$ $x+3x=2$ $4x=2$ $x=\frac{1}{2}$ Como $\frac{1}{2}\in\left]-1,\frac{2}{3}\right[$ $\therefore\ S_2=\left\{\frac{1}{2}\right\}$	$x+1-1=3x-2$ $x=3x-2$ $2=3x-x$ $2=2x$ $x=1$ Como $1\in\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$ $\therefore\ S_3=\{1\}$

Así, el conjunto solución S de la ecuación es $S=S_1\cup S_2\cup S_3$.

$$\therefore\ S=\left\{\frac{1}{2},1\right\}$$

Ejemplo 5.42

Encuentre el conjunto solución de la ecuación $2|x-3|+|-3x+2|=5$.

Solución: Aplicando la definición para cada término con valor absoluto.

$$|x-3|=\begin{cases} x-3 & \text{si } x\geq 3\\ -(x-3) & \text{si } x<3\end{cases} \quad \text{y} \quad |-3x+2|=\begin{cases} -3x+2 & \text{si } x\leq \frac{2}{3}\\ 3x-2 & \text{si } x>\frac{2}{3}\end{cases}$$

Con la información anterior, se puede construir la siguiente tabla:

$$-\infty \qquad\qquad \frac{2}{3} \qquad\qquad 3 \qquad\qquad +\infty$$

$\lvert x-3\rvert$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$
$\lvert -3x+2\rvert$	$-3x+2$	$-3x+2$	$3x-2$
$2\lvert x-3\rvert+\lvert -3x+2\rvert=5$	$2(-x+3)+(-3x+2)=5$ $-2x+6-3x+2=5$ $-5x+8=5$ $-5x=5-8$ $-5x=-3$ $x=\frac{3}{5}$ Como $\frac{3}{5}\in\left]-\infty,\frac{2}{3}\right[$ $\therefore\ S_1=\left\{\frac{3}{5}\right\}$	$2(-x+3)+(-3x+2)=5$ $-2x+6-3x+2=5$ $-5x+8=5$ $-5x=5-8$ $-5x=-3$ $x=\frac{3}{5}$ Como $\frac{3}{5}\in\left]\frac{2}{3},3\right[$ $\therefore\ S_2=\left\{\frac{3}{5}\right\}$	$2(x-3)+(3x-2)=5$ $2x-6+3x-2=5$ $5x-8=5$ $5x=5+8$ $5x=13$ $x=\frac{13}{5}$ Como $\frac{13}{5}\in]3,+\infty[$ $\therefore\ S_3=\left\{\frac{13}{5}\right\}$

Así, el conjunto solución S de la ecuación es $S=S_1\cup S_2\cup S_3$.

$$\therefore\ S=\left\{\frac{3}{5},\frac{13}{5}\right\}$$

Ejercicios 5.5

5.14 Considere a y b constantes reales tales que $b<0<a$, halle el conjunto solución de la ecuación

$$|x-a|+|2x-b|=1$$

5.15 Considere a, b y c constantes reales tales que $b<c<0<a$, halle el conjunto solución de la ecuación

$$\left|\frac{cx+a}{x-b}\right|+2=5$$

5.16 Considere $n\in\mathbb{N}$, n par, halle el conjunto solución de la ecuación

$$\sqrt[n]{(2x+1)^n}+\sqrt[2n]{(2x-1)^{2n}}=x+1$$

5.17 Considere $n\in\mathbb{N}$, halle el conjunto solución de la ecuación

$$\sqrt[2n+1]{\left(\frac{x-2}{3}\right)^{2n+1}}-2x=\sqrt[2n]{(x+1)^{2n}}$$

5.4.6 Ecuaciones con radicales

Definición 5.12 (Ecuación radical)

Se denomina *ecuación radical* a aquellas ecuaciones en las que las variables se encuentran dentro de un radical.

¡Cuidado!

Al resolver ecuaciones radicales, es fundamental considerar que al elevar ambos miembros de la ecuación a una potencia correspondiente al índice del radical, la ecuación resultante no siempre es equivalente a la ecuación original. Esto se debe a que el proceso de elevación puede introducir soluciones adicionales que no satisfacen la ecuación inicial.
Por esta razón, es indispensable verificar todas las soluciones obtenidas sustituyéndolas en la ecuación original para confirmar cuáles son válidas.

Ejemplo 5.43

Resuelva la siguiente ecuación:

$$\sqrt{3-z}+z=3$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\sqrt{3-z}+z=3 &\Rightarrow \sqrt{3-z}=3-z \\
&\Rightarrow (\sqrt{3-z})^2=(3-z)^2 \\
&\Rightarrow 3-z=9-6z+z^2 \\
&\Rightarrow -z^2+5z-6=0 \\
&\Rightarrow (z-2)(z-3)=0
\end{aligned}$$

De donde se tiene que 2 y 3 son posibles soluciones. Se dice que son posibles soluciones porque primero se deben verificar.

- Para $z=2$

$$\begin{aligned}
\sqrt{3-z}+z=3 &\Rightarrow \sqrt{3-2}+2=3 \\
&\Rightarrow \sqrt{1}+2=3 \\
&\Rightarrow 3=3 \text{ (Verdadero)}
\end{aligned}$$

$\therefore$ 2 es solución de la ecuación.

- Para $z=3$

$$\begin{aligned}
\sqrt{3-z}+z=3 &\Rightarrow \sqrt{3-3}+3=3 \\
&\Rightarrow \sqrt{0}+3=3 \\
&\Rightarrow 3=3 \text{ (Verdadero)}
\end{aligned}$$

$\therefore$ 3 es solución de la ecuación.

$$\therefore S=\{2,3\}$$

Ejemplo 5.44

Resuelva la siguiente ecuación:

$$\sqrt{7r+8}-\sqrt{r+1}=\sqrt{3r+1}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\sqrt{7r+8}-\sqrt{r+1}=\sqrt{3r+1} \quad &\Rightarrow \quad (\sqrt{7r+8}-\sqrt{r+1})^2=(\sqrt{3r+1})^2\\
&\Rightarrow \quad (\sqrt{7r+8})^2-2\sqrt{7r+8}\cdot\sqrt{r+1}+(\sqrt{r+1})^2=3r+1\\
&\Rightarrow \quad 7r+8-2\sqrt{(7r+8)(r+1)}+r+1=3r+1\\
&\Rightarrow \quad -2\sqrt{7r^2+15r+8}=-5r-8\\
&\Rightarrow \quad (-2\sqrt{7r^2+15r+8})^2=(-5r-8)^2\\
&\Rightarrow \quad 4(7r^2+15r+8)=25r^2+80r+64\\
&\Rightarrow \quad 28r^2+60r+32=25r^2+80r+64\\
&\Rightarrow \quad 3r^2-20r-32=0\\
&\Rightarrow \quad (r-8)\left(r+\frac{4}{3}\right)=0
\end{aligned}$$

De donde se tiene que 8 y $-\frac{4}{3}$ son posibles soluciones. Se procede a probar cada una de ellas:

- Para $r=-\frac{4}{3}$

$$\sqrt{7r+8}-\sqrt{r+1}=\sqrt{3r+1} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{7\cdot-\frac{4}{3}+8}-\sqrt{-\frac{4}{3}+1}=\sqrt{3\cdot-\frac{4}{3}+1}$$

  $\therefore$ Note que al evaluar $-\frac{4}{3}$, todos los radicales se indefinen, por lo que este valor no corresponde a una solución.

- Para $r=8$

$$\begin{aligned}
\sqrt{7r+8}-\sqrt{r+1}=\sqrt{3r+1} \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{7\cdot 8+8}-\sqrt{8+1}=\sqrt{3\cdot 8+1}\\
&\Rightarrow \quad \sqrt{64}-\sqrt{9}=\sqrt{25}\\
&\Rightarrow \quad 8-3=5\\
&\Rightarrow \quad 5=5 \text{ (Verdadero)}
\end{aligned}$$

  $\therefore$ 8 es solución de la ecuación.

$$\therefore S=\{8\}$$

Ejercicios 5.6

5.18 Considere r una constante real positiva. Halle el conjunto solución de la ecuación

$$\sqrt{r+\sqrt{x}}=2$$

5.19 Considere a una constante real de manera que no indefine la expresión. halle el conjunto solución de la ecuación

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2a+x}{a-3x}}}}=1$$

5.20 Considere a y b constantes reales tales que $0<a<b$, halle el conjunto solución de la ecuación

$$\sqrt{-2x+a+b}-\sqrt{b-x}-\sqrt{a-x}=0$$

5.21 Halle el conjunto solución de la ecuación

$$\sqrt[3]{-3+2x}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{-2+x}$$

5.22 Halle el conjunto solución de la ecuación

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{1+x}}}=\sqrt[3]{x+1}$$

5.5 Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 5.13
Un *sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas* está dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & = & \vdots, \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases}$$

donde los coeficientes a_{ij} son números reales (o complejos, según el contexto), x_i representan las incógnitas y b_j son los términos independientes.

Definición 5.14
De acuerdo con el número de soluciones que posea, un sistema de ecuaciones lineales puede clasificarse de la siguiente manera:

- **Sistema compatible determinado (SCD):** El sistema tiene una solución única.
- **Sistema incompatible (SI):** El sistema no tiene ninguna solución (las rectas o planos son paralelos y distintos).
- **Sistema compatible indeterminado (SCI):** El sistema tiene infinitas soluciones (las rectas o planos coinciden).

Gráfica del conjunto solución

En el caso de dos variables, cada ecuación lineal puede interpretarse geométricamente como una recta en el plano cartesiano xy. Una ecuación de la forma

$$a_1x + a_2y = b,$$

donde $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ y $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, se denomina *ecuación lineal* en dos variables. Un sistema de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas puede visualizarse como dos rectas en el plano, cuyo conjunto solución coincide con su punto de intersección (si éste existe).

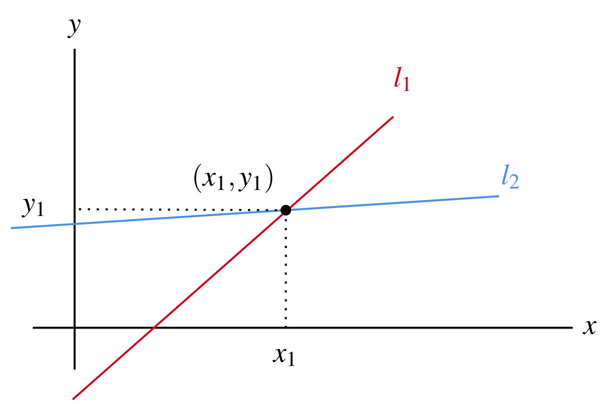


Figura 5.1: Interpretación geométrica de un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables

En la figura anterior, las rectas l_1 y l_2 representan dos ecuaciones lineales diferentes. Si dichas rectas se cortan en un único punto, ese punto de intersección (x_1, y_1) se identifica como la solución única del sistema en el plano. En un sistema con tres variables, la interpretación geométrica se extiende a planos en el espacio tridimensional, y su intersección puede ser un punto (una solución única), una recta (infinitas soluciones) o no existir (sistema sin soluciones).

Métodos para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales

Para ilustrar los métodos de resolución, se considerará el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 3x + 5y &= 9, \\ 4x + 2y &= -2. \end{cases}$$

En secciones posteriores, se analizará cómo aplicar distintos procedimientos (sustitución, igualación, eliminación, entre otros) para encontrar el conjunto solución de este tipo de sistemas.

5.5.1 Método de eliminación o reducción

El método de eliminación, también conocido como *método de reducción*, consiste en asignar un factor multiplicativo a cada ecuación de modo que, al sumarlas o restarlas, una de las variables sea eliminada. Este procedimiento requiere, en primer lugar, definir claramente la variable que se desea eliminar.

Ejemplo 5.45

Resuelva el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{cases} 3x+5y &= 9 \\ 4x+2y &= -2 \end{cases}$$

Solución:

1. Multiplicar la ecuación $3x+5y=9$ por 4:

$$4(3x+5y)=4\cdot 9 \Rightarrow 12x+20y=36 \qquad (1)$$

2. Multiplicar la ecuación $4x+2y=-2$ por 3:

$$3(4x+2y)=3\cdot -2 \Rightarrow 12x+6y=-6 \qquad (2)$$

3. Restando (1) y (2) se tiene que:

$$12x+20y-(12x+6y)=36--6 \Rightarrow 12x+20y-12x-6y=36+6 \Rightarrow 14y=42 \Rightarrow y=3$$

4. Sustituyendo el valor hallado en alguna de las dos ecuaciones es posible encontrar el valor de la otra incógnita:

$$4x+2y=-2 \Rightarrow 4x+2\cdot 3=-2 \Rightarrow 4x=-8 \Rightarrow x=-2$$

$$\therefore S=\{(-2,3)\}$$

5.5.2 Método de igualación

El método de igualación consiste en despejar la misma variable en cada una de las ecuaciones y, posteriormente, igualar las expresiones resultantes. De esta forma, se obtiene una nueva ecuación que permite determinar el valor de dicha variable.

Ejemplo 5.46

Resuelva el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{cases} 3x+5y &= 9 \\ 4x+2y &= -2 \end{cases}$$

Solución:

1. Despejar la variable x de la ecuación $3x+5y=9$:

$$3x+5y=9 \Rightarrow 3x=9-5y \Rightarrow x=\frac{9-5y}{3} \Rightarrow x=3-\frac{5}{3}y \qquad (1)$$

2. Despejar la variable x de la ecuación $4x+2y=-2$:

$$4x+2y=-2 \Rightarrow 4x=-2-2y \Rightarrow x=\frac{-2-2y}{4} \Rightarrow x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y \qquad (2)$$

3. Igualando (1) y (2) se tiene que:

$$3-\frac{5}{3}y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y \Rightarrow 3+\frac{1}{2}=\frac{5}{3}y-\frac{1}{2}y \Rightarrow \frac{7}{2}=\frac{7}{6}y \Rightarrow y=3$$

4. Sustituyendo el valor hallado en alguna de las dos ecuaciones es posible encontrar el valor de la otra incógnita:

$$4x+2y=-2 \Rightarrow 4x+2\cdot 3=-2 \Rightarrow 4x=-8 \Rightarrow x=-2$$

$$\therefore S=\{(-2,3)\}$$

5.5.3 Método de sustitución

El método de sustitución consiste en despejar una de las variables en una de las ecuaciones y, posteriormente, sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación. Con ello, se reduce el sistema a una sola ecuación con una variable, facilitando su resolución.

Ejemplo 5.47

Resuelva el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{cases} 3x+5y &= 9 \\ 4x+2y &= -2 \end{cases}$$

Solución:

1. Despejar la variable x en la ecuación $3x+5y=9$:

$$3x+5y=9 \Rightarrow 3x=9-5y \Rightarrow x=\frac{9-5y}{3} \Rightarrow x=3-\frac{5}{3}y \qquad (1)$$

2. Sustituir (1) en la ecuación $4x+2y=-2$:

$$4x+2y=-2 \Rightarrow 4\left(3-\frac{5}{3}y\right)+2y=-2 \Rightarrow 12-\frac{20}{3}y+2y=-2$$

$$\Rightarrow -\frac{20}{3}y+2y=-2-12 \Rightarrow \frac{-14}{3}y=-14 \Rightarrow y=3$$

3. Sustiuyendo el valor hallado en alguna de las dos ecuaciones es posible encontrar el valor de la otra incógnita:

$$4x+2y=-2 \Rightarrow 4x+2\cdot 3=-2 \Rightarrow 4x=-8 \Rightarrow x=-2$$

$$\therefore S=\{(-2,3)\}$$

Ejemplo 5.48

Halle el conjunto solución del sistema dado por:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-5y+6z & = & 29 \\ x+y+z & = & 2 \\ 2x+3y+5z & = & 11 \end{array}\right.$$

Solución:

1. De la primer ecuación se despeja la variable x:

$$x-5y+6z=29 \Rightarrow x=29+5y-6z$$

2. Se sustituye lo hallado en el paso anterior en las dos ecuaciones restantes:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 29+5y-6z+y+z & = & 2 \\ 2(29+5y-6z)+3y+5z & = & 11 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 6y-5z & = & -27 \\ 13y-7z & = & -47 \end{array}\right.$$

3. El sistema de ecuaciones obtenido anteriormente puede resolverse con cualquier de los métodos vistos, en este caso se obtiene que $y=-2$, $z=3$.
4. Sustituyendo los valores hallados en la ecuación que se obtuvo en el paso 1 se tiene que:

$$x=29+5y-6z \Rightarrow x=29+5\cdot -2-6\cdot 3=1$$

$$\therefore S=\{(1,-2,3)\}$$

Ejercicios 5.7

5.23 Considere a y b constantes reales, halle el conjunto solución del sistema de ecuaciones dado por:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y+x & = & -a \\ bx-ay & = & 2a^2-b^2 \end{array}\right.$$

5.24 Si se sabe que el sistema de ecuaciones dado por $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y & = & 4 \\ 6x+ky & = & 1 \end{array}\right.$ es un sistema de ecuaciones compatible determinado, halle el o los posibles valores que puede tomar k.

5.25 Considere r y s constantes reales, halle el conjunto solución del sistema de ecuaciones dado por:

$$\begin{cases} rx+sy & = & r^2-rs \\ \dfrac{x+s}{r}+\dfrac{y+s}{s} & = & 2 \end{cases}$$

5.26 Si se sabe que $x=-3$ corresponde a la solución del sistema dado por $\begin{cases} (2k-3)x-(1-k)y & = & 19 & (1) \\ (4-3k)x+(1-2k)y & = & -11 & (2) \end{cases}$, determine el valor de k.

Ejercicios 5.8

5.27 Pruebe que $\dfrac{1}{x+y+z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$, con $x,y,z\in\mathbb{R}$, si y solo si, $(x+y)(x+z)(y+z)=0$.

5.28 Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a.) $\dfrac{n}{3n+9}+\dfrac{n^2-6n}{27-3n^2}=\dfrac{3}{2n-6}$

b.) $\dfrac{3x-9}{2x^2-5x+1}=\dfrac{x^2-3x}{4}$

c.) $2x^4-x^3+3x^2-2x-2=0$

d.) $-4+12x-3x^2-13x^3=6x^4$

e.) $x^5+2x^2=0$

f.) $m(2m^3-4)=-6m^2-3m^3$

g.) $3\sqrt{x^2}-6\sqrt{x}-27=0$

h.) $\dfrac{2x+5}{49-x^2}+\dfrac{x+2}{x^2-8x+7}=\dfrac{2+x}{x^2-6x-7}$

i.) $y^6-14y^4+49y^2=36$

j.) $8w^3-8w^2-22w+6=0$

k.) $5x\left(\dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{3}{x^2}$

l.) $\left|\dfrac{-3x+5}{2}\right|=x$

m.) $|x+1|-|x-2|=x+1$

n.) $\left|\dfrac{2x-1}{x+1}\right|=|2x+1|+x$

o.) $|x^2-1|=x^2+2x+1$

p.) $-2|x+1|+4|5x+1|=-2x+4$

q.) $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}} = x+1$

r.) $\sqrt[3]{x^2+2} - 8 = x$

s.) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} = -1$

t.) $\sqrt{4x+1} + 2x - 5 = 0$

u.) $\sqrt[3]{\dfrac{1-2x}{5}} - \sqrt{\dfrac{2x-1}{5}} = 0$

5.29 Determine el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a.) $\begin{cases} 2x+3y &= 1 \\ 2x+3y &= 1 \end{cases}$

b.) $\begin{cases} -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{5}{4}y &= 4 \\ \dfrac{3}{4}x - \dfrac{5}{3}y &= -5 \end{cases}$

c.) $\begin{cases} x(y-1) - y(x-2) &= 3 \\ y(x-5) - x(y+4) &= -14 \end{cases}$

d.) $\begin{cases} 7x - (6x-y) &= 3y+8 \\ 4x - (5x-y) &= 2y+1 \end{cases}$

e.) $\begin{cases} x+y+z &= 25 \\ 5x+3y+2z &= 0 \\ y-z &= 6 \end{cases}$

f.) $\begin{cases} 2x-2y+z &= -3 \\ x+3y-2z &= 1 \\ 3x-y-z &= 2 \end{cases}$

5.6 Problemas con ecuaciones

La resolución de problemas constituye una de las aplicaciones más destacadas de las ecuaciones. En esta sección se presentan problemas que pueden resolverse mediante ecuaciones o sistemas de ecuaciones, tal como se ha visto hasta el momento. En algunos casos, es de gran utilidad construir un diagrama o gráfico que represente la situación planteada. Al tratarse de una aplicación directa de las ecuaciones, se espera que el lector analice y comprenda la información proporcionada en el enunciado, con el propósito de plantear y resolver la ecuación que satisfaga las condiciones del problema.

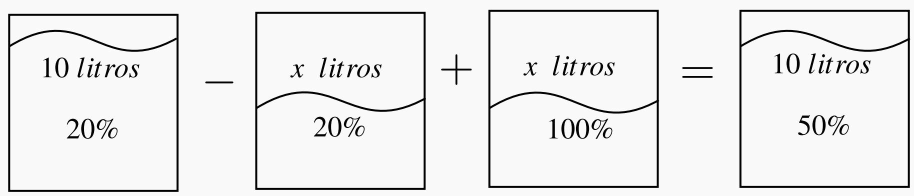
Ejemplo 5.49

Problema: Un sistema de enfriamiento con capacidad de 10 litros contiene una solución al 20% de anticongelante y 80% de agua. Se desea elevar la concentración de anticongelante al 50% reemplazando parte de la solución inicial por anticongelante puro. Determinar la cantidad que debe extraerse y añadirse.

Solución:

Identificación y planteamiento: El problema describe un procedimiento de *reemplazo*: se extrae cierta cantidad x de la solución al 20% y se sustituye por la misma cantidad x de anticongelante puro (100%). De este modo, se mantienen los 10 litros totales, pero la concentración de anticongelante se modifica hasta alcanzar el 50%.

Ejecución:



Se plantea la ecuación correspondiente al balance de anticongelante:

$$\underbrace{10\cdot 0.20}_{\text{ant. inicial}} - \underbrace{x\cdot 0.20}_{\text{removido}} + \underbrace{x\cdot 1.00}_{\text{agregado (puro)}} = \underbrace{10\cdot 0.50}_{\text{meta}}$$

$$2-0.20x+x=5 \implies 2+0.80x=5 \implies 0.80x=3 \implies x=\frac{3}{0.80}=3.75.$$

Conclusión:

Es necesario reemplazar 3.75 litros de la solución inicial por 3.75 litros de anticongelante puro para alcanzar el 50% de concentración.

Verificación:

Sustituyendo $x=3.75$ en la ecuación:

$$10\cdot 0.20 - 3.75\cdot 0.20 + 3.75\cdot 1.00 = 10\cdot 0.50.$$

El lado izquierdo se evalúa como $2-0.75+3.75=5$, el cual coincide con el lado derecho (5). Además, $3.75<10$, lo que verifica que la cantidad extraída y agregada es razonable: no excede el volumen total disponible ni la meta requerida.

Ejemplo 5.50

Lea cuidadosamente y resuelva el siguiente problema:
*En la parte inferior de un reloj de arena, simétricamente y mientras cae la arena por la acción de la gravedad, se forma un cono circular recto, cuyo diámetro de la base siempre es dos veces su altura. Además, se quiere construir, a partir de una cartulina, una caja de base cuadrada sin tapa circunscrita en la base del cono de arena. Si de la parte superior del reloj salieron $216cm^3$ de arena, y si se quiere que la caja contenga esta misma cantidad de arena, ¿cuál es el área **necesaria** de la cartulina para la construcción de la caja?*

Solución

Identificar y Plantear: Partiendo del volumen del cono ($216cm^3$) es posible, haciendo uso de la fórmula del volumen para un cono recto, obtener el valor del lado del cuadrado circunscrito en la base del cono, es decir, el valor del lado de la base de la caja. Como el volumen del cono es el mismo que el de la caja, este último nos proporciona la altura de la caja o, lo que es lo mismo, la medida de la altura de los lados de la caja. Si tenemos las dimensiones de las aristas de la caja, entonces es posible conocer el área de la cartulina necesaria para la construcción de la caja.

Ejecutar: Utilizando la fórmula del volumen del cono (V_1) es posible hallar el diámetro (d):

$$V_1 = \frac{\pi r^2 h}{3} = 216cm^3 \;\Rightarrow\; \frac{\pi r^3}{3} = 216cm^3 \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{648}{\pi}cm^3} \;\Rightarrow\; d = 2\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{648}{\pi}}\right)cm$$

Por triángulos especiales o Pitágoras, el lado de la base cuadrada de la caja es:

$$l\sqrt{2} = 2\sqrt[3]{\frac{648}{\pi}} \;\Rightarrow\; l = \frac{2\cdot\sqrt[3]{\frac{648}{\pi}}}{\sqrt{2}}cm$$

Luego, hallando la altura (h) mediante el volumen de la caja (V_2):

$$V_2 = l^2\cdot h \;\Rightarrow\; 216cm^3 = \left(\frac{2\cdot\sqrt[3]{\frac{648}{\pi}}}{\sqrt{2}}cm\right)^2\cdot h \;\Rightarrow\; h = \frac{108}{\left(\sqrt[3]{\frac{648}{\pi}}\right)^2}cm$$

Finalmente, el área necesaria de la cartulina es: $A_{necesaria} = A_{basal} + 4A_{lateral}$

$$A_{necesesaria} = \left(\frac{2\sqrt[3]{\frac{648}{\pi}}}{\sqrt{2}}cm\right)^2 + 4\left(\frac{2\sqrt[3]{\frac{648}{\pi}}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{108}{\sqrt[3]{\left(\frac{648}{\pi}\right)^2}}\right)cm^2 = \frac{8\sqrt[3]{243\pi}(\sqrt{2}\pi+3)}{\pi}cm^2$$

$\therefore$ El área necesaria para la construcción de la caja es de:

$$\frac{8\sqrt[3]{243\pi}(\sqrt{2}\pi+3)}{\pi}cm^2 \approx 173,2cm^2$$

Comprobar: Es necesario que se cumplan tres condiciones: 1) Si multiplicamos A_{basal} por h el volumen de la caja debe ser $216cm^3$. 2) Es indispensable que el A_{basal} mida igual al área del cuadrado inscrito en la base del cono. 3) Por último, que la suma de las áreas laterales y basal sea correcta, sin tomar en cuenta el área de la tapa. Como estas tres condiciones se cumplen en nuestro caso, por lo tanto nuestro resultado ($A_{necesaria}$) es correcto.

Ejemplo 5.51

Resuelva el siguiente problema:

Se desea preparar 5 litros de líquido de batería con 30% de ácido. El líquido puede comprarse en dos presentaciones, una al 50% de ácido y la otra al 20% de ácido. ¿Cuántos litros de cada uno deben usarse para preparar los 5 litros?

Solución
Identificar y Plantear: Se requieren 5 litros al 30%, por lo que, al formar nuestra ecuación, este constituye nuestro término independiente; mientras que las otras cantidades, de momento desconocidas, podrían ser simbolizadas por cualquier variable (x y y). El planteamiento de nuestra ecuación debe incluir, para cada variable, los datos porcentuales indicados, es decir, la cantidad porcentual de ácido en el líquido ”x” (50%), y la cantidad en porcentaje de ácido del líquido ”y” (20%). Sin embargo, al hacer esto tendríamos una ecuación con dos variables, por lo que requerimos de otra ecuación para resolver el problema. Note que el enunciado nos indica, no sólo los porcentajes asociados a cada presentación, sino que también nos pregunta por los litros de cada presentación requeridos para preparar los 5 litros; es decir, la suma en litros de x y y debe ser igual a 5.
Ejecutar: De nuestro análisis obtenemos el siguiente sistema de 2 ecuaciones con 2 variables:

$$\begin{cases} x\cdot 50\% + y\cdot 20\% = 5\cdot 30\% \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{5}y=\frac{3}{2} & \textbf{(1)} \\ x+y=5 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Despejando x en **(1)** y sustituyendo en **(2)** obtenemos:

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}y=\frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad x=3-\frac{2}{5}y$$

Luego:

$$3-\frac{2}{5}y+y=5$$

$$\Rightarrow y=\frac{10}{3} \qquad \textbf{(3)}$$

Ahora, sustituyendo **(3)** en **(2)** obtenemos el valor de x:

$$x+\frac{10}{3}=5 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{5}{3}$$

$\therefore$ Se requieren $\frac{5}{3}$ litros de ácido al 50% y $\frac{10}{3}$ de ácido al 20% para obtener 5 litros al 30%.

Comprobar: Los valores obtenidos tanto de x como de y satisfacen de manera simultánea las ecuaciones del sistema. Por otra parte, intuitivamente podríamos conjeturar que se necesita más ácido al 20% que al 50% para obtener una sustancia al 30% ($y > x$). Por lo tanto, el resultado es correcto.

Ejercicios 5.9

5.30 Resuelva los siguientes problemas:

a.) La longitud de una piscina rectangular debe ser 6 veces su ancho. Además, se requiere construir la acera perimetral de la piscina con $315m^2$ de hormigón y con un ancho de $2m$. Determine las dimensiones de la piscina.

b.) Un farmacéutico debe preparar 20 mg de una solución que contenga 18% de un ingrediente activo, pero sólo dispone de soluciones al 15% y al 20%. ¿Cuántos miligramos de cada solución deben mezclarse para obtener la receta deseada?

c.) Pedro y María corren a su encuentro en la playa realizando un recorrido en línea recta el uno del otro. Pedro está a $150m$ de María. Si la velocidad de Pedro es de $2,8m/s$ y la de ella es de $-2,2m/s$, ¿cuánto tardan y en qué punto de la trayectoria se encuentran? (Utilice la siguiente ecuación: $x = x_0 + vt$; donde x es la posición final y x_0 la posición inicial (ambas en metros m); v la velocidad (en metros por segundo: m/s), y t el tiempo en segundos (s)).

d.) En el epitafio de la tumba de Diofanto, un gran amante de los números en la Antigüedad, se lee lo siguiente: *«Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su barbilla se cubrió de vello. Pasó una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad».*

e.) El largo de la página de un libro mide $5cm$ más que lo que mide su ancho. El área impresa es de $594cm^2$, con márgenes de $1in$ superior e inferior y márgenes de $0,5in$ en los lados. Halle, en centímetros, las dimensiones de la página. (Tome en cuenta la conversión de pulgadas (in) a centímetros (mm); y la conversión de milímetros a centímetros (cm) si se sabe que: $1in = 25.40mm$ y $1mm = 0.1cm$).

f.) Juanita y Federica comienzan con el mismo número de fichas. Cuando Federica ha perdido $\frac{3}{4}$ de sus fichas, Juanita ha ganado 33 fichas más que la cuarta parte de las fichas que le quedan a Federica. ¿Cuántas fichas tenían cada una al principio?

g.) Se tiene una esfera y un cono circular recto inscrito en ella. El volumen del cono es $\frac{245\pi}{4}\,\text{cm}^3$ y el volumen de la esfera es $4500\pi\,\text{cm}^3$. Al proyectar la base del cono sobre el círculo máximo de la esfera (paralelo a la base del cono), se forma una corona circular de área $\frac{851\pi}{4}\,\text{cm}^2$. Hallar la altura del cono, utilizando las fórmulas para el volumen de un cono y de una esfera.

h.) En medicina y nutrición, el área de superficie corporal (ASC) se utiliza frecuentemente para determinar la dosis de algunos medicamentos. Una fórmula aproximada para calcular el ASC (en m^2) de un paciente es:

$$ASC = \sqrt{\frac{p \cdot h}{3600}},$$

donde p es el peso en libras (lb) y h es la estatura en centímetros (cm).

(a) Un paciente pesa aproximadamente 175 lb y presenta un ASC de $3\,\text{m}^2$. Determinar la altura aproximada del paciente en centímetros.

(b) Otro paciente mide aproximadamente 180 cm y tiene un ASC de $2.8\,\text{m}^2$. Determinar el peso aproximado del paciente en libras.

i.) En un estanque se introducen peces Betta y Guppy. La población total p de peces en el estanque, tras un cierto número de días, está modelada por la siguiente expresión:

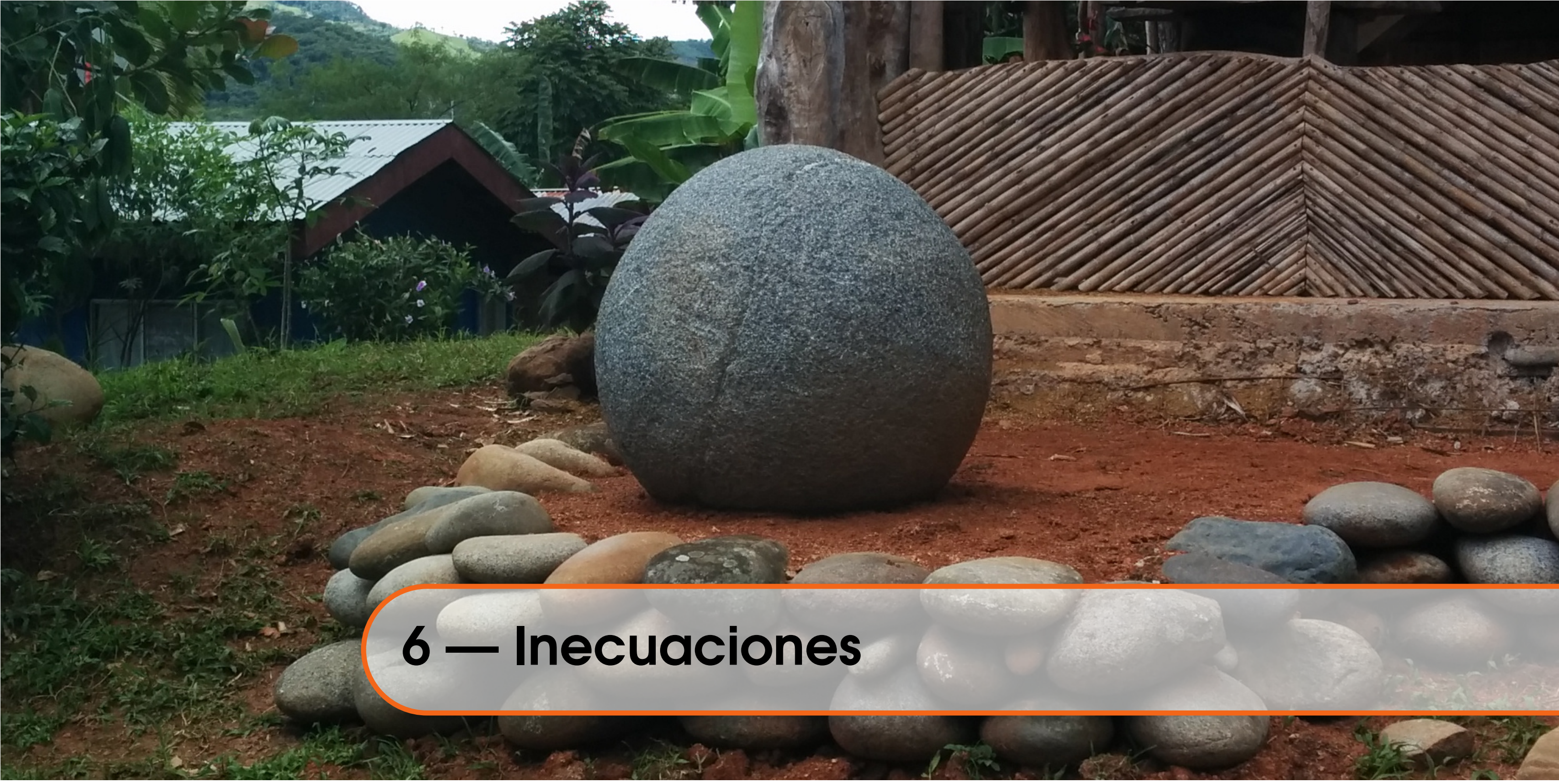
$$0 = 140 + 3d + 10\sqrt{d} - p,$$

donde d es el número de días transcurridos desde que los peces fueron introducidos, y p es la población de peces. A partir de este modelo:

(a) ¿Cuántos peces habrá al cabo de 10 días?

(b) ¿Cuántos días tardará la población en alcanzar 228 peces?

j.) Una compañía empacadora de arroz establece que cada bolsa debe pesar exactamente 2.2 kg. Sin embargo, debido a la dificultad de empacar con precisión, se permite un margen de error de ± 125 g. Las bolsas cuyo peso exceda ese margen por sobrepeso o por defecto deben vaciarse y volverse a empacar. Se desea determinar el peso mínimo y máximo (en kilogramos) de las bolsas que se aceptan como válidas.



6 — Inecuaciones

6.1 Introducción

En el capítulo 2 del este libro, a saber, “El Conjunto de los Números Reales”, se presentó la relación *menor que* “$<$” y la relación *mayor que* “$>$”, estas dos relaciones permiten realizar comparaciones entre cantidades y características cuantificables, lo cual tiene una gran importancia en casi todas las áreas de la matemática.

La evaluación de cualquier tipo de proceso está relacionado con la capacidad de determinar si una relación de desigualdad es o no válida. Por ejemplo, la nota final de algunos cursos, por si misma, no tiene significado, pero al comparar dicha con una nota mínima de referencia, por ejemplo 70, esta adquiere relevancia, pues es la comparación lo que establece si el curso es aprobado o no. Las inecuaciones, al igual que las ecuaciones, es un tema que tiene gran importancia, pues muchos de los problemas cotidianos pueden ser expresado como una o varias desigualdades que se deben verificar. En el siguiente apartado se presentan los principales conceptos de inecuaciones algebraicas. Se establece primero la definición de los intervalos reales como una herramienta importante para establecer el conjunto solución de las inecuaciones que se abordarán seguidamente a este tema. Finalmente, se brinda un segundo capítulo sobre el valor absoluto y sus propiedades lo que permitirá resolver ecuaciones e inecuaciones que involucren dicho concepto.

6.1.1 Propiedades de las desigualdades

El conjunto de los número reales se dice que es un conjunto ordenado, pues en él es posible definir una relación de orden entre sus elementos de la siguiente forma:

Definición 6.1

Dados dos números reales a y b cualesquiera, se definen la relaciones de orden para a y b de la siguiente forma:

- a es mayor que b, si y solo sí, $(a-b)$ es positivo.
- a es menor que b, si y solo sí, $(a-b)$ es negativo.
- a es mayor o igual que b, si y solo sí, a es mayor que b ó a es igual a b.
- a es menor o igual que b, si y solo sí, a es menor que b ó a es igual a b.

La relaciones de orden en $\mathbb{R}$ son proposiciones lógicas, esto quiere decir que se le puede asignar uno y solo un valor de verdad, ya sea verdadero o falso.

- "a es menor que b" se denota $a < b$.
- "a es mayor que b" se denota $a > b$.
- "a es menor o igual que b" se denota $a \leq b$.
- "a es mayor o igual que b" se denota $a \geq b$.

Ejemplo 6.1

Considere las siguientes desigualdades y su respectivo valor de verdad.

- $2 < 3$ se lee "2 menor que 3" y es una proposición verdadera.
- $5 > 3$ se lee "5 es mayor que 3" y es una proposición verdadera.
- $-4 > -2$ se lee "-4 es mayor que -2" y es una proposición falsa.
- $-5 \leq 8$ se lee "-5 es menor o igual a 8" y es una proposición verdadera.
- $7 \geq 7$ se lee "7 es mayor o igual que 7" y es una proposición verdadera.

Definición 6.2 Desigualdades equivalentes

Dos desigualdades D_1 y D_2 se dicen equivalentes si tienen los mismos valores de verdad; es decir, si D_1 es verdadera, D_2 será también verdadera; y si D_1 es falsa, D_2 también será falsa. La equivalencia entre D_1 y D_2 se denotará por $D_1 \iff D_2$.

Si la desigualdad D_1 depende de algunos parámetros o incógnitas, entonces será equivalente a otra desigualdad D_2, que también depende de los mismos parámetros, si sus valores de verdad coinciden para cualesquiera que sean los valores que tomen las incógnitas.

Teorema 6.1

Para todo a y b números reales cualesquiera, se cumple que:

- $a < b \iff b > a$, es decir, si "a menor que b", equivale a "b mayor que a".
- $a \leq b \iff b \geq a$, es decir, si "a menor o igual que b", equivale a "b mayor o igual que a".

- $a > b \iff b < a$, es decir, si "a mayor que b", equivale a "b menor que a".
- $a \geq b \iff b \leq a$, es decir, si "a mayor o igual que b", equivale a "b menor o igual que a".

Propiedad aditiva de las desigualdades

Teorema 6.2

Sean a, b y k tres números reales cualesquiera. Entonces:

- $a < b \iff a+k < b+k$
- $a \leq b \iff a+k \leq b+k$
- $a > b \iff a+k > b+k$
- $a \geq b \iff a+k \geq b+k$

Es decir, dada una desigualdad cualquiera y una constante real, es posible sumar la constante en ambos miembros de la desigualdad sin que se vea alterado el valor de verdad de la desigualdad.

Propiedad multiplicativa de las desigualdades

Teorema 6.3

Sean a y b números reales cualesquiera y sea k una **constante real positiva**. Entonces:

- $a < b \iff a \cdot k < b \cdot k$
- $a \leq b \iff a \cdot k \leq b \cdot k$
- $a > b \iff a \cdot k > b \cdot k$
- $a \geq b \iff a \cdot k \geq b \cdot k$

Es decir, dada una desigualdad cualquiera y una constante real positiva, es posible multiplicar la constante en ambos miembros de la desigualdad sin que se vea alterado el valor de verdad de la desigualdad.

Sean a y b números reales cualesquiera y sea k una **constante real negativa**. Entonces:

1. $a < b \iff a \cdot k > b \cdot k$
2. $a \leq b \iff a \cdot k \geq b \cdot k$
3. $a > b \iff a \cdot k < b \cdot k$
4. $a \geq b \iff a \cdot k \leq b \cdot k$

Es decir, cuando se multiplica una constante real negativa en ambos miembros de una desigualdad es necesario invertir el símbolo de desigualdad para mantener la equivalencia.

Propiedad pasar a...

Al igual que se hizo en las igualdades, es posible demostrar, utilizando las propiedades anteriores, las reglas "pasar a sumar", "pasar a restar", "pasar a multiplicar" y "pasar a dividir".

Teorema 6.4

Sean a, b y k constantes reales cualesquiera, entonces:

- $a+k < b \iff a < b-k$: de izquierda a derecha se interpretará como "pasar a restar"; de derecha a izquierda como "pasar a sumar".

- Si k es estrictamente positiva

$$ak < b \iff a < \frac{b}{k}$$

De izquierda a derecha se interpretará como "pasar a dividir"; de derecha a izquierda como "pasar a multiplicar".

- Si k es estrictamente negativa

$$ak < b \iff a > \frac{b}{k}$$

De izquierda a derecha se interpretará como "pasar a dividir"; de derecha a izquierda como "pasar a multiplicar".

Análogamente se tiene que las propiedades "pasar a..." también son válidas para las desigualdades $>$, $\leq$ y $\geq$. Haciendo énfasis que cuando k es estrictamente negativo, entonces en las propiedades "pasar a multiplicar" y "pasar a dividir" es necesario invertir la desigualdad para mantener la equivalencia.

Definición 6.3 Inecuación algebraica

Una inecuación algebraica es una desigualdad ($<$, $>$, $\leq$ o $\geq$) entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros de la inecuación, en la que aparece datos conocidos tales como constantes reales y datos desconocidos llamados incógnitas y representados como variables o expresiones literales que denotan valores reales no conocidos.

Ejemplo 6.2

Las siguientes son inecuaciones algebraicas:

$2x+4 \leq 1 \qquad \dfrac{p-2}{p+1} > -3 \qquad y^2+1 < y-3 \qquad (3w+2)(5w-7) \geq 0$

Definición 6.4 Solución de una inecuación

Una solución de una inecuación con una incógnita, es cualquier valor real que al ser sustituido por la incógnita hace verdadera la desigualdad.

Definición 6.5 Conjunto solución

Dada una inecuación, se define su conjunto solución y se denota por S como el conjunto formado por todas las soluciones reales de la inecuación.

Ejemplo 6.3

Considere la inecuación:

$$2x+7>1$$

Demuestre que 0 es solución y que -3 no es solución de la inecuación. Determine el conjunto solución.

Solución:

- 0 es solución de la inecuación, pues $2\cdot 0+7>1 \iff 7>1 \equiv V$.
- -3 no es solución de la inecuación, pues $2\cdot -3+7>1 \iff 1>1 \equiv F$.
- Haciendo uso de las propiedades de las desigualdades, se tiene que la inecuación dada puede reescribirse equivalentemente como sigue:

$$\begin{aligned} 2x+7>1 &\iff 2x>1-7 && \text{pasando a restar el 7.}\\ &\iff 2x>-6 \\ &\iff x>\frac{-6}{2} && \text{pasando a dividir el 2.}\\ &\iff x>-3 \end{aligned}$$

De donde se tiene que las inecuaciones $2x+7>1$ es equivalente a $x>-3$. Por lo que tendría el mismo conjunto solución. En este sentido todo valor x que satisface la condición $x>-3$ es solución de la inecuación. Por lo tanto el conjunto solución está dado por:

$$S=\{x\in\mathbb{R}/x>-3\}=]-3,+\infty[$$

6.2 Inecuaciones lineales con una incógnita

Definición 6.6

Una inecuación se dice lineal o de primer grado, si la misma resulta equivalente a una inecuación de la forma $ax+b<0$, $ax+b\leq 0$, $ax+b>0$ ó $ax+b\geq 0$.

Convenio Resolver una inecuación implica determinar el conjunto solución.

En el caso de inecuaciones lineales, para resolver la inecuación se puede hacer uso de las propiedades de las desigualdades, de manera que se pueda realizar un despeje de la incógnita y así resulte más evidente el o los valores que puede tomar la incógnita para que la desigualdad sea verdadera, tal como se hizo en el ejemplo 6.1.1. En los siguiente ejemplos se utiliza esta estrategia para resolver la inecuación indicada.

Ejemplo 6.4

Resuelva la inecuación $2x+3 \leq 4$.
Solución: Aplicando las propiedades de las desigualdades se tiene que:

$$\begin{aligned} 2x+3 \leq 4 &\iff 2x \leq 4-3 && \text{pasando a restar 3.} \\ &\iff 2x \leq 1 \\ &\iff x \leq \frac{1}{2} && \text{pasando a dividir el 2.} \end{aligned}$$

De donde se tiene que $2x+3 \leq 4 \iff x \leq \frac{1}{2}$, de esta última es evidente que:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \diagup x \leq \frac{1}{2} \right\} = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$$

Ejemplo 6.5

Determine el conjunto solución para la inecuación $-4x-3 > 15$.
Solución: Aplicando las propiedades de las desigualdades, teniendo en cuenta que al pasar a dividir un número negativo es necesario invertir la desigualdad, se tiene que:

$$\begin{aligned} -4x-3 > 15 &\iff -4x > 15+3 && \text{pasando a sumar 3.} \\ &\iff -4x > 18 \\ &\iff x < \frac{18}{-4} && \text{pasando a dividir el } -4. \\ &\iff x < \frac{-9}{2} \end{aligned}$$

Por lo que $-4x-3 > 15 \iff x < \frac{-9}{2}$. Así,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \diagup x < \frac{-9}{2} \right\} = \left] -\infty, \frac{-9}{2} \right[$$

Ejemplo 6.6

Resuelva la inecuación $\frac{-x}{4} + 2 \leq \frac{2}{3}x + 7$
Solución: Aplicando las propiedades de las desigualdades se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{-x}{4} + 2 \leq \frac{2}{3}x + 7 &\iff \frac{-x}{4} \leq \frac{2}{3}x + 7 - 2 && \text{pasando a restar 2.} \\ &\iff \frac{-x}{4} \leq \frac{2}{3}x + 5 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad \frac{-x}{4} - \frac{2}{3}x \leq 5 && \text{pasando a restar } \frac{2}{3}x.\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{-3x-8x}{12} \leq 5 &&\\
&\Longleftrightarrow \quad -3x-8x \leq 12\cdot 5 && \text{pasando a multiplicar 12.}\\
&\Longleftrightarrow \quad -11x \leq 60 &&\\
&\Longleftrightarrow \quad x \geq \frac{-60}{11} && \text{pasando a dividir } -11.
\end{aligned}
$$

De esta forma se tiene que $\frac{-x}{4}+2 \leq \frac{2}{3}x+7 \Longleftrightarrow x \geq \frac{-60}{11}$. Finalmente se tiene que:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \diagup x \geq \frac{-60}{11} \right\} = \left[-\frac{60}{11}, +\infty \right[$$

Al igual que en las ecuaciones es posible que durante el proceso algebraico de reducción de una inecuación la incógnita desaparezca por completo de la expresión, en estos casos se debe analizar la condición resultante para establecer el conjunto solución. En los siguientes ejemplos se puede visualizar este detalle.

N **Notación** En adelante no se indicará las propiedades “pasar a...”, simplemente serán aplicadas y se supondrá que el lector ya está en la capacidad reconocerlas dentro del procedimiento.

Ejemplo 6.7

Resuelva la inecuación $x-3(x-1) < -2x+5$

Solución: Aplicando las propiedades de las desigualdades, para reducir la inecuación original a una forma más simple, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
x-3(x-1) < -2x+5 \quad &\Longleftrightarrow \quad x-3x+3 < -2x+5\\
&\Longleftrightarrow \quad -2x+3 < -2x+5\\
&\Longleftrightarrow \quad -2x+2x < 5-3\\
&\Longleftrightarrow \quad 0 < 2
\end{aligned}
$$

De esta forma se tiene la inecuación original es equivalente a $0 < 2$, lo cual es siempre verdadero independientemente del valor de la variable x.

De esta forma se concluye que la desigualdad $x-3(x-1) < -2x+5$ es verdadera para todo $x \in \mathbb{R}$ (note que para ningún valor de x la expresión original se indefine).

Por lo tanto $S = \mathbb{R}$.

Ejemplo 6.8

Resuelva la inecuación $(x-3)(x+2) \geq x^2 - x + 8$.
Solución: Aplicando las propiedades de las desigualdades para reducir la inecuación original, se tiene que:

$$\begin{aligned}
(x-3)(x+2) \geq x^2 - x + 8 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 + 2x - 3x - 6 \geq x^2 - x + 8 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2 - x - 6 \geq x^2 - x + 8 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2 - x - x^2 + x \geq 8 + 6 \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 \geq 14
\end{aligned}$$

Por lo anterior se tiene que $(x-3)(x+2) \geq x^2 - x + 8$ es equivalente a $0 \geq 14$ lo cual es falso independientemente del valor de x. Por esta razón se tiene que la desigualdad $(x-3)(x+2) \geq x^2 - x + 8$ es falsa para cualquier $x \in \mathbb{R}$. De donde se concluye que $S = \varnothing$.

Ejercicios 6.1

6.1 Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones lineales.

a.) $4x + 7 \geq 2x - 3$

b.) $-5 < 3x - 2 < 1$

c.) $3x - 1 \geq 3 + x$

d.) $\frac{1}{2}(x-4) > x + 8$

e.) $\frac{x}{3} \geq 2 + \frac{x}{6}$

f.) $-5 \leq 4 - 3x \leq 2$

g.) $4 - 3(1-x) \leq 3$

h.) $3x + 4 > \frac{1}{2}(x-2)$

i.) $-3(1-x) < 12$

j.) $8 - 4(2-x) \leq -2x$

k.) $x - 5(x+2) \geq -2(2x+6)$

l.) $(x-4)(x+5) < (x-3)(x-2)$

m.) $x - 2(x+3) \geq 5 - x$

n.) $\frac{x-3}{4} - 1 > \frac{x}{2}$

6.3 Inecuaciones polinomiales de grado n, con $n \geq 2$

Definición 6.7 Inecuación polinomial de grado n

Una inecuación con una incógnita x, se dice que es una inecuación polinomial del grado n si es equivalente a una de las siguientes desigualdades:

$$P(x) < 0; \quad P(x) \leq 0; \quad P(x) > 0 \text{ ó } P(x) \geq 0$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado n.

Para determinar el conjunto solución de una inecuación polinomial de orden n, se procede a determinar el signo de $P(x)$ para los diferentes valores de la incógnita. Lo anterior pues si $P(x)$ es positivo, entonces se debe satisfacer $P(x) > 0$ y si $P(x)$ es negativo debe satisfacer $P(x) < 0$, y de esta manera determinar en que valores de x es la desigualdad verdadera y en que valores no lo es.

Por las leyes de signo para la multiplicación, es posible determinar el signo de $P(x)$ si se conoce los signos de todos sus factores.

Por ejemplo, si $P(x) = -3(x-1)(x+2)(x-4)$, se puede notar que para $x = 3$ se tiene que:

- $x-1$ es positivo.
- $x+2$ es positivo.
- $x-4$ es negativo.

Y como -3 es negativo se tiene que:

$$\text{El polinomio } P(x) = \overbrace{-3}^{-}\overbrace{(x-1)}^{+}\overbrace{(x+2)}^{+}\overbrace{(x-4)}^{-} \text{ es positivo para } x = 3.$$

Ahora si fuera posible hacer lo anterior para todo x en $\mathbb{R}$, sería posible determinar el conjunto solución de la inecuación.

Los siguientes dos resultados serán de gran importancia en el análisis de signos de expresiones algebraicas polinomiales y fraccionarias, pues establecen el signos para factores lineales y factores cuadráticos no reducibles.

Signo de un factor lineal

Considere un factor lineal de la forma $mx+b$, con m y b constantes, y $m \neq 0$, entonces:

- Si m es negativo se cumple que el factor $mx+b$ es positivo para todo $x < \frac{-b}{m}$ y es negativa para todo $x > \frac{-b}{m}$. Lo cual se puede resumir como:

	$-\infty$	$\frac{-b}{m}$	$+\infty$
$mx+b$	$+$	0	$-$

- Si m es positivo se cumple que el factor $mx+b$ es positivo para todo $x > \frac{-b}{m}$ y es negativa para todo $x < \frac{-b}{m}$. Lo cual se puede resumir como:

	$-\infty$	$\frac{-b}{m}$	$+\infty$
$mx+b$	$-$	0	$+$

- Para el caso en que $x = \frac{-b}{m}$ se tiene que el factor $mx+b$ es cero, en cuyo caso no es positivo, ni negativo.

Signo de un factor cuadrático irreductible

Si $Q(x) = ax^2+bx+c$, con a, b y c constantes reales, y $a \neq 0$ de manera que $\Delta = b^2-4ac < 0$, entonces el factor cuadrático no cambia de signo; esto es, es positivo para todo $x \in \mathbb{R}$ o es negativo para todo $x \in \mathbb{R}$.
Para determinar en cual de los dos casos se está, basta observar el signo del coeficiente principal a. Decidiendo como sigue:

- Si a es positivo, entonces $Q(x)$ es siempre positivo.
- Si a es negativo, entonces $Q(x)$ es siempre negativo.

Ejemplo 6.9

Resuelva en $\mathbb{R}$ la inecuación $3x^2+14x+8 > 0$.
Solución:
Lo que se tiene es una inecuación cuadrática, para la cual se procede a factorizar completamente el polinomio $P(x) = 3x^2+14x+8$.
Dicha factorización está dada por: $P(x) = (x+4)(3x+2)$, de donde se tiene que la inecuación puede reescribirse como:

$$(x+4)(3x+2) > 0$$

Para ambos factores, es posible determinar el signo de cada uno de ellos, observe que:

	$-\infty$	-4	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$

	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$3x+2$	$-$	0	$+$

Dicha información puede unificarse en una sola tabla, para esto es importante ordenar los ceros de cada factor en orden ascendente, para lo cual es fundamentar visualizar la línea superior y horizontal de la tabla como una recta numérica, esta recta facilitará la visualización de los intervalos que conforman el conjunto solución.

	$-\infty$	-4		$\frac{-2}{3}$	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$
$3x+2$	$-$		$-$	0	$+$

Ahora que se sabe el signo de cada factor, entonces es posible determinar el signo del polinomio $P(x) = (x+4)(3x+2)$

	$-\infty$	-4	$\frac{-2}{3}$	$+\infty$
$x+4$	$-$	0 $+$		$+$
$3x+2$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)=(x+4)(3x+2)$	$+$	$-$		$+$

Como la inecuación a resolver es: $(x+4)(3x+2)>0$, basta saber para que valores de x es $P(x)$ estrictamente mayor que 0 (positivo). En la tabla anterior se puede observar que esto ocurre para los valores de x que están en $]-\infty,-4[$ o $]\frac{-2}{3},+\infty[$, por lo que:

$$S=]-\infty,-4[\cup\left]\frac{-2}{3},+\infty\right[$$

En la solución de las inecuaciones no es necesario realizar análisis independientes de los factores, en su lugar se construirá la tabla de signo para todos los factores en forma simultánea para así determinar el signo del polinomio $P(x)$, y de esta forma, encontrar el conjunto solución.

Ejemplo 6.10

Resuelva en $\mathbb{R}$ la inecuación $x^2+(x-1)^2 \leq 3x+4$.
Solución: Aplicando las propiedades de las desigualdades se tiene que:

$$\begin{aligned} x^2+(x-1)^2 \leq 3x+4 &\iff x^2+(x^2-2x+1) \leq 3x+4 \\ &\iff x^2+x^2-2x+1-3x-4 \leq 0 \\ &\iff 2x^2-5x-3 \leq 0 \end{aligned}$$

Por lo que se tiene que la inecuación es polinomial de orden 2. Ahora, la factorización del polinomio $P(x)=2x^2-5x-3$ corresponde a $P(x)=(2x+1)(x-3)$, por lo que la inecuación original es equivalente a la inecuación: $(2x+1)(x-3) \leq 0$
Los ceros de los factores $(2x+1)$ y $(x-3)$ son $\frac{-1}{2}$ y 3 respectivamente, estos deberán ser ordenados en forma ascendente en la recta numérica que representa la linea superior horizontal de la tabla de signos.

	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$2x-1$	$-$	0 $+$		$+$
$x-3$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)=(2x-1)(x-3)$	$+$	$-$		$+$

La inecuación a resolver es $(2x+1)(x-3) \leq 0$, para lo cual basta saber los valores de x para los cuales $(2x+1)(x-3)$ es negativo o cero. De la tabla anterior x debe pertenecer a $\left[-\frac{1}{2},3\right]$. Observe que el intervalo es cerrado en ambos extremos, esto se debe a que en los extremos de dicho intervalo $(2x+1)(x-3)$ es cero. Como la desigualdad es "$\leq$" debe incluir los valores que hagan cero la expresión. Finalmente,

$$S=\left[-\frac{1}{2},3\right]$$

Ejemplo 6.11

Resuelva en $\mathbb{R}$ la inecuación $(x+1)^2 \leq -x^2+7x+2$.
Solución: Aplicando las propiedades de las desigualdades se tiene que:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 \leq -x^2+7x+2 &\iff x^2+2x+1 \leq -x^2+7x+2\\ &\iff x^2+2x+1+x^2-7x-2 \leq 0\\ &\iff 2x^2-5x-1 \leq 0\end{aligned}$$

Por lo que se tiene una inecuación polinomial de orden 2. Primero se procede a factorizar el polinomio $P(x) = 2x^2-5x-1$, para lo cual es necesario aplicar la fórmula general y el teorema del factor pues sus ceros son irracionales. Finalmente se obtiene la factorización:

$$P(x) = 2\left(x-\frac{5+\sqrt{33}}{4}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{33}}{4}\right)$$

Así, la inecuación original es equivalente a:

$$2\left(x-\frac{5+\sqrt{33}}{4}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{33}}{4}\right) \leq 0$$

Ahora se debe construir la tabla de signos, para lo cual se debe ordenar, en la parte superior de la tabla, los ceros de los dos factores lineales del polinomio, primero $\frac{5-\sqrt{33}}{4}$ y posteriormente $\frac{5+\sqrt{33}}{4}$ de izquierda a derecha.

	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{33}}{4}$		$\frac{5+\sqrt{33}}{4}$		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
$x-\frac{5-\sqrt{33}}{4}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\frac{5+\sqrt{33}}{4}$		$-$		$-$	0	$+$	
$\left(x-\frac{5-\sqrt{33}}{4}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{33}}{4}\right)$		$+$		$-$		$+$	

En este caso, se debe escoger donde $P(x)$ es negativo o cero, pues la inecuación es del tipo "$\leq$", por lo que los extremos del intervalo deberán estar cerrados. Finalmente, se tiene que:

$$S = \left[\frac{5-\sqrt{33}}{4}, \frac{5+\sqrt{33}}{4}\right]$$

Ejemplo 6.12

Resuelva en $\mathbb{R}$ la inecuación $(x-4)(x^2+1) \leq -10$.
Solución: A primera vista parece que la expresión ya se encuentra factorizada; sin embargo, al ser -10 el miembro derecho, la factorización del lado izquierdo no es de utilidad.
Aplicando las propiedades de las desigualdades se tiene que:

$$\begin{aligned}
(x-4)(x^2+1) \leq -10 &\iff x^3+x-4x^2-4 \leq -10 \\
&\iff x^3-4x^2+x-4+10 \leq 0 \\
&\iff x^3-4x^2+x+6 \leq 0
\end{aligned}$$

En este caso se tiene que la inecuación es polinomial de grado 3, por lo que se procede a factorizar el polinomio $P(x) = x^3-4x^2+x+6$.
Los posibles ceros racionales del polinomio son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Por lo que se procede utilizando la división sintética.

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & -4 & 1 & 6 & -1 \\
 & -1 & 5 & -6 & \\
\hline
1 & -5 & 6 & \color{red}{0} &
\end{array}$$

por lo que $P(x) = (x+1)(x^2-5x+6)$

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & -5 & 6 & 2 \\
 & 2 & -6 & \\
\hline
1 & -3 & \color{red}{0} &
\end{array}$$

De donde se tiene que $P(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$ y la inecuación de puede expresar como:

$$(x+1)(x-2)(x-3) \leq 0$$

Los ceros de cada uno de los factores son: -1, 2 y 3; mismos que deberán ser ordenados en la parte superior de la tabla de signos, quedando:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & -\infty \qquad -1 & & 2 \qquad 3 & \quad +\infty \\
\hline
x+1 & - \quad 0 & + & + & + \\
\hline
x-2 & - & - \quad 0 & + & + \\
\hline
x-3 & - & - & - \quad 0 & + \\
\hline
(x+1)(x-2)(x-3) & - & + & - & + \\
\hline
\end{array}$$

De la tabla se concluye que los valores de x que hacen que $P(x)$ sea negativo o cero son lo que pertenecen al conjunto $]-\infty,-1] \cup [2,3]$. Por lo que:

$$S =]-\infty,-1] \cup [2,3]$$

Ejemplo 6.13

Considere el polinomio $P(y) = -3y^5 + 2y^4 + 9y^3 - 4y$. Resuelva en $\mathbb{R}$ cada una de las siguientes inecuaciones:

$$P(y) < 0, \quad P(y) \leq 0, \quad P(y) > 0 \quad \text{y} \quad P(y) \geq 0$$

Todas esta inecuaciones puede ser resueltas simultáneamente, únicamente es necesario determinar el signo de $P(y)$ a lo largo de la recta numérica.
Se procederá primero a factorizar $P(y) = -3y^5 + 2y^4 + 9y^3 - 4y$. Primero por factor común se tiene que:

$$P(y) = y\overbrace{\left(-3y^4 + 2y^3 + 9y^2 - 4\right)}^{Q(y)}$$

Para factorizar $Q(y)$ se procederá por división sintética y el teorema del factor. La lista de los posibles ceros racionales del polinomio es: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}$. Al utilizar la división sintética para evaluar cada candidato de la lista, se tiene que:

$$\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 2 & 9 & 0 & -4 & -1 \\ & 3 & -5 & -4 & 4 & \\ \hline -3 & 5 & 4 & -4 & 0 & \end{array}$$

Por lo que $Q(y) = (y+1)(-3y^3 + 5y^2 + 4y - 4)$

$$\begin{array}{rrrr|r} -3 & 5 & 4 & -4 & -1 \\ & 3 & -8 & 4 & \\ \hline -3 & 8 & -4 & 0 & \end{array}$$

por lo que $Q(y) = (y+1)(y+1)(-3y^2 + 8y - 4)$

$$\begin{array}{rrr|r} -3 & 8 & -4 & -1 \\ & 3 & -11 & \\ \hline -3 & 11 & -15 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} -3 & 8 & -4 & 1 \\ & -3 & 5 & \\ \hline -3 & 5 & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} -3 & 8 & -4 & 2 \\ & -6 & 4 & \\ \hline -3 & 2 & 0 & \end{array}$$

por lo que $Q(y) = (y+1)^2(y-2)(-3y+2)$. Finalmente se tiene que la factorización completa de $P(y)$ es:

$$P(y) = y(y+1)^2(y-2)(-3y+2)$$

Ahora se construirá la tabla de signos, los ceros de los factores de $P(y)$ deberán ser ordenados en al parte superior de dicha tabla en orden ascendente de izquierda a derecha:

	$-\infty$	-1	2	3	3 $+\infty$
y	$-$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$
$(y+1)^2$	$+$ 0	$+$	$+$	$+$	$+$
$y-2$	$-$	$-$	$-$	$-$ 0	$+$
$-3y+2$	$+$	$+$	$+$ 0	$-$	$-$
$P(y)$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$

Ahora, para las cuatro inecuaciones dadas originalmente se tiene que:

- Para $P(y) < 0$ se tiene que el conjunto solución es:

$$S = \left]0, \tfrac{2}{3}\right[\cup]2, +\infty[$$

- Para $P(y) \leq 0$ se tiene que el conjunto solución es:

$$S = \left[0, \tfrac{2}{3}\right] \cup [2, +\infty[\cup \{-1\}$$

- Para $P(y) > 0$ se tiene que el conjunto solución es:

$$S =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup \left]\tfrac{2}{3}, 2\right[=]-\infty, 0[\cup \left]\tfrac{2}{3}, 2\right[\smallsetminus \{-1\}$$

- Para $P(y) \geq 0$ se tiene que el conjunto solución es:

$$S =]-\infty, 0] \cup \left[\tfrac{2}{3}, 2\right]$$

Ejemplo 6.14

Resuelva en $\mathbb{R}$ la inecuación $-2z^3 + 2z^2 + 2z + 4 < 0$.

Solución: En este caso, se tiene una inecuación polinomial de grado 3, por lo que se procede a factorizar completamente el polinomio $P(z) = -2z^3 + 2z^2 + 2z + 4$. Por factor común se tiene que

$$P(z) = -2\overbrace{\left(z^3 - z^2 - z - 2\right)}^{Q(z)}$$

Ahora se debe factorizar $Q(z)$, para lo cual procederá con división sintética y el teorema del factor. Note que la lista de los posibles ceros racionales de $Q(z)$ es: $\pm 1, \pm 2$. Utilizando la división sintética para evaluar a los candidatos se tiene:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ & -1 & 2 & -1 & \\ \hline 1 & -2 & 1 & -3 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ & 1 & 0 & -1 & \\ \hline 1 & 0 & -1 & -3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ & -2 & 6 & -10 & \\ \hline 1 & -3 & 5 & -12 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & -2 & 2 \\ & 2 & 2 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

De donde se tiene que $Q(z) = (z-2)(z^2 + z + 1)$. Ahora, para que $z^2 + z + 1$ sea factorizable en $\mathbb{R}$ debe cumplirse que $\Delta \geq 0$, donde $\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3$, en consecuencia dicho polinomio es irreducible en $\mathbb{R}$. De este modo se concluye que la factorización completa de $P(z)$ es:

$$P(z) = -2(z-2)(z^2 + z + 1)$$

Y la inecuación original equivale a: $-2(z-2)(z^2+z+1) < 0$; y para la cual se procede a construir al tabla de signos para sus factores, misma que se observa en la siguiente tabla:

	$-\infty$ 2	$+\infty$
-2	$-$	$-$
$z-2$	$-$ 0	$+$
z^2+z+1	$+$	$+$
$P(z)$	$+$	$-$

Luego el conjunto solución corresponde a:

$$S =]2, +\infty[$$

Ejercicios 6.2

6.2 Determine el conjunto solución de las inecuaciones:

a.) $x^2-6x+8<0$
b.) $-x^2-x+6<0$
c.) $6x^2+x-2\geq 0$
d.) $-x^2+x+3<0$
e.) $x^2+x+1>0$
f.) $-x^2-1\leq 0$
g.) $-5(-x+1)(-x-2)\geq 0$
h.) $(x-1)(x+2)\geq(x-1)(-x+3)$
i.) $-3x^2+x+2>0$

6.3 Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones.

a.) $(2x^2-5x+11)(9-x^2)\leq 0$
b.) $-x^3+3x^2-5x+15<0$
c.) $x^4-2x^2-3x-2>0$
d.) $x^4+2x^2+2>0$
e.) $(x-1)^2(x+2)^3(x^2+4)\leq 0$
f.) $x^3+x^2-2x>0$
g.) $x^3-2x^2+2<x^2+x-1$
h.) $-x^4+2x^2+2<x^2$
i.) $2x^3<-2x-x^2-1$
j.) Halle el conjunto de valores para el parámetro k en la ecuación $(k-2)x^2+4x-2xk+1=0$ para que tenga dos soluciones reales distintas.

6.4 Inecuaciones fraccionarias

Definición 6.8 Inecuación fraccionaria

Una inecuación se dice que es una inecuación fraccionaria si es equivalente a una de las siguientes desigualdades:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0; \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0; \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \text{ó} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

donde $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es una fracción racional con $Q(x)$ un polinomio de al menos primer grado.

La estrategia para resolver este tipo de inecuación es la misma que la empleada para resolver inecuaciones polinomiales. Lo que se hará es determinar el signo de la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ por medio de una tabla de signos construida con los factores de $P(x)$ y $Q(x)$. En esta tabla se debe considerar que los ceros de los factores de $Q(x)$ son ceros de $Q(x)$ y por lo tanto son restricciones de la fracción racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$; estos valores, bajo ninguna circunstancia, estarán contenidos en el conjunto solución.

Otro aspecto importante que se debe destacar es la imposibilidad de pasar a multiplicar el polinomio $Q(x)$, esto se debe a que el signo de $Q(x)$ puede variar según el valor de la incógnita, por lo que en algunos casos se debería invertir la desigualdad y en otros dicha desigualdad deberá mantenerse a la hora de aplicar la propiedad.

Ejemplo 6.15

Resuelva en $\mathbb{R}$ la inecuación $\dfrac{x^2-2x+3}{x+1} - 1 \leq 0$.

Solución: Primero es necesario reescribir la inecuación de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, posteriormente se factorizarán completamente $P(x)$ y $Q(x)$ de manera que sea posible construir la tabla de signos para la fracción completa. Por lo que se procede como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-2x+3}{x+1} - 1 \leq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2-2x+3-(x+1)}{x+1} \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2-3x+2}{x+1} \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(x-2)(x-1)}{x+1} \leq 0
\end{aligned}$$

Los ceros de los factores 2, 1 y -1, siendo este último restricción de la inecuación, deberán ser ordenados ascendentemente, de izquierda a derecha, en la parte superior de la tabla de signos misma que se observa en la siguiente tabla.

	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	$/\!/$	$+$		$+$		$+$	
$\frac{P(x)}{Q(x)}$		$-$		$+$		$-$		$+$	

Nota: La doble linea bajo el -1 así como "$/\!/$" es para recordar que dicho valor es una restricción de la fracción racional en la inecuación original, por lo que no deberá ser incluido en el conjunto solución.

De acuerdo a la información se deduce que el conjunto solución corresponde a:

$$S =]-\infty, -1[\cup [1, 2]$$

Ejemplo 6.16

Resuelva en $\mathbb{R}$ la inecuación $\dfrac{x-5}{x+3} \leq \dfrac{2x+1}{x+3}$.

Solución: Del mismo modo a lo realizado en el ejemplo 6.4 se procede a reescribir la inecuación de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, para lo cual se hace lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{x-5}{x+3} \leq \frac{2x+1}{x+3} &\iff \frac{x-5}{x+3} - \frac{2x+1}{x+3} \leq 0 \\
&\iff \frac{x-5-(2x+1)}{x-3} \leq 0 \\
&\iff \frac{x-5-2x-1}{x+3} \leq 0 \\
&\iff \frac{-x-6}{x+3} \leq 0
\end{aligned}$$

Seguidamente se procede a construir la tabla de signos para $\dfrac{-x-6}{x+3}$. Recuerde que -3 es una restricción.

	$-\infty$		-6		-3		$+\infty$
$-x-6$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+3$		$-$		$-$	$/\!/$	$+$	
$\frac{-x-6}{x+3}$		$-$		$+$		$-$	

Finalmente, de la información de la tabla se tiene que el conjunto solución de la inecuación corresponde a: $S =]-\infty, -6] \cup]-3, +\infty[$.

Ejemplo 6.17

Resuelva en $\mathbb{R}$ la inecuación $\dfrac{3x}{x^2-1} - \dfrac{1}{x^2-x} \leq \dfrac{2x^2+1}{x^3-x}$.

Solución: Primero, la inecuación debe ser llevada a la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, para lo cual se procede como sigue:

$$
\begin{aligned}
& \frac{3x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-x} \leq \frac{2x^2+1}{x^3-x} \\
\iff & \frac{3x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-x} - \frac{2x^2+1}{x^3-x} \leq 0 \\
\iff & \frac{3x}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x(x-1)} - \frac{2x^2+1}{x(x-1)(x+1)} \leq 0 \\
\iff & \frac{3x^2-(x+1)-(2x^2+1)}{x(x-1)(x+1)} \leq 0 \\
\iff & \frac{3x^2-x-1-2x^2-1}{x(x-1)(x+1)} \leq 0 \\
\iff & \frac{x^2-x-2}{x(x-1)(x+1)} \leq 0 \\
\iff & \frac{(x-2)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} \leq 0
\end{aligned}
$$

Aquí se tiene dos posibilidades, una es meter todos los factores en la tabla de signos, en este caso, habrían dos filas idénticas pues el factor $(x+1)$ aparece dos veces. La otra opción es simplificar la fracción primero y luego construir la tabla de signos, en este caso la tabla de signos quedará más pequeña, pero se deberá recordar que -1 es restricción la fracción puesto que esta información se perderá en el proceso de simplificación. Para explorar las alternativas, se abordará con los dos procedimientos.

- Primero se construirá la tabla de signos con todos los factores presentes en el numerador y denominador de la fracción racional. En este caso la tabla quedará como sigue:

	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	$/\!/$	$+$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$+$		$+$	
x		$-$	$\parallel$	$-$	$/\!/$	$+$	$\parallel$	$+$		$+$	
$x-1$		$-$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$-$	$/\!/$	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	$/\!/$	$+$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$+$		$+$	
$\frac{P(x)}{Q(x)}$		$-$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$		$+$	

De la tabla anterior se tiene que el conjunto solución es:

$$S =]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,0[\,\cup\,]1,2];\ \text{o bien } S =]-\infty,0[\cup]1,2] \smallsetminus \{-1\}$$

- La segunda opción consiste en simplificar la fracción racional antes de construir la tabla de signos. Por lo que se procede como sigue:

$$\frac{(x-2)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} \leq 0 \Longrightarrow \frac{(x-2)\cancel{(x+1)}}{x(x-1)\cancel{(x+1)}} \leq 0 \Longrightarrow \frac{x-2}{x(x-1)} \leq 0$$

Note que esta última inecuación no es equivalente a la inecuación original, por eso se utiliza "$\Longrightarrow$" en lugar de "$\Longleftrightarrow$". La razón de la no equivalencia corresponde a que la fracción de la inecuación original tiene como restricción al -1 situación que no ocurre en la inecuación resultante luego de la simplificación.
Observe la siguiente construcción de la tabla de signos para la fracción $\dfrac{x-2}{x(x-1)}$.

	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
x		$-$	$//$	$+$	$\|$	$+$		$+$	
$x-1$		$-$	$\|$	$-$	$//$	$+$		$+$	
$\frac{P(x)}{Q(x)}$		$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$		$+$	

En este caso se debe tener presente que -1 es una restricción que no se visualiza en la tabla, por esta razón este número no puede estar en el conjunto solución de la inecuación, así:

$$S =]-\infty, 0[\cup]1, 2] \setminus \{-1\}$$

Ejemplo 6.18

Considere la fracción racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{-3(x+1)^2(-3x+17)}{x^2(x-3)(-2x^2+3x-6)(x-2)^3}$. Resuelva en $\mathbb{R}$ las siguientes inecuaciones:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0; \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0; \quad \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

Solución: En este caso, ya se tiene factorizado completamente el numerador y denominado de la fracción racional. Note que el factor $-2x^2+3x-6$ es irreducible, pues $\Delta = 3^2 - 4(-2)(-6) = 9-48 = -39 < 0$.
Todas las inecuaciones pueden ser resueltas simultáneamente si se conoce el signo de la fracción racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$. A continuación se puede observar la tabla de signos para la fracción dada.

	$-\infty$		-1		0		2		3		$\frac{17}{3}$		$+\infty$
-3		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$-3x+17$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2		$+$		$+$	$//$	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	$//$	$+$		$+$	
$-2x^2+3x-6$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$(x-2)^3$		$-$		$-$		$-$	$//$	$+$		$+$		$+$	
$\frac{P(x)}{Q(x)}$		$+$		$+$		$+$		$-$		$+$		$-$	

De acuerdo con la información de la tabla anterior y para cada una de las inecuaciones propuestas, se concluye:

- Para la inecuación $\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0$ se tiene que $S =]2,3[\cup \left]\dfrac{17}{3}, +\infty\right[$.
- Para la inecuación $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ se tiene que $S =]2,3[\cup \left[\dfrac{17}{3}, +\infty\right[\cup \{-1\}$.
- Para la inecuación $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$ se tiene que $S =]-\infty, 2[\cup \left]3, \dfrac{17}{3}\right[\smallsetminus \{-1, 0\}$.
- Para la inecuación $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ se tiene que $S =]-\infty, 2[\cup \left]3, \dfrac{17}{3}\right] \smallsetminus \{0\}$.

Ejercicios 6.3

6.4 Resuelva en $\mathbb{R}$ cada una de las siguientes inecuaciones lineales.

a.) $\dfrac{3x}{2x-4}+\dfrac{6}{4x^2-16}\leq 0$

b.) $\dfrac{4}{x-3}\geq\dfrac{5}{x+2}$

c.) $\dfrac{3x-2}{x^2-6x+8}>0$

d.) $\dfrac{4-x}{x^2-2x-3}\leq 0$

e.) $\dfrac{(x+3)^2(2x-1)(3-x)}{x^2-4}\geq 0$

f.) $\dfrac{-x-10}{x+1}>-x-2$

g.) $\dfrac{x^2}{x+1}\leq -1$

h.) $\dfrac{6x}{x^2-4x+3}\geq\dfrac{2}{12-4x}$

i.) $\dfrac{3-x}{x-2}<\dfrac{x-5}{1-x}$

6.5 Resuelva en $\mathbb{R}$ las siguientes inecuaciones:

a.) $x(x+3)-(2x^2+1)\geq x(x-5)+5$

b.) $-x^3+2x^2+5x-6\geq 0$

c.) $-6x^2+x(x^2-2)\geq x^2(x-6)+x+1$

d.) $\dfrac{(-4x^3-3x^2+7x)(x^2+1)}{16x^2-49}\geq 0$

e.) $\dfrac{x(2-x)}{(x^2+9)(x-3)}\geq 0$

f.) $\dfrac{-x}{x+1}\leq\dfrac{2-x}{x}$

g.) $\dfrac{-2}{y-3}\geq\dfrac{1}{y}+\dfrac{6}{9-y^2}$

h.) $\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{x}{2x-1}+1$

i.) $\dfrac{1-x}{3-x}\geq\dfrac{x+4}{3x-x^2}$

j.) $\dfrac{2-x}{x+1}\geq\dfrac{3x}{x-2}$

k.) $\dfrac{x}{x-1}\geq\dfrac{5}{x+1}$

l.) $\dfrac{3x+5}{8-5x}\geq\dfrac{-x}{x-3}$

m.) $\dfrac{-3}{x-2}-\dfrac{1}{(x-1)^2}\leq\dfrac{1}{x-2}$

n.) $\dfrac{2+x}{x^2+3}\geq\dfrac{x+1}{x^2-x}$

o.) $\dfrac{3x+2}{-5x}\leq\dfrac{x}{2-x}$

p.) $\dfrac{2x}{x^2-1}+\dfrac{5}{x+1}\geq\dfrac{x}{x-1}$

6.6 Determine si existe los valores de $a\in]0,1[$ de modo que la solución de la inecuación $\dfrac{\sqrt{x^2-1}\cdot(ax^2-x)}{-x^2+3x-5}\geq 0$ sea el intervalo $[1,3]$.

6.7 Encontrar el valor de $k\in\mathbb{R}$ tal que: $x^2+(2k+1)x+k(k+3)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

6.5 Inecuaciones con literales

En ocasiones las inecuaciones pueden contener otras expresiones literales que representan constantes desconocidas para las cuales se puede o no conocer algunas condiciones. Sin embargo, estas expresiones literales no son consideradas incógnitas sino parte de las constantes presentes en la inecuación. Por lo general el conjunto solución de estas inecuaciones queda en función de dichos parámetros. En los siguientes ejemplos se puede apreciar estos detalles:

Ejemplo 6.19

Determine en $\mathbb{R}$ el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{-bx(b-a)(x+a)}{x+b} \leq 0$$

donde a y b son constantes reales tales que $b < 0 < a$.

Solución: La anterior es una inecuación fraccionarias con dos parámetros a y b que representan dos constantes reales desconocidas que cumplen la condición $b < 0 < a$. En este caso particular las expresiones involucradas ya se encuentran factorizadas al máximo, por lo que bastaría construir la tabla de signos para la expresión:

$$\frac{-bx(b-a)(x+a)}{x+b}$$

Recuerde que la incógnita es x, de este modo se tiene que:

- $b-a$ es una constante negativa, pues: $b < a \iff b-a < 0$, aplicando la propiedad pasar a restar.
- Los ceros de los factores corresponden a $-a$, 0 y $-b$, estos ceros deberán ser ordenados en la parte superior de la tabla, note que como $b < 0 < a$, entonces se tiene que $-a < 0 < -b$.

Finalmente, la tabla de signos para la expresión sería:

	$-\infty$	$-a$		0		$-b$	$+\infty$
$b-a$	$-$		$-$		$-$	$\Vert$	$-$
$-bx$	$-$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$
$x+a$	$-$	0	$+$		$+$	$\Vert$	$+$
$x+b$	$-$		$-$		$-$	$\Vert$	$+$
$\frac{P(x)}{Q(x)}$	$+$		$-$		$+$	$\Vert$	$-$

De la información de la tabla anterior se concluye que el conjunto solución de la inecuación está dado por:

$$S = [-a, 0] \cup]-b, \infty[$$

Ejemplo 6.20

Resuelva en $\mathbb{R}$ la inecuación:

$$\frac{x-a}{b} > \frac{x-b}{a}$$

donde a y b son constantes reales tal que $a < b < 0$.
Esta es una inecuación fraccionaria, deberá reescribirse de forma que uno de sus miembros sea cero, para lo cual se empleará las propiedades de las desigualdades.

$$\begin{aligned}
\frac{x-a}{b} > \frac{x-b}{a} & \iff \frac{x-a}{b} - \frac{x-b}{a} > 0 \\
& \iff \frac{a(x-a)-b(x-b)}{ab} > 0 \\
& \iff \frac{ax-a^2-bx+b^2}{ab} > 0 \\
& \iff \frac{(ax-bx)+(b^2-a^2)}{ab} > 0 \\
& \iff \frac{x(a-b)+(b+a)(b-a)}{ab} > 0 \\
& \iff \frac{x(a-b)-(b+a)(a-b)}{ab} > 0 \\
& \iff \frac{(a-b)(x-(a+b))}{ab} > 0
\end{aligned}$$

Note que:

- $a-b$ es una constante negativa, pues $a < b \iff a-b < 0$, usando la propiedad pasar a restar.
- ab es una constante positiva pues es el producto de dos números negativos.
- El cero del único factor no constante es $(a+b)$.

Utilizando lo anterior, la inecuación puede ser resuelta haciendo uso de dos estrategias diferentes, se puede construir la tabla de signos, o bien, tratarla como una inecuación lineal y despejar la incógnita con las propiedades de las desigualdades. Para estudiar las dos alternativas, la inecuación será abordadas de ambas formas:

Alternativa 1: Construyendo una tabla de signos:

	$-\infty$	$a+b$	$+\infty$
$a-b$	$-$		$-$
$x-(a+b)$	$-$	0	$+$
ab	$+$		$+$
$\frac{P(x)}{Q(x)}$	$+$		$-$

Así, de la información de la tabla anterior se concluye que el conjunto solución de la inecuación corresponde a:

$$S =]-\infty, a+b[$$

Alternativa 2 Despeje de la incógnita mediante las propiedades de las desigualdades.

Considere el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned}
& \frac{(a-b)(x-(a+b))}{ab} > 0 \\
\iff\ & (a-b)(x-(a+b)) > 0 \cdot ab \qquad \text{pues } ab \text{ es positiva.} \\
\iff\ & (a-b)(x-(a+b)) > 0 \\
\iff\ & x-(a+b) < \frac{0}{a-b} \qquad \text{pues } a-b \text{ es negativa.} \\
\iff\ & x-(a+b) < 0 \\
\iff\ & x < a+b
\end{aligned}$$

Por lo que $S = \{x \in \mathbb{R} / x < a+b\}$, de donde se tiene que:

$$S =]-\infty, a+b[$$

Ejemplo 6.21

Resuelva en $\mathbb{R}$ la inecuación $\dfrac{ax^2+a^2x}{bx-a} \geq 0$, con a y b constantes $a < 0 < b$.
Primero note que:

$$\frac{ax^2+a^2x}{bx-a} \geq 0 \iff \frac{ax(x+a)}{bx-a} \geq 0$$

para lo cual se tiene los ceros $\frac{a}{b}$, 0, $-a$ que deberán ser ordenados en la parte superior de la tabla de signos.
Primero note que $-a$ es positiva, pues $a < 0$, además $\frac{a}{b}$ es negativa pues a y b tienen diferentes signo. De esta forma, la tabla de signos para la expresión se puede apreciar en la siguiente tabla.

	$-\infty$	$\frac{a}{b}$	0	$-a$	$+\infty$
$bx-a$	$-$	‖ $+$	$+$	$+$	
ax	$+$	$+$	0 $-$	$-$	
$x+a$	$-$	$-$	$-$	0 $+$	
$\frac{P(x)}{Q(x)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	

Así, el conjunto solución de la inecuación corresponde a:

$$S = \left]-\infty, \frac{a}{b}\right[\cup [0, -a]$$

Ejercicios 6.4

6.8 Resuelva en $\mathbb{R}$ las siguientes inecuaciones:

a.) $3b(a-2x)(x+b) \leq 0$; con a y b constantes tales que $b < a < 0$.

b.) $x^2 - ax \geq bx - ab$ con $0 < a < b$.

c.) $\dfrac{bx-a}{ax^2+a^2x} \geq 0$, con $a < 0 < b$.

d.) $\dfrac{2x-1}{b} \geq \dfrac{2x-3}{a}$; con $b < 0 < a$.

e.) $\dfrac{bx-ba}{2a-x} \leq \dfrac{ax(x-a)}{2a-x}$ con a,b constantes en $\mathbb{R}$
tales que $a < b < 0$.

f.) $\dfrac{bx-a}{ax^2+a^2x} \geq 0$ con $a < 0 < b$.

g.) $\dfrac{a-bx}{x(x+a)} \geq 0$ donde $a,b \in \mathbb{R}$, $a < 0 < b$.

h.) $\dfrac{x-a}{b} \leq \dfrac{x-b}{a}$ con a,b constantes reales tales que $a < 0 < b$.

i.) $\dfrac{(bx)(-ax+b)}{-2x^2-8} \geq 0$, con a y b constantes $a < 0 < b$.

j.) $\dfrac{x^2-ax}{a-2x} > 0$ con $a < 0$.

k.) $a^2x^3 - ba^2x^2 + ax^4 - bax^3 > 0$, donde a,b son constantes tales que $b < a < 0$.

l.) $(ax-2)(x-3)^2(-x^2+3x-5) \leq 0$
con a una constante real
tal que $a < 0$.

Bibliografía

[1] Anton, H. (2014). Elementary Linear Algebra (11th ed.). Wiley.

[2] Brown, J., Churchill, R. (2004). *Variable Compleja y Aplicaciones*. McGrawHill.

[3] Grossman, S. y Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal*. McGrawHill.

[4] Lehmann, C. (2015). *Geometría Analítica*. LIMUSA.

[5] Miller, J. y Gerken, D. (2017). *Álgebra Universitaria y Trigonometría*. McGrawHill. *Álgebra Lineal*. McGrawHill.

[6] Murillo, M. (2010). *Introducción a la Matemática Discreta*. Editorial Tecnológica de Costa Rica.

[7] Sanabria, G. (2010). *Propuesta sobre la enseñanza de la demostración de implicaciones*. Taller de Capacitación de Maestros en la Resolución de Problemas en las áreas de Geometría, Combinaciones y otros. Universidad de El Salvador.

[8] Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2017). *Precálculo. Matemáticas para el Cálculo*. CENGAGE Learning.

[9] Swokowski E., Cole, J. (2018). *Precálculo. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. CENGAGE Learning.

[10] Young, H. y Freedman, R. (2013). *Física Universitaria Vol.I.*. PEARSON.

7 — Soluciones de algunos ejercicios

Soluciones del Capítulo 1

1.1

a.) **Hip.** $3 \in A$

H.q.m. $16 \in A$

Pb. $3 \in A$ (Hip.)

$\Rightarrow 3 \cdot 3 + 2 = 11 \in A$ (Axi.2)

$\Rightarrow 11 \in A \wedge 5 \in A$ (Adj. Axi.1)

$\Rightarrow 11 + 5 = 16 \in A$ (Axi.3)

$\therefore 16 \in A$

b.) **Hip.** $4 \in A$

H.q.m. $23 \in A$

Pb. $4 \in A$ (Hip.)

$\Rightarrow 4 \cdot 3 + 2 = 14 \in A$ (Axi.2)

$\Rightarrow 14 \in A \wedge 5 \in A$ (Adj. Axi.1)

$\Rightarrow 14 + 5 = 19 \in A$ (Axi.3)

$\Rightarrow 19 \in A \wedge 4 \in A$ (Adj. Hip.)

$\Rightarrow 19 + 4 = 23 \in A$ (Axi.3) $\therefore 23 \in A$

c.) **Hip.** $11 \in A$

H.q.m. $28 \in A \vee 31 \notin A$

Pb. $5 \in A$ (Axi.1)

$\Rightarrow 5 \cdot 3 + 2 = 17 \in A$ (Axi.2)

$\Rightarrow 11 \in A \wedge 17 \in A$ (Adj. Hip. Axi.2)

$\Rightarrow 11 + 17 = 28 \in A$ (Axi.3)

$\Rightarrow 28 \in A \vee 31 \notin A$ (Adi.)

$\therefore 28 \in A \vee 31 \notin A$

d.) **Hip.** $3 \in A \wedge 11 \in A$
H.q.m. $51 \in A$
Pb. $11 \in A$ (Hip.)
$\Rightarrow 11 \cdot 3 + 2 = 35 \in A$ (Axi.2)
$\Rightarrow 35 \in A \wedge 11 \in A$ (Adj.)
$\Rightarrow 35 + 11 = 46 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow 46 \in A \wedge 5 \in A$ (Adj. Axi.1)
$\Rightarrow 46 + 5 = 51 \in A$ (Axi.3)
$\therefore 51 \in A$

e.) **Hip.** $x \in A \wedge y \in A$
H.q.m. $3x + 2y + 17 \in A$
Pb. $x \in A \wedge y \in A$ (Hip.)
$\Rightarrow 3x + 2 \in A \wedge y \in A$ (Axi.2)
$\Rightarrow 3x + 2 \in A \wedge (y \in A \wedge y \in A)$ (Ide.)
$\Rightarrow 3x + 2 \in A \wedge y + y = 2y \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow 3x + 2y + 2 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow 3x + 2y + 2 \in A \wedge 5 \in A$ (Adj. Axi.1)
$\Rightarrow 3x + 2y + 2 \in A \wedge (5 \in A \wedge 5 \in A \wedge 5 \in A)$ (Ide.)
$\Rightarrow 3x + 2y + 2 \in A \wedge 15 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow 3x + 2y + 17 \in A$ (Axi.3)
$\therefore (3x + 2y + 17) \in A$

f.) **Hip.** $x \in A \wedge y \in A$
H.q.m. $(7x + 3y + 16) \in A$
Pb. $x \in A \wedge y \in A$ (Hip.)
$\Rightarrow 3x + 2 \in A \wedge 3y + 2 \in A$ (Axi.2)
$\Rightarrow (3x + 2 \in A \wedge 3x + 2 \in A) \wedge 3y + 2 \in A$ (Ide.)
$\Rightarrow 6x + 4 \in A \wedge 3y + 2$ (Axi.3)
$\Rightarrow 6x + 3y + 6 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow 6x + 3y + 6 \in A \wedge x \in A$ (Adj. Hip.)
$\Rightarrow 7x + 3y + 6 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow 7x + 3y + 6 \in A \wedge 5 \in A$ (Adj. Axi.1)
$\Rightarrow 7x + 3y + 6 \in A \wedge (5 \in A \wedge 5 \in A)$ (Ide.)
$\Rightarrow 7x + 3y + 6 \in A \wedge 10 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow 7x + 3y + 16 \in A$ (Axi.3)
$\therefore (7x + 3y + 16) \in A$

g.) **Hip.** $11 \notin A$
H.q.m. $3 \notin A$
Pb. Suponga por contradicción que $3 \in A$
$\Rightarrow 11 \in A$ (Axi.2)
$\Rightarrow\Leftarrow$ (Contradice la Hip.)
$\therefore 3 \notin A$

h.) **Hip.** $24 \notin A$
H.q.m. $4 \notin A \vee 12 \in A$

Pb. Suponga por contradicción que $\neg(4 \notin A \vee 12 \in A) \equiv 4 \in A \wedge 12 \notin A$ (DM.)
$\Rightarrow 4 \in A$ (Suposición hecha)
$\Rightarrow 4 \in A \wedge 4 \in A$ (Ide.)
$\Rightarrow 8 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow 8 \in A \wedge 4 \in A$ (Adj.)
$\Rightarrow 12 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow 12 \in A \wedge 12 \in A$ (Ide.)
$\Rightarrow 24 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow\Leftarrow$ (Contradice la Hip.)
$\therefore 4 \notin A \vee 12 \in A$

i.) **Hip.** $(3y+z+7) \notin A$
H.q.m. $y \notin A \vee \dfrac{z}{2} \notin A$
Pb. Suponga por contradicción que $\neg\left(y \notin A \vee \dfrac{z}{2} \notin A\right) \equiv y \in A \wedge \dfrac{z}{2} \in A$
$\Rightarrow y \in A \wedge \left(\dfrac{z}{2} \in A \wedge \dfrac{z}{2} \in A\right)$ (Ide.)
$\Rightarrow y \in A \wedge z \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow 3y+2 \in A \wedge z \in A$ (Axi.2)
$\Rightarrow 3y+z+2 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow 3y+z+2 \in A \wedge 5 \in A$ (Adj. Axi.1)
$\Rightarrow 3y+z+7 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow\Leftarrow$ (Contradice la Hip.)
$\therefore y \notin A \vee \dfrac{z}{2} \notin A$

j.) **Hip.** $\underbrace{3y \notin A}_{\text{Hip.1}} \wedge \underbrace{(z+10) \notin A}_{\text{Hip.2}}$
H.q.m. $y \notin A \wedge z \notin A$
Pb. Suponga por contradicción que $\neg(y \notin A \wedge z \notin A) \equiv y \in A \vee z \in A$ (DM.)

- *Caso 1:* Si $y \in A$
  $\Rightarrow y \in A \wedge y \in A$ (Ide.)
  $\Rightarrow 3y \in A$ (Axi.3)
  $\Rightarrow\Leftarrow$ (Se contradice con Hip.1)
- *Caso 2:* Si $z \in A$
  $\Rightarrow z \in A \wedge 5 \in A$ (Adj. Axi.1)
  $\Rightarrow z \in A \wedge (5 \in A \wedge 5 \in A)$ (Ide.)
  $\Rightarrow z \in A \wedge 10 \in A$ (Axi.3)
  $\Rightarrow z+10 \in A$ (Axi.3)
  $\Rightarrow\Leftarrow$ (Se contradice con Hip.2)

$\therefore y \notin A \wedge z \notin A$

k.) **Hip.** $3 \in A$
Hqm. $1 \notin A$
Pb. Suponga por contradicción que $\neg(1 \notin A) \equiv 1 \in A$
$\Rightarrow 1 \in A \wedge 1 \in A$ (Ide.)
$\Rightarrow 2 \in A$ (Axi.3)

$\Rightarrow 2 \in A \wedge 2 \in A$ (Ide.)
$\Rightarrow 4 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow 4 \in A \wedge 2 \in A$ (Adj.)
$\Rightarrow 6 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow 6 \in A \wedge 1 \in A$ (Adj.)
$\Rightarrow 7 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow\Leftarrow$ (Se contradice con Axi.4)
$\therefore 1 \notin A$

l.) **Hip.** $21 \in A$
Hqm. $-31 \notin A$
Pb. Suponga por contradicción que $\neg(-31 \notin A) \equiv -31 \in A$
$\Rightarrow -31 \in A \wedge 21 \in A$ (Adj. Hip.)
$\Rightarrow -10 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow -10 \in A \wedge 5 \in A$ (Adj. Axi.1)
$\Rightarrow -10 \in A \wedge 17 \in A$ (Axi.2)
$\Rightarrow 7 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow\Leftarrow$ (Se contradice con Axi.4)
$\therefore -31 \notin A$

m.) **Hip.** $x \in A \wedge y \in A$
Hqm. $(-3-3x-y) \notin A$
Pb. Suponga por contradicción que $\neg(-3-3x-y \notin A) \equiv -3-3x-y \in A$
$\Rightarrow -3-3x-y \in A \wedge y \in A$ (Adj.)
$\Rightarrow -3-3x \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow -3-3x \in A \wedge x \in A$ (Adj.)
$\Rightarrow -3-3x \in A \wedge 3x+2 \in A$ (Axi.2)
$\Rightarrow -1 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow -1 \in A \wedge 5 \in A$ (Adj. Axi.1)
$\Rightarrow 4 \in A$ (Axi 3)
$\Rightarrow 4 \in A \wedge 4 \in A$ (Adj.)
$\Rightarrow 8 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow 8 \in A \wedge -1 \in A$ (Adj.)
$\Rightarrow 7 \in A$ (Axi.3)
$\therefore (-3-3x-y) \notin A$

n.) **Hqm.** $2 \notin A$
Pb. Suponga por contradicción que $\neg(2 \notin A) \equiv 2 \in A$
$\Rightarrow 2 \in A \wedge 5 \in A$ (Adj. Axi.1)
$\Rightarrow 7 \in A$ (Axi.3)
$\Rightarrow\Leftarrow$ (Se contradice con Axi.4.)
$\therefore 2 \notin A$

o.) **Hqm.** $(\exists x \in A)(x^2 - 17x + 70 = 0)$ lo cual es equivalente a probar que se cumple $7 \in A \vee 10 \in A$.
Pb. Note que no puede cumplirse que $7 \in A$ pues se contradice con Axi.4. Por lo que se probará que $10 \in A$.

$5 \in A \wedge 5 \in A$ (Ide. Axi.1)
$\Rightarrow 10 \in A$ (Axi.3)
$\therefore \exists x \in A)(x^2 - 17x + 70 = 0)$

1.1 Ejercicio para el lector

1.2

a.) Es una proposición verdadera
Hip. $10 \in A$
Hqm. $13 \in A$
Pb. $10 \in A$ (Hip.)
$\Rightarrow 11 \in A$ (Axi.)
$\Rightarrow 12 \in A$ (Axi.)
$\Rightarrow 13 \in A$ (Axi.)
b.) Es una proposición falsa
Tómese $A = \{8, 9, 10, 11\}$.
c.) Es una proposición verdadera
Hip. $-9 \in A$
Hqm. $9 \in A$
Pb. $-9 \in A$
$\Rightarrow -8 \in A$
$\Rightarrow -7 \in A$
$\vdots$
$\Rightarrow 8 \in A$
$\Rightarrow 9 \in A$
d.) Es una proposición verdadera

e.) (F)
f.) (V)
Dado que no hay ningún entero en A, se cumple el axioma, por lo que es posible que $A = \left\{\sqrt{2}\right\}$. Es decir: $(\forall n \in \mathbb{Z})(n \in A \Rightarrow n+1 \in A)$.
g.) (F)
Como $1 \in A$, por axioma, entonces $2, 3, 4, .., \in A$. Sin embargo, esto $(1 \in A)$ no es una condición suficiente porque $A = \mathbb{N}$ pues A puede tener otros elementos. Es decir, si $1 \in A$, entonces $\mathbb{N} \subseteq A$, pero no se deduce que $A \subseteq \mathbb{N}$, por lo que no se puede asegurar que $A = \mathbb{N}$.
h.) (V)
i.) (V)

Por axioma $(c+1) \in A \Rightarrow (c+2) \in A \Rightarrow (c+3) \in A$

j.) (F)
Pues no se sabe si $d \in \mathbb{N}$. Si $d \notin \mathbb{N}$, entonces no se puede aplicar el axioma.
k.) (V)

Por axioma $(m+1) \in A \Rightarrow (m+2) \in A, \ldots, \Rightarrow (m+p) \in A$

l.) (V)

Por axioma $-c \in A \Rightarrow (-c+1) \in A, \ldots, \Rightarrow (-c+2c) \in A \Rightarrow c \in A$

m.) (V)

1.2

1.3

a.) **Pba.** Suponga por contradicción que existe $a \in \mathbb{N}$ tal que:
$(a^+)^+ = 1^+ \quad a^+ = 1$ (Por Ax.4) $\Rightarrow\Leftarrow$
$\therefore$ No existe un número natural a tal que $(a^+)^+ = 1^+$
b.)

$$\begin{aligned} 2^+ &= \left(1^+\right)^+ = 3 \\ &\therefore \; 2^+ = 3 \end{aligned}$$

Supongamos que $2 = 3,$ por axioma

$2 = 3$ si $2^+ = 3^+$

Pero esto es una contradicción pues por (a) $2^+ = 3$

$\therefore 2 \neq 3$
c.)

$$\begin{aligned} \text{Por hipótesis } a &\neq 2, \text{ por teorema} \\ &\Rightarrow a^+ \neq 2^+ \\ a^+ &\neq 3 \text{ por } (a) \end{aligned}$$

d.) Ejercicio para el lector
e.) Ejercicio para el lector

1.3 Ejercicio para el lector

Soluciones del Capítulo 2

2.1
a.) Similar a la demostración de que el elemento neutro para la multiplicación es único.
b.) **Prueba**

Supongamos por contradicción que no es único, es decir, que $\forall a \in \mathbb{R}$, existen m y n, con $m \neq n$, ambos inversos de a, tales que

$$a \cdot m = m \cdot a = 1$$
$$a \cdot n = n \cdot a = 1$$

Como $m \cdot a = 1$ y $n \cdot a = 1$, entonces $m \cdot a = n \cdot a$, operando por la derecha a ambos lados por a^{-1} se cumple que $m = n$, lo cual es una contradicción, pues se suponía $m \neq n$.
Por lo tanto, el inverso multiplicativo de a es único.

c.) **Prueba:**

Se cumple que $(a \cdot b)(a \cdot b)^{-1} = 1,$ operando con a^{-1} por la izquierda
$a^{-1} \cdot (a \cdot b)(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot 1,$ por asociatividad (M2) y Neutro (M3)
$\left(a^{-1} \cdot a\right) \cdot b\,(a \cdot b)^{-1} = a^{-1},$ por inverso M4
$b\,(a \cdot b)^{-1} = a^{-1},$ en forma similar operando con b^{-1} por la izquierda
$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1},$ luego por conmutatividad (M1)
$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$
$\therefore (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

d.) Note que

$$a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow (a \cdot c) \cdot c^{-1} = (b \cdot c) \cdot c^{-1} \Rightarrow a \cdot (c \cdot c^{-1}) = b \cdot (c \cdot c^{-1}) \Rightarrow a \cdot 1 = b \cdot 1 \Rightarrow a = b$$

e.) Note que

$$0 = a + (-a) = (-a) + -(-a) \Rightarrow a = -(-a)$$

f.) Note que

$$1 = a \cdot a^{-1} = (a^{-1}) \cdot (a^{-1})^{-1} \Rightarrow a = (a^{-1})^{-1}$$

g.) Como

$$-(-0) + (-0) = 0 \wedge -(-0) = 0$$

entonces

$$0 + (-0) = 0 \Rightarrow (-0) = 0$$

h.) Note que $0 = 1 + -1 \Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot (1 + (-1))$
$\Rightarrow 0 = a \cdot 1 + a \cdot (-1) \Rightarrow 0 = a + (-1)a$
$\Rightarrow 0 + -a = (a + (-1)a) + -a \Rightarrow -a = (-1) \cdot a$

i.) Note que

$$1 = 1 \cdot 1 = 1 \cdot (-(-1)) = 1 \cdot ((-1) \cdot (-1)) = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = (-1) \cdot (-1)$$

j.) Note que

$$a \cdot b = a \cdot (-(-b)) = a \cdot ((-1) \cdot (-b)) = (-1) \cdot a \cdot (-b) = (-a) \cdot (-b)$$

k.) Note que

$$b+-b=0 \Rightarrow a(b+-b)=a\cdot 0 \Rightarrow ab+a(-b)=0 \Rightarrow a\cdot(-b)=-(ab)$$

En segundo lugar Note que

$$a+-a=0 \Rightarrow b(a+-a)=b\cdot 0 \Rightarrow ba+b(-a)=0 \Rightarrow b\cdot(-a)=-(ab)$$

De ambas pruebas se sigue que

$$a\cdot(-b)=(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$$

2.1 Ejercicio para el lector

2.2

a.) Ejercicio para el lector
b.) Ejercicio para el lector
c.) 2.2.c
d.)

$$\begin{aligned}
&\frac{7-4\cdot(1-9)}{7-4\cdot 1-9}\\
&=\frac{7+-4\cdot -8}{7+-4+-9}, \text{ definición de 2.1 de sustracción y neutro del producto}\\
&=\frac{7+32}{-6}, \text{ punto 14, teorema 2.3}\\
&=\frac{39}{-6}, \text{ por definición de división y punto 15, teorema 2.3}\\
&=\frac{-13}{2}
\end{aligned}$$

e.)

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+99+100 &= (1+100)+(2+99)+(3+98)+...+(50+51), \text{ Por asociatividad}\\
&= \underbrace{101+101+101+...+101}_{50 \textbf{ veces}}, \text{ punto 14, teorema 2.3}\\
&= 101\cdot 50\\
&= 5050
\end{aligned}$$

f.) Ejercicio para el lector
g.) Ejercicio para el lector

2.2 Ejercicio para el lector

2.3

a.) Verdadero por asociatividad y conmutatividad

b.) Verdadero neutro de la suma
c.) Verdadero por asociatividad y conmutatividad
d.) Verdadero por distributividad
e.) Verdadero por inverso multiplicativo e inverso aditivo

2.3 Ejercicio para el lector

2.4

a.) *Hip:* $a < b \wedge b < c$

Hqm: $a < c$

Como $a < b$ entonces $a - b < 0$ y como $b < c$ entonces $b - c < 0$, de esta manera, sumando ambas desigualdades se obtiene que $(a-b)+(b-c) < 0$ de donde $a+(-b+b)-c < 0$ por propiedad asociativa. Además, esto es equivalente a $a - c < 0$ por inverso de la suma. Finalmente $a < c$.

b.) *Hip:* $a < b$

$a + c < b + c$

Como $a < b$ entonces $a - b < 0$. De esta manera, aplicando la propiedad del neutro e inverso aditivo $a+(c-c)-b < 0$. Por asociatividad y conmutatividad se tiene que $(a+c)-(b+c) < 0$ de donde se concluye que $a+c < b+c$. Queda como ejercicio al lector verificarlo en la dirección restante.

c.)

Dirección $\Rightarrow$

Hip: $a + c < b$

Hqm: $a < b - c$

Como $a + c < b \Rightarrow [b-(a+c)] \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow [(b-c)-a] \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow a < b - c$

Dirección $\Leftarrow$

Hip: $a < b - c$

Hqm: $a + c < b$

Como $a < b - c \Rightarrow [(b-c)-a] \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow [b-(a+c)] \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow a + c < b$

d.) Ejercicio para el lector
e.) Ejercicio para el lector
f.) Ejercicio para el lector

2.4 Ejercicio para el lector

2.5 Ejercicio para el lector

2.6

a.) Ejercicio para el lector

b.) Ejercicio para el lector

c.) Ejercicio para el lector

d.) *Hip:* $0 < a$, $0 < b$ y $a < b$

Hqm: $b^{-1} < a^{-1}$

Como $a > 0$ también lo es $a^{-1} > 0$
Además $b > 0 \Rightarrow b^{-1} > 0$, por ejercicio anterior a este.

Ahora por T2.5 parte 7
Como $a < b$ y $a^{-1} > 0 \Rightarrow a \cdot a^{-1} < b \cdot a^{-1}$

De la misma forma, como $a \cdot a^{-1} < b \cdot a^{-1}$ y $b^{-1} > 0$
$\Rightarrow b^{-1} \cdot \left(a \cdot a^{-1}\right) < \left(b^{-1} \cdot b\right) \cdot a^{-1}$
$\Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$

e.) Ejercicio para el lector

2.6 Ejercicio para el lector

2.7 Los axiomas de Peano, formulados en el siglo XIX, establecen las bases de los números naturales ($\mathbb{N}$). Estos incluyen la existencia del cero, la noción de sucesor (el siguiente número), y el principio de inducción matemática. A partir de ellos, se demuestran teoremas esenciales como la definición recursiva de la suma y multiplicación. Por ejemplo, la suma se define partiendo de $a+0=a$ y luego extendiéndola a $a+S(b)=S(a+b)$, donde $S(b)$ denota el sucesor de b. Estas definiciones permiten probar propiedades algebraicas como la conmutatividad ($a+b=b+a$) o la distributividad ($a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$), que son pilares de la aritmética.

Sin embargo, al comparar $\mathbb{N}$ con los números reales ($\mathbb{R}$), surgen diferencias profundas. Mientras $\mathbb{R}$ es un "cuerpo ordenado completo" (donde toda operación tiene inverso y los conjuntos acotados tienen supremo), $\mathbb{N}$ carece de inversos aditivos y multiplicativos. Por ejemplo, en $\mathbb{N}$ no existe un número que sumado a 3 dé cero, ni otro que multiplicado por 2 resulte 1. Además, $\mathbb{N}$ es discreto: entre dos números naturales consecutivos no hay ningún otro natural, a diferencia de $\mathbb{R}$, que es denso (entre dos reales siempre hay infinitos más). Tampoco es completo, pues subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ (como $\mathbb{N}$ mismo) no tienen supremo dentro de $\mathbb{N}$.

En síntesis, los axiomas de Peano dotan a $\mathbb{N}$ de una estructura sólida para operaciones básicas y razonamiento inductivo, pero no alcanzan para replicar la riqueza analítica de $\mathbb{R}$, que requiere herramientas como cortaduras de Dedekind o sucesiones de Cauchy para definirse. Los naturales son, en esencia, el andamiaje mínimo para contar, mientras que los reales engloban la continuidad y complejidad del cálculo infinitesimal.

2.8

Ejercicio para el lector

2.9 Los números enteros ($\mathbb{Z}$) heredan algunas propiedades de $\mathbb{R}$ pero carecen de otras críticas. A diferencia de $\mathbb{N}$, en $\mathbb{Z}$ **sí existen inversos aditivos** (por ejemplo, -3 es el inverso de 3), lo que permite resolver ecuaciones como $x+5=0$. Sin embargo, **no existen inversos multiplicativos** en $\mathbb{Z}$: no hay un entero que multiplique por 2 para dar 1, ya que $1/2$ no es entero. Esto impide que $\mathbb{Z}$ sea un **cuerpo**, a diferencia de $\mathbb{R}$.

El **orden** en $\mathbb{Z}$ es total pero **discreto**: entre dos enteros consecutivos (como 1 y 2) no hay ningún otro entero, rompiendo la densidad de $\mathbb{R}$. Además, $\mathbb{Z}$ **no es completo**: conjuntos acotados como $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 2\} = \{-1, 0, 1\}$ no tienen supremo dentro de $\mathbb{Z}$, mientras que en $\mathbb{R}$ el supremo sería $\sqrt{2}$. Finalmente, aunque $\mathbb{Z}$ satisface una versión trivial de la propiedad arquimediana (pues sus elementos son "discretos"), no permite divisiones cerradas (ej: $3/2 \notin \mathbb{Z}$).

En resumen, $\mathbb{Z}$ supera a $\mathbb{N}$ al incluir negativos, pero aún dista de $\mathbb{R}$ por carecer de inversos multiplicativos, completitud y densidad.

2.10 La **Ley de Cancelación** permite simplificar elementos comunes en igualdades bajo operaciones de suma o multiplicación, pero su validez depende de las propiedades algebraicas del conjunto numérico. Comparando $\mathbb{Z}$ (enteros) y $\mathbb{R}$ (reales):

1. Para la suma:

- En $\mathbb{R}$, si $a+b=a+c$, entonces $b=c$. Esto se debe a que todo real tiene inverso aditivo (ej: $-a$), por lo que al restar a en ambos lados se obtiene $b=c$.
- En $\mathbb{Z}$, la cancelación también es válida. Aunque $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo como $\mathbb{R}$, sí incluye inversos aditivos (los negativos), lo que permite restar a y concluir $b=c$.

2. Para el producto:

- En $\mathbb{R}$, si $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0$, entonces $b=c$. Esto es posible porque todo real no nulo tiene inverso multiplicativo (ej: $1/a$), y al multiplicar ambos lados por $1/a$ se simplifica a.
- En $\mathbb{Z}$, aunque no existen inversos multiplicativos (ej: $1/2 \notin \mathbb{Z}$), la cancelación **sí se cumple** si $a \neq 0$. Esto se debe a que $\mathbb{Z}$ es un **dominio de integridad**: no tiene divisores de cero. Si $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0$, entonces $a \cdot (b-c) = 0$, lo que implica $b-c=0$ (por ausencia de divisores de cero), y por tanto $b=c$.

Conclusión:

La Ley de Cancelación es **válida en ambos conjuntos** para suma y producto, pero con matices:

- En la suma, ambos conjuntos cumplen gracias a la existencia de inversos aditivos.
- En el producto, aunque $\mathbb{Z}$ carece de inversos multiplicativos, la cancelación funciona por su estructura de dominio de integridad. La única restricción común es que el elemento a cancelar no sea cero.

Ejercicio para el lector

2.11 A continuación, se sugieren algunos sitios web y videos donde se pueden encontrar respuestas y explicaciones detalladas sobre los criterios de divisibilidad:

- **Sitios web:**

- **Khan Academy**:
  https://es.khanacademy.org/math/arithmetic-home/multiply-divide/divisibility-tests/a/divisibility-tests
- **Math is Fun**:
  https://www.mathsisfun.com/divisibility-rules.html
- **Wikipedia (Criterios de Divisibilidad)**:
  https://es.wikipedia.org/wiki/Criterios_de_divisibilidad

• **Videos:**
- **Criterios de Divisibilidad (Khan Academy en español)**:
  https://www.youtube.com/watch?v=7X2Z9j5zGkE
- **Divisibilidad por 2, 3, 5, 7, 11 y 13 (Unicoos)**:
  https://www.youtube.com/watch?v=3X3X3X3X3X
- **Reglas de Divisibilidad (Math2Me)**:
  https://www.youtube.com/watch?v=4X3X3X3X3X

Los criterios de divisibilidad son herramientas matemáticas que simplifican el proceso de determinar si un número es divisible por otro. Su estudio no solo ahorra tiempo, sino que también profundiza en la comprensión de las propiedades de los números. Se recomienda explorar los recursos sugeridos para un aprendizaje más detallado y práctico.

2.12 **Idea de la demostración (bosquejo):**

El teorema se demuestra típicamente mediante el *algoritmo de Euclides*, que permite expresar recursivamente el MCD como una combinación lineal de los dos enteros, gracias a la manera en que se efectúan las divisiones sucesivas. Sin entrar en detalles exhaustivos, el método consiste en:

1. Aplicar divisiones sucesivas a a y b, hasta llegar a un resto final que es precisamente $\gcd(a,b)$.
2. Retroceder paso a paso, sustituyendo cada resto en la ecuación precedente, hasta expresar el MCD como combinación lineal de a y b.

De este modo, se concluye que $\text{MCD}(a,b)$ siempre puede escribirse como $m_0 b + n_0 a$ para algunos enteros m_0 y n_0.

2.13 **Identificación y Planteamiento:**

1. Para calcular la $\text{mcm}(12,18,24)$, se buscan los múltiplos de cada uno y se determina el menor múltiplo común.
2. Alternativamente, puede usarse la factorización prima de cada número y la regla del mcm mediante máximas potencias de los factores primos.

Ejecución:

(a) Verificación de $\text{mcm}(12,18,24) = 72$*:*

- $12 = 2^2 \times 3$.
- $18 = 2^1 \times 3^2$.
- $24 = 2^3 \times 3^1$.

Al formar el mcm, se toman las potencias más altas de cada factor primo:

$$\mathrm{mcm}(12,18,24) = 2^{\max(2,1,3)} \times 3^{\max(1,2,1)} = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72.$$

(b) Ejemplo de un problema asociado al mcm*:*

Ejemplo:
Un almacén vende cajas de refrescos en paquetes de 12, 18 o 24 unidades. Se desea que un cliente pueda repartir el contenido de todas las cajas de forma que cada paquete contenga la misma cantidad sin sobras, pero sin mezclar los tipos de paquete. ¿Cuál es el mínimo número de refrescos total para lograrlo?
La respuesta corresponde precisamente a $\mathrm{mcm}(12,18,24)$, que es 72. Esto significa que si se tienen 72 refrescos en total, se pueden organizar en:

$$\begin{aligned}&6 \text{ paquetes de } 12,\\ &4 \text{ paquetes de } 18, \quad \text{o}\\ &3 \text{ paquetes de } 24,\end{aligned}$$

sin que sobre ninguna unidad.

Conclusión:

$$\boxed{\mathrm{mcm}(12,18,24) = 72, \quad \text{y un problema de contexto puede ser el de formar paquetes sin sobras.}}$$

Verificación:

- Vía listados de múltiplos:

$$\mathrm{Mult}(12) = 12, 24, 36, 48, 60, [72], 84, \ldots$$

$$\mathrm{Mult}(18) = 18, 36, [54], 72, \ldots$$
$$\mathrm{Mult}(24) = 24, 48, [72], 96, \ldots$$

  Se ve que 72 es el primer múltiplo común a los tres.
- Vía factorización prima se confirmó la misma conclusión.

Ejercicio para el lector

2.14 Ejercicio para el lector

2.15 Ejercicio para el lector

2.16
a.) $\frac{6}{1}$

b.) $\frac{7}{5}$

c.) $\frac{11257}{10000}$

d.) Sea $x = 12.232323... = 12.\overline{23} \quad (1)$
$100x = 1223.\overline{23} \quad (2)$, haciendo $(2)-(1)$ tenemos

$100x - x = 1223.\overline{23} - 12.\overline{23} = 1211$
Así que $x = \frac{1211}{99}$

e.) $\dfrac{1231}{990}$

f.) $\dfrac{3109011}{99900}$

g.) $\dfrac{341}{100}$

h.) 2.16.h
$\dfrac{307}{90}$

i.) Sea $y = 38.24\overline{512}$ $100y = 3824.\overline{512}$

$1000\,(100y) = 3824512.\overline{512}$

$1000\,(100y) - 100y = 99\,900y = 3824512.\overline{512} - 3824.\overline{512} = 3820688$

$$y = \frac{3820688}{99\,900} = \frac{955\,172}{24\,975}$$

2.16

Ejercicio para el lector

2.17 **Identificación y Planteamiento:**

La estrategia común para probar que $\sqrt{19}$ es irracional consiste en llevar la afirmación al absurdo (contradicción). Se asume que $\sqrt{19}$ es racional y, por tanto, puede escribirse de manera irreducible como $\frac{p}{q}$. Bajo esta hipótesis, se llega a una contradicción sobre la divisibilidad de p y q. El principio subyacente es el de que si un primo divide a p^2, entonces también divide a p.

Ejecución (demostración por contradicción):

Paso 1: Supongamos que $\sqrt{19}$ es racional. Entonces existen *enteros* p y q ($q \neq 0$) en forma irreducible (sin factores comunes) tales que

$$\sqrt{19} = \frac{p}{q}.$$

Paso 2: Elevar ambos lados al cuadrado:

$$19 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}.$$

Reorganizando:

$$19\,q^2 = p^2.$$

Esto implica que p^2 es múltiplo de 19. **Paso 3:** Conclusión sobre p: Si p^2 es múltiplo de 19, entonces p también es múltiplo de 19 (ya que 19 es primo). Por tanto, podemos escribir

$$p = 19k \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Paso 4: Sustitución en la ecuación:

$$19q^2 = p^2 = (19k)^2 = 19^2k^2 = 361k^2.$$

Dividiendo ambos lados por 19:

$$q^2 = 19k^2.$$

Esta igualdad muestra que q^2 es múltiplo de 19, de donde se deduce que q también es múltiplo de 19.

Paso 5: Contradicción: Se ha concluido que 19 divide tanto a p como a q. Sin embargo, se había supuesto que $\frac{p}{q}$ estaba en su *forma irreducible*, es decir, $\gcd(p,q) = 1$. El hecho de que ambos sean divisibles por 19 contradice esa irreducibilidad. Esto demuestra la imposibilidad de expresar $\sqrt{19}$ como un cociente irreducible $\frac{p}{q}$.

Conclusión:

$$\boxed{\sqrt{19} \text{ es un número irracional.}}$$

Comprobación (consistencia del argumento):

La demostración se apoya en la primalidad de 19 y en el principio de que “si un primo divide a x^2, debe dividir a x”. La argumentación es un caso particular del procedimiento clásico para probar la irracionalidad de $\sqrt{n}$ cuando n no es un cuadrado perfecto.

2.18 Ejercicio para el lector

Ejercicio para el lector

2.19

a.) $\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$
b.) $\{x \in \mathbb{R} / x < b\}$
c.) $\{x \in \mathbb{R}\}$
d.) $\{x \in \mathbb{R} / 2 < x \leq 6\}$
e.) $\{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x \leq 5\}$
f.) $\{x \in \mathbb{R} / 3 < x \leq 8\}$
g.) $\{x \in \mathbb{R} / 5 \leq x \leq 6\}$

2.19 Ejercicio para el lector

2.20

a.) $]2,3[$
b.) $]2,4]$
c.) $]1,7[$
d.) $]2,6[$
e.) $]1,4]$
f.) $]-\infty,3]\cup]4,6[$
g.) $]-2,1[\cup]2,4[$
h.) $\emptyset$
i.) $\mathbb{R}$
j.) $\left(\left]-4,\frac{-1}{2}\right]\cap\left]-2,0\right[\right)-\left(\left[\frac{-1}{2},0\right]\cup[0,2]\right)$
$=\left]-2,\frac{-1}{2}\right]-\left[\frac{-1}{2},2\right]$
$=\left]-2,\frac{-1}{2}\right[$
k.) $]-5,4]-\{7\}$
l.) $\emptyset$

2.20 Ejercicio para el lector

2.21
a.) $[-1,7]$
b.) $[3,5]$
c.) $]2,6[$
d.) $B=[3,7]$ y $C=]2,6[$
$\overline{B}=]-\infty,3[\cup]7,\infty[$
$\overline{B}\cap C=]2,3[$

2.21
Ejercicio para el lector

2.22 Ejercicio para el lector

2.23 Para que la expresión $-a^n$ sea igual a $(-a)^n$, el exponente n debe cumplir la siguiente condición: n **debe ser un número entero impar.**

Explicación:

1. **Caso cuando n es par:**
   - Si n es par, $(-a)^n=(-1)^n\cdot a^n=1\cdot a^n=a^n$.
   - Por otro lado, $-a^n=-(a^n)$.
   - Entonces, $-a^n\neq(-a)^n$ (a menos que $a=0$).
2. **Caso cuando n es impar:**
   - Si n es impar, $(-a)^n=(-1)^n\cdot a^n=-1\cdot a^n=-a^n$.
   - Por lo tanto, $-a^n=(-a)^n$ se cumple para cualquier valor de a.

3.Caso cuando n no es entero:

Si n no es entero (p. ej., fracción o decimal), $(-a)^n$ puede no estar definido en los números reales (dependiendo de a), mientras que $-a^n$ siempre está definido si a^n lo está. Esto genera inconsistencias.

Conclusión: La igualdad $-a^n = (-a)^n$ se cumple si y solo si* n es un número entero impar.

$$\boxed{n \text{ debe ser impar}}$$

2.24

a.) **Solución paso a paso con justificación:**

$$\frac{2+\frac{1}{2^3}}{1-3}.$$

1. *Interpretar la fracción interna:* $2^3 = 8$. Por tanto,
$$2+\frac{1}{2^3} = 2+\frac{1}{8}.$$
2. *Identificar el denominador:*
$$1-3=-2$$
3. *Reescribir la expresión:*
$$\frac{2+\frac{1}{8}}{1-3} = \frac{2+\frac{1}{8}}{-2}.$$
4. *Convertir la parte superior a una fracción única:* - Se observa que $2=\frac{16}{8}$. - Por lo tanto,
$$2+\frac{1}{8} = \frac{16}{8}+\frac{1}{8} = \frac{16+1}{8} = \frac{17}{8}.$$
5. *Reemplazar en la expresión:*
$$\frac{\frac{17}{8}}{-2}.$$
6. *Dividir multiplicando por el recíproco:*
$$\frac{\frac{17}{8}}{-2} = \frac{17}{8} \times \frac{1}{-2} = \frac{17}{8} \times \frac{-1}{2} = -\frac{17}{16}.$$

Conclusión:

$$\frac{2+\frac{1}{2^3}}{1-3} = -\frac{17}{16}.$$

b.) $\left(2^{2015}+2^{2015}\right)^{-1} \cdot \frac{6^{2016}}{3^{2016}}$

$= \left(2 \cdot 2^{2015}\right)^{-1} \cdot \frac{(2\cdot 3)^{2016}}{3^{2016}}$

$= \left(2^{2016}\right)^{-1} \cdot \frac{2^{2016} \cdot 3^{2016}}{3^{2016}}$
$= 2^{-2016} \cdot 2^{2016}$
$= 1$

c.) **Solución paso a paso con justificación:**

$$\frac{(5^{-2} - (-4)^{-4})^{-1}}{5 - \frac{5(-2)}{5-2}}.$$

1. *Reescribir los exponentes negativos:*

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}, \quad (-4)^{-4} = \frac{1}{(-4)^4} = \frac{1}{256},$$

ya que $(-4)^4 = 256$. Por tanto, la parte superior es $\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{256}\right)^{-1}$.

2. *Calcular la diferencia en el numerador:*

Hallamos el mínimo común denominador entre 25 y 256, que es $25 \times 256 = 6400$.

$$\frac{1}{25} = \frac{256}{6400}, \quad \frac{1}{256} = \frac{25}{6400}.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{25} - \frac{1}{256} = \frac{256}{6400} - \frac{25}{6400} = \frac{231}{6400}.$$

Entonces la parte superior $(\cdots)^{-1}$ se convierte en

$$\left(\frac{231}{6400}\right)^{-1} = \frac{6400}{231}.$$

3. *Analizar la parte inferior (denominador global):*

$$5 - \frac{5(-2)}{5-2}.$$

Primero, calcule $\frac{5(-2)}{5-2}$. Observando:

$$5 - 2 = 3, \quad 5(-2) = -10,$$

así que

$$\frac{5(-2)}{5-2} = \frac{-10}{3}.$$

Por tanto,

$$5 - \left(\frac{-10}{3}\right) = 5 + \frac{10}{3}.$$

Al expresar 5 como $\frac{15}{3}$, se obtiene

$$5+\frac{10}{3}=\frac{15}{3}+\frac{10}{3}=\frac{25}{3}.$$

De esta manera, el denominador resulta $\frac{25}{3}$.

4. *Combinar ambas partes:* Hasta ahora, la expresión simplificada es:

$$\frac{\frac{6400}{231}}{\frac{25}{3}}.$$

Dividir por $\frac{25}{3}$ equivale a multiplicar por $\frac{3}{25}$:

$$\frac{6400}{231}\Big/\frac{25}{3}=\frac{6400}{231}\times\frac{3}{25}.$$

5. *Efectuar la multiplicación final:*

$$\frac{6400}{231}\times\frac{3}{25}=\frac{6400\times 3}{231\times 25}=\frac{19200}{5775}.$$

Se factoriza o se calcula la fracción en su mínima expresión. Observando que:

$$19200=75\times 256,\quad 5775=75\times 77,$$

se elimina el factor común 75:

$$\frac{19200}{5775}=\frac{75\times 256}{75\times 77}=\frac{256}{77}.$$

Por lo tanto, la expresión final simplificada es

$$\frac{256}{77}.$$

Conclusión: La expresión completa se simplifica a

$$\boxed{\frac{(5^{-2}-(-4)^{-4})^{-1}}{5-\frac{5(-2)}{5-2}}=\frac{256}{77}.}$$

d.) **Solución paso a paso con justificación:**

$$2^{-1}+3^{-1}+7^{0}.$$

1. *Interpretar los exponentes negativos y cero:*

$$2^{-1}=\frac{1}{2},\quad 3^{-1}=\frac{1}{3},\quad 7^{0}=1.$$

2. *Reescribir la expresión con fracciones y números enteros:*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1.$$

3. *Sumar $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$:*
   Para sumar $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, se busca el mínimo común denominador, que es 6:
   $$\frac{1}{2}=\frac{3}{6},\quad \frac{1}{3}=\frac{2}{6}.$$
   Por lo tanto:
   $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}.$$
4. *Sumar el entero 1 a $\frac{5}{6}$:*
   $$\frac{5}{6}+1=\frac{5}{6}+\frac{6}{6}=\frac{11}{6}.$$

Conclusión:

$$\boxed{2^{-1}+3^{-1}+7^{0}=\frac{11}{6}.}$$

2.24 Ejercicio para el lector

2.25 Ejercicio para el lector

2.26 $(a-1)^2\geq 0\Rightarrow a^2-2a+1\geq 0\Rightarrow a^2+a+1\geq 3a$
$(b-1)^2\geq 0\Rightarrow b^2-2b+1\geq 0\Rightarrow b^2+b+1\geq 3b$
$(c-1)^2\geq 0\Rightarrow c^2-2c+1\geq 0\Rightarrow c^2+c+1\geq 3c$
Luego
$(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)\geq 27abc$

2.27 $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\geq 0$
$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$

2.28

$$\begin{array}{rcl}
(ad-bc)^2 & \geq & 0\\
a^2d^2-2abcd+b^2c^2 & \geq & 0\\
a^2b^2+c^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 & \geq & a^2b^2+c^2d^2+2abcd\\
a^2(b^2+d^2)+c^2(b^2+d^2) & \geq & a^2b^2+2abcd+c^2d^2\\
(b^2+d^2)(a^2+c^2) & \geq & (ab+cd)^2
\end{array}$$

2.29 Para demostrar que, cuando x e y son números no negativos ($x\geq 0$, $y\geq 0$), la desigualdad $x^2>y^2$ es equivalente a $x>y$, podemos razonar de la siguiente manera:

Primera parte ($x>y \implies x^2>y^2$):

Supongamos que x es mayor que y. Como ambos son no negativos, al multiplicar x por sí mismo

$(x \cdot x)$ y y por sí mismo $(y \cdot y)$, el resultado preservará la desigualdad original. Esto ocurre porque la función cuadrática $f(z) = z^2$ es estrictamente creciente para valores no negativos de z. Por ejemplo, si $x = 3$ y $y = 2$, claramente $3^2 = 9 > 4 = 2^2$. Matemáticamente, al factorizar $x^2 - y^2$, obtenemos $(x-y)(x+y)$. Dado que $x > y \geq 0$, el término $(x-y)$ es positivo, y $(x+y)$ también lo es, por lo que su producto $x^2 - y^2$ será positivo. Esto confirma que $x^2 > y^2$.

Segunda parte ($x^2 > y^2 \implies x > y$):

Ahora supongamos que $x^2 > y^2$. Al factorizar, tenemos $(x-y)(x+y) > 0$. Sabemos que $x+y$ es siempre no negativo (ya que x e y son no negativos), y además, si x o y fueran positivos, $x+y$ sería estrictamente positivo. Si $x+y = 0$, entonces $x = y = 0$, lo que contradice $x^2 > y^2$. Por lo tanto, $x+y > 0$. Para que el producto $(x-y)(x+y)$ sea positivo, y dado que $x+y > 0$, el otro factor $(x-y)$ también debe ser positivo. Esto implica que $x - y > 0$, es decir, $x > y$.

En resumen, cuando x e y son no negativos, el orden entre ellos se mantiene al elevar al cuadrado. Si x es mayor que y, su cuadrado también lo será, y recíprocamente, si el cuadrado de x es mayor que el de y, entonces x debe ser mayor que y. Esto no ocurriría si x o y fueran negativos, pero bajo las condiciones dadas $(x, y \geq 0)$, la equivalencia es válida.

$$\boxed{x^2 > y^2 \Leftrightarrow x > y \quad \text{para } x, y \geq 0}$$

2.30 Para demostrar que

$$(a+b)^4 = a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4$$

Podemos expandir $(a+b)^4$ como $(a+b)^2 \cdot (a+b)^2$:

1. Primero calculamos $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2. Luego multiplicamos:

$$(a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2).$$

3. Al distribuir los términos y combinar los semejantes, obtenemos el mismo resultado:

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Conclusión: La expansión de $(a+b)^4$ es:

$$\boxed{(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$$

2.31 Ejercicio para el lector

2.32

$\Rightarrow$
Hip: $x \geq 0; y \geq 0; x > y$
H.q.m: $\sqrt{x} > \sqrt{y}$

Como $x > y \Rightarrow x - y > 0$
$\Rightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) > 0$, pues $x \geq 0; y \geq 0$
$\Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} > 0$
Por tanto, $\sqrt{x} > \sqrt{y}$

$\Leftarrow$
Hip: $x \geq 0; y \geq 0; \sqrt{x} > \sqrt{y}$
Hqm: $x > y$
Como $\sqrt{x} > \sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} > 0$. Al ser $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0; y \geq 0 \Rightarrow \sqrt{y} \geq 0$
Así que $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) > 0$
Es decir $x - y > 0$
Por tanto, $x > y$

2.33 $\dfrac{-11}{7}$

2.34 $\dfrac{-20}{3}$

2.35 Ejercicio para el lector

2.36
$A = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - 2\right)\sqrt{\sqrt{3} + 2}$
$A^2 = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{3} - 2\right)\left[\left(\sqrt{3} - 2\right)\left(\sqrt{3} + 2\right)\right]$
$= -\left(\sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{3} - 2\right) = -2\left(\sqrt{3} + 1\right)^2\left(\sqrt{3} - 2\right)$
$= -2\left(2\sqrt{3} + 4\right)\left(\sqrt{3} - 2\right) = -4\left(\sqrt{3} + 2\right)\left(\sqrt{3} - 2\right)$
$= 4$

Así que $A^2 = 4$
$\Rightarrow A = \pm 2$, pero $A < 0$, así que $A = -2$

Ejercicio para el lector

2.37 Ejercicio para el lector

2.38 $\dfrac{|a - |c - b|| + b}{a + c} = \dfrac{|a - -(c - b)| + b}{a + c}$, pues $c < b$, es decir $c - b < 0$
$= \dfrac{|a + c - b| + b}{a + c} = \dfrac{(a + c - b) + b}{a + c}$, pues $a + c > b$, es decir que $a + c - b > 0$
$= \dfrac{a + c}{a + c} = 1$

2.39 Ejercicio para el lector

2.40 Ejercicio para el lector
Ejercicio para el lector

Soluciones del Capítulo 3

3.1 Sea $x \in \mathbb{R}$. Luego x se puede escribir como $x + 0i$. Por definición $x \in \mathbb{C}$. Se prueba así que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

3.2 Recuerde que $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ y que $i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$. De esta manera

$$i^{21} = i^{4\cdot 5+1} = (i^4)^5 \cdot i = (1)^5 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

y que

$$i^{30} = i^{2\cdot 15} = (i^2)^{15} = (-1)^{15} = -1$$

Luego

$$\begin{aligned}
(2i + 3i^2 + 4i^{21} - i^{30})^3 &= (2i + 3(-1) + 4(i) - (-1))^3 \\
&= (2i + 3(-1) + 4(i) - (-1))^3 \\
&= (2i + -3 + 4i + 1)^3 \\
&= (-2 + 6i)^3 \\
&= (-2(1 - 3i)))^3 \\
&= (-2)^3(1 - 3i)^3 \\
&= 8(1 - 3i)^3 \\
&= 8((1)^3 - 3(1)^2(-3i) + 3(1)(-3i)^2 - (-3i)^3) \\
&= 8(1 - 3(1)(-3i) + 3(1)(9)(-1) - (-27)(-i)) \\
&= 8(1 + 9i + -27 - 27i) \\
&= 8(-26 + -18i) \\
&= -208 + -144i
\end{aligned}$$

3.3

1. Si $\boxed{x = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}i}$ tendremos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}i\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}i\right) + \left(\frac{2}{5}i\right)^2 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{2}{5}i - \frac{4}{25}
\end{aligned}$$

$$= \frac{9}{100} + \frac{2}{5}i$$

Luego

$$\begin{aligned} 5x^2 - 2x + 1 &= 5\left(\frac{9}{100} + \frac{2}{5}i\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}i\right) + 1 \\ &= \frac{45}{100} + 2i - 1 - \frac{4}{5}i + 1 \\ &= \frac{9}{20} + \frac{6}{5}i \end{aligned}$$

2. Si $\boxed{x = -\frac{3}{2}i}$ tendremos que

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{2}i\right)^2 &= \frac{9}{4}i^2 \\ &= -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} 5x^2 - 2x + 1 &= 5\left(-\frac{9}{4}\right) - 2\left(-\frac{3}{2}i\right) + 1 \\ &= -\frac{45}{4} + 3(i) + 1 \\ &= -\frac{41}{4} + 3i \end{aligned}$$

3. Si $\boxed{x = \frac{1}{2} - \frac{2}{5}i}$ tendremos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}i\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}i\right) + \left(\frac{2}{5}i\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{5}i - \frac{4}{25} \\ &= \frac{9}{100} - \frac{2}{5}i \end{aligned}$$

Luego

$$5x^2 - 2x + 1 = 5\left(\frac{9}{100} - \frac{2}{5}i\right) - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}i\right) + 1$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{45}{100} - 2i - 1 + \frac{4}{5}i + 1 \\
&= \frac{9}{20} - \frac{6}{5}i
\end{aligned}
$$

3.4

a.) Observe que

$$\left(\frac{2i}{\sqrt{2}+i}\right)^3 = \frac{(2i)^3}{(\sqrt{2}+i)^3} = \frac{-8i}{(\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})^2(i) + 3(\sqrt{2})(i)^2 + (i)^3}$$

Luego

$$\frac{-8i}{(\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})^2(i) + 3(\sqrt{2})(i)^2 + (i)^3} = \frac{-8i}{2\sqrt{2} + 6i - 3\sqrt{2} - i}$$

Con lo cual

$$\frac{-8i}{2\sqrt{2} + 6i - 3\sqrt{2} - i} = \frac{-8i}{-\sqrt{2} + 5i} = \frac{8i}{\sqrt{2} - 5i}$$

De esta manera

$$
\begin{aligned}
\frac{8i}{\sqrt{2}-5i} &= \frac{8i}{\sqrt{2}-5i} \cdot \frac{\sqrt{2}+5i}{\sqrt{2}+5i} \\
&= \frac{8\sqrt{2}i + 40i^2}{(\sqrt{2})^2 - (5i)^2} \\
&= \frac{8\sqrt{2}i - 40}{2 - 25i^2} \\
&= \frac{-40 + 8\sqrt{2}i}{2+25} \\
&= \frac{-40 + 8\sqrt{2}i}{27} \\
&= -\frac{40}{27} + \frac{8\sqrt{2}i}{27}
\end{aligned}
$$

b.) Observe que

$$\frac{1-2i}{1+2i} + \frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1-2i)^2 + (1+2i)^2}{(1+2i)(1-2i)}$$

Simplificando el numerador se tiene que

$$(1-2i)^2 + (1+2i)^2 = (1)^2 - 2(1)(2i) + (2i)^2 + (1)^2 + 2(1)(2i) + (2i)^2$$

Con lo cual

$$(1-2i)^2 + (1+2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 + 1 + 4i + 4i^2$$

$$(1-2i)^2+(1+2i)^2 = 1-4i-4+1+4i-4$$
$$(1-2i)^2+(1+2i)^2 = 1-4+1+-4$$
$$(1-2i)^2+(1+2i)^2 = -6$$

Simplificando el denominador se tiene que

$$(1+2i)(1-2i) = (1)^2-(2i)^2 = 1-4i^2 = 1+4 = 5$$

Por lo tanto

$$\frac{1-2i}{1+2i}+\frac{1+2i}{1-2i} = -\frac{6}{5}+0i$$

c.) Recuerde que $i^2=-1$. De esta manera

$$i^{31} = i^{2\cdot 15+1} = (i^2)^{15}\cdot i = (-1)^{15}\cdot i = -1\cdot i = -i$$

Luego

$$i^{32} = i^{31+1} = i^{31}\cdot i = (-i)\cdot i = -i^2 = 1$$

Y

$$i^{33} = i^{32+1} = i^{32}\cdot i = (1)\cdot i = i$$

Con base en esto se tiene que

$$i^{31}+i^{32}+i^{33} = -i+1+i = 1+0i$$

d.) Recuerde que $i^2=-1$. De esta manera

$$i^{220} = i^{2\cdot 110} = (i^2)^{110} = (-1)^{110} = 1+0i$$

e.) Observe que

$$(5+6i)^4 = (5+6i)^2\cdot(5+6i)^2$$

De esta forma

$$(5+6i)^2 = (5)^2+2(5)(6i)+(6i)^2 = 25+60i+36i^2$$

Luego

$$25+60i+36i^2 = 25+60i-36 = -11+60i$$

Con lo cual

$$(5+6i)^4 = (5+6i)^2\cdot(5+6i)^2 = (-11+60i)(-11+60i) = (-11+60i)^2$$

De donde

$$(-11+60i)^2 = (-11)^2+2(-11)(60i)+(60i)^2 = -121-1320i+3600i^2$$

Luego

$$-121-1320i+3600i^2 = -121-1320i-3600 = -3721-1320i$$

De esta forma

$$(5+6i)^4 = -3721 - 1320i$$

3.4 Ejercicio para el lector

3.5 Observe que

$$P(2-i) = (2-i)^3 + 3(2-i)^2 - 16$$

Por un lado

$$(2-i)^2 = (2)^2 - 2(2)(i) + (i)^2 = 4 - 4i + -1 = 3 - 4i$$

y luego

$$\begin{aligned}(2-i)^3 &= (2)^3 - 3(2)^2(i) + 3(2)(i)^2 - (i)^3 = 8 - 12i + 6i^2 - (-i)\\ &= 8 - 12i + 6(-1) + i = 8 - 6 - 12i + i = 2 - 11i\end{aligned}$$

De esta manera

$$P(2-i) = (2-i)^3 + 3(2-i)^2 - 16 = (2-11i) + 3(3-4i) - 16$$

$$2 - 11i + 9 - 12i - 16 = -5 - 23i$$

3.6 Observe que si $x = 1-\sqrt{2}i$ ocurre que

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-\sqrt{2}i-2} = \frac{1}{-1-\sqrt{2}i}$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{1}{-1-\sqrt{2}i} &= \frac{1}{-1-\sqrt{2}i} \cdot \frac{-1+\sqrt{2}i}{-1+\sqrt{2}i}\\ &= \frac{-1+\sqrt{2}i}{(-1)^2-(\sqrt{2}i)^2}\\ &= \frac{-1+\sqrt{2}i}{1-2i^2}\\ &= \frac{-1+\sqrt{2}i}{1-2(-1)}\\ &= \frac{-1+\sqrt{2}i}{1+2}\\ &= \frac{-1+\sqrt{2}i}{3}\end{aligned}$$

Por otro lado si $x = 1-\sqrt{2}i$ ocurre que

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-\sqrt{2}i}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\sqrt{2}i} &= \frac{1}{1-\sqrt{2}i}\cdot\frac{1+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}\\
&= \frac{1+\sqrt{2}i}{(1)^2-(\sqrt{2}i)^2}\\
&= \frac{1+\sqrt{2}i}{1-2i^2}\\
&= \frac{1+\sqrt{2}i}{1-2(-1)}\\
&= \frac{1+\sqrt{2}i}{1+2}\\
&= \frac{1+\sqrt{2}i}{3}
\end{aligned}$$

Con base en todo esto ocurre que

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}=\frac{-1+\sqrt{2}i}{3}-\frac{1+\sqrt{2}i}{3}=\frac{-1+\sqrt{2}i-1-\sqrt{2}i}{3}=-\frac{2}{3}$$

lo cual comprueba los solicitado.

3.7 Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-1} &= \frac{2+3i+1}{2+3i-1}\\
&= \frac{3+3i}{1+3i}\\
&= \frac{3+3i}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1-3i}\\
&= \frac{(3+3i)(1-3i)}{(1)^2-(3i)^2}\\
&= \frac{(3+3i)(1-3i)}{1-9i^2}\\
&= \frac{3-9i+3i-9i^2}{1-9(-1)}\\
&= \frac{3-9i+3i-9(-1)}{1+9}\\
&= \frac{3-9i+3i+9}{10}\\
&= \frac{12-6i}{10}\\
&= \frac{6-3i}{5}
\end{aligned}$$

$$=\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i$$

lo cual comprueba los solicitado.

3.8 En este caso tendremos que

$$[x+y+(x-y+2)\,i]\,[x-2y+(x+2y-4)\,i]=0\Rightarrow$$

$$x+y+(x-y+2)\,i=0 \text{ o } x-2y+(x+2y-4)\,i=0$$

Luego

(a) $x+y+(x-y+2)i=0\Rightarrow x+y=0\wedge x-y+2=0$. En tal caso

$$(x,y)=(-1,1)$$

(b) $x-2y+(x+2y-4)i=0\Rightarrow x-2y=0\wedge x+2y-4=0$. En tal caso

$$(x,y)=(2,1)$$

De esta manera

$$(x,y)\in\{(-1,1),(2,1)\}$$

para que se cumpla las condición solicitada.

3.9

a.) Observe que

$$\begin{aligned}
\sqrt{-5}\left(\sqrt{15}-\sqrt{-5}\right) =&\sqrt{5}i\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}i\right)\\
=&\sqrt{5}i\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}i\right)\\
=&5\sqrt{3}i-5i^2\\
=&5\sqrt{3}i-5(-1)\\
=&5\sqrt{3}i+5\\
=&5+5\sqrt{3}i
\end{aligned}$$

b.) Observe que

$$\begin{aligned}
\left(2-\sqrt{-9}\right)\div\left(2+\sqrt{-9}\right)=&(2-3i)\div(2+3i)\\
=&\frac{2-3i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}\\
=&\frac{(2-3i)^2}{(2)^2-(3i)^2}\\
=&\frac{(2)^2-2(2)(3i)+(3i)^2}{4-9i^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4-12i+9i^2}{4-9(-1)} \\
&= \frac{4-12i+9(-1)}{4+9} \\
&= \frac{4-12i-9}{13} \\
&= \frac{-5-12i}{13} \\
&= -\frac{5}{13}-\frac{12}{13}i
\end{aligned}
$$

c.) Observe que

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{10} i^n &= i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8+i^9+i^{10} \\
&= -i+1+i+-1+-i+1+i+-1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

3.9

3.10

a.) Sea $z=a+ib$ un número complejo, para a y b números reales a encontrar. De esta forma

1. $|2-z|=\sqrt{5} \Leftrightarrow |2-(a+ib)|=\sqrt{5} \Leftrightarrow |(2-a)-ib|=\sqrt{5}$

   Luego

   $$|(2-a)-ib|=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(2-a)^2+b^2}=\sqrt{5}$$

   O bien

   $$(2-a)^2+b^2=5 \tag{1}$$

2. $z\cdot\overline{z}=7 \Leftrightarrow (a+ib)(a-ib)=7 \Leftrightarrow a^2+b^2=7$ Es decir

   $$b^2=7-a^2 \tag{2}$$

   Sutituyendo (2) en (1) obtenemos que

   $$(2-a)^2+(7-a^2)=5 \Leftrightarrow 4-4a+a^2+7-a^2=5$$

   $$11-4a=5 \Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$$

   De esta manera

   $$b^2=7-\frac{9}{4}=\frac{19}{4} \Rightarrow b=\pm\frac{\sqrt{19}}{2}$$

   Luego

   $$z=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{19}}{2}i \text{ y } z=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{19}}{2}i$$

b.) Sea $z = a + ib$ un número complejo, para a y b números reales a encontrar. De esta forma

1. $|z+1| = \sqrt{3}|z-1| \Leftrightarrow |a+ib+1| = \sqrt{3}|a+ib-1|$. Luego

$$|(a+1)+ib| = \sqrt{3}|(a-1)+ib| \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(a+1)^2+b^2} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{(a-1)^2+b^2} \Leftrightarrow$$
$$(a+1)^2+b^2 = 3\cdot((a-1)^2+b^2) \Leftrightarrow$$
$$(a+1)^2+b^2 = 3(a-1)^2+3b^2 \Leftrightarrow$$
$$(a+1)^2-3(a-1)^2+b^2-3b^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(-2+8a-2a^2)-2b^2 = 0 \tag{1}$$

2. $|z| = 1 \Leftrightarrow |a+ib| = 1 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 1 \Leftrightarrow b^2 = 1-a^2$ (2)

Sutituyendo (2) en (1) obtenemos que

$$(-2+8a-2a^2)-2b^2 = 0 \Leftrightarrow -2+8a-2a^2-2(1-a^2) = 0$$
$$-2+8a-2a^2-2+2a^2 = 0 \Leftrightarrow 8a-4 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

De esta manera

$$b^2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego

$$z = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ y } z = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

c.) Sea $z = a + ib$ un número complejo, para a y b números reales a encontrar. De esta forma

1. $|z| = 1 \Leftrightarrow |a+ib| = 1 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 1$ (1)

2. $z\cdot\bar{z} = 1 \Leftrightarrow (a+ib)(a-ib) = 1 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 1$ (2)

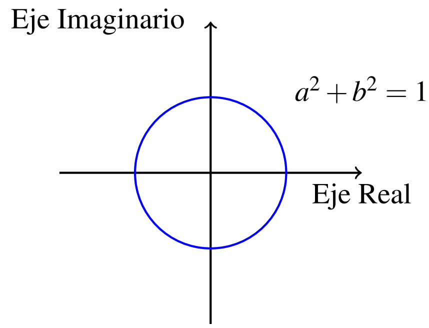
En este caso, como (1) y (2) representan la misma ecuacion se tendrán infinitas soluciones. Se puedes depejar a o b para tener una representación de las soluciones. En este caso:

$$b = \sqrt{1-a^2} \text{ si } a \in [-1,1]$$

Así:

$$z = a+\left(\sqrt{1-a^2}\right)i \text{ si } a \in [-1,1]$$

En términos de lugares geométricos, todos los puntos en el plano complejo sobre una circunferencia de radio unitario satisfacen ambas condiciones de este ejercicio.



3.10 Ejercicio para el lector

3.11

a.) Sea $u=a+bi$ y $v=c+di$ dos números complejos. Luego

$$\begin{aligned}
\overline{u\pm v} &= \overline{(a+bi)\pm(c+di)}\\
&= \overline{a+bi\pm c\pm di}\\
&= \overline{a\pm c+bi\pm di}\\
&= \overline{(a\pm c)+(b\pm d)i}\\
&= (a\pm c)-(b\pm d)i\\
&= a\pm c-bi\mp di\\
&= a-bi\pm c\mp di\\
&= (a-bi)\pm c\mp di\\
&= (a-bi)\pm(c-di)\\
&= \overline{u}\pm\overline{v}
\end{aligned}$$

b.) Sea $u=a+bi$ y $v=c+di$ dos números complejos. Luego

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} &= \overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)}\\
&= \overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)\cdot\left(\frac{c-di}{c-di}\right)}\\
&= \overline{\left(\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2-(di)^2}\right)}\\
&= \overline{\left(\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2+d^2}\right)}\\
&= \overline{\left(\frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2}\right)}\\
&= \overline{\left(\frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}\right)}\\
&= \overline{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-bc+ad}{c^2+d^2} i \\
&= \frac{ac+bd-bci+adi}{c^2+d^2} \\
&= \frac{ac+adi-bci+bd}{c^2+d^2} \\
&= \frac{ac+adi-bci-bdi^2}{c^2+d^2} \\
&= \frac{(a-bi)(c+di)}{c^2-(di)^2} \\
&= \frac{a-bi}{c-di} \cdot \frac{c+di}{c+di} \\
&= \frac{a-bi}{c-di} \\
&= \frac{\overline{a+bi}}{\overline{c+di}} \\
&= \frac{\overline{u}}{\overline{v}}
\end{aligned}
$$

c.) Sea $u = a+bi$ un número complejo. Luego

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{u}} &= \overline{\overline{a+bi}} \\
&= \overline{a-bi} \\
&= a+bi \\
&= u
\end{aligned}
$$

d.) Sea $u = a+bi$ un número complejo. Luego

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(u) &= a \\
&= \frac{2a}{2} \\
&= \frac{a+a}{2} \\
&= \frac{a+ib+a-ib}{2} \\
&= \frac{a+ib+\overline{a+ib}}{2} \\
&= \frac{u+\overline{u}}{2}
\end{aligned}
$$

e.) Sea $u = a+bi$ un número complejo. Luego

$$
\mathrm{Im}(u) = b
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2bi}{2i} \\
&= \frac{bi+bi}{2i} \\
&= \frac{bi+bi}{2i} \\
&= \frac{a+bi-a+bi}{2i} \\
&= \frac{a+bi-(a-bi)}{2i} \\
&= \frac{a+bi-\overline{a+bi}}{2i} \\
&= \frac{u-\overline{u}}{2i}
\end{aligned}
$$

f.) Sea $u = a+bi$ un número complejo. Luego

$$
\begin{aligned}
u \text{ es un número real} &\Leftrightarrow \operatorname{Im}(u) = 0 \\
&\Leftrightarrow b = 0 \\
&\Leftrightarrow 2bi = 0 \\
&\Leftrightarrow bi = -bi \\
&\Leftrightarrow a+bi = a-bi \\
&\Leftrightarrow a+bi = \overline{a+bi} \\
&\Leftrightarrow u = \overline{u}
\end{aligned}
$$

3.11 Ejercicio para el lector

3.12 Observe que

$$(1-i)x+2yi = 4+2i \Leftrightarrow x-ix+2yi = 4+2i \Leftrightarrow x+(2y-x)i = 4+2i$$

Luego por igualdad de números complejos se sigue que

$$\boxed{x=4} \text{ y } \boxed{2y-x=2} \Leftrightarrow \boxed{2y-4=2} \Leftrightarrow \boxed{2y=6} \Leftrightarrow \boxed{y=3}$$

3.13

a.) Sea $z = a+bi$ un número complejo. Luego

$$
\begin{aligned}
|z| \geq 0 &\Leftrightarrow |a+bi| \geq 0 \\
&\Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Lo cual es siempre cierto para la suma de los cuadrados de dos números reales, en este caso, a y b.
b.) Sea $z = a + bi$ un número complejo. Luego

$$\begin{aligned}|z| = 0 \Leftrightarrow & |a+bi| = 0\\ \Leftrightarrow & a^2 + b^2 = 0\\ \Leftrightarrow & a = 0 \wedge b = 0\\ \Leftrightarrow & z = 0\end{aligned}$$

c.) Sea $z = a + bi$ un número complejo. Luego

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z) \leq |z| \Leftrightarrow & a \leq |a+bi|\\ \Leftrightarrow & a \leq a^2 + b^2\end{aligned}$$

Lo cual es siempre cierto para la suma de los cuadrados de dos números reales, en este caso, a y b.
d.) Sea $z = a + bi$ un número complejo. Luego

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(z) \leq |z| \Leftrightarrow & b \leq |a+bi|\\ \Leftrightarrow & b \leq a^2 + b^2\end{aligned}$$

Lo cual es siempre cierto para la suma de los cuadrados de dos números reales, en este caso, a y b.
e.) Sean z y w números complejos. Observe que

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w})$$

Luego

$$(z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + z\overline{w} + w\overline{z} + |w|^2$$

Luego

$$|z|^2 + z\overline{w} + w\overline{z} + |w|^2 = |z|^2 + \overline{w}z + \overline{\overline{w}z} + |w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(\overline{w}z) + |w|^2$$

Dado que

$$\mathrm{Re}(\overline{w}z) = \frac{\overline{w}z + \overline{\overline{w}z}}{2}$$

Por otro lado se tiene que

$$\mathrm{Re}(\overline{w}z) \leq |\overline{w}z|$$

Con esto

$$\begin{aligned}|z+w|^2 =& |z|^2 + 2\mathrm{Re}(\overline{w}z) + |w|^2\\ \leq& |z|^2 + 2|\overline{w}z| + |w|^2\\ =& |z|^2 + 2|\overline{w}||z| + |w|^2\\ =& |z|^2 + 2|w||z| + |w|^2\\ =& (|z| + |w|)^2\end{aligned}$$

Así

$$|z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2 \Rightarrow |z+w| \leq |z|+|w|$$

Ya que se puede extraer la raíz cuadrada a números reales positivos, lo cual está definido por el módulo de un número complejo. [1]

3.13 Ejercicio para el lector

Soluciones del Capítulo 4

4.1

a.) **El factor numérico de un monomio**, también conocido como coeficiente, es el número que multiplica a la(s) variable(s) en el monomio. En términos más simples, es la parte numérica del monomio, sin incluir las variables y sus potencias.

Por ejemplo, en el monomio $8x^3y^2$, el factor numérico es 8. Este número indica cuántas veces se toma el producto de las variables x^3y^2. En el caso de monomios con un coeficiente negativo, como $-5x^2$, el factor numérico es -5.

El factor numérico es importante porque determina la magnitud del monomio. Cuando se realizan operaciones algebraicas como la suma o la resta de monomios, solo se pueden combinar términos que tienen exactamente la misma parte variable (es decir, las mismas variables elevadas a las mismas potencias). En estos casos, se suman o restan los factores numéricos de los monomios involucrados.

b.) **El factor literal de un monomio** se refiere a la parte compuesta por las variables y sus respectivas potencias, excluyendo el coeficiente numérico. En esencia, el factor literal indica la composición algebraica del monomio, mostrando cuáles variables están presentes y cómo están relacionadas entre sí a través de sus potencias.

Por ejemplo, en el monomio $6x^2y^3$, el factor literal sería x^2y^3. Aquí, x y y son las variables, y 2 y 3 son las potencias a las que se elevan, respectivamente. El factor literal proporciona información sobre la estructura algebraica del monomio, sin considerar la magnitud indicada por el coeficiente numérico.

El factor literal es crucial cuando se realizan operaciones algebraicas con monomios, especialmente en la multiplicación y división. Al multiplicar monomios, se multiplican los coeficientes numéricos y se suman las potencias de las variables comunes en los factores literales. En la división, se procede de manera similar, dividiendo los coeficientes y restando las potencias de las variables comunes. El manejo adecuado del factor literal permite simplificar expresiones algebraicas y resolver ecuaciones de manera efectiva.

c.) **Los monomios semejantes** son aquellos monomios que tienen exactamente el mismo factor literal, es decir, contienen las mismas variables elevadas a las mismas potencias, aunque sus

[1] Observe que $|\bar{z}| = |\overline{a+ib}| = |a-ib| = a^2+b^2 = |z|$

coeficientes numéricos puedan ser diferentes. La semejanza entre monomios no depende de los coeficientes numéricos, sino de la composición de sus variables y las potencias a las que estas se elevan.

Por ejemplo, los monomios $3x^2y$ y $5x^2y$ son semejantes porque ambos tienen el mismo factor literal x^2y, a pesar de tener coeficientes diferentes (3 y 5, respectivamente). En contraste, los monomios $3x^2y$ y $3xy^2$ no son semejantes, ya que sus factores literales (x^2y vs. xy^2) no son idénticos debido a las diferentes potencias de las variables.

La importancia de los monomios semejantes radica en las operaciones algebraicas: solo se pueden sumar o restar monomios semejantes. Al hacerlo, se suman o restan los coeficientes numéricos, manteniendo el factor literal común. Esta propiedad es fundamental para simplificar expresiones algebraicas y resolver ecuaciones.

d.) Un binomio, trinomio y polinomio son términos usados en álgebra para describir tipos de expresiones algebraicas basadas en la cantidad de términos que contienen:

Binomio

Un binomio es una expresión algebraica que contiene exactamente dos términos. Los términos están separados por un signo de suma ($+$) o resta ($-$). Un ejemplo de binomio es $x^2 - 3x$. Los binomios son útiles en diversas áreas de las matemáticas, incluyendo la factorización y la expansión de expresiones algebraicas.

Trinomio

Un trinomio es una expresión algebraica que contiene exactamente tres términos. Al igual que los binomios, estos términos están separados por signos de suma o resta. Un ejemplo de trinomio es $x^2 + 5x + 6$. Los trinomios juegan un papel crucial en muchas aplicaciones matemáticas, incluidas las soluciones de ecuaciones cuadráticas.

Polinomio

Un polinomio es una expresión algebraica que puede contener uno o más términos. Los términos de un polinomio también están separados por signos de suma o resta, y cada término puede incluir números, variables, o ambos, elevados a potencias enteras no negativas. Un ejemplo de polinomio es $3x^3 - 2x^2 + 7x - 5$. Los polinomios se clasifican según el número de términos que contienen (monomio para uno, binomio para dos, trinomio para tres, etc.) o según su grado, que es la mayor potencia de la variable en el polinomio.

Estas expresiones son fundamentales en el estudio del álgebra y tienen numerosas aplicaciones, incluyendo la resolución de ecuaciones, el análisis de funciones y la modelización de situaciones reales.

e.) El grado de un monomio es la suma de los exponentes de todas las variables presentes en el monomio. Es una medida que indica la mayor potencia a la que se eleva el conjunto de variables dentro del monomio. Este concepto es esencial para clasificar y operar con expresiones algebraicas, especialmente en el estudio de polinomios.

Por ejemplo, consideremos el monomio $8x^3y^2$. Para encontrar su grado, sumamos los exponentes de las variables:

- El exponente de x es 3.
- El exponente de y es 2.

Sumando estos exponentes, $3+2=5$, determinamos que el grado del monomio es 5. Esto significa que la expresión algebraica alcanza su término de mayor potencia con las variables elevadas a un total combinado de cinco.

El concepto de grado es fundamental en álgebra, ya que permite clasificar monomios y polinomios, facilita la simplificación de expresiones algebraicas y es crucial en la solución de ecuaciones polinómicas.

4.1 Ejercicio para el lector

4.2 Para definir una expresión algebraica que, al sustituir cualquier número real, siempre ofrezca un resultado entero, debemos considerar operaciones y propiedades matemáticas que garanticen este comportamiento. Un enfoque es considerar expresiones que impliquen coeficientes enteros y potencias de variables, donde las variables se sustituyen por números enteros. Aun así, esta condición limita la "cualquier sustitución" a números enteros para asegurar un resultado entero. Por ejemplo, $2n^2+3n+5$, donde n es un número entero, siempre resultará en un número entero, pero esta expresión no cumple con la condición de cualquier número real debido a la especificidad de n siendo entero.

Otra aproximación sería considerar expresiones que exploten propiedades matemáticas específicas para producir enteros bajo condiciones más generales, como el uso de funciones piso o techo, pero estas salen del ámbito de las expresiones algebraicas puras y entran en el terreno de las funciones especiales. La única opción que queda es que dicha expresión algebraica sea una constante entera. En este sentido cualquier asignación de variables real produce la constante entera que se haya definido.

4.3

a.) Como el $m.c.d(2,4,6)=2$, entonces: $\frac{5}{2}a^3b^3m-\frac{15}{4}a^2b^5-\frac{25}{6}a^3b^3=4ab^2(3+ab)$

b.) Observe que:

$$\frac{x^8}{75}-\frac{2x^3}{15}-\frac{x}{6}=\frac{5}{2}a^2b^3\left(m-\frac{3}{2}b^2-\frac{5}{3}a\right)$$

c.) Observe que:

$$(x-2)^2-(x-2)=(x-2)((x-2)-1)=(x-2)(x-3)$$

d.) Observe que:

$$\frac{x^2}{75}-\frac{2x^3}{15}-\frac{x}{6}=-\frac{x}{150}(20x^2-2x+25)$$

No es posible factorizar más en $\mathbb{R}$ ya el polinomio cuadrático resultante tiene discriminante negativo $(\Delta = -1996)$.

e.) Observe que si $u = x + y$ el polinomio dado se puede reescribir como:

$$7u^3 - 8u^2 - 12u$$

Luego

$$7u^3 - 8u^2 - 12u = u(7u^2 - 8u - 12) = u(u-2)(7u+6)$$

Sustituyendo se tiene que:

$$u(u-2)(7u+6) = (x+y)(x+y-2)(7x+7y+6)$$

f.) Observe que:

$$2x^{n+1} - x^{2n+1} = x^{2n+1}(2-1) = x^{2n+1}$$

g.) Observe que:

$$3b(x-3y) - 2m(3y-x) = 3b(x-3y) + 2m(x-3y)$$

Luego:

$$3b(x-3y) + 2m(x-3y) = (x-3y)(3b+2m)$$

h.) Observe que:

$$p(x-3y) - (x-2p)(3y-x) = p(x-3y) + (x-2p)(x-3y)$$

Luego

$$= p(x-3y) + (x-2p)(x-3y) = (x-3y)(p+(x-2p)) = (x-3y)(x-p)$$

i.) Observe que:

$$-12ab^2 - 4a^2b^3 - 36a^3 = -4a(9a^2 + 3b^2 + ab^3)$$

j.) Observe que:

$$4y(-y+1) - 1 + y = 4y(1-y) - (1-y) = (4y-1)(1-y)$$

k.) Observe que:

$$b^{n+1}x^{n-1} - b^n x^{n+1} = b^n x^{n-1}(b - x^2)$$

Por lo tanto, el polinomio factorizado es $b^n x^{n-1}(b - x^2)$.

4.3 Ejercicio para el lector

4.4

a.) Observe que:

$$3p(m-2p) - 2mp + 4p^2 = 3p(m-2p) - 2p(m-2p) = (m-2p)(3p-2p) = (m-2p)p$$

b.) Observe que:

$$\begin{aligned}10xy-8wx+15cy+4bw-12cw-5by &= 10xy+15cy-5by-8wx+4bw-12cw\\ &= 5y(2x+3c-b)+4w(-2x+b-3c)\\ &= (5y-4w)(2x-b+3c)\end{aligned}$$

c.) Observe que:

$$\begin{aligned}\frac{7}{3}a-\frac{7}{3}-ab+b &= \frac{7}{3}a-ab-\frac{7}{3}+b\\ &= a\left(\frac{7}{3}-b\right)-\left(\frac{7}{3}-b\right)\\ &= \left(\frac{7}{3}-b\right)(a-1)\end{aligned}$$

d.) Observe que:

$$\begin{aligned}x+y-px+qx-py+qy &= (x-px+qx)+(y-py+qy)\\ &= x(1-p+q)+y(1-p+q)\\ &= (1-p+q)(x+y)\end{aligned}$$

e.) Observe que:

$$2p(a-b)-ax+bx = 2p(a-b)-x(a-b) = (a-b)(2p-x)$$

f.) Observe que:

$$(y-1)(y+1)-y+1 = (y-1)(y+1)-(y-1) = (y-1)(y+1-1) = (y-1)y$$

g.) Observe que:

$$\begin{aligned}m^2-mx+bm-bx-(b+m)(m-x) &= m(m-x)+b(m-x)+(b+m)(m-x)\\ &= (m-x)(2m+2b)\\ &= 2(m-x)(m+b)\end{aligned}$$

4.4 Ejercicio para el lector

4.5

a.)

$$\begin{aligned}x^3-12x+20x &= x(x^2-12x+20)\\ &= x(x^2-12x+36-36+20)\\ &= x((x-6)^2-16)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x(x-6-4)(x-6+4) \\
&= x(x-10)(x-2)
\end{aligned}
$$

b.)

$$
\begin{aligned}
x^2-18+7x &= x^2+7x+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}-18 \\
&= \left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{121}{4} \\
&= \left(x+\frac{7}{2}-\frac{11}{2}\right)\left(x+\frac{7}{2}+\frac{11}{2}\right) \\
&= (x-2)(x+9)
\end{aligned}
$$

c.)

$$x^2-12xy+32y^2 = (x-4y)(x-8y).$$

d.)

$$20+6x-2x^2 = -2(x+2)(x-5)$$

e.)

$$
\begin{aligned}
49(x-1)^2-42(x+1)+9 &= 19(x^2-2x+1)-42x-42+9 \\
&= 49x^2-98x+49-42x-33 \\
&= 49x^2-140x+16 \\
&= 49\left(x^2-\frac{20}{7}x+\frac{16}{49}\right) \\
&= 49\left(x^2-\frac{20}{7}+\frac{100}{49}-\frac{100}{49}+\frac{16}{49}\right) \\
&= 49\left[\left(x-\frac{10}{7}\right)^2-\frac{12}{7}\right] \\
&= 49\left(x-\frac{10}{7}\right)^2-84 \\
&= \left(7\left(x-\frac{10}{7}\right)\right)^2-\left(\sqrt{84}\right)^2 \\
&= \left(7\left(x-\frac{10}{7}\right)-2\sqrt{21}\right)\left(7\left(x-\frac{10}{7}\right)+2\sqrt{21}\right)
\end{aligned}
$$

f.)

$$(x+7)^2-4x-24 = (x^2+14x+49)-4x-24$$

$$= x^2 + 10x + 25$$
$$= (x+5)^2$$

g.)

$$\begin{aligned} 6m^2 - 15mn - 9n^2 &= 3(2m^2 - 5mn - 3n^2) \\ &= 3(2m+n)(m-3n) \end{aligned}$$

h.)

$$\begin{aligned} a^2 - \frac{5}{6}a + \frac{1}{6} &= \frac{1}{6}(6a^2 - 5a + 1) \\ &= \frac{1}{6}(3a-1)(2a-1) \end{aligned}$$

i.)

$$120y^2 - 23xy + x^2 = (x-8y)(x-15y)$$

j.)

$$\begin{aligned} (x-2y)^2 - 12(x-2y) + 32 &= ((x-2y)-4)((x-2y)-8) \\ &= (x-2y-4)(x-2y-8) \end{aligned}$$

4.5 Ejercicio para el lector

4.6

a.)

$$\begin{aligned} (x+1)x^2 + (x+1)x &= (x+1)(x^2+x) \\ &= (x+1)x(x+1) \\ &= x(x+1)^2 \end{aligned}$$

b.)

$$16a^3b^4c^2 - 64a^2b^3c^3 + 72a^2b^2c^2 = 8a^2b^2c^2(2ab^2 - 8bc + 9)$$

c.)

$$\begin{aligned} m(n-1) - x(1-n) &= m(n-1) + x(n-1) \\ &= (n-1)(m+x) \end{aligned}$$

d.)

$$9x^{3a+2} - 7x^{2a+1} = 9x^{2a+a+1+1} - 7x^{2a+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= 9x^{2a+1+a+1} - 7x^{2a+1}\\
&= 9x^{(2a+1)+(a+1)} - 7x^{2a+1}\\
&= 9x^{2a+1}x^{a+1} - 7x^{2a+1}\\
&= x^{2a+1}(9x^{a+1} - 7)
\end{aligned}
$$

e.)

$$
\begin{aligned}
(x^2-y^2)(x+y)-(x^2-y^2)(x-y) &= (x^2-y^2)[(x+y)-(x-y)]\\
&= (x^2-y^2)[x+y-x+y]\\
&= (x^2-y^2)[2y]\\
&= (x-y)(x+y)2y
\end{aligned}
$$

4.6 Ejercicio para el lector

4.7

a.)

$$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$$

b.)

$$4a^2+12a+9=(2a+3)^2$$

c.)

$$\frac{1}{4}x^2+x+1=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$$

d.)

$$
\begin{aligned}
16a^2b^8-4x^6 &= 4(4a^2b^8-x^6)\\
&= 4(2ab^4-x^3)(2ab^4+x^3)
\end{aligned}
$$

e.)

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3-a^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-a^3\\
&= 3a^2b+3ab^2+b^3\\
&= b(3a^2+3ab+b^2)
\end{aligned}
$$

f.)

$$64a^3-27b^9=(4a)^3-(3b^3)^3$$

$$= (4a - 3b^3)(16a^2 + 12ab^3 + 9b^6)$$

g.)

$$36xy + 16y - 10x^2 = 2(-5x^2 + 18xy + 8y)$$

h.)

$$\begin{aligned}(x-16)^2 - 25 &= ((x-16)-5)((x-16)+5)\\ &= (x-21)(x-11)\end{aligned}$$

i.)

$$\begin{aligned}x^3 + 8 &= x^3 + 2^3\\ &= (x+2)(x^2 - 2x + 4)\end{aligned}$$

j.)

$$\begin{aligned}1 - r^3 &= 1^3 - r^3\\ &= (1-r)(1+r+r^2)\end{aligned}$$

k.)

$$\begin{aligned}a^6 + b^6 &= (a^2)^3 + (b^2)^3\\ &= (a^2+b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)\end{aligned}$$

l.)

$$\begin{aligned}1 - 8a^9 &= 1^3 - (2a^3)^3\\ &= (1-2a^3)(1+2a^3+4a^6)\end{aligned}$$

m.)

$$\begin{aligned}(x^3+3)^3 + 1 &= (x^3+3)^3 + 1^3\\ &= ((x^3+3)+1)((x^3+3)^2 - (x^3+3)+1)\\ &= (x^3+4)((x^6+6x^3+9) - (x^3+3)+1)\\ &= (x^3+4)(x^6+6x^3+9-x^3-3+1)\\ &= (x^3+4)(x^6+5x^3+7)\end{aligned}$$

n.)

$$\begin{aligned}(m+1)^3 + m^3 &= ((m+1)+m)((m+1)^2 - m(m+1) + m^2)\\ &= (2m+1)((m^2+2m+1) - m^2 - m + m^2)\\ &= (2m+1)(m+1+m^2)\\ &= (2m+1)(m^2+m+1)\end{aligned}$$

4.7 Ejercicio para el lector

4.8

a.)

$$\begin{aligned} ax+a-x-1 &= (ax+a)+(-x-1) \\ &= a(x+1)+-(x+1) \\ &= (x+1)(a+-1) \\ &= (x+1)(a-1) \end{aligned}$$

b.)

$$\begin{aligned} mx+ny+nx+my &= (mx+my)+(nx+ny) \\ &= m(x+y)+n(x+y) \\ &= (x+y)(m+n) \end{aligned}$$

c.)

$$\begin{aligned} x^3-2x^2+x-2 &= (x^3-2x^2)+(x-2) \\ &= x^2(x-2)+(x-2) \\ &= (x-2)(x^2+1) \end{aligned}$$

d.)

$$\begin{aligned} x+y-px+qx-py+qy &= (x-px+qx)+(y-py+qy) \\ &= x(1-p+q)+y(1-p+q) \\ &= (1-p+q)(x+y) \end{aligned}$$

e.)

$$\begin{aligned} xa-ya+za+x-y+z &= (xa+x)+(-ya-y)+(za+z) \\ &= x(a+1)+-y(a+1)+z(a+1) \\ &= (a+1)(x-y+z) \end{aligned}$$

f.)

$$\begin{aligned} ax+by+ay+bx &= (ax+ay)+(bx+by) \\ &= a(x+y)+b(x+y) \\ &= (a+b)(x+y) \end{aligned}$$

g.)

$$36xy+16y-10x^2 = 2(18xy+8y-5x^2)$$

4.8 Ejercicio para el lector

4.9

a.)

$$a^2 - 12a + 20 = (a-2)(a-10)$$

b.)

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

c.)

$$x^2 + 13x + 40 = (x+8)(x+5)$$

d.)

$$5x^2 - 13x - 6 = (5x+2)(x-3)$$

e.)

$$6a^2 + ab - 15b^2 = (2a-3b)(3a+5b)$$

f.)

$$10x^2 - 13x - 3 = (5x+1)(2x-3)$$

g.) $x^2 + x + 1$ no se puede factorizar en $\mathbb{R}$ pues $\Delta = -3 < 0$.

h.)

$$x^2 + 14x + 49 = (x+7)^2$$

i.)

$$3x^2 + 7x + 2 = (3x+1)(x+2)$$

j.)

$$32x^2 + 18x - 17 = (2x-1)(16x+17)$$

k.)

$$2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 11x - 12 = (x+1)(x-3)(2x^2+x+4)$$

l.)

$$6y^4 + 37y^3 - 92y^2 - 28y + 32 = (2y-1)(3y+2)(y+8)(y-2)$$

m.)

$$y^3 + 3y^2 - 9y + 5 = (y-1)^2(y+5)$$

n.)

$$2z^3 - 7z^2 - 28z - 12 = (2z+1)(z+2)(z-6)$$

o.)

$$3x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = (x+2)(3x^2 - 2x + 1)$$

4.9 Ejercicio para el lector

4.10

a.)

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

b.)

$$4x^2 - 3x + x^3 - 18 = (x-2)(x+3)^2$$

c.)

$$12x + 13x^2 + 6x^3 + x^4 + 4 = (x+1)^2(x+2)^2$$

d.)

$$8x - 7x^2 + 2x^3 - 3 = (x-1)^2(2x-3)$$

e.)

$$27x^3 - 9x^2 - 3x + 1 = (3x-1)^2(3x+1)$$

f.)

$$166x^2 - 140x + 84x^3 + 9x^4 + 25 = (3x-1)^2(x+5)^2$$

4.10 Ejercicio para el lector

4.11

a.)

$$\begin{aligned}\frac{\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}}{6x-2} &= \frac{\frac{6x-2}{9}}{6x-2} \\ &= \frac{6x-2}{9(6x-2)} \\ &= \frac{1}{9}\end{aligned}$$

b.)

$$\begin{aligned}
\frac{5x-2}{\frac{12}{5}-6x} &= \frac{5x-2}{\frac{12-30x}{5}} \\
&= \frac{5(5x-2)}{12-30x} \\
&= \frac{5(5x-2)}{6(2-5x)} \\
&= \frac{5(5x-2)}{-6(5x-2)} \\
&= -\frac{5}{6}
\end{aligned}$$

c.)

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{2x}{3}-\frac{1}{12}}{\frac{4x}{5}-\frac{1}{10}} &= \frac{\frac{8x-1}{12}}{\frac{8x-1}{10}} \\
&= \frac{10(8x-1)}{12(8x-1)} \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

d.)

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{15x}{2}+\frac{5}{4}}{\frac{4}{2}+12x} &= \frac{\frac{30x+5}{4}}{2+12x} \\
&= \frac{30x+5}{4(2+12x)} \\
&= \frac{5(6x+1)}{8(1+6x)} \\
&= \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

4.11 Ejercicio para el lector

4.12

a.)

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+x-2}{x+2} &= \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} \\
&= x-1
\end{aligned}$$

b.)

$$\frac{22x^2-8x-24x^3+9x^4+1}{3x^3-x^2-3x+1} = \frac{(3x-1)^2(x-1)^2}{(3x-1)(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{(3x-1)(x-1)}{(x+1)}$$

c.)

$$\frac{-x^2+8x-5x^3+x^4+x^5-4}{2x^3-x+x^4-2} = \frac{(x-1)^3(x+2)^2}{(x-1)(x+2)(x^2+x+1)}$$
$$= \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^2+x+1}$$

d.)

$$\frac{8x+2x^2-4x^3+x^4-8}{x^4-8x-8\sqrt{2}+x^3\sqrt{2}} = \frac{x^4-4x^3+2x^2+8x-8}{x^4+\sqrt{2}x^3-8x-8\sqrt{2}}$$

Factorizando el numerador:

1	−4	2	8	−8	2
	2	−4	−4	8	
1	−2	−2	4	0	

De lo anterior se tiene: $x^3-2x^2-2x+4=0$, de donde:

1	−2	−2	4	2
	2	0	−4	
1	0	−2	0	

Además:

$$x^2-2=0 \Rightarrow x^2=22$$
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Luego, factorizando el denominador:

$$\begin{aligned} x^4+\sqrt{2}x^3-8x-8\sqrt{2} &= \sqrt{2}x^3-8\sqrt{2}+x^4-8x \\ &= \sqrt{2}(x^3-8)+x(x^3-8) \\ &= (\sqrt{2}+x)(x^3-8) \\ &= (\sqrt{2}+x)(x-2)(x^2+2x+4) \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}\frac{x^4-4x^3+2x^2+8x-8}{x^4+\sqrt{2}x^3-8x-8\sqrt{2}} &= \frac{(x-2)^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(\sqrt{2})(x-2)(x^2+2x+4)}\\ &= \frac{(x-2)(x-\sqrt{2})}{x^2+2x+4}\end{aligned}$$

e.)

$$\begin{aligned}\frac{15-20x+8x^2-4x^3+x^4}{-5+5x-x^2+x^3} &= \frac{(x^2+5)(x-3)(x-1)}{(x^2+5)(x-1)}\\ &= x-3\end{aligned}$$

4.12 Ejercicio para el lector

4.13

a.) Para resolver la expresión: $\dfrac{x^3-27}{x^2-x-6}\cdot\dfrac{x^2+2x}{x^2+3x+9}$ se siguen estos pasos:

Paso 1: Factorización de los polinomios

Numerador y denominador del primer término

Numerador: x^3-27 representa una diferencia de cubos, la cual se puede factorizar como $(x-3)(x^2+3x+9)$.

Denominador: x^2-x-6 se puede factorizar como: $(x-3)(x+2)$.

Numerador y denominador del segundo término

Numerador: x^2+2x se puede factorizar como: $x^2+2x=x(x+2)$.

Denominador: x^2+3x+9 es irreducible en factores reales, así que se queda como está (discriminante negativo)

Paso 2: Reescribir la fracción con las factorizaciones obtenidas

Se reescribe la expresión completa, es decir

$$\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+2)}\cdot\frac{x(x+2)}{x^2+3x+9}$$

Paso 3: Cancelación de términos comunes

Se cancelan los términos comunes en el numerador y el denominador:

$$\frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+2)}}\cdot\frac{x\cancel{(x+2)}}{x^2+3x+9}$$

Simplificando:

$$\frac{x^2+3x+9}{1} \cdot \frac{x}{x^2+3x+9}$$

Finalmente, los x^2+3x+9 se cancelan y se obtiene como respuesta x.

Expresión final simplificada

La expresión final simplificada es:

$$x$$

b.) Para resolver la expresión: $\frac{xy}{x^2-y^2} \div \frac{xy}{(x+y)^2}$, se siguen estos pasos:

Paso 1: Se reescribe la división como multiplicación, es decir:

$$\frac{xy}{x^2-y^2} \div \frac{xy}{(x+y)^2} = \frac{xy}{x^2-y^2} \cdot \frac{(x+y)^2}{xy}$$

Paso 2: Simplificación de la fracción

Observe que x^2-y^2 es una diferencia de cuadrados y se puede factorizar como: $x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$. De esta forma se tiene

$$\frac{xy}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{(x+y)^2}{xy}$$

Paso 3: Cancelación de términos comunes

Cancelando los términos comunes xy en el numerador y denominador se tiene

$$\frac{1}{(x+y)(x-y)} \cdot (x+y)^2$$

Simplificando y cancelando uno de los $x+y$:

$$\frac{(x+y)}{(x-y)}$$

Paso 4: Expresión final simplificada

La expresión final simplificada es:

$$\frac{x+y}{x-y}$$

c.) Para resolver la operación $\frac{-6+11x-6x^2+x^3}{-2+5x-4x^2+x^3} \cdot \frac{x-1}{x-3}$ se deben seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Factorización del numerador y el denominador

Numerador: $-6+11x-6x^2+x^3$ se factoriza como $(x-1)(x-2)(x-3)$

Denominador: $-2+5x-4x^2+x^3$ se factoriza como: $(x-1)^2(x-2)$

Paso 2: Simplificación de la fracción original

Se reescribe la fracción original con las factorizaciones obtenidas, esto es:

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)^2(x-2)}$$

Cancelando los factores comunes del numerador y el denominador:

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{x-3}{x-1}$$

Paso 3: Multiplicación con $\dfrac{x-1}{x-3}$

Ahora, se multiplica la fracción simplificada por $\dfrac{x-1}{x-3}$:

$$\frac{x-3}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x-3}$$

Paso 4: Simplificación final

Las fracciones se simplifican a:

$$1$$

Expresión final

La expresión completa resuelta y simplificada es:

$$\frac{-6+11x-6x^2+x^3}{-2+5x-4x^2+x^3} \cdot \frac{x-1}{x-3} = 1$$

d.) Para resolver la operación $\frac{x^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x+2}{3x} \div \frac{1}{x+2}$, se siguen los siguientes pasos:

Paso 1: Reescribir la división como multiplicación por el inverso. Esto es:

$$\frac{x^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x+2}{3x} \cdot \frac{x+2}{1}$$

Paso 2: Factorización de los polinomios

Denominador x^2+4x+4 se factoriza como $(x+2)^2$ en la expresión que aparece a la izquierda

Paso 3: Reescribir la fracción con las factorizaciones obtenidas, es decir

$$\frac{x^2}{(x+2)^2} \cdot \frac{x+2}{3x} \cdot (x+2)$$

Paso 4: Cancelación de términos comunes. Se cancelan los factores comunes en el numerador y el denominador:

$$\frac{x^2}{\cancel{(x+2)^2}} \cdot \frac{\cancel{x+2}}{3x} \cdot \cancel{(x+2)}$$

$$x^2 \cdot \frac{1}{3x}$$

Finalmente, se cancelan x en el numerador y el denominador:

$$\frac{x}{3}$$

Expresión final

La expresión completa resuelta y simplificada es:

$$\frac{x}{3}$$

e.) Para resolver la operación $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^3-y^3} \div \frac{x-y}{x^2+xy+y^2} \cdot \frac{x+y}{2}$ se deben seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Factorización de los polinomios.

Numerador del primer término: $x^2+2xy+y^2$ se factoriza como $(x+y)^2$

Denominador del primer término: x^3-y^3 se factoriza como $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

Denominador del segundo término: x^2+xy+y^2 no se factoriza, pues es irreducible en factores reales.

Paso 2: Reescribir la fracción con las factorizaciones obtenidas

$$\frac{(x+y)^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} \div \frac{x-y}{x^2+xy+y^2} \cdot \frac{x+y}{2}$$

Paso 3: Reescribir la división como multiplicación por el inverso

$$\frac{(x+y)^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} \cdot \frac{x^2+xy+y^2}{x-y} \cdot \frac{x+y}{2}$$

Paso 4: Cancelación de términos comunes

Se cancelan factores comunes en el numerador y el denominador, en particular, solo los x^2+xy+y^2, obteniendo:

$$\frac{(x+y)^2}{(x-y)} \cdot \frac{1}{x-y} \cdot \frac{x+y}{2}$$

Simplificando:

$$\frac{(x+y)^2 \cdot (x+y)}{(x-y)^2 \cdot 2} = \frac{(x+y)^3}{2(x-y)^2}$$

Expresión final

La expresión final simplificada es:

$$\frac{(x+y)^3}{2(x-y)^2}$$

f.) Para resolver la operación $\frac{-3+x+x^2+x^3}{x-1} \cdot \frac{2x^2+3x+4}{-4+x+x^2+2x^3}$, se siguen estos pasos:

Paso 1: Factorización de los polinomios

Numerador y denominador del primer término

Numerador: $-3+x+x^2+x^3$. Este se puede reordenar y factorizar. Primero, ordenando los términos en forma descendente, queda x^3+x^2+x-3. Ahora, se buscan factores posibles. Probando con el teorema del factor y el método de división sintética o factorización directa para encontrar factores, se tiene que $x-1$ funciona, con lo cual

$$x^3+x^2+x-3=(x-1)(x^2+2x+3)$$

Luego, x^2+2x+3 es un polinomio cuadrático irreducible.

Denominador: El término $x-1$ se deja como tal.

Paso 2: Factorización del segundo término

Numerador: El polinomio $2x^2+3x+4$ es irreducible en factores reales, así que se queda como está.

Denominador: $-4+x+x^2+2x^3$. Este se puede reordenar y factorizar. Así:

$$2x^3+x^2+x-4=(x-1)(2x^2+3x+4)$$

lo cual es viable al probar con el teorema del factor y el método de división sintética o factorización directa.

Paso 3: Reescribir la fracción con las factorizaciones obtenidas

$$\frac{(x-1)(x^2+2x+3)}{x-1} \cdot \frac{2x^2+3x+4}{(x-1)(2x^2+3x+4)}$$

Paso 4: Se cancelación los términos comunes

$$\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+2x+3)}{\cancel{x-1}} \cdot \frac{\cancel{2x^2+3x+4}}{(x-1)\cancel{(2x^2+3x+4)}}$$

Simplificando:

$$(x^2+2x+3)\cdot\frac{1}{x-1}$$

Expresión final

$$\frac{x^2+2x+3}{x-1}$$

g.) Para resolver la operación $\frac{x^3+5x^2+7x+3}{2x^3+4x^2-10x-12} \div \frac{2x+2}{x^2-4}$, se siguen los siguientes pasos:

Paso 1: Factorización de los polinomios

Numerador y denominador del primer término

Numerador del primer término: $x^3+5x^2+7x+3=(x+1)(x+1)(x+3)$. Esto es viable al probar con el teorema del factor y el método de la división sintética.

Denominador del primer término: $2x^3+4x^2-10x-12=2(x+3)(x+1)(x-2)$. Esto es viable al probar con el teorema del factor y el método de la división sintética.

Numerador y denominador del segundo término

Numerador del segundo término:$2x+4=2(x+2)$ al tomar como factor común al 2.

Denominador del segundo término:$x^2-4=(x-2)(x+2)$ al usar la diferencia de cuadrados como método de factorización.

Paso 2: Reescribir la división como multiplicación por el inversos. Esto es

$$\frac{(x+1)(x+1)(x+3)}{2(x+3)(x+1)(x-2)}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{2(x+1)}$$

Paso 3: Cancelación de términos comunes. Observe que:

$$\frac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x+1)}\cancel{(x+3)}}{2\cancel{(x+3)}\cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}}\cdot\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{2\cancel{(x+1)}}$$

La expresión se reduce a:

$$\frac{x+2}{4}$$

Expresión final

$$\frac{x+2}{4}$$

h.) Para resolver la operación $\frac{6x^3+5x^2-2x-1}{3x^3+x^2+9x+3}\cdot\frac{2x^3-x^2+6x-3}{2x^3+3x^2-1}$, se siguen los siguientes pasos:

Paso 1: Factorización de los polinomios

Numerador y denominador del primer término

Numerador del primer término: $6x^3+5x^2-2x-1=(3x+1)(2x-1)(x+1)$. Esto es viable al probar con el teorema del factor y el método de la división sintética.

Denominador del primer término: $3x^3+x^2+9x+3=(3x+1)(x^2+3)$. Esto es viable al probar con el teorema del factor y el método de la división sintética.

Numerador y denominador del segundo término

Numerador del segundo término:$2x^3-x^2+6x-3=(2x-1)(x^2+3)$. Esto es viable al probar con el teorema del factor y el método de la división sintética.

Denominador del segundo término:$2x^3+3x^2-1=(x+1)^2(2x-1)$ al usar la diferencia de cuadrados como método de factorización.

Paso 2: Reescribir el producto con los términos factorizados

$$\frac{(3x+1)(2x-1)(x+1)}{(3x+1)(x^2+3)}\cdot\frac{(2x-1)(x^2+3)}{(x+1)^2(2x-1)}$$

Paso 3: Cancelación de términos comunes. Observe que:

$$\frac{\cancel{(3x+1)}(2x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(3x+1)}\cancel{(x^2+3)}}\cdot\frac{\cancel{(2x-1)}\cancel{(x^2+3)}}{\cancel{(x+1)^2}\cancel{(2x-1)}}$$

La expresión se reduce a:

$$\frac{2x-1}{x+1}$$

Expresión final

$$\frac{2x-1}{x+1}$$

i.) Para resolver la operación $\frac{x^2y-xy^2}{x^2y^2}\cdot\frac{x^3y-x^2y^2+xy^3}{x^3+y^3}$, se siguen los siguientes pasos:

Paso 1: Factorización de los polinomios

Numerador y denominador del primer término

Numerador del primer término: $x^2y-xy^2=xy(x-y)$. Esto es posible cuando se considera a xy como factor común.

Denominador del primer término: x^2y^2. Este ya no se puede factorizar más.

Numerador y denominador del segundo término

Numerador del segundo término:$x^3y - x^2y^2 + xy^3 = xy(x^2 - xy + y^2)$. Esto es posible cuando se considera a xy como factor común.

Denominador del segundo término:$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ al usar la factorización de la suma de cubos.

Paso 2: Reescribir el producto con los términos factorizados

$$\frac{xy(x-y)}{x^2y^2} \cdot \frac{xy(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}$$

Paso 3: Cancelación de términos comunes. Observe que:

$$\frac{\cancel{xy}(x-y)}{\cancel{x^2y^2}} \cdot \frac{\cancel{xy}\cancel{(x^2-xy+y^2)}}{(x+y)\cancel{(x^2-xy+y^2)}}$$

La expresión se reduce a:

$$\frac{x-y}{x+y}$$

Expresión final

$$\frac{x-y}{x+y}$$

j.) Para resolver la operación: $\frac{-1+x-x^2+x^3}{12-10x+2x^2} \cdot \frac{2x-6}{1-x-x^2+x^3} \cdot \frac{x-2}{x^2+1}$ se siguen los siguientes pasos:

Paso 1: Factorizar los polinomios:

Numerador y denominador del primer término

Numerador: $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$

Denominador: $12 - 10x + 2x^2 = 2(6 - 5x + x^2) = 2(x-3)(x-2)$

Numerador y denominador del segundo término

Numerador: $2x - 6 = 2(x-3)$

Denominador: $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1)$

Paso 2: Reescribir la fracción con las factorizaciones obtenidas, es decir

$$\frac{(x-1)(x^2+1)}{2(x-3)(x-2)} \cdot \frac{2(x-3)}{(x-1)^2(x+1)} \cdot \frac{x-2}{x^2+1}$$

Paso 3: Se cancelan los términos comunes en el numerador y el denominador:

$$\frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{2}\cancel{(x-3)}\cancel{(x-2)}} \cdot \frac{\cancel{2}\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-1)}^2(x+1)} \cdot \frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x^2+1)}}$$

lo cual da

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

Expresión final

$$\frac{1}{x^2-1}$$

k.) Para hacer la suma de $\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x-1}$ se deben considerar los siguientes pasos:

Paso 1: Encontrar el común denominador:

El común denominador de $x+1$ y $x-1$ es $(x+1)(x-1)$.

Paso 2: Reescribir cada fracción con el común denominador:

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x\cdot(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2-x}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{2}{x-1} = \frac{2\cdot(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x+2}{(x-1)(x+1)}$$

Paso 3: Sumar las fracciones:

$$\frac{x^2-x}{(x+1)(x-1)} + \frac{2x+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2-x+2x+2}{(x+1)(x-1)}$$

Paso 4: Simplificar el numerador:

$$x^2-x+2x+2 = x^2+x+2$$

Paso 5: Escribir la fracción simplificada:

$$\frac{x^2+x+2}{(x+1)(x-1)}$$

l.) Para hacer la resta de $\frac{3x}{x-2}-\frac{4}{x+3}$ se deben considerar los siguientes pasos:

Paso 1: Encontrar el común denominador:

El común denominador de $x-2$ y $x+3$ es $(x-2)(x+3)$.

Paso 2: Reescribir cada fracción con el común denominador:

$$\frac{3x}{x-2} = \frac{3x\cdot(x+3)}{(x-2)(x+3)} = \frac{3x^2+9x}{(x-2)(x+3)}$$

$$\frac{4}{x+3} = \frac{4 \cdot (x-2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{4x-8}{(x+3)(x-2)}$$

Paso 3: Restar las fracciones:

$$\frac{3x^2+9x}{(x-2)(x+3)} - \frac{4x-8}{(x+3)(x-2)} = \frac{3x^2+9x-(4x-8)}{(x-2)(x+3)}$$

Paso 4: Simplificar el numerador:

$$3x^2+9x-4x+8 = 3x^2+5x+8$$

Paso 5: Escribir la fracción simplificada:

$$\frac{3x^2+5x+8}{(x-2)(x+3)}$$

m.) Para hacer la resta de $\frac{2x}{(x-1)^2} - \frac{3}{(x-1)^3}$ se deben considerar los siguientes pasos:

Paso 1: Encontrar el común denominador:

El común denominador de $(x-1)^2$ y $(x-1)^3$ es $(x-1)^3$.

Paso 2: Reescribir cada fracción con el común denominador:

$$\frac{2x}{(x-1)^2} = \frac{2x \cdot (x-1)}{(x-1)^2 \cdot (x-1)} = \frac{2x(x-1)}{(x-1)^3} = \frac{2x^2-2x}{(x-1)^3}$$

$\frac{3}{(x-1)^3}$ ya tiene el denominador común, por lo que se queda igual: $\frac{3}{(x-1)^3}$

Paso 3: Restar las fracciones:

$$\frac{2x^2-2x}{(x-1)^3} - \frac{3}{(x-1)^3} = \frac{2x^2-2x-3}{(x-1)^3}$$

Paso 4: Simplificar (si es posible):

El numerador $2x^2-2x-3$ no se puede simplificar más.

Paso 5: Escribir la fracción simplificada:

$$\frac{2x^2-2x-3}{(x-1)^3}$$

n.) Para operar $\frac{3x}{(x+2)^2} - \frac{4}{(x+2)^3} + \frac{5}{x(x+2)}$ se deben considerar los siguientes pasos:

Paso 1: Encontrar el común denominador:

El común denominador de $(x+2)^2$, $(x+2)^3$ y $x(x+2)$ es $x(x+2)^3$.

Paso 2: Reescribir cada fracción con el común denominador:

$$\frac{3x}{(x+2)^2} = \frac{3x \cdot x}{(x+2)^2 \cdot x} \cdot \frac{(x+2)}{(x+2)} = \frac{3x^2(x+2)}{x(x+2)^3} = \frac{3x^3+6x^2}{x(x+2)^3}$$

$$\frac{4}{(x+2)^3} = \frac{4 \cdot x}{(x+2)^3 \cdot x} = \frac{4x}{x(x+2)^3}$$

$$\frac{5}{x(x+2)} = \frac{5 \cdot (x+2)^2}{x(x+2) \cdot (x+2)^2} = \frac{5(x+2)^2}{x(x+2)^3} = \frac{5(x^2+4x+4)}{x(x+2)^3} = \frac{5x^2+20x+20}{x(x+2)^3}$$

Paso 3: Restar y sumar las fracciones:

$$\frac{3x^3+6x^2}{x(x+2)^3} - \frac{4x}{x(x+2)^3} + \frac{5x^2+20x+20}{x(x+2)^3} = \frac{3x^3+6x^2-4x+5x^2+20x+20}{x(x+2)^3}$$

Paso 4: Simplificar el numerador:

$$3x^3+6x^2+5x^2-4x+20x+20 = 3x^3+11x^2+16x+20$$

Paso 5: Escribir la fracción simplificada:

$$\frac{3x^3+11x^2+16x+20}{x(x+2)^3}$$

o.) Para operar $\frac{4x}{x+1} - \frac{3}{x^2-1} + \frac{5}{x-1}$ se deben considerar los siguientes pasos:

Paso 1: Encontrar el común denominador:

Los denominadores son $x+1$, x^2-1, y $x-1$. Note que $x^2-1=(x+1)(x-1)$.

El común denominador de estos es $(x+1)(x-1)$.

Paso 2: Reescribir cada fracción con el común denominador:

$$\frac{4x}{x+1} = \frac{4x \cdot (x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{4x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{4x^2-4x}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{3}{x^2-1} = \frac{3}{(x+1)(x-1)} \text{ ya está en la forma deseada}$$

$$\frac{5}{x-1} = \frac{5 \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{5(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{5x+5}{(x+1)(x-1)}$$

Paso 3: Restar y sumar las fracciones:

$$\frac{4x^2-4x}{(x+1)(x-1)} - \frac{3}{(x+1)(x-1)} + \frac{5x+5}{(x+1)(x-1)} = \frac{4x^2-4x-3+5x+5}{(x+1)(x-1)}$$

Paso 4: Simplificar el numerador:

$$4x^2 - 4x + 5x - 3 + 5 = 4x^2 + x + 2$$

Paso 5: Escribir la fracción simplificada:

$$\frac{4x^2 + x + 2}{(x+1)(x-1)}$$

p.) Para operar $\frac{3x}{x^2-4} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{5}{x^2+2x+1}$ se deben considerar los siguientes pasos:

Paso 1: Identificar las fórmulas notables en los denominadores:

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

Paso 2: Encontrar el común denominador:

El común denominador de $(x-2)(x+2)$, $(x-1)(x+1)$ y $(x+1)^2$ es $(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)^2$.

Paso 3: Reescribir cada fracción con el común denominador:

$$\frac{3x}{x^2-4} = \frac{3x\cdot(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)} = \frac{3x(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)} = \frac{3x^3-3x}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{2\cdot(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{2x^2-8}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{5}{x^2+2x+1} = \frac{5\cdot(x-2)}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{5(x-2)}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{5(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}$$

Paso 4: Restar y sumar las fracciones:

$$\frac{3x^3-3x}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)} - \frac{2x^2-8}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)} + \frac{5(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}$$

Paso 5: Simplificar el numerador:

$$= \frac{3x^3-3x-2x^2+8+5(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}$$

Distribuir y combinar términos semejantes:

$$= \frac{3x^3-2x^2-3x+8+5x-10}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{3x^3-2x^2+2x-2}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}$$

Paso 6: Escribir la fracción simplificada:

$$\frac{3x^3-2x^2+2x-2}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}$$

q.) Para operar $\dfrac{5}{x^3-1}-\dfrac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+x+1)}+4$ se deben considerar los siguientes pasos:

Paso 1: Identificar las fórmulas notables y los factores en los denominadores:

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

Paso 2: Encontrar el común denominador:

El común denominador de x^3-1 y $(x^2-1)(x^2+x+1)$ es $(x-1)(x^2+x+1)(x+1)$.

Paso 3: Reescribir cada fracción con el común denominador:

$$\frac{5}{x^3-1}=\frac{5}{(x-1)(x^2+x+1)}\cdot\frac{(x+1)}{(x+1)}=\frac{5(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)}$$

$$\frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+x+1)}=\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$4=\frac{4(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

Paso 4: Reescribir las fracciones con el común denominador:

$$\frac{5(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)}-\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)}+\frac{4(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)}$$

Paso 5: Simplificar el numerador:

$$\frac{5(x+1)-(2x+3)+4(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)}$$

Simplificar los términos:

Numerador:

$$5(x+1)-(2x+3)+4(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$$

Distribuir y combinar términos semejantes:

$$=5x+5-2x-3+4(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$$

Expandir y simplificar:

$$=3x+2+4(x^3+x^2+x-x-1)$$

$$=3x+2+4(x^3+x^2-1)$$

$$= 3x + 2 + 4x^3 + 4x^2 - 4$$
$$= 4x^3 + 4x^2 + 3x - 2$$

Paso 6: Escribir la fracción simplificada:

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + 3x - 2}{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)}$$

Así, la operación de fracciones algebraicas queda simplificada de la siguiente manera:

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + 3x - 2}{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)}$$

r.) Para operar $\frac{2x+1}{(x^2-1)(x^3+1)} + \frac{3x-2}{(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)} + \frac{5x-4}{x^2+x+1}$ se deben considerar los siguientes pasos:

Paso 1: Identificar las fórmulas notables y los factores en los denominadores:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1)$$
$$x^2 + x + 1 \quad \text{(ya es un polinomio notable)}$$

Paso 2: Encontrar el común denominador:

El común denominador de $(x^2-1)(x^3+1)$, $(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ y x^2+x+1 es $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

Paso 3: Reescribir cada fracción con el común denominador:

$$\frac{2x+1}{(x^2-1)(x^3+1)} = \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2+x+1} = \frac{(2x+1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)^2(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

$$\frac{3x-2}{(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = \frac{3x-2}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\frac{5x-4}{x^2+x+1} = \frac{5x-4}{x^2+x+1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(5x-4)(x-1)(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

Paso 4: Reescribir las fracciones con el común denominador:

$$\frac{(2x+1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)^2(x^2-x+1)(x^2+x+1)} + \frac{3x-2}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)} +$$

$$\frac{(5x-4)(x-1)(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

Paso 5: Simplificar el numerador:

$$\frac{(2x+1)(x^2+x+1) + (3x-2)(x+1) + (5x-4)(x-1)(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

Distribuir y combinar términos semejantes en el numerador:

$$(2x+1)(x^2+x+1)+(3x-2)(x+1)+(5x-4)(x-1)(x+1)(x^2-x+1)$$

Distribuir los términos:

$$=(2x^3+2x^2+2x+x^2+x+1)+(3x^2+3x-2x-2)+(5x-4)(x^3-x)$$

Simplificar cada término:

$$=2x^3+3x^2+3x+1+3x^2+x-2+5x^4-5x$$

Combinar términos semejantes:

$$=5x^4+2x^3+6x^2-x-1$$

Paso 6: Escribir la fracción simplificada:

$$\frac{5x^4+2x^3+6x^2-x-1}{(x-1)(x+1)^2(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

s.) Para resolver la expresión

$$\left(\frac{2}{-6x-x^2+x^3}-\frac{x}{2x^2+x^3}\right)\left(\frac{x}{x^2-9}\right)^{-1},$$

se siguen los siguientes pasos:

Paso 1: Simplificación de la expresión dentro de los paréntesis

Primero, se simplifica cada fracción por separado:

1. Simplificar $\frac{2}{-6x-x^2+x^3}$:

$$-6x-x^2+x^3=x^3-x^2-6x=x(x^2-x-6)=x(x-3)(x+2)$$

Entonces,

$$\frac{2}{-6x-x^2+x^3}=\frac{2}{x(x-3)(x+2)}$$

2. Simplificar $\frac{x}{2x^2+x^3}$:

$$2x^2+x^3=x^2(2+x)$$

Entonces,

$$\frac{x}{2x^2+x^3}=\frac{x}{x^2(2+x)}=\frac{1}{x(2+x)}$$

Ahora, se resta las dos fracciones simplificadas:

$$\frac{2}{x(x-3)(x+2)}-\frac{1}{x(2+x)}$$

Para realizar la resta, se necesita un denominador común:

El denominador común es $x(x-3)(x+2)(2+x)$.

Se reescribe cada fracción con el denominador común:

$$\frac{2(2+x)}{x(x-3)(x+2)(2+x)} - \frac{(x-3)(x+2)}{x(x-3)(x+2)(2+x)}$$

Se simplifican los numeradores:

$$\frac{2(2+x)-(x-3)(x+2)}{x(x-3)(x+2)(2+x)}$$

Se expande y combinan términos semejantes:

$$2(2+x) = 4+2x$$

$$(x-3)(x+2) = x^2+2x-3x-6 = x^2-x-6$$

Entonces, se tiene:

$$\frac{4+2x-(x^2-x-6)}{x(x-3)(x+2)(2+x)} = \frac{4+2x-x^2+x+6}{x(x-3)(x+2)(2+x)} = \frac{-x^2+3x+10}{x(x-3)(x+2)(2+x)}$$

Paso 2: Inversión de la segunda fracción

La segunda parte de la expresión es $\left(\frac{x}{x^2-9}\right)^{-1}$:

$$\frac{x}{x^2-9} = \frac{x}{(x-3)(x+3)}$$

La inversión de esta fracción es:

$$\left(\frac{x}{(x-3)(x+3)}\right)^{-1} = \frac{(x-3)(x+3)}{x}$$

Paso 3: Multiplicación de las fracciones

Finalmente, se multiplican las dos fracciones resultantes:

$$\frac{-x^2+3x+10}{x(x-3)(x+2)(2+x)} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{x}$$

Simplificando:

$$= \frac{(-x^2+3x+10)(x-3)(x+3)}{x^2(x-3)(x+2)(2+x)}$$

Se cancelan los factores comunes:

$$= \frac{(-x^2+3x+10)(x+3)}{x(x+2)(2+x)}$$

Paso 4: Expansión y simplificación (si es posible)

Se expande el numerador:

$$\begin{aligned}(-x^2+3x+10)(x+3) &= -x^3-3x^2+10x+30+3x^2+9x \\ &= -x^3+19x+30\end{aligned}$$

Entonces, la expresión final es:

$$\frac{-x^3+19x+30}{x(x+2)(2+x)}$$

t.) Para resolver la expresión:

$$\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right)\left(\frac{x-y}{x^2-y^2}-\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}\right)$$

se siguen los siguientes pasos:

Paso 1: Simplificación de la primera parte $\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right)$

Se simplifica la expresión:

$$\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}$$

Para restar estas fracciones, se necesita un denominador común:

$$\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}=\frac{(x-y)-(x+y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{x-y-x-y}{(x+y)(x-y)}=\frac{-2y}{(x+y)(x-y)}$$

Se simplifica el denominador usando la identidad de productos notables:

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

Entonces, la expresión simplificada es:

$$\frac{-2y}{x^2-y^2}$$

Paso 2: Simplificación de la segunda parte $\left(\frac{x-y}{x^2-y^2}-\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}\right)$

Se simplificamos la expresión:

$$\frac{x-y}{x^2-y^2}-\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}$$

Se sabe que:

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

y

$$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$$

Entonces, se reescriben las fracciones:

$$\frac{x-y}{(x+y)(x-y)}-\frac{x-y}{(x-y)^2}$$

Simplificando:

$$\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}$$

Restando estas fracciones con un denominador común:

$$\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}=\frac{(x-y)-(x+y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{-2y}{x^2-y^2}$$

Paso 3: Multiplicación de las dos partes simplificadas

Se reescribe la expresión completa con las simplificaciones obtenidas:

$$\left(\frac{-2y}{x^2-y^2}\right)\left(\frac{-2y}{x^2-y^2}\right)$$

Multiplicando las fracciones:

$$\frac{(-2y)(-2y)}{(x^2-y^2)(x^2-y^2)}=\frac{4y^2}{(x^2-y^2)^2}$$

Expresión final

La expresión simplificada es:

$$\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right)\left(\frac{x-y}{x^2-y^2}-\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}\right)=\frac{4y^2}{(x^2-y^2)^2}$$

4.13 Ejercicio para el lector

4.14

a.)

$$\begin{aligned}\frac{-3x^6}{\sqrt[4]{x^{22}}}&=\frac{-3x^6}{\sqrt[4]{x^{22}}}\cdot\frac{\sqrt[4]{x^6}}{\sqrt[4]{x^6}}\\&=\frac{-3x^6\sqrt[4]{x^6}}{\sqrt[4]{x^{28}}}\\&=\frac{-3x^6\cdot x^{3/2}}{x^7}\\&=-3\sqrt{x}\end{aligned}$$

b.)

$$\frac{7x}{\sqrt{6x+2}-\sqrt{3x+2}}=\frac{7x}{\sqrt{6x+2}-\sqrt{3x+2}}\cdot\frac{\sqrt{6x+2}+\sqrt{3x+2}}{\sqrt{6x+2}+\sqrt{3x+2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{7x(\sqrt{6x+2}+\sqrt{3x+2})}{(6x+2)-(3x+2)} \\
&= \frac{7x(\sqrt{6x+2}+\sqrt{3x+2})}{6x+2-3x-2} \\
&= \frac{7x(\sqrt{6x+2}+\sqrt{3x+2})}{3x} \\
&= \frac{7}{3}(\sqrt{6x+2}+\sqrt{3x+2})
\end{aligned}
$$

c.)

$$
\begin{aligned}
\frac{x+5}{\sqrt{-2x+2}-\sqrt{-3x-3}} &= \frac{x+5}{\sqrt{-2x+2}-\sqrt{-3x-3}} \cdot \frac{\sqrt{-2x+2}+\sqrt{-3x-3}}{\sqrt{-2x+2}+\sqrt{-3x-3}} \\
&= \frac{(x+5)(\sqrt{-2x+2}+\sqrt{-3x-3})}{-2x+2-(-3x-3)} \\
&= \frac{(x+5)(\sqrt{-2x+2}+\sqrt{-3x-3})}{x+5} \\
&= \sqrt{-2x+2}+\sqrt{-3x-3}
\end{aligned}
$$

d.)

$$
\begin{aligned}
\frac{x-1}{\sqrt{8x+1}-\sqrt{13x-4}} &= \frac{x-1}{\sqrt{8x+1}-\sqrt{13x-4}} \cdot \frac{\sqrt{8x+1}+\sqrt{13x-4}}{\sqrt{8x+1}+\sqrt{13x-4}} \\
&= \frac{(x-1)(\sqrt{8x+1}+\sqrt{13x-4})}{8x+1-(13x-4)} \\
&= \frac{(x-1)(\sqrt{8x+1}+\sqrt{13x-4})}{8x+1-13x+4} \\
&= \frac{(x-1)(\sqrt{8x+1}+\sqrt{13x-4})}{-5x+5} \\
&= \frac{(x-1)(\sqrt{8x+1}+\sqrt{13x-4})}{-5(x-1)} \\
&= -\frac{1}{5}(\sqrt{8x+1}+\sqrt{13x-4})
\end{aligned}
$$

e.)

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2-4}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}} &= \frac{x^2-4}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}} \\
&= \frac{(x^2-4)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}{x+1-(2x-1)} \\
&= \frac{(x^2-4)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}{x+1-2x+1} \\
&= \frac{(x^2-4)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}{-x+2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}{-(x-2)}\\
&= -(x+2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})
\end{aligned}
$$

f.)

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+2}} &= \frac{x^2-5x+6}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+2}}\\
&= \frac{(x^2-5x+6)(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+2})}{2x-1-(x+2)}\\
&= \frac{(x^2-5x+6)(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+2})}{2x-1-x-2}\\
&= \frac{(x^2-5x+6)(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+2})}{x-3}\\
&= \frac{(x-2)(x-3)(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+2})}{x-3}\\
&= (x-2)(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+2})
\end{aligned}
$$

4.14 Ejercicio para el lector

4.15

a.)

$$
\begin{aligned}
\frac{-3x^6}{\sqrt[4]{x^{22}}} &= \frac{-3x^6}{\sqrt[4]{x^{5\cdot 4+2}}}\\
&= \frac{-3x^6}{\sqrt[4]{(x^5)^4\cdot x^2}}\\
&= \frac{-3x^6}{x^5\sqrt[4]{x^2}}\\
&= \frac{-3x}{\sqrt[4]{x^2}}\\
&= \frac{-3x}{x^{\frac{2}{4}}}\\
&= \frac{-3x}{x^{\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{-3x}{\sqrt{x}}\\
&= \frac{-3x}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\\
&= \frac{-3x\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}\\
&= \frac{-3x\sqrt{x}}{x}
\end{aligned}
$$

$$= -3\sqrt{x}$$

b.)

$$\begin{aligned}
\frac{7x}{\sqrt{6x+2}-\sqrt{3x+2}} &= \frac{7x}{\sqrt{6x+2}-\sqrt{3x+2}} \cdot \frac{\sqrt{6x+2}+\sqrt{3x+2}}{\sqrt{6x+2}+\sqrt{3x+2}} \\
&= \frac{7x(\sqrt{6x+2}+\sqrt{3x+2})}{(\sqrt{6x+2})^2-(\sqrt{3x+2})^2} \\
&= \frac{7x(\sqrt{6x+2}+\sqrt{3x+2})}{(6x+2)-(3x+2)} \\
&= \frac{7x(\sqrt{6x+2}+\sqrt{3x+2})}{6x+2-3x-2} \\
&= \frac{7x(\sqrt{6x+2}+\sqrt{3x+2})}{3x} \\
&= \frac{7(\sqrt{6x+2}+\sqrt{3x+2})}{3}
\end{aligned}$$

c.)

$$\begin{aligned}
\frac{x+5}{\sqrt{-2x+2}-\sqrt{-3x-3}} &= \frac{x+5}{\sqrt{-2x+2}-\sqrt{-3x-3}} \cdot \frac{\sqrt{-2x+2}+\sqrt{-3x-3}}{\sqrt{-2x+2}+\sqrt{-3x-3}} \\
&= \frac{(x+5)(\sqrt{-2x+2}+\sqrt{-3x-3})}{(\sqrt{-2x+2})^2-(\sqrt{-3x-3})^2} \\
&= \frac{(x+5)(\sqrt{-2x+2}+\sqrt{-3x-3})}{(-2x+2)-(-3x-3)} \\
&= \frac{(x+5)(\sqrt{-2x+2}+\sqrt{-3x-3})}{-2x+2+3x+3} \\
&= \frac{(x+5)(\sqrt{-2x+2}+\sqrt{-3x-3})}{x+5} \\
&= \sqrt{-2x+2}+\sqrt{-3x-3}
\end{aligned}$$

d.)

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{\sqrt{8x+1}-\sqrt{-2x-1}} &= \frac{x-1}{\sqrt{8x+1}-\sqrt{-2x-1}} \cdot \frac{\sqrt{8x+1}+\sqrt{-2x-1}}{\sqrt{8x+1}+\sqrt{-2x-1}} \\
&= \frac{(x-1)(\sqrt{8x+1}+\sqrt{-2x-1})}{(\sqrt{8x+1})^2-(\sqrt{-2x-1})^2} \\
&= \frac{(x-1)(\sqrt{8x+1}+\sqrt{-2x-1})}{(8x+1)-(-2x-1)} \\
&= \frac{(x-1)(\sqrt{8x+1}+\sqrt{-2x-1})}{8x+1+2x+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(x-1)(\sqrt{8x+1}+\sqrt{-2x-1})}{10x+2}\\
&= \frac{(x-1)(\sqrt{8x+1}+\sqrt{-2x-1})}{2(5x+1)}
\end{aligned}
$$

e.)

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+2}} &= \frac{(x-3)(x-2)}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+2}}\\
&= \frac{(x-3)(x-2)(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+2})}{x-3}\\
&= (x-2)(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+2})
\end{aligned}
$$

f.)

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}} &= \frac{x^2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}}\\
&= \frac{x^2(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{2x-1})^2}\\
&= \frac{x^2(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}{(x+1)-(2x-1)}\\
&= \frac{x^2(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}{-x+2}
\end{aligned}
$$

Observación: Note que:

$$
\frac{1}{\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d}} = \frac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}}{(a-c)x+(b-d)}
$$

g.)

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{13\sqrt{4-x}+5} &= \frac{2}{13\sqrt{4-x}+5} \cdot \frac{13\sqrt{4-x}-5}{13\sqrt{4-x}-5}\\
&= \frac{2(13\sqrt{4-x}-5)}{(13\sqrt{4-x})^2-(5)^2}\\
&= \frac{16\sqrt{4-x}-10}{169(4-x)-25}\\
&= \frac{16\sqrt{4-x}-10}{-169x+651}
\end{aligned}
$$

h.)

$$
\frac{12}{3\sqrt{5}-7} = \frac{12}{3\sqrt{5}-7} \cdot \frac{3\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}+7}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{12(3\sqrt{5}+7)}{(3\sqrt{5})^2-(7)^2}\\
&= \frac{12(3\sqrt{5}+7)}{9\cdot 5-49}\\
&= \frac{12(3\sqrt{5}+7)}{45-49}\\
&= \frac{12(3\sqrt{5}+7)}{-4}\\
&= -3(3\sqrt{5}+7)
\end{aligned}
$$

i.)

$$
\begin{aligned}
\frac{15}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}} &= \frac{15}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{(\sqrt[3]{3})^2-(\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2})+(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{3})^2-(\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2})+(\sqrt[3]{2})^2}\\
&= \frac{15((\sqrt[3]{3})^2-(\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2})+(\sqrt[3]{2})^2)}{3+2}\\
&= \frac{15(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2})}{5}\\
&= 3(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})
\end{aligned}
$$

Observación: Note que:

$$
\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x+y}
$$

j.)

$$
\begin{aligned}
\frac{12}{3\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{2}} &= \frac{12}{\sqrt[3]{3^3\cdot 3}-\sqrt[3]{4^3\cdot 2}}\\
&= \frac{12}{\sqrt[3]{3^3\cdot 3}-\sqrt[3]{4^3\cdot 2}}\cdot\frac{(\sqrt[3]{3^3\cdot 3})^2+(\sqrt[3]{3^3\cdot 3})(\sqrt[3]{4^3\cdot 2})+(\sqrt[3]{4^3\cdot 2})^2}{(\sqrt[3]{3^3\cdot 3})^2+(\sqrt[3]{3^3\cdot 3})(\sqrt[3]{4^3\cdot 2})+(\sqrt[3]{4^3\cdot 2})^2}\\
&= \frac{12((\sqrt[3]{3^3\cdot 3})^2+(\sqrt[3]{3^3\cdot 3})(\sqrt[3]{4^3\cdot 2})+(\sqrt[3]{4^3\cdot 2})^2)}{3^3\cdot 3-4^3\cdot 2}\\
&= \frac{12((3\sqrt[3]{3})^2+(3\sqrt[3]{3})(4\sqrt[3]{2})+(4\sqrt[3]{2})^2)}{3^4-(2^2)^3\cdot 2}\\
&= \frac{12((3\sqrt[3]{3})^2+(3\sqrt[3]{3})(4\sqrt[3]{2})+(4\sqrt[3]{2})^2)}{81-(2^6\cdot 2}\\
&= \frac{12(9\sqrt[3]{9}+12\sqrt[3]{6}+16\sqrt[3]{4})}{81-2^7}\\
&= \frac{12(9\sqrt[3]{9}+12\sqrt[3]{6}+16\sqrt[3]{4})}{81-128}\\
&= \frac{12(9\sqrt[3]{9}+12\sqrt[3]{6}+16\sqrt[3]{4})}{81-128}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{-12(9\sqrt[3]{9}+12\sqrt[3]{6}+16\sqrt[3]{4})}{47}$$

Observación: Note que:

$$\frac{1}{a\sqrt[3]{b}-c\sqrt[3]{d}} = \frac{a^2\sqrt[3]{b^2}+ac\sqrt[3]{bd}+c^2\sqrt[3]{d^2}}{a^3\cdot b-c^3\cdot d}$$

k.)

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-4x-5}{\sqrt[3]{x^2+3x+6}-\sqrt[3]{x+5}} &= \frac{(x-5)(x+1)}{\sqrt[3]{x^2+3x+6}-\sqrt[3]{x+5}}\cdot\frac{(\sqrt[3]{x^2+3x+6})^2+\sqrt[3]{x^2+3x+6}\cdot\sqrt[3]{x+5}+(\sqrt[3]{x+5})^2}{(\sqrt[3]{x^2+3x+6})^2+\sqrt[3]{x^2+3x+6}\cdot\sqrt[3]{x+5}+(\sqrt[3]{x+5})^2}\\
&= \frac{(x-5)(x+1)\left[(\sqrt[3]{x^2+3x+6})^2+\sqrt[3]{x^3+8x^2+21x+30}+(\sqrt[3]{x+5})^2\right]}{x^2+2x+1}\\
&= \frac{(x-5)\left[(\sqrt[3]{x^2+3x+6})^2+\sqrt[3]{x^3+8x^2+21x+30}+(\sqrt[3]{x+5})^2\right]}{x+1}
\end{aligned}$$

4.15 Ejercicio para el lector

4.16

a.)

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{y^2(x-2)^3}}{(x-2)^2} &= \frac{y\sqrt{(x-2)^2\cdot(x-2)}}{(x-2)^2}\\
&= \frac{y(x-2)\sqrt{x-2}}{(x-2)^2}\\
&= \frac{y\sqrt{x-2}}{x-2}\\
&= \frac{y\sqrt{x-2}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}\\
&= \frac{y\cdot(x-2)}{(x-2)\sqrt{x-2}}\\
&= \frac{y}{\sqrt{x-2}}
\end{aligned}$$

b.)

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^3(x-5)^5}}{x(x-5)^3} &= \frac{\sqrt{x^2\cdot x\cdot(x-5)^4\cdot(x-5)}}{x(x-5)^3}\\
&= \frac{x(x-5)^2\sqrt{x\cdot(x-5)}}{x(x-5)^3}\\
&= \frac{\sqrt{x\cdot(x-5)}}{x-5}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{x\cdot(x-5)}}{x-5}\cdot\frac{\sqrt{x\cdot(x-5)}}{\sqrt{x\cdot(x-5)}}\\
&= \frac{x\cdot(x-5)}{(x-5)\sqrt{x\cdot(x-5)}}\\
&= \frac{x}{\sqrt{x\cdot(x-5)}}
\end{aligned}
$$

c.)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x-5} &= \frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x-5}}{1}\cdot\frac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-5}}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-5}}\\
&= \frac{(2x-1)-(2x-5)}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-5}}\\
&= \frac{2x-1-2x+5}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-5}}\\
&= \frac{4}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-5}}
\end{aligned}
$$

d.)

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2x+4}-\sqrt{3x+3}}{x^2-1} &= \frac{\sqrt{2x+4}-\sqrt{3x+3}}{x^2-1}\cdot\frac{\sqrt{2x+4}+\sqrt{3x+3}}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{3x+3}}\\
&= \frac{(2x+4)-(3x+3)}{(x^2-1)(\sqrt{2x+4}+\sqrt{3x+3})}\\
&= \frac{2x+4-3x-3}{(x^2-1)(\sqrt{2x+4}+\sqrt{3x+3})}\\
&= \frac{-x+1}{(x+1)(x-1)(\sqrt{2x+4}+\sqrt{3x+3})}\\
&= \frac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)(\sqrt{2x+4}+\sqrt{3x+3})}\\
&= -\frac{1}{(x+1)(\sqrt{2x+4}+\sqrt{3x-3})}
\end{aligned}
$$

e.)

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3x^2-x-1}-\sqrt{2x^2-1}}{7x^2-6x-1} &= \frac{\sqrt{3x^2-x-1}-\sqrt{2x^2-1}}{7x^2-6x-1}\cdot\frac{\sqrt{3x^2-x-1}+\sqrt{2x^2-1}}{\sqrt{3x^2-x-1}+\sqrt{2x^2-1}}\\
&= \frac{(3x^2-x-1)-(2x^2-1)}{(7x^2-6x-1)(\sqrt{3x^2-x-1}+\sqrt{2x^2-1})}\\
&= \frac{3x^2-x-1-2x^2+1}{(7x^2-6x-1)(\sqrt{3x^2-x-1}+\sqrt{2x^2-1})}\\
&= \frac{x^2-x}{(7x+1)(x-1)(\sqrt{3x^2-x-1}+\sqrt{2x^2-1})}\\
&= \frac{x(x-1)}{(7x+1)(x-1)(\sqrt{3x^2-x-1}+\sqrt{2x^2-1})}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{x}{(7x+1)(\sqrt{3x^2-x-1}+\sqrt{2x^2-1})}$$

4.16 Ejercicio para el lector

Soluciones del Capítulo 5

5.1

a.) Para despejar n en la ecuación

$$\frac{T+2}{8n} = \frac{R}{e+\frac{E}{2n}},$$

Se siguen los siguientes pasos:

1. Eliminar denominadores: Se multiplica a ambos lados de la ecuación por $8n$ y $e+\frac{E}{2n}$ para eliminar los denominadores.

$$(T+2)\left(e+\frac{E}{2n}\right) = 8nR$$

2. Distribuir $(T+2)$**:**

$$(T+2)e+\frac{(T+2)E}{2n} = 8nR$$

3. Aislar el término con n **en el denominador:** Se multiplica a ambos lados de la ecuación por $2n$ para despejar el denominador.

$$2n(T+2)e+(T+2)E = 16n^2R$$

4. Reordenar la ecuación: Se llevan todos los términos al lado izquierdo para obtener una ecuación cuadrática en términos de n.

$$16n^2R-2n(T+2)e-(T+2)E = 0$$

5.Resolver la ecuación cuadrática: Esta es una ecuación cuadrática en n de la forma $an^2+bn+c=0$, con:

$$a = 16R, \quad b = -2(T+2)e, \quad c = -(T+2)E$$

Se usa la fórmula cuadrática:

$$n = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Sustituyendo los valores de a, b, y c se tiene:

$$n = \frac{2(T+2)e \pm \sqrt{(2(T+2)e)^2 + 4 \cdot 16R \cdot (T+2)E}}{2 \cdot 16R}$$

Simplificando:

$$n = \frac{(T+2)e \pm \sqrt{(T+2)^2 e^2 + 16R(T+2)E}}{16R}$$

Este es el valor de n en términos de los demás parámetros de la ecuación.

b.) Para despejar β en la ecuación

$$M = \frac{9E\beta}{\alpha\beta - k}$$

Seguimos los siguientes pasos:

1. Multiplicar ambos lados por el denominador $\alpha\beta - k$ para eliminar la fracción:

$$M(\alpha\beta - k) = 9E\beta$$

2. Distribuir M en el lado izquierdo:

$$M\alpha\beta - Mk = 9E\beta$$

3. Reorganizar los términos para aislar los términos que contienen β:

$$M\alpha\beta - 9E\beta = Mk$$

4. Factorizar β en el lado izquierdo:

$$\beta(M\alpha - 9E) = Mk$$

5. Despejar β dividiendo ambos lados por $M\alpha - 9E$:

$$\beta = \frac{Mk}{M\alpha - 9E}.$$

Por lo tanto, el valor de β en términos de M, E, α, y k es:

$$\beta = \frac{Mk}{M\alpha - 9E}.$$

c.)

$$\begin{aligned}
P = \frac{k}{\frac{mk+nl}{mn} - k} &\Leftrightarrow P = \frac{k}{\frac{mk+nl-mnk}{mn}} \\
&\Leftrightarrow P = \frac{kmn}{mk+nl-mnk} \\
&\Leftrightarrow P(mk+nl-mnk) = kmn
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ Pmk+Pnl-Pmnk=kmn\\
&\Leftrightarrow\ Pmk-Pmnk-kmn=-Pnl\\
&\Leftrightarrow\ k(Pm-Pmn-mn)=-Pnl\\
&\Leftrightarrow\ k=\frac{-Pnl}{Pm-Pmn-mn}
\end{aligned}$$

d.)

$$\begin{aligned}
\frac{4S}{rR+r}=\frac{rR-r}{2r}+2Sr &\Leftrightarrow\ \frac{4S}{rR+r}=\frac{R}{2}-\frac{1}{2}+2Sr\\
&\Leftrightarrow\ \frac{4S}{r(R+1)=\dfrac{R-1}{2}+2Sr}\\
&\Leftrightarrow\ \frac{4S}{R+1}=2Sr^2-\left(\frac{R-1}{2}\right)r\\
&\Leftrightarrow\ \frac{4S}{2S(R+1)}=r^2-\left(\frac{R-1}{4S}\right)r\\
&\Leftrightarrow\ \frac{2}{R+1}=\left(\frac{R-1}{8S}\right)^2=r^2-\left(\frac{R-1}{4S}\right)r+\left(\frac{R-1}{8S}\right)^2\\
&\Leftrightarrow\ \frac{2}{R+1}+\left(\frac{R-1}{8S}\right)^2=\left(r-\frac{R-1}{8S}\right)^2\\
&\Leftrightarrow\ \pm\sqrt{\frac{2}{R+1}+\left(\frac{R-1}{8S}\right)^2}=r-\frac{R-1}{8S}\\
&\Leftrightarrow\ \pm\sqrt{\frac{2}{R+1}+\left(\frac{R-1}{8S}\right)^2}+\frac{R-1}{8S}=r
\end{aligned}$$

5.2 Sustituyendo $x=\dfrac{c-e}{d-f}$ en la ecuación dada se tiene que:

$$\begin{aligned}
e-fx=c-dx \Leftrightarrow e-f\left(\frac{c-e}{d-f}\right)&=c-d\left(\frac{c-e}{d-f}\right)\\
=\Leftrightarrow \frac{de-cf}{d-f}&=\frac{de-cf}{d-f}
\end{aligned}$$

Lo cual demuestra que $x=\dfrac{c-e}{d-f}$ es solución de la ecuación dada.

5.3 Sustituyendo $x=\dfrac{r-t}{s-u}$ en la ecuación dada se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r-sx}=\frac{1}{t-ux} &\Leftrightarrow \frac{1}{r-s\left(\dfrac{r-t}{s-u}\right)}=\frac{1}{t-u\left(\dfrac{r-t}{s-u}\right)}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\dfrac{rs-ru-sr+st}{s-u}}=\frac{1}{\dfrac{st-ut-ur+ut}{s-u}}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{-ru+st}{s-u}} = \frac{1}{\frac{st-ur}{s-u}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{s-u}{st-ru} = \frac{s-u}{st-ru}$$

Lo cual demuestra que $x = \dfrac{r-t}{s-u}$ es solución de la ecuación dada.

5.4

a.) Si la ecuación dado se iguala a cero se sigue

- $\dfrac{ax^2+b}{b} = 0 \Leftrightarrow ax^2+b = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ En tal caso siempre y cuando $a \neq 0$ y $\dfrac{b}{a} \geq 0$.
- $a - \dfrac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{ax-1}{a} = \Leftrightarrow ax-1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{a}$ En tal caso siempre y cuando $x \neq 0$.
- $a+bx = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{a}{b}$ En tal caso siempre y cuando $b \neq 0$.

Por ende
$$S = \left\{ \pm\sqrt{\frac{b}{a}}, \frac{1}{a}, -\frac{a}{b} \right\}$$
Considerando las restricciones anteriores.

b.) Si la ecuación dado se iguala a cero se sigue

- $xn-1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{n}$ con $n \neq 0$.
- $m-9x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{m}{9}$ sin otra restricción.
- $m-1+\sqrt{n}x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1-n}{\sqrt{n}}$ con $n > 0$.

Por ende
$$S = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{m}{9}, \frac{1-m}{\sqrt{n}} \right\}$$
Considerando las restricciones anteriores.

c.) Si la ecuación se iguala a cero se sigue

- $2a-nx = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2a}{n}$ con $n \neq 0$.
- $a^2+xm^2+bx = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{a^2}{m^2+b}$ con $m^2+b = 0$.

Por ende
$$S = \left\{ \frac{2a}{n}, -\frac{a^2}{m^2+b} \right\}$$
Considerando las restricciones anteriores.

5.4 Ejercicio para el lector

5.5 En este caso, la ecuación dada se puede transformar en

$$\frac{A}{x} - \frac{B}{b-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{A(B-x)-Bx)}{x(B-x)} = 0$$

Simplificando se tiene

$$\frac{AB-Ax-Bx}{x(B-x)}=0 \Rightarrow AB-Ax-Bx=0 \text{ si } x\neq 0, x\neq B$$

De esta forma

$$x=AB-x(A+B)=0 \Leftrightarrow x=\frac{AB}{A+B}$$

siempre y cuando $A+B\neq 0$. Así

$$S=\left\{\frac{AB}{A+B}\right\}$$

considerando que $A+B\neq 0$, $x\neq B$ y $x\neq 0$.

5.1 Ejercicio para el lector

5.6

a.)

Para resolver la ecuación $y(y+1)+4y=y^2-9$ se siguen los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}
y(y+1)+4y &= y^2-9\\
y^2+y+4y &= y^2-9\\
y^2+5y &= y^2-9\\
y^2+5y-y^2 &= y^2-9-y^2\\
5y &= -9\\
y &= -\frac{9}{5}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es:

$$S=\left\{-\frac{9}{5}\right\}$$

b.) Para resolver la ecuación $(x-7)(25x-8)=(5x-4)^2$ se siguen los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}
(x-7)(25x-8) &= (5x-4)^2\\
(25x^2-8x-175x+56) &= (25x^2-40x+16)\\
25x^2-183x+56 &= 25x^2-40x+16\\
25x^2-25x^2-183x+56 &= -40x+16-25x^2+25x^2\\
-183x+56 &= -40x+16\\
-183x+40x+56 &= 16\\
-143x+56 &= 16\\
-143x &= 16-56\\
-143x &= -40\\
x &= \frac{-40}{-143}
\end{aligned}$$

$$x = \frac{40}{143}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es:

$$\mathbb{S} = \left\{ \frac{40}{143} \right\}$$

c.) Para resolver la ecuación $\frac{2}{7}n - \frac{1}{4}(4+n) = -2n+5$ se siguen los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{7}n - \frac{1}{4}(4+n) &= -2n+5 \\
\frac{2}{7}n - \left(\frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{1}{4}\cdot n\right) &= -2n+5 \\
\frac{2}{7}n - 1 - \frac{1}{4}n &= -2n+5 \\
\left(\frac{2}{7}n - \frac{1}{4}n\right) - 1 &= -2n+5 \\
\left(\frac{8}{28}n - \frac{7}{28}n\right) - 1 &= -2n+5 \quad \text{(Se encuentra un común denominador)} \\
\frac{1}{28}n - 1 &= -2n+5 \\
\frac{1}{28}n + 2n &= 5+1 \quad \text{(Se suma } 2n \text{ a ambos lados y se suma 1 a ambos lados)} \\
\frac{1}{28}n + 2n &= 6 \\
\left(\frac{1}{28} + 2\right) n &= 6 \quad \text{(Se factoriza un } n\text{)} \\
\left(\frac{1}{28} + \frac{56}{28}\right) n &= 6 \quad \text{(Se convierte 2 a } \tfrac{56}{28} \text{ para sumar)} \\
\frac{57}{28}n &= 6 \\
n &= \frac{6\times 28}{57} \quad \text{(Se multiplica ambos lados por } \tfrac{28}{57}\text{)} \\
n &= \frac{168}{57} \\
n &= \frac{168\div 3}{57\div 3} \quad \text{(Se simplifica dividiendo numerador y denominador entre 3)} \\
n &= \frac{56}{19}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es:

$$\mathbb{S} = \left\{ \frac{56}{19} \right\}$$

d.)

Para resolver la ecuación $2w(w-2) - 3(2w-1) = 5 + w(1+2w)$ se siguen los siguientes pasos:

$$2w(w-2) - 3(2w-1) = 5 + w(1+2w)$$

$$\begin{aligned}
2w^2-4w-6w+3 &= 5+w+2w^2\\
2w^2-10w+3 &= 2w^2+w+5\\
2w^2-2w^2-10w-w+3-5 &= 0\\
-11w-2 &= 0\\
-11w &= 2\\
w &= -\frac{2}{11}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es:

$$\mathbb{S}=\left\{-\frac{2}{11}\right\}$$

e.) Para resolver la ecuación $2x(x+3)-2x^2=-7-5x$ se siguen los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}
2x(x+3)-2x^2 &= -7-5x\\
2x^2+6x-2x^2 &= -7-5x\\
(2x^2-2x^2)+6x &= -7-5x\\
6x &= -7-5x\\
6x+5x &= -7\\
11x &= -7\\
x &= -\frac{7}{11}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es:

$$\mathbb{S}=\left\{-\frac{7}{11}\right\}$$

f.) Para resolver la ecuación $12m^2-8m+15+m(20m+7)=-8\left[-(2m+3)^2+3m\right]$ se siguen los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}
12m^2-8m+15+m(20m+7) &= -8\left[-(2m+3)^2+3m\right]\\
12m^2-8m+15+20m^2+7m &= -8\left[-(4m^2+12m+9)+3m\right]\\
(12m^2+20m^2)+(-8m+7m)+15 &= -8\left[-4m^2-9m-9\right]\\
32m^2-m+15 &= -8(-4m^2-9m-9)\\
32m^2-m+15 &= 32m^2+72m+72\\
32m^2-m+15-32m^2 &= 32m^2+72m+72-32m^2\\
-m+15 &= 72m+72\\
-m-72m+15 &= 72m-72m+72\\
-73m+15 &= 72\\
-73m &= 72-15\\
-73m &= 57\\
m &= \frac{57}{-73}
\end{aligned}$$

$$m = -\frac{57}{73}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es:

$$\mathbb{S} = \left\{-\frac{57}{73}\right\}$$

g.)
Para resolver la ecuación $4x(2x-3)+4x = -4x(1-2x)-10x-7$ se siguen los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}
4x(2x-3)+4x &= -4x(1-2x)-10x-7\\
8x^2-12x+4x &= -4x+8x^2-10x-7 \quad \text{(Se distribuye y simplifica)}\\
8x^2-8x &= 8x^2-14x-7 \quad \text{(Se agrupan términos semejantes)}\\
8x^2-8x-8x^2 &= 8x^2-14x-7-8x^2 \quad \text{(Se resta } 8x^2 \text{ de ambos lados)}\\
-8x &= -14x-7\\
-8x+14x &= -7 \quad \text{(Se suma } 14x \text{ a ambos lados)}\\
6x &= -7\\
x &= -\frac{7}{6}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es:

$$\mathbb{S} = \left\{-\frac{7}{6}\right\}$$

h.) Ejercicio para el lector

i.) Para resolver la ecuación $(x-3)(x+3) = (x-2)(x+2)$ se siguen los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}
(x-3)(x+3) &= (x-2)(x+2)\\
x^2-9 &= x^2-4 \quad \text{(Aplicamos la identidad } a^2-b^2=(a-b)(a+b))\\
x^2-9-x^2 &= x^2-4-x^2 \quad \text{(Restamos } x^2 \text{ de ambos lados)}\\
-9 &= -4
\end{aligned}$$

Esto resulta en una **igualdad falsa** $-9=-4$, lo que indica que la ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, el conjunto solución es:

$$\mathbb{S} = \varnothing$$

j.) Ejercicio para el lector

5.6 Ejercicio para el lector

5.7

a.) Para resolver la ecuación $x^2-4(3q+2)x = 2(7x+3q)$ en términos de que la solución sea -4, se sustituye $x=-4$ en la ecuación dada y se resuelve para q. Esto es:

$$\begin{aligned}
(-4)^2-4(3q+2)(-4) &= 2\,(7(-4)+3q)\\
16-4(3q+2)(-4) &= 2(-28+3q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16-4(-4)(3q+2) &= -56+6q \\
16+16(3q+2) &= -56+6q \quad \text{(porque } -4\cdot -4 = 16\text{)} \\
16+48q+32 &= -56+6q \quad \text{(se expande } 16(3q+2)\text{)} \\
(16+32)+48q &= -56+6q \\
48+48q &= -56+6q \\
48q-6q &= -56-48 \\
42q &= -104 \\
q &= \frac{-104}{42} \\
q &= -\frac{52}{21}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de q que hace que la ecuación tenga como solución $x=-4$ es:

$$q = -\frac{52}{21}$$

La ecuación resultante de cambiar este valor de q es:

$$x^2+\frac{152}{7}x = 2\left(7x-\frac{52}{7}\right)$$

Nota: Esta ecuación tiene otra solución, la cual es $-26/7$. Se puede restringir a una solución, por ejemplo, indicando que el intervalo de estudio es de $\left]\infty, \frac{-27}{7}\right]$, para el cual $-4 < \frac{-27}{7}$ y $\frac{-26}{7} > -4$, lo cual excluye ambas soluciones.

b.) Para resolver la ecuación $3q(x+5)-7q(2x+1) = 5(qx+2)$ en términos de que la solución sea -4, se sustituye $x=-4$ en la ecuación dada y se resuelve para q. Esto es:

$$\begin{aligned}
3q(-4+5)-7q(2(-4)+1) &= 5\,(q(-4)+2) \\
3q(1)-7q(-8+1) &= 5(-4q+2) \\
3q-7q(-7) &= -20q+10 \\
3q+49q &= -20q+10 \\
52q &= -20q+10 \\
52q+20q &= 10 \quad \text{(Se suma } 20q \text{ a ambos lados)} \\
72q &= 10 \\
q &= \frac{10}{72} \\
q &= \frac{5}{36}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de q que hace que la ecuación tenga como solución $x=-4$ es:

$$q = \frac{5}{36}$$

La ecuación resultante de cambiar este valor de q es:

$$\frac{15}{35}(x+5)-\frac{35}{36}(2x+1)=5\left(\frac{5}{36}x+2\right)$$

Nota: Esta ecuación solo tiene por solución a $x=-4$.

5.7 Ejercicio para el lector

5.8

$$\begin{aligned}\Delta=(3(2+n))^2-4(4n)(7(4+3n))=0 &\Leftrightarrow 9(4+4n+n^2)-16n(28+21n)=0\\ &\Leftrightarrow 36+36n+9n^2-448n-336n^2=0\\ &\Leftrightarrow -327n^2-412n+36=0\\ &\Leftrightarrow n=\frac{412\pm\sqrt{216832}}{-654}\\ &\Leftrightarrow n=\frac{-(412\pm 176\sqrt{7})}{654}\end{aligned}$$

Para $n=\dfrac{-412-176\sqrt{7}}{654}$:

$$\begin{aligned}x=\frac{-b}{2a}=\frac{-\left(-3\left(2+\frac{-412-176\sqrt{7}}{654}\right)\right)}{8\left(\frac{-412-176\sqrt{7}}{654}\right)} &= \frac{\frac{3(1308-412-176\sqrt{7})}{654}}{\frac{8(-412-176\sqrt{7})}{654}}\\ &=\frac{2688-528\sqrt{7}}{-3296-1408\sqrt{7}}\\ &=\frac{168-33\sqrt{7}}{-206-88\sqrt{7}}\\ &=\frac{-28+11\sqrt{7}}{6}\end{aligned}$$

Para $n=\dfrac{-412+176\sqrt{7}}{654}$:

$$\begin{aligned}x=\frac{-\left(-3\left(2+\frac{-412+176\sqrt{7}}{654}\right)\right)}{8\left(\frac{-412+176\sqrt{7}}{654}\right)} &= \frac{\frac{3(1308-412+176\sqrt{7})}{654}}{\frac{8(-412+176\sqrt{7})}{654}}\\ &=\frac{2688+528\sqrt{7}}{-3296+1408\sqrt{7}}\\ &=\frac{168+33\sqrt{7}}{-206+88\sqrt{7}}\\ &=\frac{28+11\sqrt{7}}{6}\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ Para } n = \frac{-412-176\sqrt{7}}{654}, \text{ la solución única de la ecuación es: } x = \frac{-28+11\sqrt{7}}{6}$$

$$\text{Y para } n = \frac{-412+176\sqrt{7}}{654}, \text{ la solución única de la ecuación es: } \frac{28+11\sqrt{7}}{6}$$

5.9

a.) Sustituyendo $x = -5$ en la ecuación y resolviendo para p se tiene:

$$\begin{aligned}
(-5)^2 - 4(3p+2)(-5) + 2(1+7p) &= 0 \\
25 - 4(3p+2)(-5) + 2(1+7p) &= 0 \\
25 + 20(3p+2) + 2(1+7p) &= 0 \quad (\text{porque } -4 \cdot -5 = 20) \\
25 + 60p + 40 + 2 + 14p &= 0 \\
(25+40+2) + (60p+14p) &= 0 \\
67 + 74p &= 0 \\
74p &= -67 \\
p &= -\frac{67}{74}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de p para el cual $x = -5$ es una raíz de la ecuación es:

$$p = -\frac{67}{74}$$

b.) Sustituyendo $x = -5$ en la ecuación y resolviendo para p se tiene:

$$\begin{aligned}
(-5)^2 + 2(3+7p)(-5) + 3(6p+1) &= 0 \\
25 + 2(3+7p)(-5) + 3(6p+1) &= 0 \\
25 - 10(3+7p) + 3(6p+1) &= 0 \quad (\text{porque } 2 \cdot -5 = -10) \\
25 - [10 \cdot 3 + 10 \cdot 7p] + [3 \times 6p + 3 \cdot 1] &= 0 \\
25 - (30+70p) + (18p+3) &= 0 \\
25 - 30 - 70p + 18p + 3 &= 0 \\
(25-30+3) + (-70p+18p) &= 0 \\
(-2) + (-52p) &= 0 \\
-2 - 52p &= 0 \\
-52p &= 2 \\
p &= \frac{2}{-52} \\
p &= -\frac{1}{26}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de p para el cual $x = -5$ es una raíz de la ecuación es:

$$p = -\frac{1}{26}$$

5.9 Ejercicio para el lector

5.10 Sustituyendo $x = 5$ en la ecuación y resolviendo para p se tiene:

$$\begin{aligned}
4(1+p)(5)^2+7(p+1)(5)-10 &= 0\\
4(1+p)(25)+7(p+1)(5)-10 &= 0\\
100(1+p)+35(p+1)-10 &= 0\\
[100(1+p)+35(1+p)]-10 &= 0\\
[100+100p+35+35p]-10 &= 0\\
(100+35-10)+(100p+35p) &= 0\\
125+135p &= 0\\
135p &= -125\\
p &= -\frac{125}{135}\\
p &= -\frac{25}{27}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de p para el cual $x = 5$ es una solución de la ecuación es:

$$p = -\frac{25}{27}$$

5.11 Como las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ están dadas por:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}\\
&= \frac{4ac}{4a^2}\\
&= \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&= \frac{-b+-b}{2a}\\
&= \frac{-2b}{2a}\\
&= \frac{-b}{a}
\end{aligned}$$

$\therefore$ Si x_1 y x_2 son las soluciones de $ax^2+bx+c=0$, entonces se cumple que $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$,

además $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$.

5.12 Para demostrar que la ecuación no tiene soluciones reales, se debe probar que su discriminante es negativo bajo las condiciones dadas.

Identificando los coeficientes de la ecuación cuadrática $Ax^2+Bx+C=0$ se tiene:

$$A = a^2,$$
$$B = b^2+a^2-c^2,$$
$$C = b^2.$$

Calculando el discriminante Δ:

$$\Delta = B^2-4AC = \left(b^2+a^2-c^2\right)^2-4a^2b^2.$$

Se observa que:

$$\Delta = \left(a^2+b^2-c^2\right)^2-(2ab)^2.$$

Esto es una diferencia de cuadrados, por lo que se puede factorizar:

$$\begin{aligned}\Delta &= \left[(a^2+b^2-c^2)-2ab\right]\left[(a^2+b^2-c^2)+2ab\right]\\ &= \left[(a-b)^2-c^2\right]\left[(a+b)^2-c^2\right].\end{aligned}$$

Aplicando la identidad:

$$X^2-Y^2=(X-Y)(X+Y).$$

Se puede escribir:

$$\Delta = \left[(a-b-c)(a-b+c)\right]\left[(a+b-c)(a+b+c)\right].$$

Bajo la condición $|a-b|<c<a+b$, se cumple que:

- $c>|a-b| \implies a-b-c<0$ (Negativo).
- $c>|a-b| \implies a-b+c>0$ (Positivo).
- $c<a+b \implies a+b-c>0$ (Positivo).
- Siempre se cumple $a+b+c>0$ (Positivo).

Entonces, los signos de los factores son:

$$(a-b-c)<0 \quad \text{(Negativo)},$$
$$(a-b+c)>0 \quad \text{(Positivo)},$$
$$(a+b-c)>0 \quad \text{(Positivo)},$$
$$(a+b+c)>0 \quad \text{(Positivo)}.$$

Calculando el producto de los signos:

$$\Delta = \text{(Negativo)} \times \text{(Positivo)} \times \text{(Positivo)} \times \text{(Positivo)} = \text{Negativo}.$$

Por lo tanto, el discriminante $\Delta < 0$, lo que implica que la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales.

Ejercicio para el lector

5.13

a.) Para simplificar la ecuación, observe que el exponente de y es 8 y 4, lo cual sugiere utilizar la sustitución:

$$u = y^4.$$

De este modo, la ecuación original se transforma en:

$$u^2 - u - 6 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática en términos de u se tiene:

$$u^2 - u - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25.$$

Las soluciones para u son:

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}.$$

Por lo tanto,

$$u_1 = 3 \quad \text{y} \quad u_2 = -2.$$

Caso 1: $u_1 = 3$

$$y^4 = 3.$$

Para encontrar las soluciones reales, observe que $y^4 \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$y = \pm\sqrt{\pm\sqrt{3}}.$$

Sin embargo, para que y sea real, se necesita que $y^2 = \pm\sqrt{3}$ sea no negativo. De hecho,

$$y^2 = \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{\sqrt{3}} = \pm 3^{\frac{1}{4}}.$$

Por lo tanto, del caso $y^4 = 3$ se obtiene $\boxed{2}$ soluciones reales:

$$y = 3^{\frac{1}{4}}, \quad y = -3^{\frac{1}{4}}.$$

Caso 2: $u_2 = -2$

$$y^4 = -2.$$

No existe $y \in \mathbb{R}$ tal que y^4 sea negativo, de modo que este caso **no** aporta soluciones reales.

Conclusión (soluciones reales): La ecuación no tiene soluciones reales provenientes de $y^4 = -2$, y sí tiene dos soluciones reales provenientes de $y^4 = 3$. Por lo tanto, el conjunto solución real es:

$$\boxed{\left\{-3^{\frac{1}{4}},\, 3^{\frac{1}{4}}\right\}}.$$

b.) Observe que:

$$\sqrt[3]{x^2} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{2}{1}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}, \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}.$$

Por lo tanto, la ecuación puede reescribirse como:

$$-x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} + 6 = 0.$$

Para simplificar, se define la sustitución:

$$u = x^{\frac{1}{3}}, \quad \Longrightarrow \quad x^{\frac{2}{3}} = (x^{\frac{1}{3}})^2 = u^2.$$

Con este cambio de variable, la ecuación se transforma en:

$$-u^2 + 5u + 6 = 0,$$

o equivalentemente:

$$u^2 - 5u - 6 = 0.$$

1. Resolver la ecuación en u

Calculando el discriminante:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49.$$

Por lo tanto,

$$u = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}.$$

Se obtiene las dos soluciones para u:

$$u_1 = 6, \quad u_2 = -1.$$

2. Regresar a la variable original x

Recuerde que $u = x^{\frac{1}{3}}$. Entonces:

$$x = u^3.$$

Caso 1: $u = 6$

$$x = 6^3 = 216.$$

Caso 2: $u = -1$

$$x = (-1)^3 = -1.$$

3. Conclusión:

Las soluciones de la ecuación original son:

$$x = 216 \quad \text{y} \quad x = -1.$$

Por lo tanto, el conjunto solución es

$$\boxed{S = \{-1,\ 216\}}.$$

c.) Observe que la ecuación involucra $(x+3)^4$ y $(x+3)^2$. Para simplificar, se define:

$$u \;=\; (x+3)^2.$$

De este modo, $(x+3)^4 = \big((x+3)^2\big)^2 = u^2$, y la ecuación original se convierte en:

$$2u^2 \;-\; 4u \;-\; 2 \;=\; 0.$$

1. Resolver la ecuación en u

Se divide ambos lados entre 2 para simplificar:

$$u^2 \;-\; 2u \;-\; 1 \;=\; 0.$$

Calculando el discriminante:

$$\Delta \;=\; (-2)^2 \;-\; 4\cdot 1\cdot(-1) \;=\; 4 \;+\; 4 \;=\; 8.$$

Por lo tanto,

$$u \;=\; \frac{2 \;\pm\; \sqrt{8}}{2} \;=\; \frac{2 \;\pm\; 2\sqrt{2}}{2} \;=\; 1 \;\pm\; \sqrt{2}.$$

2. Discusión de cada valor de u

Caso 1: $u = 1+\sqrt{2}$

En este caso,

$$(x+3)^2 \;=\; 1+\sqrt{2}.$$

Para obtener soluciones reales, note que $1+\sqrt{2} > 0$, de modo que $(x+3)$ puede ser tanto positivo como negativo al tomar la raíz cuadrada:

$$x+3 = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

Despejando x:

$$x = -3 \;\pm\; \sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

Caso 2: $u = 1-\sqrt{2}$

En este caso,

$$(x+3)^2 \;=\; 1-\sqrt{2}.$$

Sin embargo, $\sqrt{2} \approx 1.4142$, por lo que $1-\sqrt{2} < 0$. Esto significa que $(x+3)^2$ no puede ser negativo si x es un número real. Por lo tanto, no hay soluciones reales de este caso.

3. Conclusión

Las únicas soluciones reales provienen de $(x+3)^2 = 1+\sqrt{2}$, de modo que el conjunto solución real de la ecuación es:

$$\boxed{x = -3 + \sqrt{1+\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad x = -3 - \sqrt{1+\sqrt{2}}}.$$

d.) Note que

$$1-x^2 = -(x^2-1),$$

por lo cual

$$(1-x^2)^2 = \big(-(x^2-1)\big)^2 = (x^2-1)^2.$$

De esta manera, la ecuación original se puede reescribir como:

$$(x^2-1)^4 = (x^2-1)^2.$$

1. Simplificar usando cambio de variable

Sea

$$u = (x^2-1)^2.$$

Entonces la ecuación se transforma en:

$$u^2 = u.$$

Despejando:

$$u^2-u=0 \quad \iff \quad u(u-1)=0.$$

Por lo tanto, las posibles soluciones para u son:

$$u=0 \quad \text{o} \quad u=1.$$

2. Regresar a la variable original

Recuerde que $u=(x^2-1)^2$.

Caso A: $u=0$

$$(x^2-1)^2=0 \quad \iff \quad x^2-1=0 \quad \iff \quad x^2=1 \quad \iff \quad x=\pm 1.$$

Caso B: $u=1$

$$(x^2-1)^2=1 \quad \iff \quad x^2-1=\pm 1.$$

- $x^2-1=1 \quad \Longrightarrow \quad x^2=2 \quad \Longrightarrow \quad x=\pm\sqrt{2}.$
- $x^2-1=-1 \quad \Longrightarrow \quad x^2=0 \quad \Longrightarrow \quad x=0.$

3. Conclusión

Reuniendo todos los valores hallados, el conjunto solución de la ecuación es:

$$\boxed{S = \{-\sqrt{2},\ -1,\ 0,\ 1,\ \sqrt{2}\}.}$$

5.13 Ejercicio para el lector

5.14

Intervalo	Signo de $x-a$	Signo de $2x-b$
$x<\frac{b}{2}$	$-(x-a)$	$-(2x-b)$
$\frac{b}{2}\leq x<a$	$-(x-a)$	$+(2x-b)$
$x\geq a$	$+(x-a)$	$+(2x-b)$

Soluciones en cada intervalo:

- Para $x<\frac{b}{2}$: $x=\frac{a+b-1}{3}$, válido si $\frac{a+b-1}{3}<\frac{b}{2}$.
- Para $\frac{b}{2}\leq x<a$: $x=1-(a-b)$, válido si $\frac{b}{2}\leq 1-(a-b)<a$.
- Para $x\geq a$: $x=\frac{a+b+1}{3}$, válido si $\frac{a+b+1}{3}\geq a$.

5.15 Como $0<a\Rightarrow 0<2a$

$$\frac{|\,bx+c\,|}{2a}+2=5\Rightarrow\frac{|\,bx+c\,|}{2a}+2=3\Rightarrow|\,bx+c\,|=6a$$

Note que $bx+c=0\Rightarrow x=\dfrac{-c}{b}$, así:

Caso 1: $x\geq-\dfrac{c}{b}$

$$\begin{aligned}-(bx+c)=6a &\Leftrightarrow\ -bx-c=6a\\ &\Leftrightarrow\ -bx=6a+c\\ &\Leftrightarrow\ x=\frac{6a+c}{-b}\end{aligned}$$

Caso 2: $x<-\dfrac{c}{b}$

$$\begin{aligned}bx+c=6a &\Leftrightarrow\ bx=6a-c\\ &\Leftrightarrow\ x=\frac{6a-c}{b}\end{aligned}$$

¿Se cumple que $\dfrac{6a+c}{-b}\geq\dfrac{-c}{b}$?

$$6a+c\geq c\Leftrightarrow\ 6a\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ a \geq 0$$

Luego, sí es solución.
¿Se cumple que $\dfrac{6a-c}{-b} < \dfrac{c}{b}$?

$$\begin{aligned} 6a-c > c \Leftrightarrow&\ 6a > 2c \\ \Leftrightarrow&\ 3a > c \end{aligned}$$

Por lo que sí es solución.

$$\therefore \mathbb{S} = \left\{ \frac{6a+c}{-b}, \frac{6a-c}{b} \right\}$$

5.16 Para resolver este ejercicios se pueden seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Simplificación Dado n par:

$$\sqrt[n]{(2x+1)^n} = |2x+1|, \qquad \sqrt[2n]{(2x-1)^{2n}} = |2x-1|.$$

Entonces, la ecuación se convierte en:

$$|2x+1| + |2x-1| = x+1.$$

Intervalo	**Signo de** $2x+1$	**Signo de** $2x-1$
$x < -\frac{1}{2}$	$-(2x+1)$	$-(2x-1)$
$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$	$+(2x+1)$	$-(2x-1)$
$x \geq \frac{1}{2}$	$+(2x+1)$	$+(2x-1)$

Paso 2: Resolución por intervalos
- Para $x < -\frac{1}{2}$, no hay soluciones válidas.
- Para $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$, no hay soluciones válidas.
- Para $x \geq \frac{1}{2}$, no hay soluciones válidas.

$$\therefore \text{El conjunto solución es vacío.}$$

5.17 Como $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2n$ es par y $2n+1$ es impar, por lo que:

$$\frac{x-2}{3} - 2x = |x+1|$$

Como $x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$. Considere los siguientes casos:
Caso 1: $x \geq -1$

$$\frac{x-2}{3} - 2x = x+1 \Leftrightarrow \frac{x-2-6x}{3} = x+1$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ x-2-6x=3x+3\\
&\Leftrightarrow\ x-6x-3x=3+2\\
&\Leftrightarrow\ -8x=5\\
&\Leftrightarrow\ x=\frac{-5}{8}
\end{aligned}
$$

Como $\frac{-5}{8} \geq -1$, entonces sí es solución.

Caso 2: $x<-1$

$$
\begin{aligned}
\frac{x-2}{3}-2x=-x-1 &\Leftrightarrow\ \frac{x-2-6x}{3}=-x-1\\
&\Leftrightarrow\ x-2-6x=-3x-3\\
&\Leftrightarrow\ x-6x+3x=-3+2\\
&\Leftrightarrow\ -2x=-1\\
&\Leftrightarrow\ x=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Como $\frac{1}{2} > -1$, entonces NO es solución.

$$\therefore \mathbb{S}=\left\{\frac{-5}{8}\right\}$$

Ejercicio para el lector

5.18 Para hallar el conjunto solución, primero se eleva ambos lados de la ecuación al cuadrado:

$$r+\sqrt{x}=2^2=4.$$

Esto permite aislar $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{x}=4-r.$$

1. Condición de no negatividad en $\sqrt{x}$

La raíz $\sqrt{x}$ es real si y solo si $4-r\geq 0$. Por lo tanto,

$$4-r\geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r\leq 4.$$

2. Hallar x

Cuando $r\leq 4$, se cumple $\sqrt{x}=4-r$. Elevando ambos lados al cuadrado se tiene:

$$x=(4-r)^2.$$

3. Conclusión

$$\boxed{\text{Si } r\leq 4, \text{ entonces } x=(4-r)^2. \quad \text{Si } r>4, \text{ no existe solución.}}$$

5.19

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2a+x}{a-3x}}}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt[30]{\frac{2a+x}{a-3x}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a+x}{a-3x} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2a+x = a-3x$$

$$\Leftrightarrow 3x+x = a-2a$$

$$\Leftrightarrow 4x = -x$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{a}{4}$$

$$\therefore \mathbb{S} = \left\{-\frac{a}{4}\right\}$$

5.20 **1. Determinación del dominio**

Cada radical de la ecuación impone condiciones sobre x:

- $\sqrt{-2x+a+b}$ requiere $-2x+a+b \geq 0 \implies x \leq \frac{a+b}{2}$.
- $\sqrt{b-x}$ requiere $b-x \geq 0 \implies x \leq b$.
- $\sqrt{a-x}$ requiere $a-x \geq 0 \implies x \leq a$.

Dado que $a < b$ y $a < \frac{a+b}{2}$, la condición más restrictiva es $x \leq a$. Por tanto, el dominio de la ecuación es:

$$x \leq a.$$

2. Transformación de la ecuación

El objetivo consiste en encontrar x dentro del dominio tal que

$$\sqrt{-2x+a+b} = \sqrt{b-x} + \sqrt{a-x}.$$

Se eleva al cuadrado ambos lados:

$$-2x+a+b = \left(\sqrt{b-x}+\sqrt{a-x}\right)^2 = (b-x)+(a-x)+2\sqrt{(b-x)(a-x)}.$$

Simplificando:

$$-2x+a+b = a+b-2x + 2\sqrt{(b-x)(a-x)}.$$

Se observa que los términos $(a+b-2x)$ se cancelan a ambos lados, lo cual deja:

$$2\sqrt{(b-x)(a-x)} = 0 \implies \sqrt{(b-x)(a-x)} = 0.$$

Por tanto,

$$(b-x)(a-x) = 0 \implies x = b \quad \text{o} \quad x = a.$$

3. Verificación de los valores candidatos

- $x=b$: Requiere $b \leq a$ para pertenecer al dominio. Sin embargo, por hipótesis $b>a$, de modo que $x=b$ queda fuera del dominio y no es solución válida.
- $x=a$: Cumple $x \leq a$, así que está dentro del dominio. Se comprueba sustituyendo en la ecuación original:

$$\sqrt{-2a+a+b}-\sqrt{b-a}-\sqrt{a-a}=\sqrt{b-a}-\sqrt{b-a}-0=0.$$

  Por lo tanto, $x=a$ satisface la ecuación.

4. Conclusión

El único valor que resuelve la ecuación en el dominio permitido es

$$\boxed{x=a}.$$

5.21

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{-3+2x}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{-2+x} &\Leftrightarrow -3+2x=\left(\sqrt[3]{-2+x}+\sqrt[3]{x-1}\right)^3\\
&\Leftrightarrow -3+2x=-2+x+3\left(\sqrt[3]{-2+x}\right)^2\sqrt[3]{x-1}+3\sqrt[3]{-2+x}(x-1)^2+x-1\\
&\Leftrightarrow -3+2x+2-x-x+1=3\left(\sqrt[3]{-2+x}\right)^2\sqrt[3]{x-1}+3\sqrt[3]{-2+x}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2\\
&\Leftrightarrow \left(-3\sqrt[3]{(-2+x)^2}\sqrt[3]{x-1}\right)^3=\left(3\sqrt[3]{-2+x}\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)^3\\
&\Leftrightarrow -27(-2+x)^2(x-1)=27(-2+x)(x-1)^2\\
&\Leftrightarrow -27(x^2-4x-4)(x-1)=27(-2+x)(x^2-2x+1)\\
&\Leftrightarrow (-27x+27)(x^2-4x+4)=(-54+27x)(x^2-2x+1)\\
&\Leftrightarrow 54x^3-243x^2+351x-162=0\\
&\Leftrightarrow x_1=1,\ \ x_2=2,\ \ x_3=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbb{S}=\left\{1,2,\frac{3}{2}\right\}$$

5.22 **1. Análisis de la ecuación y el dominio**

La ecuación puede reescribirse para comprender mejor la forma de cada radical. Observe que:

$$\sqrt[3]{\sqrt{1+x}} = \left(\sqrt{1+x}\right)^{\frac{1}{3}} = (1+x)^{\frac{1}{6}},$$

por lo que el miembro izquierdo de la ecuación se convierte en:

$$\sqrt{(1+x)^{\frac{1}{6}}}=\left((1+x)^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}=(1+x)^{\frac{1}{12}}.$$

El miembro derecho, $\sqrt[3]{x+1}$, es:

$$(x+1)^{\frac{1}{3}}.$$

De este modo, la ecuación original se reformula como:

$$(1+x)^{\frac{1}{12}} \;=\; (1+x)^{\frac{1}{3}}.$$

Para que las expresiones radicales estén definidas (en el conjunto de los números reales), se requiere $1+x \geq 0$. Por lo tanto:

$$x \geq -1.$$

2. Resolución de la ecuación en forma exponencial

Se comparan los exponentes $\frac{1}{12}$ y $\frac{1}{3}$. La igualdad $(1+x)^{1/12} = (1+x)^{1/3}$ sugiere los siguientes casos:

1. $1+x=0$, lo que implica $x=-1$.
2. $(1+x) \neq 0$ y la única forma de que las potencias sean iguales es que la base sea 1 (ya que si la base es distinta de 1, la igualdad de exponentes distintos no puede sostenerse). Esto lleva a $1+x=1 \implies x=0$.

3. Verificación de las soluciones

- $x=-1$: Se revisa la ecuación original:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{1+(-1)}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{0}}} = \sqrt{\sqrt[3]{0}} = \sqrt{0} = 0,$$

  y

$$\sqrt[3]{(-1)+1} = \sqrt[3]{0} = 0.$$

  Ambos miembros son 0, por lo que $x=-1$ es una solución válida y cumple $x \geq -1$.
- $x=0$: Se revisa en la ecuación original:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{1+0}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{1}}} = \sqrt{\sqrt[3]{1}} = \sqrt{1} = 1,$$

  y

$$\sqrt[3]{0+1} = \sqrt[3]{1} = 1$$

  Ambos lados resultan 1, de modo que $x=0$ también es solución válida.

4. Conclusión

Los valores que satisfacen la ecuación y se encuentran dentro del dominio son:

$$\boxed{x=-1 \quad \text{y} \quad x=0.}$$

Ejercicio para el lector

5.23 **Paso 1:** Despeje una variable de la primera ecuación:

$$y+x=-a$$

$$\Longrightarrow y = -a - x$$

Paso 2: Sustituya el despeje anterior en la segunda ecuación:

$$
\begin{aligned}
& bx - a(-a - x) = 2a^2 - b^2 \\
\Longrightarrow\ & bx + a(a + x) = 2a^2 - b^2 \\
\Longrightarrow\ & bx + a^2 + ax = 2a^2 - b^2 \\
\Longrightarrow\ & (b + a)x + a^2 = 2a^2 - b^2
\end{aligned}
$$

Paso 3: Resuelva la ecuación anterior para x:

$$
\begin{aligned}
& (b + a)x = 2a^2 - b^2 - a^2 \\
\Longrightarrow\ & (b + a)x = a^2 - b^2 \\
\Longrightarrow\ & x = \frac{a^2 - b^2}{b + a} \\
\Longrightarrow\ & x = \frac{(a + b)(a - b)}{b + a} \\
\Longrightarrow\ & x = a - b
\end{aligned}
$$

Paso 4: Halle y, para esto, sustituimos $x = a - b$ en $y = -a - x$:

$$
\begin{aligned}
& y = -a - (a - b) \\
\Longrightarrow\ & y = -a - a + b \\
\Longrightarrow\ & y = -2a + b
\end{aligned}
$$

Finalmente, el conjunto solución del sistema es:

$$x = a - b, \quad y = -2a + b$$

5.24 **Paso 1:** Despejar una variable de la primera ecuación:

$$
\begin{aligned}
& 3x + 2y = 4 \\
\Longrightarrow\ & y = \frac{4 - 3x}{2}
\end{aligned}
$$

Paso 2: Sustituir el despeje anterior en la segunda ecuación:

$$
\begin{aligned}
& 6x + k\left(\frac{4 - 3x}{2}\right) = 1 \\
\Longrightarrow\ & 6x + \frac{k(4 - 3x)}{2} = 1
\end{aligned}
$$

Multiplicando por 2 para eliminar el denominador:

$$2(6x) + k(4 - 3x) = 2$$

$$\Longrightarrow 12x + 4k - 3kx = 2$$
$$\Longrightarrow (12 - 3k)x + 4k = 2$$

Paso 3: Condición para que el sistema sea compatible determinado: Para que el sistema tenga una única solución, el coeficiente de x debe ser distinto de cero:

$$\begin{aligned} 12 - 3k &\neq 0 \\ -3k &\neq -12 \\ k &\neq 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto de posibles valores de k que hacen que el sistema sea compatible determinado es $\mathbb{R} - \{4\}$

5.25

Paso 1: Despejar una variable de la primera ecuación:

$$\begin{aligned} & rx + sy = r^2 - rs \\ \Longrightarrow\ & rx = r^2 - rs - sy \\ \Longrightarrow\ & x = \frac{r^2 - rs - sy}{r} \end{aligned}$$

Paso 2: Sustituir el despeje anterior en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{r^2 - rs - sy}{r}\right) + s}{r} + \frac{y + s}{s} = 2 \\ \Longrightarrow\ & \frac{r^2 - rs - sy + sr}{r^2} + \frac{y + s}{s} = 2 \\ \Longrightarrow\ & \frac{r^2 - sy}{r^2} + \frac{y + s}{s} = 2 \end{aligned}$$

Paso 3: Simplificar la ecuación y despejar y: Multiplicamos por r^2 para eliminar fracciones:

$$\begin{aligned} & (r^2 - sy) + \frac{r^2(y + s)}{s} = 2r^2 \\ \Longrightarrow\ & r^2 - sy + \frac{r^2 y + r^2 s}{s} = 2r^2 \end{aligned}$$

Multiplicando todo por s:

$$\begin{aligned} & s(r^2 - sy) + r^2 y + r^2 s = 2r^2 s \\ \Longrightarrow\ & sr^2 - s^2 y + r^2 y + r^2 s = 2r^2 s \\ \Longrightarrow\ & y(r^2 - s^2) = 2r^2 s - sr^2 - r^2 s \\ \Longrightarrow\ & y(r^2 - s^2) = 0 \\ \Longrightarrow\ & y = 0 \end{aligned}$$

Paso 4: Hallar la solución x: Se sustituye lo anterior en el despeje encontrado en el paso 1:

$$\begin{aligned} x &= \frac{r^2 - rs - s \cdot 0}{r} \\ \Longrightarrow x &= \frac{r^2 - rs}{r} \\ \Longrightarrow x &= r - s \end{aligned}$$

De esta manera, la solución del sistema de ecuaciones está dada por:

$$x = r - s, \quad y = 0$$

5.26 Despejando y en (1):

$$\begin{aligned} 2kx - 3x - y + ky = 19 &\Leftrightarrow y(-1+k) = 19 - 2kx + 3x \\ &\Leftrightarrow y = \frac{19x - 2kx + 3x}{-1+k} \quad (3) \end{aligned}$$

Despejando y en (2):

$$\begin{aligned} 4x - 3xk + y - 2yk = -11 &\Leftrightarrow 4x - 3xk + y(1-2k) = -11 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-11 - 4x + 3xk}{1-2k} \quad (4) \end{aligned}$$

Igualando (3) y (4):

$$\frac{19x - 2kx + 3x}{-1+k} = \frac{-11 - 4x + 3xk}{1-2k}$$
$$\Leftrightarrow (1-2k)(19 - 2kx + 3x) = (-1+k)(-11 - 4x + 3xk)$$
$$\Leftrightarrow 19 - 2kx + 3x - 38k + 4k^2x - 6kx = 11 + 4x - 3xk - 11k - 4xk + 3xk^2$$
$$\Leftrightarrow xk^2 + (-2x - 38 - 6x + 3x + 11 + 4x)k + 19 + 3x - 11 - 4x = 0$$
$$\Leftrightarrow -3k^2 + (-2(-3) - 38 - 6(-3) + 3(-3) + 11 + 4(-3))k + 19 + 3(-3) - 11 - 4(-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow -3k^2 - 24k + 11 = 0$$
$$\Leftrightarrow (3x + 12 - \sqrt{177})(3x + 12 + \sqrt{177}) = 0$$

$\therefore$ Los valores de k para que -3 sea la coordenada en x de la solución del sistema, corresponden a:

$$k = \frac{12 - \sqrt{177}}{3} \text{ y } k = \frac{12 + \sqrt{177}}{3}$$

Ejercicio para el lector

5.27 Como:

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+y+z}{x} + \frac{x+y+z}{y} + \frac{x+y+z}{z} = 1$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+1+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1=1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2+\frac{y^2+x^2}{xy}+\frac{z^2+x^2}{zx}+\frac{z^2+y^2}{zy}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2xyz+z(y^2+x^2)+y(z^2+x^2)+x(z^2+y^2)}{xyz}=0 \Leftrightarrow 2xyz+zy^2+zx^2+yz^2+yx^2+xz^2+xy^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^y+x^2z+xyz+xz^2+y^2x+xyz+y^2z+yz^2=0 \Leftrightarrow x^2(y+z)+xz(y+z)+yx(y+z)+yz(y+z)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+xz+yx+yz)(y+z)=0 \Leftrightarrow [x(x+z)+y(x+z)]\,(y+z)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x+z)(y+z)=0$$

$$\therefore \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}, \text{ si } \frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \Leftrightarrow (x+y)(x+z)(y+z)=0$$

5.28

a.)

1. Simplificación de denominadores Observe que:

$$3n+9=3(n+3), \quad 27-3n^2=3\,(9-n^2), \quad 2n-6=2(n-3).$$

Por lo tanto, la ecuación se reescribe como:

$$\frac{n}{3(n+3)} + \frac{n^2-6n}{3\,(9-n^2)} = \frac{3}{2(n-3)}.$$

2. Factorización y común denominador en el lado izquierdo

$$n^2-6n=n(n-6), \quad 9-n^2=(3-n)(3+n).$$

Entonces:

$$\frac{n}{3(n+3)} = \frac{n\,(3-n)(3+n)}{3\,(n+3)\,(3-n)\,(3+n)},$$
$$\frac{n(n-6)}{3\,(9-n^2)} = \frac{n\,(n-6)\,(n+3)}{3\,(3-n)\,(3+n)\,(n+3)}.$$

El denominador común es $3\,(n+3)\,(3-n)\,(3+n)$. Sumando las fracciones:

$$\frac{n\,(3-n)\,(3+n)+n\,(n-6)\,(n+3)}{3\,(n+3)\,(3-n)\,(3+n)}.$$

Se desarrolla cada término en el numerador:

$$n\,(3-n)\,(3+n)=n(9-n^2)=9n-n^3,$$

$$n(n-6)(n+3)=n\big(n^2-3n-18\big)=n^3-3n^2-18n.$$

La suma en el numerador es:

$$(9n-n^3)+(n^3-3n^2-18n)=9n-n^3+n^3-3n^2-18n=-3n^2-9n=-3n(n+3).$$

Por lo tanto, la fracción resultante en el lado izquierdo es:

$$\frac{-3n(n+3)}{3\,(n+3)\,(3-n)\,(3+n)} = \frac{-n}{(3-n)(3+n)}.$$

Nótese que $(3-n)(3+n)=9-n^2$.

3. Igualación con el lado derecho

La ecuación se reduce a:

$$\frac{-n}{9-n^2} = \frac{3}{2(n-3)}.$$

Se realiza la multiplicación cruzada:

$$-n\cdot 2(n-3) = 3\big(9-n^2\big).$$

El lado izquierdo se expande:

$$-2n(n-3) = -2n^2 + 6n,$$

y el derecho:

$$3(9-n^2) = 27 - 3n^2.$$

Así,

$$-2n^2 + 6n \;=\; 27 - 3n^2.$$

Se suma $3n^2$ a ambos lados:

$$(-2n^2 + 3n^2) + 6n \;=\; 27 \quad\Longrightarrow\quad n^2 + 6n \;=\; 27.$$

Luego, se resta 27 en ambos lados:

$$n^2 + 6n - 27 \;=\; 0.$$

Factorizando:

$$n^2 + 6n - 27 = (n-3)(n+9) = 0.$$

Por lo tanto, las posibles raíces son

$$n = 3 \quad \text{o} \quad n = -9.$$

4. Verificación de restricciones del dominio
En la ecuación original, no se permite que los denominadores sean cero:

$$3n+9 \;\neq\; 0 \Longrightarrow n \neq -3, \quad 27-3n^2 \;\neq\; 0 \Longrightarrow n^2 \neq 9 \Longrightarrow n \neq \pm 3, \quad 2n-6 \;\neq\; 0 \Longrightarrow n \neq 3.$$

Es claro que $n = 3$ está excluido. Sin embargo, $n = -9$ cumple todas las restricciones, ya que:

$$3(-9)+9 = -18 \neq 0, \quad 27-3(-9)^2 = 27-3\cdot 81 = 27-243 = -216 \neq 0, \quad 2(-9)-6 = -18-6 = -24 \neq 0.$$

Por lo tanto, $n = -9$ es la única solución válida.

$$\boxed{n = -9}.$$

b.)
1. Factorización de los términos y restricciones de dominio

Observe que:

$$3x-9 = 3(x-3), \quad x^2-3x = x(x-3),$$

$$2x^2-5x+1 = (2x-1)(x-1).$$

En consecuencia, es indispensable que $2x^2-5x+1 \neq 0$, lo que impone:

$$(2x-1)(x-1) \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad x \neq \tfrac{1}{2}, \quad x \neq 1.$$

El lado derecho $\big((x^2-3x)/4\big)$ no introduce restricciones adicionales (el denominador 4 es constante y distinto de cero).

2. Transformación de la ecuación y reducción a un polinomio

La ecuación original se reescribe:

$$\frac{3(x-3)}{(2x-1)(x-1)} \;=\; \frac{x(x-3)}{4}.$$

Se procede con la multiplicación cruzada:

$$4 \cdot \bigl[3(x-3)\bigr] \;=\; \bigl[x(x-3)\bigr] \cdot \bigl[(2x-1)(x-1)\bigr].$$

El lado izquierdo se simplifica:

$$4 \cdot 3(x-3) = 12(x-3).$$

Para el lado derecho, primero se nota que

$$(2x-1)(x-1) = 2x^2 - 2x - x + 1 = 2x^2 - 3x + 1.$$

Por lo tanto:

$$x(x-3)\left(2x^2 - 3x + 1\right).$$

La expresión $x(x-3) = x^2 - 3x$. Sea:

$$(x^2 - 3x)\,(2x^2 - 3x + 1).$$

Se desarrolla paso a paso:

$$(x^2-3x)(2x^2) = 2x^4 - 6x^3, \quad (x^2-3x)(-3x) = -3x^3 + 9x^2, \quad (x^2-3x)(1) = x^2 - 3x.$$

Sumando todos los términos:

$$2x^4 \;-\; 6x^3 \;-\; 3x^3 \;+\; 9x^2 \;+\; x^2 \;-\; 3x = 2x^4 \;-\; 9x^3 \;+\; 10x^2 \;-\; 3x.$$

Por ende, la ecuación queda como:

$$12(x-3) \;=\; 2x^4 \;-\; 9x^3 \;+\; 10x^2 \;-\; 3x.$$

Se pasa todo al mismo lado:

$$0 = 2x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 3x \;-\; 12(x-3).$$

El término $12(x-3)$ se expande:

$$12x - 36,$$

así que:

$$0 = 2x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 3x - (12x - 36),$$

$$0 = 2x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 3x - 12x + 36,$$

$$0 = 2x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 15x + 36.$$

3. Búsqueda de las raíces del polinomio

Se investiga la posibilidad de raíces enteras o fraccionarias. Probando $x = 3$:

$$2(3)^4 - 9(3)^3 + 10(3)^2 - 15(3) + 36 = 2 \cdot 81 \ - \ 9 \cdot 27 \ + \ 10 \cdot 9 \ - \ 45 \ + \ 36$$

$$= 162 - 243 + 90 - 45 + 36 = 0.$$

Por lo tanto, $x = 3$ es una raíz. Para factorizar, se realiza la división entre $(x-3)$ (por ejemplo, división sintética), lo que produce un factor cúbico residual:

$$2x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 15x + 36 \ = \ (x-3)\left(2x^3 - 3x^2 + x - 12\right).$$

De este modo, la ecuación se transforma en

$$(x-3)\left(2x^3 - 3x^2 + x - 12\right) = 0.$$

La raíz $x = 3$ surge de $(x-3) = 0$. El factor cúbico $2x^3 - 3x^2 + x - 12$ puede investigarse por métodos numéricos o análisis de signos, ya que no admite raíces racionales sencillas. Se detecta una raíz real aproximada en el intervalo $]2.36, 2.37[$. Para efectos prácticos, se denota $x \approx 2.363$. Las otras dos raíces del factor cúbico son complejas (resultan de la naturaleza de los polinomios de grado 3).

4. Verificación de las restricciones de dominio y validez

Se recuerda que $(2x-1)(x-1) \neq 0$, por lo que $x \neq \frac{1}{2}$ y $x \neq 1$. Ninguna de las soluciones encontradas coincide con estos valores excluidos. Por consiguiente, las soluciones reales que satisfacen la ecuación original son:

$$\boxed{x = 3 \quad \text{y} \quad x \approx 2.363}$$

c.) **1. Búsqueda de raíces racionales simples**

Se aplica el *Teorema de las raíces o ceros racionales* para probar posibles divisores de los términos constante y principal, como $\pm 1, \pm 2, \pm \dfrac{1}{2}, \ldots$. Verificación de $x = 1$:

$$2(1)^4 \ - \ (1)^3 \ + \ 3(1)^2 \ - \ 2(1) \ - \ 2 = 2 - 1 + 3 - 2 - 2 = 0.$$

Por lo tanto, $x = 1$ es una raíz.

2. Factorización dividiendo por $(x-1)$

Se divide el polinomio $2x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x - 2$ entre $(x-1)$. Empleando división sintética o polinomial, se obtiene:

$$2x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \ = \ (x-1)\left(2x^3 + x^2 + 4x + 2\right).$$

3. Factorización del trinomio cúbico resultante

Ahora se busca resolver

$$2x^3 + x^2 + 4x + 2 = 0.$$

Se verifica si $x=-\frac{1}{2}$ es raíz:

$$2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^3+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2+4\left(-\tfrac{1}{2}\right)+2=2\left(-\tfrac{1}{8}\right)+\tfrac{1}{4}-2+2=-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}=0.$$

Por consiguiente, $x=-\frac{1}{2}$ es una raíz. De este modo, $(2x+1)$ es factor del cúbico. Dividiendo $2x^3+x^2+4x+2$ por $(2x+1)$, se obtiene:

$$2x^3+x^2+4x+2 \;=\; (2x+1)\left(2x^2+4\right).$$

4. Conclusión de la factorización
Juntando todos los factores, se tiene:

$$2x^4-x^3+3x^2-2x-2 \;=\; (x-1)\left[(2x+1)\left(2x^2+4\right)\right]$$

Es decir:

$$2x^4-x^3+3x^2-2x-2 \;=\; 2(x-1)(2x+1)(x^2+2).$$

5. Resolución de las ecuaciones factorizadas

$$(x-1)=0 \quad\Longrightarrow\quad x=1,$$

$$(2x+1)=0 \quad\Longrightarrow\quad x=-\tfrac{1}{2},$$

$$(x^2+2)=0 \quad\Longrightarrow\quad x^2=-2 \quad\Longrightarrow\quad x=\pm i\sqrt{2}.$$

6. Conjunto solución

Por lo tanto, la ecuación posee dos soluciones reales y dos complejas:

$$\boxed{x=1,\quad x=-\frac{1}{2},\quad x=i\sqrt{2},\quad x=-i\sqrt{2}.}$$

d.) **1. Reescribir la ecuación en su forma estándar:** Se lleva todos los términos al mismo lado para obtener una ecuación polinómica igualada a cero:

$$6x^4+13x^3-3x^2-12x+4=0.$$

2. Aplicar el teorema del factor: El teorema del factor establece que si r es una raíz de un polinomio, entonces $x-r$ es un factor del mismo. Los posibles valores de r son los divisores del término independiente (4) divididos entre los divisores del coeficiente del término de mayor grado (6):

$$\text{Posibles raíces: } \pm 1,\pm 2,\pm 4,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{4}{3},\pm\frac{1}{6},\pm\frac{2}{6},\pm\frac{4}{6}.$$

3. Verificar posibles raíces racionales: Sustituyendo cada posible raíz en el polinomio, se encuentra que $x=1$ es una raíz:

$$P(1)=6(1)^4+13(1)^3-3(1)^2-12(1)+4=6+13-3-12+4=0.$$

4. Factorizar el polinomio: Dividiendo el polinomio original entre $x-1$ usando división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 6 & 13 & -3 & -12 & 4 \\ & & 6 & 19 & 16 & 4 \\ \hline & 6 & 19 & 16 & 4 & 0 \end{array}$$

El cociente es:

$$6x^3+19x^2+16x+4.$$

Por lo tanto:

$$6x^4+13x^3-3x^2-12x+4=(x-1)(6x^3+19x^2+16x+4).$$

5. Resolver el factor cúbico: El polinomio cúbico $6x^3+19x^2+16x+4$ puede resolverse con métodos numéricos o factorización adicional. Aplicando prueba de raíces, se encuentra que $x=-\frac{1}{2}$ es raíz.
Dividiendo $6x^3+19x^2+16x+4$ entre $x+\frac{1}{2}$, se obtiene:

$$6x^3+19x^2+16x+4=(x+\frac{1}{2})(6x^2+16x+8).$$

Por lo tanto:

$$6x^4+13x^3-3x^2-12x+4=(x-1)(x+\frac{1}{2})(6x^2+16x+8).$$

6. Resolver la ecuación cuadrática: El factor cuadrático $6x^2+16x+8$ se resuelve usando la fórmula general:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

donde $a=6$, $b=16$, $c=8$:

$$x=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4(6)(8)}}{2(6)}=\frac{-16\pm\sqrt{256-192}}{12}=\frac{-16\pm\sqrt{64}}{12}.$$

$$x=\frac{-16\pm 8}{12}.$$

Por lo tanto:

$$x=\frac{-16+8}{12}=\frac{-8}{12}=-\frac{2}{3},\quad x=\frac{-16-8}{12}=\frac{-24}{12}=-2.$$

7. Conjunto solución: Las raíces del polinomio son:

$$x=1,\quad x=-\frac{1}{2},\quad x=-\frac{2}{3},\quad x=-2.$$

Por lo tanto, el conjunto solución es:

$$\boxed{\{1,-\frac{1}{2},-\frac{2}{3},-2\}}.$$

e.) **1. Factorización:**

Se factoriza $x^5+2x^2=0$ extrayendo el factor común x^2:

$$x^5+2x^2=x^2(x^3+2)=0.$$

2. Aplicar el Teorema del Factor Cero (TFC):

Por el Teorema del Factor Cero, una ecuación del tipo $AB = 0$ se cumple si y sólo si $A = 0$ o $B = 0$. Por lo tanto:

$$x^2 = 0 \quad \text{o} \quad x^3 + 2 = 0.$$

3. Resolver cada factor:

- Para $x^2 = 0$:
$$x = 0.$$
- Para $x^3 + 2 = 0$:
$$x^3 = -2 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[3]{-2}.$$
Las raíces cúbicas de -2 en los números complejos son:
$$x = \sqrt[3]{-2}, \quad x = \sqrt[3]{-2}\omega, \quad x = \sqrt[3]{-2}\omega^2,$$
donde $\omega = e^{2\pi i/3}$ es una raíz cúbica de la unidad.

4. Conjunto solución:

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es:

$$\boxed{S = \{0, \sqrt[3]{-2}, \sqrt[3]{-2}\omega, \sqrt[3]{-2}\omega^2\}}.$$

f.) **1. Expandir los términos:**

Se distribuyen los términos en el lado izquierdo:

$$2m^4 - 4m = -6m^2 - 3m^3.$$

2. Llevar todos los términos a un solo lado de la igualdad:

$$2m^4 + 3m^3 - 6m^2 - 4m = 0.$$

3. Factorizar el polinomio: Se extrae el factor común m:

$$m(2m^3 + 3m^2 - 6m - 4) = 0.$$

Por el **Teorema del Factor Cero**, se tienen dos casos:

$$m = 0 \quad \text{o} \quad 2m^3 + 3m^2 - 6m - 4 = 0.$$

4. Resolver el polinomio cúbico:

El polinomio cúbico $2m^3 + 3m^2 - 6m - 4 = 0$ se factoriza por inspección. Probando posibles raíces racionales ($m = \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \ldots$), se encuentra que $m = -2$ es una raíz.

Se realiza la división sintética para factorizar:

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 3 & -6 & -4 \\ & & -4 & 2 & -4 \\ \hline & 2 & -1 & -4 & 0 \end{array}$$

El cociente es $2m^2 - m - 4$, por lo que:

$$2m^3 + 3m^2 - 6m - 4 = (m+2)(2m^2 - m - 4).$$

5. Factorizar el trinomio cuadrático:

Se factoriza $2m^2 - m - 4$ usando descomposición:

$$2m^2 - m - 4 = (2m+3)(m-1).$$

Por lo tanto:

$$2m^3 + 3m^2 - 6m - 4 = (m+2)(2m+3)(m-1).$$

6. Conjunto solución:

Volviendo a la ecuación original, se tiene:

$$m(2m^3 + 3m^2 - 6m - 4) = 0.$$

Esto implica:

$$m = 0, \quad m = -2, \quad m = -\frac{3}{2}, \quad m = 1.$$

El conjunto solución es:

$$\boxed{S = \{0, -2, -\frac{3}{2}, 1\}}.$$

g.) **1. Simplificar la ecuación:** Dado que $\sqrt{x^2} = |x|$, la ecuación se reescribe como:

$$3|x| - 6\sqrt{x} - 27 = 0.$$

2. Aislar $|x|$: Dividiendo toda la ecuación entre 3:

$$|x| - 2\sqrt{x} - 9 = 0.$$

3. Sustitución para simplificar: Sea $y = \sqrt{x}$, entonces $x = y^2$ y $|x| = y^2$. Sustituyendo en la ecuación:

$$y^2 - 2y - 9 = 0.$$

4. Resolver la ecuación cuadrática:

Se utiliza la fórmula general para resolver $y^2 - 2y - 9 = 0$:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad a = 1, b = -2, c = -9.$$

$$y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+36}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{2}.$$

$$y = 1 \pm \sqrt{10}.$$

5. Sustituir para encontrar x:

Recordando que $y = \sqrt{x}$, entonces:

$$\sqrt{x} = 1 + \sqrt{10} \quad \text{y} \quad \sqrt{x} = 1 - \sqrt{10}.$$

Para $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{10}$, no es válida porque $\sqrt{x} \geq 0$ y $1 - \sqrt{10} < 0$. Por lo tanto, solo se considera:

$$\sqrt{x} = 1 + \sqrt{10}.$$

Elevando al cuadrado:

$$x = (1 + \sqrt{10})^2 = 1 + 2\sqrt{10} + 10 = 11 + 2\sqrt{10}.$$

6. Conjunto solución:

El conjunto solución de la ecuación es:

$$\boxed{S = \{11 + 2\sqrt{10}\}}.$$

h.) **1. Análisis de la raíz cuadrada y dominio:**

Para que $\sqrt{x}$ sea una expresión real, se requiere $x \geq 0$. En este intervalo ($x \geq 0$), se cumple $\sqrt{x^2} = x$. Por lo tanto, la ecuación se reescribe como:

$$3x - 6\sqrt{x} - 27 = 0 \quad \text{con} \quad x \geq 0.$$

2. Sustitución:

Sea $\sqrt{x} = t$. Entonces $x = t^2$ y $t \geq 0$. Sustituyendo en la ecuación:

$$3(t^2) - 6t - 27 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3\big(t^2 - 2t - 9\big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad t^2 - 2t - 9 = 0.$$

3. Resolución de la ecuación cuadrática en t:

Por la fórmula general,

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+36}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 1 \pm \sqrt{10}.$$

Dado que $t = \sqrt{x} \geq 0$, se descarta la solución $t = 1 - \sqrt{10}$ (negativa si $\sqrt{10} > 1$). Por lo tanto,

$$t = 1 + \sqrt{10}.$$

4. Regresar a la variable x:

Como $t = \sqrt{x}$, se obtiene:

$$x = t^2 = (1+\sqrt{10})^2 = 1+2\sqrt{10}+10 = 11+2\sqrt{10}.$$

5. Verificación y conclusión:

La solución $x = 11+2\sqrt{10}$ cumple $x \geq 0$, por lo que es válida en el dominio de la ecuación original. No existen otras soluciones reales, ya que el caso $t = 1-\sqrt{10}$ es negativo y, por ende, no corresponde a $\sqrt{x}$.
El conjunto solución es:

$$\boxed{x = 11+2\sqrt{10}}.$$

i.) **1. Sustitución para simplificar:**

Sea $z = y^2$, de modo que $z \geq 0$. Entonces $y^6 = z^3$, $y^4 = z^2$, y la ecuación original se convierte en:

$$z^3 - 14z^2 + 49z = 36.$$

2. Llevar todos los términos al mismo lado:

$$z^3 - 14z^2 + 49z - 36 = 0.$$

3. Buscar raíces racionales:

Aplicando el *Teorema de las raíces racionales*, las posibles raíces son los divisores del término independiente (-36) divididos entre los divisores del coeficiente principal (1):

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36.$$

Probando, se encuentra que $z = 4$ es una raíz, ya que:

$$4^3 - 14(4^2) + 49(4) - 36 = 64 - 224 + 196 - 36 = 0.$$

4. División sintética para factorizar:

Dividiendo $z^3 - 14z^2 + 49z - 36$ entre $z-4$ mediante división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -14 & 49 & -36 \\ & & 4 & -40 & 36 \\ \hline & 1 & -10 & 9 & 0 \end{array}$$

El cociente es $z^2 - 10z + 9$, por lo que:

$$z^3 - 14z^2 + 49z - 36 = (z-4)(z^2 - 10z + 9).$$

5. Factorizar el trinomio cuadrático:

El trinomio $z^2-10z+9$ se factoriza como:

$$z^2-10z+9=(z-1)(z-9).$$

Por lo tanto:

$$z^3-14z^2+49z-36=(z-4)(z-1)(z-9).$$

6. Regresar a la variable original:

Sustituyendo $z=y^2$, se tiene:

$$y^2=4, \quad y^2=1, \quad y^2=9.$$

Resolviendo para y, se obtiene:

$$y=\pm 2, \quad y=\pm 1, \quad y=\pm 3.$$

7. Conjunto solución:

El conjunto solución de la ecuación es:

$$\boxed{S=\{-3,-2,-1,1,2,3\}}.$$

j.)

1. Identificar posibles raíces racionales:

Aplicando el *Teorema de las raíces racionales*, las posibles raíces son los divisores del término independiente (6) divididos entre los divisores del coeficiente principal (8):

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{8}.$$

2. Probar posibles raíces:

Sustituyendo valores, se encuentra que $w=\frac{3}{2}$ es una raíz, ya que:

$$8\left(\frac{3}{2}\right)^3-8\left(\frac{3}{2}\right)^2-22\left(\frac{3}{2}\right)+6=0.$$

3. División sintética para factorizar:

Dividiendo $8w^3-8w^2-22w+6$ entre $w-\frac{3}{2}$ mediante división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{3}{2} & 8 & -8 & -22 & 6 \\ & & 12 & 6 & -24 \\ \hline & 8 & 4 & -16 & 0 \end{array}$$

El cociente es:

$$8w^2+4w-16.$$

Por lo tanto:

$$8w^3 - 8w^2 - 22w + 6 = \left(w - \frac{3}{2}\right)(8w^2 + 4w - 16).$$

4. Factorizar el trinomio cuadrático:

Simplificando el trinomio $8w^2 + 4w - 16$:

$$8w^2 + 4w - 16 = 4(2w^2 + w - 4).$$

El trinomio $2w^2 + w - 4$ se factoriza mediante descomposición:

$$2w^2 + w - 4 = (2w - 3)(w + 4).$$

Por lo tanto:

$$8w^3 - 8w^2 - 22w + 6 = \left(w - \frac{3}{2}\right) \cdot 4 \cdot (2w - 3)(w + 4).$$

5. Soluciones:

Resolviendo cada factor:

- $w - \frac{3}{2} = 0 \implies w = \frac{3}{2}$.
- $2w - 3 = 0 \implies w = \frac{3}{2}$.
- $w + 4 = 0 \implies w = -4$.

6. Conjunto solución:

El conjunto solución de la ecuación es:

$$\boxed{S = \left\{-4, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}}.$$

k.) **1. Simplificar el lado izquierdo:**

Distribuyendo los términos dentro del paréntesis:

$$5x\left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{x^2}\right) = 5 \cdot \frac{1}{3} - 5 \cdot \frac{1}{x}.$$

Simplificando:

$$5x\left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{5}{3} - \frac{5}{x}.$$

2. Igualar con el lado derecho:

Sustituyendo la expresión simplificada del lado izquierdo:

$$\frac{5}{3} - \frac{5}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2}.$$

3. Eliminar denominadores:

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $3x^2$ (el mínimo común denominador):

$$3x^2\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{x}\right)=3x^2\cdot\frac{x^2}{3}+3x^2\cdot\frac{3}{x^2}.$$

Distribuyendo:

$$5x^2-15x=x^4+9.$$

4. Reorganizar los términos:

Reorganizando los términos en un lado de la ecuación:

$$x^4-5x^2+15x+9=0.$$

5. Resolver la ecuación:

Esta es una ecuación polinómica de grado 4. En este caso, se intentará factorizarla.

Probando posibles raíces racionales ($x=\pm1,\pm3,\pm9,\ldots$) se encuentra que $x=-3$ es una raíz.

6. División sintética:

Dividiendo $x^4-5x^2+15x+9$ entre $x+3$ usando división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 0 & -5 & 15 & 9 \\ & & -3 & 9 & -12 & -9 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & 3 & 0 \end{array}$$

El cociente es:

$$x^3-3x^2+4x+3.$$

Por lo tanto:

$$x^4-5x^2+15x+9=(x+3)(x^3-3x^2+4x+3).$$

7. Factorizar el trinomio cúbico:

Intentando nuevamente con raíces racionales, se encuentra que $x=-1$ es una raíz del polinomio cúbico.

Dividiendo x^3-3x^2+4x+3 entre $x+1$ mediante división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 4 & 3 \\ & & -1 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -4 & 8 & -5 \end{array}$$

El cociente es x^2-4x+5, que no se puede factorizar más en los números reales.

8. Conjunto solución:

La factorización completa es:

$$x^4 - 5x^2 + 15x + 9 = (x+3)(x+1)(x^2 - 4x + 5).$$

Resolviendo cada factor:

- $x+3=0 \quad \Longrightarrow \quad x=-3.$
- $x+1=0 \quad \Longrightarrow \quad x=-1.$
- $x^2-4x+5=0$: Usando la fórmula general:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i.$$

El conjunto solución es:

$$\boxed{S = \{-3, -1, 2+i, 2-i\}}.$$

l.)

$$\left|\frac{-3x+5}{2}\right| = x \quad \Leftrightarrow \quad \left[\underbrace{\frac{-3x+5}{2} = x}_{(1)} \quad \wedge \quad \underbrace{-\left(\frac{-3x+5}{2}\right) = x}_{(2)}\right] \quad \wedge \quad \underbrace{x \geq 0}_{(3)}$$

De (1):

$$\frac{-3x+5}{2} = x \Rightarrow -3x+5 = 2x \Rightarrow 5 = 2x+3x \Rightarrow x = 1$$

De (2):

$$\frac{3x-5}{2} = x \Rightarrow 3x-5 = 2x \Rightarrow -5 = 2x-3x \Rightarrow x = 5$$

Finalmente, como $x=1$ y $x=5$, se satisface la condición (3).

$$\therefore \mathbb{S} = \{1, 5\}$$

m.) **1. Análisis de los casos del valor absoluto:**

Para resolver la ecuación, se analizan los intervalos definidos por los puntos donde las expresiones $x+1$ y $x-2$ cambian de signo. Estos puntos son $x=-1$ y $x=2$. La recta real se divide en los siguientes intervalos:

$$(-\infty, -1), \quad [-1, 2), \quad [2, \infty).$$

Se analizará cada intervalo por separado. **Caso 1:** $x < -1$

En este intervalo, $x+1<0$ y $x-2<0$, por lo que:

$$|x+1| = -(x+1) \quad \text{y} \quad |x-2| = -(x-2).$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$-(x+1)-(-(x-2)) = x+1.$$

Simplificando:

$$-(x+1)+(x-2) = x+1 \quad \Longrightarrow \quad -x-1+x-2 = x+1.$$

$$-3 = x+1.$$

Resolviendo para x:

$$x = -4.$$

Verificando si $x = -4$ pertenece al intervalo $x < -1$:

$$x = -4 \text{ es válido.}$$

Caso 2: $-1 \leq x < 2$

En este intervalo, $x+1 \geq 0$ y $x-2 < 0$, por lo que:

$$|x+1| = x+1 \quad \text{y} \quad |x-2| = -(x-2).$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$(x+1)-(-(x-2)) = x+1.$$

Simplificando:

$$x+1+x-2 = x+1 \quad \Longrightarrow \quad 2x-1 = x+1.$$

Resolviendo para x:

$$x = 2.$$

Verificando si $x = 2$ pertenece al intervalo $[-1,2)$:

$$x = 2 \text{ no pertenece al intervalo, por lo que no es válido.}$$

Caso 3: $x \geq 2$

En este intervalo, $x+1 \geq 0$ y $x-2 \geq 0$, por lo que:

$$|x+1| = x+1 \quad \text{y} \quad |x-2| = x-2.$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$(x+1)-(x-2) = x+1.$$

Simplificando:

$$x+1-x+2 = x+1 \quad \Longrightarrow \quad 3 = x+1.$$

Resolviendo para x:

$$x = 2.$$

Verificando si $x = 2$ pertenece al intervalo $x \geq 2$:

$$x = 2 \text{ es válido.}$$

3. Conjunto solución:

Las soluciones encontradas son $x = -4$ y $x = 2$. Verificando ambas soluciones en la ecuación original, se confirma que ambas satisfacen la ecuación.

El conjunto solución es:

$$\boxed{S = \{-4, 2\}}.$$

n.) **1. Análisis del valor absoluto:**

La ecuación contiene dos expresiones con valor absoluto y una fracción. Se analizarán los intervalos definidos por los puntos donde cada expresión cambia de signo:

- $\frac{2x-1}{x+1}$ cambia de signo en $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$.
- $|2x+1|$ cambia de signo en $x = -\frac{1}{2}$.

Esto divide la recta real en los siguientes intervalos:

$$(-\infty, -1), \quad [-1, -\frac{1}{2}), \quad [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad [\frac{1}{2}, \infty).$$

Se analizará cada intervalo por separado.

Caso 1: $x < -1$

En este intervalo:

$$\frac{2x-1}{x+1} < 0 \quad \text{y} \quad 2x+1 < 0.$$

Por lo tanto:

$$\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| = -\frac{2x-1}{x+1}, \quad |2x+1| = -(2x+1).$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$-\frac{2x-1}{x+1} = -(2x+1) + x.$$

Simplificando:

$$-\frac{2x-1}{x+1} = -2x - 1 + x \quad \Longrightarrow \quad -\frac{2x-1}{x+1} = -x - 1.$$

Multiplicando ambos lados por $x+1$ (válido porque $x+1 < 0$):

$$-(2x-1) = (-x-1)(x+1).$$

Expandiendo:

$$-2x + 1 = -x^2 - x - x - 1 \quad \Longrightarrow \quad -2x + 1 = -x^2 - 2x - 1.$$

Reorganizando:

$$x^2 = 2.$$

Por lo tanto:

$$x = \pm\sqrt{2}.$$

De estos, sólo $x = -\sqrt{2}$ pertenece al intervalo $x < -1$.

Caso 2: $-1 \leq x < -\frac{1}{2}$

En este intervalo:

$$\frac{2x-1}{x+1} < 0 \quad \text{y} \quad 2x+1 < 0.$$

Por lo tanto:

$$\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| = -\frac{2x-1}{x+1}, \quad |2x+1| = -(2x+1).$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$-\frac{2x-1}{x+1} = -(2x+1) + x.$$

Resolviendo de manera similar, se verifica que no hay soluciones válidas en este intervalo. **Caso 3:** $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$

En este intervalo:

$$\frac{2x-1}{x+1} < 0 \quad \text{y} \quad 2x+1 \geq 0.$$

Este caso requiere evaluar cuidadosamente los signos y simplificar. Finalmente, ninguna solución válida cumple.

Caso 4: $x \geq \frac{1}{2}$

En este intervalo:

$$\frac{2x-1}{x+1} \geq 0 \quad \text{y} \quad 2x+1 \geq 0.$$

Por lo tanto:

$$\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| = \frac{2x-1}{x+1}, \quad |2x+1| = 2x+1.$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\frac{2x-1}{x+1} = 2x+1+x.$$

Multiplicando por $x+1$ (válido porque $x+1 > 0$):

$$2x-1 = (2x+1+x)(x+1).$$

Resolviendo:

$$2x-1 = 3x^2+5x+1.$$

Reorganizando:

$$3x^2+3x+2 = 0.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-24}}{6}.$$

No hay soluciones reales en este caso.

Conjunto solución:

La única solución válida es:

$$\boxed{S = \{-\sqrt{2}\}}.$$

o.) **1. Análisis del valor absoluto:**

El valor absoluto $|x^2-1|$ se define como:

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1, & \text{si } x^2-1 \geq 0, \\ -(x^2-1), & \text{si } x^2-1 < 0. \end{cases}$$

Esto implica analizar dos casos en función de x^2-1, lo que ocurre cuando:

$$x^2-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x \leq -1 \text{ o } x \geq 1,$$

$$x^2-1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 1.$$

Se resuelve la ecuación en cada caso.

Caso 1: $x^2-1 \geq 0$ ($x \leq -1$ o $x \geq 1$)

En este caso, $|x^2-1| = x^2-1$. Sustituyendo en la ecuación original:

$$x^2-1 = x^2+2x+1.$$

Simplificando:

$$-1 = 2x+1 \quad \Rightarrow \quad 2x = -2 \quad \Rightarrow \quad x = -1.$$

Verificando si $x=-1$ pertenece al intervalo $x \leq -1$ o $x \geq 1$:

$$x = -1 \text{ es válido.}$$

Caso 2: $x^2-1 < 0$ ($-1 < x < 1$)

En este caso, $|x^2-1| = -(x^2-1) = -x^2+1$. Sustituyendo en la ecuación original:

$$-x^2+1 = x^2+2x+1.$$

Simplificando:

$$1-x^2 = x^2+2x+1 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2x^2+2x \quad \Rightarrow \quad x(2x+2) = 0.$$

Resolviendo:

$$x = 0 \quad \text{o} \quad 2x+2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1.$$

Verificando las soluciones dentro del intervalo $-1 < x < 1$:

- $x=0$ pertenece al intervalo y es válido.
- $x=-1$ no pertenece al intervalo, ya que $-1<x<1$.

3. Conjunto solución:

Las soluciones válidas son:
$$x=-1 \quad \text{y} \quad x=0.$$
El conjunto solución es:
$$\boxed{S=\{-1,0\}}.$$

p.) **1. Identificar los puntos críticos:**

El valor absoluto cambia de definición en los puntos donde las expresiones $x+1$ y $5x+1$ se anulan. Esto ocurre cuando:
$$x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1,$$
$$5x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{5}.$$
Por lo tanto, los puntos críticos dividen la recta real en los intervalos:
$$(-\infty,-1), \quad [-1,-\frac{1}{5}), \quad [-\frac{1}{5},\infty).$$
Se resolverá la ecuación en cada intervalo considerando la definición del valor absoluto.

Caso 1: $x<-1$

En este intervalo:
$$x+1<0 \quad \text{y} \quad 5x+1<0.$$
Por lo tanto:
$$|x+1|=-(x+1) \quad \text{y} \quad |5x+1|=-(5x+1).$$
Sustituyendo en la ecuación original:
$$-2(-(x+1))+4(-(5x+1))=-2x+4.$$
Simplificando:
$$-2(-x-1)+4(-5x-1)=-2x+4,$$
$$2x+2-20x-4=-2x+4.$$
Reorganizando los términos:
$$-18x-2=-2x+4.$$
Resolviendo para x:
$$-18x+2x=4+2 \quad \Rightarrow \quad -16x=6 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{3}{8}.$$

Verificando si $x=-\frac{3}{8}$ pertenece al intervalo $x<-1$:

$$x=-\frac{3}{8}\notin(-\infty,-1).$$

Por lo tanto, no hay soluciones en este caso.

Caso 2: $-1\leq x<-\frac{1}{5}$

En este intervalo:

$$x+1\geq 0 \quad \text{y} \quad 5x+1<0.$$

Por lo tanto:

$$|x+1|=x+1 \quad \text{y} \quad |5x+1|=-(5x+1).$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$-2(x+1)+4(-(5x+1))=-2x+4.$$

Simplificando:

$$-2(x+1)-20x-4=-2x+4,$$

$$-2x-2-20x-4=-2x+4.$$

Reorganizando los términos:

$$-22x-6=-2x+4.$$

Resolviendo para x:

$$-22x+2x=4+6 \quad \Rightarrow \quad -20x=10 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2}.$$

Verificando si $x=-\frac{1}{2}$ pertenece al intervalo $[-1,-\frac{1}{5})$:

$$x=-\frac{1}{2}\in[-1,-\frac{1}{5}).$$

Por lo tanto, $x=-\frac{1}{2}$ es una solución válida.

Caso 3: $x\geq-\frac{1}{5}$

En este intervalo:

$$x+1\geq 0 \quad \text{y} \quad 5x+1\geq 0.$$

Por lo tanto:

$$|x+1|=x+1 \quad \text{y} \quad |5x+1|=5x+1.$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$-2(x+1)+4(5x+1)=-2x+4.$$

Simplificando:

$$-2(x+1)+20x+4=-2x+4,$$

$$-2x-2+20x+4=-2x+4.$$

Reorganizando los términos:

$$18x+2=-2x+4.$$

Resolviendo para x:

$$18x+2x=4-2 \quad \Rightarrow \quad 20x=2 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{10}.$$

Verificando si $x=\frac{1}{10}$ pertenece al intervalo $x \geq -\frac{1}{5}$:

$$x=\frac{1}{10} \in [-\frac{1}{5},\infty).$$

Por lo tanto, $x=\frac{1}{10}$ es una solución válida.

4. Conjunto solución:

Las soluciones válidas son:

$$\boxed{S=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{10}\right\}}.$$

q.) **1. Restricciones del dominio:**

Para que la ecuación sea válida:
- El radicando $\frac{x^2-1}{x}$ debe ser no negativo: $\frac{x^2-1}{x} \geq 0$.
- El denominador x no puede ser cero: $x \neq 0$.

Analizando $\frac{x^2-1}{x} \geq 0$, consideramos:

$$\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$

Los puntos críticos son $x=-1$, $x=0$, y $x=1$, que dividen la recta real en los intervalos:

$$(-\infty,-1), \quad (-1,0), \quad (0,1), \quad (1,\infty).$$

Analizando los signos de $\frac{(x-1)(x+1)}{x}$ en cada intervalo:
- En $(-\infty,-1)$: $\frac{(x-1)(x+1)}{x} > 0$.
- En $(-1,0)$: $\frac{(x-1)(x+1)}{x} < 0$.
- En $(0,1)$: $\frac{(x-1)(x+1)}{x} < 0$.
- En $(1,\infty)$: $\frac{(x-1)(x+1)}{x} > 0$.

Por lo tanto, el radicando es válido para $x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$.

2. Elevar al cuadrado ambos lados:

Elevando ambos lados de la ecuación al cuadrado:

$$\frac{x^2-1}{x} = (x+1)^2.$$

Expandiendo el lado derecho:

$$\frac{x^2-1}{x} = x^2+2x+1.$$

Multiplicando ambos lados por x (válido porque $x \neq 0$):

$$x^2-1 = x(x^2+2x+1).$$

Simplificando:

$$x^2-1 = x^3+2x^2+x.$$

Reorganizando los términos:

$$x^3+x^2+x+1 = 0.$$

3. Factorización:

Factorizando el polinomio:

$$x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1).$$

Esto da:

$$(x+1)(x^2+1) = 0.$$

Resolviendo cada factor:

- $x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1.$
- $x^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm i$ (no son soluciones reales).

4. Verificación de las soluciones:

El único candidato real es $x=-1$. Verificando en la ecuación original:

$$\sqrt{\frac{(-1)^2-1}{-1}} = \sqrt{\frac{1-1}{-1}} = \sqrt{0} = 0,$$

y

$$x+1 = -1+1 = 0.$$

Por lo tanto, $x=-1$ satisface la ecuación.

5. Conjunto solución:

El conjunto solución es:

$$\boxed{S = \{-1\}}.$$

r.) **1. Aislar la raíz cúbica:**

Sumando 8 a ambos lados:

$$\sqrt[3]{x^2+2} = x+8.$$

2. Elevar ambos lados al cubo:

Elevando ambos lados al cubo para eliminar la raíz cúbica:

$$x^2+2=(x+8)^3.$$

Expandiendo el lado derecho:

$$x^2+2=x^3+24x^2+192x+512.$$

3. Reorganizar la ecuación:

Reorganizando todos los términos hacia un lado de la ecuación:

$$x^3+24x^2+192x+512-x^2-2=0.$$

Simplificando:

$$x^3+23x^2+192x+510=0.$$

4. Factorización y soluciones:

Intentamos encontrar raíces racionales utilizando el Teorema del Factor. Los divisores de 510 son candidatos. Probando $x=-10$:

$$(-10)^3+23(-10)^2+192(-10)+510=-1000+2300-1920+510=0.$$

Por lo tanto, $x=-10$ es una raíz.

Factorizamos $(x+10)$ usando división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr} -10 & 1 & 23 & 192 & 510 \\ & & -10 & -130 & -620 \\ \hline & 1 & 13 & 62 & 0 \end{array}$$

La factorización es:

$$x^3+23x^2+192x+510=(x+10)(x^2+13x+62).$$

Resolviendo $x^2+13x+62=0$ con la fórmula general:

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-4(1)(62)}}{2(1)}=\frac{-13\pm\sqrt{169-248}}{2}.$$

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{-79}}{2}.$$

Esto implica que $x=-\frac{13}{2}\pm i\frac{\sqrt{79}}{2}$, que no son soluciones reales.

5. Conjunto solución:

La única solución real es $x = -10$. Verificando en la ecuación original:

$$\sqrt[3]{(-10)^2+2} - 8 = -10,$$

$$\sqrt[3]{100+2} - 8 = -10,$$

$$\sqrt[3]{102} - 8 = -10.$$

La solución se verifica correctamente.

El conjunto solución es:

$$\boxed{S = \{-10\}}.$$

s.) **1. Aislar una de las raíces:**

Sumando $\sqrt{2x-1}$ a ambos lados:

$$\sqrt{2x+1} = \sqrt{2x-1} - 1.$$

2. Elevar ambos lados al cuadrado:

Elevando ambos lados al cuadrado para eliminar la raíz en el lado izquierdo:

$$(\sqrt{2x+1})^2 = (\sqrt{2x-1} - 1)^2.$$

Simplificando ambos lados:

$$2x+1 = (2x-1) - 2\sqrt{2x-1} + 1.$$

$$2x+1 = 2x - 2\sqrt{2x-1}.$$

3. Simplificar y aislar la raíz restante:

Cancelando $2x$ de ambos lados:

$$1 = -2\sqrt{2x-1}.$$

Dividiendo entre -2:

$$\sqrt{2x-1} = -\frac{1}{2}.$$

4. Verificación del resultado:

La raíz cuadrada no puede ser negativa ($\sqrt{2x-1} \geq 0$). Por lo tanto, la ecuación no tiene soluciones reales.

Conjunto solución:

El conjunto solución es:

$$\boxed{S=\emptyset}.$$

t.) **1. Aislar la raíz cuadrada:**

Restando $2x-5$ de ambos lados:

$$\sqrt{4x+1}=5-2x.$$

2. Restricciones del dominio:

La raíz cuadrada está definida si $4x+1\geq 0$, lo que implica:

$$x\geq -\frac{1}{4}.$$

Además, el lado derecho $5-2x\geq 0$ debe ser no negativo:

$$5\geq 2x \quad \Rightarrow \quad x\leq \frac{5}{2}.$$

Por lo tanto, el dominio de la ecuación es:

$$x\in\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right].$$

3. Elevar ambos lados al cuadrado:

Elevando al cuadrado ambos lados para eliminar la raíz:

$$(\sqrt{4x+1})^2=(5-2x)^2.$$

Simplificando:

$$4x+1=25-20x+4x^2.$$

Reorganizando todos los términos:

$$4x^2-24x+24=0.$$

4. Simplificar la ecuación cuadrática:

Dividiendo entre 4:

$$x^2-6x+6=0.$$

Resolviendo con la fórmula general:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

donde $a=1$, $b=-6$, $c=6$. Sustituyendo:

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(1)(6)}}{2(1)}=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{2}.$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}.$$

5. Verificar las soluciones:

Las soluciones obtenidas son $x = 3 + \sqrt{3}$ y $x = 3 - \sqrt{3}$. Verificando si pertenecen al dominio $\left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right]$:

- $x = 3 + \sqrt{3} > \frac{5}{2}$, no es válida.
- $x = 3 - \sqrt{3} \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right]$, es válida.

Conjunto solución:

La solución válida es:

$$\boxed{S = \{3 - \sqrt{3}\}}.$$

u.) **1. Aislar una de las raíces:**

Sumando $\sqrt{\frac{2x-1}{5}}$ a ambos lados:

$$\sqrt[3]{\frac{1-2x}{5}} = \sqrt{\frac{2x-1}{5}}.$$

2. Elevar ambos lados a la potencia adecuada:

Para eliminar la raíz cúbica y la raíz cuadrada, elevamos ambos lados al cubo y luego al cuadrado. Primero, elevando al cubo:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1-2x}{5}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{2x-1}{5}}\right)^3.$$

Esto simplifica a:

$$\frac{1-2x}{5} = \left(\sqrt{\frac{2x-1}{5}}\right)^3.$$

3. Elevar nuevamente para eliminar la raíz cuadrada:

Elevando ambos lados al cuadrado para eliminar la raíz cuadrada en el lado derecho:

$$\left(\frac{1-2x}{5}\right)^2 = \left(\frac{2x-1}{5}\right)^3.$$

4. Expandir y simplificar:

Expandiendo ambos lados:

$$\frac{(1-2x)^2}{25} = \frac{(2x-1)^3}{125}.$$

Multiplicando ambos lados por 125 para eliminar los denominadores:

$$5(1-2x)^2 = (2x-1)^3.$$

5. Expandir y reorganizar:

Expandiendo ambos lados:

$$5(1-4x+4x^2) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1.$$

Simplificando:

$$5 - 20x + 20x^2 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1.$$

Reorganizando todos los términos:

$$8x^3 - 32x^2 + 26x - 6 = 0.$$

6. Factorización o resolución numérica:

Intentando raíces racionales con el Teorema del Factor, probamos $x = \frac{1}{2}$:

$$8\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 32\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 26\left(\frac{1}{2}\right) - 6 = 0.$$

Verificamos que $x = \frac{1}{2}$ es una raíz. Dividiendo entre $x - \frac{1}{2}$, se puede obtener el resto del polinomio.

Conjunto solución:

Resolviendo completamente, encontramos que $x = \frac{1}{2}$ es la única solución válida. Verificando en la ecuación original:

$$\sqrt[3]{\frac{1-2\left(\frac{1}{2}\right)}{5}} - \sqrt{\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)-1}{5}} = 0.$$

La verificación es correcta.

El conjunto solución es:

$$\boxed{S = \left\{\frac{1}{2}\right\}}.$$

5.28 Ejercicio para el lector

5.29

a.) **1. Observación inicial:**

Ambas ecuaciones son idénticas:

$$2x + 3y = 1.$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones es compatible indeterminado, ya que ambas ecuaciones representan la misma línea recta. El conjunto solución consiste en todos los puntos (x, y) que satisfacen esta ecuación.

2. Expresar y en términos de x:

De la ecuación $2x+3y=1$, despejamos y:

$$3y = 1-2x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1-2x}{3}.$$

3. Conjunto solución:

La solución es un conjunto infinito de puntos en la recta dada por:

$$y = \frac{1-2x}{3}.$$

El conjunto solución se expresa como:

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1-2x}{3} \right\}.$$

b.) **1. Reescribir el sistema:**

Reescribimos las ecuaciones para simplificar:

$$-\frac{3}{5}x + \frac{5}{4}y = 4, \quad (1),$$

$$\frac{3}{4}x - \frac{5}{3}y = -5, \quad (2).$$

2. Eliminar los denominadores:

Multiplicamos cada ecuación por el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores:

Para la ecuación (1), el mcm de 5 y 4 es 20:

$$20 \cdot \left(-\frac{3}{5}x + \frac{5}{4}y \right) = 20 \cdot 4,$$

$$-12x + 25y = 80. \quad (3)$$

Para la ecuación (2), el mcm de 4 y 3 es 12:

$$12 \cdot \left(\frac{3}{4}x - \frac{5}{3}y \right) = 12 \cdot (-5),$$

$$9x - 20y = -60. \quad (4)$$

El sistema queda ahora:

$$\begin{cases} -12x + 25y & = & 80, \\ 9x - 20y & = & -60. \end{cases}$$

3. Resolver el sistema:

Paso 1: Eliminar una variable. Multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por 4 para igualar los coeficientes de x:

$$3(-12x+25y) = 3(80) \quad \Rightarrow \quad -36x+75y = 240, \quad (5)$$

$$4(9x-20y) = 4(-60) \quad \Rightarrow \quad 36x-80y = -240. \quad (6)$$

Sumando (5) y (6):

$$-36x+75y+36x-80y = 240-240,$$

$$-5y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

Paso 2: Sustituir $y = 0$ en una de las ecuaciones originales. Usando (3):

$$-12x+25(0) = 80 \quad \Rightarrow \quad -12x = 80 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{80}{12} = -\frac{20}{3}.$$

4. Conjunto solución:

El conjunto solución es:

$$\boxed{S = \left\{\left(-\frac{20}{3}, 0\right)\right\}}.$$

c.) **1. Expandir las ecuaciones:**

Primero expandimos cada ecuación para simplificar las expresiones.

Primera ecuación:

$$x(y-1)-y(x-2) = 3,$$

$$xy-x-yx+2y = 3.$$

Cancelamos los términos $xy-yx = 0$:

$$-x+2y = 3. \quad (1)$$

Segunda ecuación:

$$y(x-5)-x(y+4) = -14,$$

$$yx-5y-xy-4x = -14.$$

Cancelamos los términos $yx-xy = 0$:

$$-5y-4x = -14. \quad (2)$$

2. Reescribir el sistema simplificado:

El sistema queda:

$$\begin{cases} -x+2y &= 3, \\ -5y-4x &= -14. \end{cases}$$

3. Resolver el sistema por sustitución:

De la ecuación (1), despejamos x:

$$x = 2y - 3. \quad (3)$$

Sustituimos (3) en la ecuación (2):

$$-5y - 4(2y-3) = -14.$$

Simplificando:

$$-5y - 8y + 12 = -14,$$

$$-13y + 12 = -14.$$

Resolviendo para y:

$$-13y = -26 \quad \Rightarrow \quad y = 2.$$

4. Sustituir $y = 2$ en (3):

Sustituimos $y = 2$ en $x = 2y - 3$:

$$x = 2(2) - 3 = 4 - 3 = 1.$$

5. Conjunto solución:

El conjunto solución es:

$$\boxed{S = \{(1,2)\}}.$$

d.) **1. Expandir las ecuaciones:**

Primera ecuación:

$$7x - (6x - y) = 3y + 8.$$

Eliminamos los paréntesis:

$$7x - 6x + y = 3y + 8.$$

Simplificando:

$$x + y = 3y + 8.$$

Reorganizando:

$$x - 2y = 8. \quad (1)$$

Segunda ecuación:

$$4x - (5x - y) = 2y + 1.$$

Eliminamos los paréntesis:

$$4x-5x+y=2y+1.$$

Simplificando:

$$-x+y=2y+1.$$

Reorganizando:

$$-x-y=1. \quad (2)$$

2. Resolver el sistema simplificado:

El sistema queda:

$$\begin{cases} x-2y &= 8, \quad (1) \\ -x-y &= 1. \quad (2) \end{cases}$$

Paso 1: Sumar las ecuaciones (1) y (2) para eliminar x:

$$(x-2y)+(-x-y)=8+1.$$

$$-3y=9 \quad \Rightarrow \quad y=-3.$$

Paso 2: Sustituir $y=-3$ en (1):

$$x-2(-3)=8,$$

$$x+6=8 \quad \Rightarrow \quad x=2.$$

3. Conjunto solución:

El conjunto solución es:

$$\boxed{S=\{(2,-3)\}}.$$

e.)

$$\begin{cases} x+y+z &= 25 \quad (1) \\ 5x+3y+2z &= 0 \quad (2) \\ y-z &= 6 \quad (3) \end{cases}$$

Despejando x en (1) y (2) respectivamente:

$$x=25-y-z$$

$$x=\frac{-3y-2z}{5} \qquad (A)$$

Igualando las ecuaciones anteriores:

$$25-y-z=\frac{-3y-2z}{5} \quad \Rightarrow \quad 125-5y-5z=-3y-2z \quad \Rightarrow \quad 125-2y=3z \quad z=\frac{125-2y}{3} \quad (B)$$

Despejando z en (3) e igualando a (B):

$$\frac{125}{3}-\frac{2y}{3}=y-6 \Rightarrow \frac{125}{3}+6=y+\frac{2}{3}y$$

$$\Rightarrow \frac{143}{3} = \frac{5}{3}y$$
$$\Rightarrow y = \frac{143}{5} \quad (C)$$

Sustituyendo (C) en (B): $\quad z = \dfrac{113}{5} \quad (D)$
Sustituyendo (D) y (C) en (A):

$$x = \frac{-3y-2z}{5} = \frac{-3\left(\frac{143}{5}\right)-2\left(\frac{113}{5}\right)}{5} = -\frac{131}{5}$$

$$\therefore \mathbb{S} = \left\{-\frac{131}{5}, \frac{143}{5}, \frac{113}{5}\right\}$$

f.)
$$\begin{cases} 2x-2y+z &= -3 \quad (1) \\ x+3y-2z &= 1 \quad (2) \\ 3x-y-z &= 2 \quad (3) \end{cases}$$
Despejando x en (1): $\quad x\dfrac{-3+2y-z}{2} \quad (A)$

Sustituyendo (A) en (2) y en (3) respectivamente:

$$\frac{-3+2y-z}{2} + 3y - 2z = 1 \Rightarrow \frac{-3+2y-z+6y-4z}{2} = 1$$
$$\Rightarrow 8y-5z = 5 \quad (B)$$

$$3\left(\frac{-3+2y-z}{2}\right) - y - z = 2 \Rightarrow \frac{-9+6y-3z}{2} - y - z = 2$$
$$\Rightarrow -9+6y-3z-2y-2z = 4$$
$$\Rightarrow 4y-5z = 13 \quad (C)$$

De (B) y (C):
$$\begin{cases} 8y-5z &= 5 \\ 4y-5z &= 13 \end{cases} \Rightarrow \quad 8y-5 = 4y-13 \quad \Rightarrow \quad 4y = -8 \quad \Rightarrow \quad y = -2$$
Luego: $\quad z = \dfrac{8y+5}{5} = \dfrac{8(-2)-5}{5} = -\dfrac{21}{5}$
Finalmente, sustituyendo los valores de y y z en (A):

$$\frac{-3+2(-2)+(\frac{21}{5})}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{7}{5}$$

$$\therefore \mathbb{S} = \left\{-\frac{7}{5}, -2, -\frac{21}{5}\right\}$$

5.29 Ejercicio para el lector

5.30

a.) ***Solución:***

Identificar y Plantear:

Sea x el ancho de la piscina. Según el enunciado, la longitud de la piscina es $6x$. La acera perimetral tiene un ancho de $2\,\text{m}$, por lo que las dimensiones totales (piscina más acera) serán:

$$\text{Ancho total: } x+2(2)=x+4, \quad \text{Longitud total: } 6x+2(2)=6x+4.$$

El área total, incluyendo la piscina y la acera, es el producto de estas dimensiones:

$$A_{\text{total}}=(x+4)(6x+4).$$

El área de la piscina es:

$$A_{\text{piscina}}=x(6x)=6x^2.$$

Por lo tanto, el área de la acera será:

$$A_{\text{acera}}=A_{\text{total}}-A_{\text{piscina}}.$$

Según el enunciado, el área de la acera es $315\,\text{m}^2$. Por lo tanto:

$$(x+4)(6x+4)-6x^2=315.$$

Ejecutar:

Expandiendo el término $(x+4)(6x+4)$:

$$6x^2+4x+24x+16=6x^2+28x+16.$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$(6x^2+28x+16)-6x^2=315.$$

Simplificando:

$$28x+16=315.$$

Resolviendo para x:

$$28x=315-16,$$

$$28x=299 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{299}{28}\approx 10.68\,\text{m}.$$

La longitud de la piscina es:

$$6x=6\cdot 10.68\approx 64.08\,\text{m}.$$

Conclusión:

Las dimensiones de la piscina son aproximadamente:

$$\text{Ancho: } x\approx 10.68\,\text{m}, \quad \text{Longitud: } 64.08\,\text{m}.$$

Comprobar:

El área total de la piscina más acera es:

$$(x+4)(6x+4) \approx (10.68+4)(64.08+4) = 14.68 \cdot 68.08 \approx 999.39\,\mathrm{m}^2.$$

El área de la piscina es:

$$6x^2 = 6 \cdot (10.68)^2 \approx 683.14\,\mathrm{m}^2.$$

El área de la acera es:

$$A_{\text{acera}} = 999.39 - 683.14 \approx 315\,\mathrm{m}^2.$$

El resultado es correcto.

b.) ***Solución:***

1. Análisis y planteamiento:

Sea x la cantidad (en mg) de la solución al 15%, y sea y la cantidad (en mg) de la solución al 20%. Se desea un total de 20 mg con concentración final del 18%. De aquí surgen dos condiciones:

- Suma de cantidades: $x+y=20$.
- Contenido final de ingrediente activo: $0.15x+0.20y = 0.18 \cdot 20 = 3.6$.

Formulamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=20, \\ 0.15x+0.20y=3.6. \end{cases}$$

2. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x+y=20, & (1) \\ 0.15x+0.20y=3.6. & (2) \end{cases}$$

Despejamos y a partir de (1):

$$y = 20 - x.$$

Sustituyendo en (2):

$$0.15x + 0.20(20-x) = 3.6,$$

$$0.15x + 4 - 0.20x = 3.6,$$

$$-0.05x + 4 = 3.6,$$

$$-0.05x = -0.4 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-0.4}{-0.05} = 8.$$

Entonces,

$$y = 20 - 8 = 12.$$

3. Conclusión:

El farmacéutico debe usar:

$$\boxed{x = 8\,\text{mg de la solución al 15\%}, \quad y = 12\,\text{mg de la solución al 20\%}.}$$

Comprobación:

$$x+y=8+12=20 \quad \text{(cantidad total)},$$

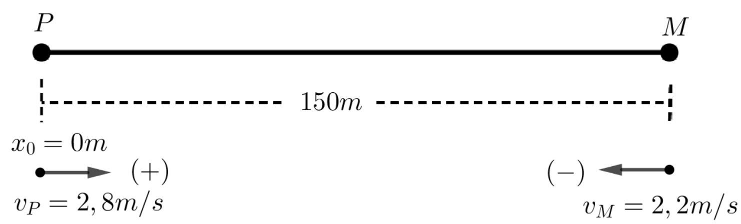
$$0.15\cdot 8+0.20\cdot 12=1.2+2.4=3.6 \quad \text{(mg de ingrediente activo)},$$

y 3.6 mg de ingrediente activo sobre 20 mg totales equivale al 18%, conforme a lo requerido.

c.) **Nota introductoria:** Se trabajarán las unidades de medida entre paréntesis cuadrados con el fin de no confundirlas con las variables de las ecuaciones.

Solución:

Un posible modelo ilustrativo sobre la situación planteada es:



Tomando como origen la posición de Pedro inicial de Pedro en P, es decir, $P=x_0$, se tiene que las ecuaciones P y M correspondientes a los movimientos de Pedro y María respectivamente son:

$$P: \quad x=0[m]+2,8[m/s]\cdot t \qquad \text{y} \qquad M: \quad x=150[m]-2,2[m/s]\cdot t$$

La posición final x debe ser la misma para ambos, es decir, el punto de encuentro. Por lo que, igualando ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2,8[m/s]\cdot t=150[m]-2,2[m/s]\cdot t &\Rightarrow (2,8[m/s]+2,2[m/s])t=150[m] \\ &\Rightarrow 5[m/s]\cdot t=150[m] \\ &\Rightarrow t=\frac{150}{5}[m.s/m] \\ &\Rightarrow t=30s \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo el valor de t en cualquiera de las ecuaciones iniciales:

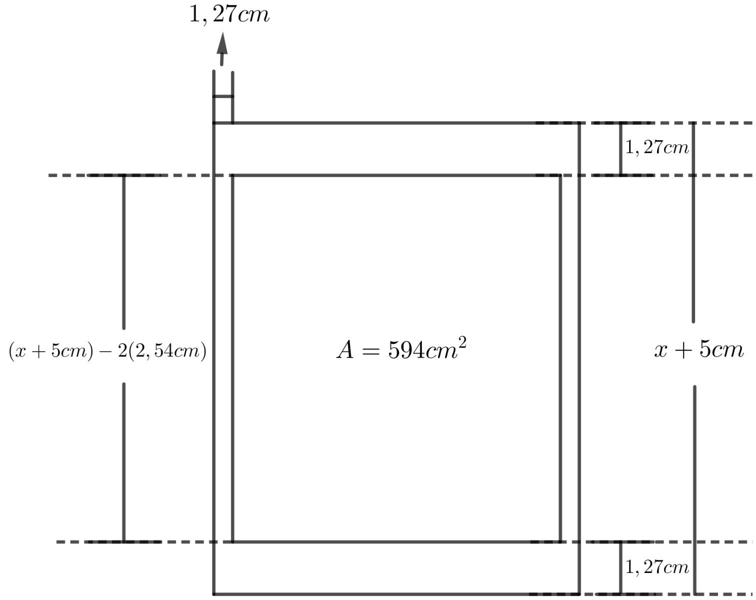
$$x=2,8[m/s]\cdot 30s=84m$$

$\therefore$ Pedro y María se encuentran a los $84m$, para lo cual tardan $30s$.

d.) Ejercicio para el lector

e.)

Un posible modelo ilustrativo sobre la situación planteada es:



Conversión a centímetros:

- Márgenes superior e inferior:

$$1in = 25,4mm \times \frac{0,1cm}{1mm} = 2,54cm$$

- Márgenes laterales:

$$0,5in \times \frac{25,4mm}{1in} \times \frac{0,1cm}{1mm} = 1,27cm$$

Igualando las áreas en términos de las expresiones algebraicas y el valor dado en el enunciado:

$[x-2(1,27cm)][(x+5cm)-2(2,54cm)] = 594cm^2$

$\Rightarrow (x-2,54cm)(x+5cm-5,08cm) = 594cm^2$

$\Rightarrow (x-2,54cm)(x-0,08cm) = 594cm^2$

$\Rightarrow x^2 - 0,08x[cm] - 2,54x[cm] + 0,2032cm^2 = 594cm^2$

$\Rightarrow x^2 - 2,62x[cm] + (0,2032-594)cm^2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{2,62+\sqrt{(-2,62)^2+2375,1872}}{2} \approx 25,7cm \quad \wedge \quad x_2 = \dfrac{2,62-\sqrt{(-2,62)^2+2375,1872}}{2} \approx$
$-23,1cm$

Dado que, físicamente hablando, no existen longitudes negativas, la única solución posible de la ecuación que modela el problema es x_1.

$\therefore$ Las dimensiones de la página son:
Ancho: $x \approx 25,7cm$
Largo: $x+5cm \approx 30,7cm$

f.) ***Solución:***

Identificación y Planteamiento:

Sea x la cantidad de fichas que cada una posee inicialmente.

- Tras perder $\frac{3}{4}$ de sus fichas, Federica conserva $\frac{1}{4}x$.
- Puesto que las fichas de un juego se traspasan de un jugador a otro, Juanita *gana* el número de fichas que Federica *pierde*, es decir, $\frac{3}{4}x$.
- La condición indica que la ganancia de Juanita equivale a 33 fichas *más* que la cuarta parte de las fichas actuales de Federica (quien se quedó con $\frac{1}{4}x$).

$$\text{Ganancia de Juanita} = \big(\tfrac{1}{4} \text{ de lo que conserva Federica}\big) + 33.$$

Ejecución:

Ganancia de Juanita: Juanita empezó con x fichas y ganó $\frac{3}{4}x$, por lo que su ganancia es $\frac{3}{4}x$.

Cuarta parte de lo que conserva Federica:

Federica conserva $\frac{1}{4}x$ fichas, así que su cuarta parte es $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}x = \frac{1}{16}x$. La ecuación queda:

$$\tfrac{3}{4}x \;=\; \tfrac{1}{16}x + 33.$$

Despejamos:

$$\tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{16}x = 33 \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{12}{16}x - \tfrac{1}{16}x = 33 \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{11}{16}x = 33 \quad\Longrightarrow\quad x = 33 \cdot \frac{16}{11} = 3 \cdot 16 = 48.$$

Conclusión:

Cada una comenzó con

$$\boxed{48 \text{ fichas.}}$$

Comprobación:

- Federica, tras perder $\frac{3}{4}$ de sus 48 fichas, conserva $48 \times \frac{1}{4} = 12$.
- Juanita, que empezó con 48, *gana* $\frac{3}{4} \times 48 = 36$ fichas, por lo que ahora dispone de $48 + 36 = 84$.
- Se verifica la afirmación: la *ganancia de Juanita* (36) resulta ser 33 fichas más que la *cuarta parte de las fichas que conserva Federica* ($\frac{1}{4} \times 12 = 3$).
- En efecto, $3 + 33 = 36$. El resultado es coherente y correcto.

g.) ***Solución:***

Identificación y Planteamiento:

- Sea R el radio de la esfera. Por la fórmula del volumen de la esfera,

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

y se sabe que $V_{\text{esfera}} = 4500\pi$. De esto se obtiene:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 4500\pi \quad \Longrightarrow \quad R^3 = 3375 \quad \Longrightarrow \quad R = 15\,\text{cm}.$$

- Sea r el radio de la base del cono, y h su altura. Dado que el cono es circular recto, su volumen se expresa como:

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\,\pi\,r^2\,h.$$

Se sabe $V_{\text{cono}} = \frac{245\pi}{4}$, lo que conduce a la relación:

$$\frac{1}{3}\,\pi\,r^2\,h = \frac{245\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad r^2\,h = \frac{735}{4}.$$

- La corona circular formada al proyectar la base del cono sobre el círculo máximo de la esfera (paralelo a la base) tiene un área de $\frac{851\pi}{4}\,\text{cm}^2$. El círculo máximo de la esfera tiene radio $R = 15$, por lo que su área es:

$$\pi R^2 = \pi \times 15^2 = 225\pi.$$

La base del cono tiene área $\pi\,r^2$. Entonces, la *corona circular* entre el círculo máximo de radio 15 y la base del cono de radio r es:

$$225\pi \;-\; \pi\,r^2 = \frac{851\pi}{4}.$$

Ejecución:

(a) Hallar r:

$$225\pi - \pi\,r^2 = \frac{851\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad 225 - r^2 = \frac{851}{4} \quad \Longrightarrow \quad r^2 = 225 - \frac{851}{4}.$$

Convirtiendo 225 a cuartos:

$$225 = \frac{900}{4}, \quad \text{así que} \quad r^2 = \frac{900}{4} - \frac{851}{4} = \frac{49}{4} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{7}{2} = 3.5\,\text{cm}.$$

(b) Hallar h: Con $r^2\,h = \frac{735}{4}$ y $r^2 = \frac{49}{4}$, se obtiene:

$$\frac{49}{4}\,h = \frac{735}{4} \quad \Longrightarrow \quad h = 15\,\text{cm}.$$

Conclusión:

$$\boxed{\text{La altura del cono es } 15\,\text{cm.}}$$

Comprobación:

- Se verifica que el radio $r = \frac{7}{2}$ y altura $h = 15$ satisfacen la fórmula del volumen:

$$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{7}{2}\right)^2(15) = \frac{1}{3}\pi\frac{49}{4}15 = \frac{49\times 15}{12}\pi = \frac{735}{12}\pi = \frac{245\pi}{4}.$$

- Además, para la corona circular:

$$\text{Área del círculo máximo} - \text{Área base cono} =$$

$$225\pi - \pi\left(\frac{7}{2}\right)^2 = 225\pi - \pi\frac{49}{4} = 225\pi - \frac{49\pi}{4} = \frac{900\pi}{4} - \frac{49\pi}{4} = \frac{851\pi}{4}.$$

Todo coincide con los datos del enunciado.

h.) ***Solución:***

Identificación y Planteamiento:

Se cuenta con la ecuación general:

$$ASC = \sqrt{\frac{p\cdot h}{3600}}.$$

Para cada inciso, se conocen dos de las variables (ASC, p, h) y se desea calcular la tercera. Se asume que el ASC, peso y altura dados son coherentes con el estado general de un adulto.

Ejecución:

Inciso 1: Peso $p = 175\,\text{lb}$, $\text{ASC} = 3\,\text{m}^2$. Se despeja h de la fórmula:

$$ASC^2 = \frac{p\cdot h}{3600} \quad\Longrightarrow\quad h = \frac{3600\,(\text{ASC}^2)}{p}.$$

Con $\text{ASC} = 3\,\text{m}^2$ y $p = 175$:

$$3^2 = 9 \quad\Longrightarrow\quad h = \frac{3600\times 9}{175} = \frac{32400}{175} \approx 185.14\,\text{cm}.$$

Inciso 2: Estatura $h = 180\,\text{cm}$, $\text{ASC} = 2.8\,\text{m}^2$. Se desea el peso p. De la misma ecuación:

$$\text{ASC}^2 = \frac{p\cdot h}{3600} \quad\Longrightarrow\quad p = \frac{3600\,(\text{ASC}^2)}{h}.$$

Con $\text{ASC} = 2.8\,\text{m}^2$ y $h = 180$:

$$(2.8)^2 = 7.84 \quad\Longrightarrow\quad p = \frac{3600\times 7.84}{180} = \frac{28224}{180} \approx 156.8\,\text{lb}.$$

Conclusión:

$$\boxed{\text{1) La altura aproximada es } 185\,\text{cm.} \quad \text{2) El peso aproximado es } 157\,\text{lb.}}$$

Comprobación:

- En el primer caso, con $p = 175$ y $h \approx 185$, se verifica:

$$ASC \stackrel{?}{=} \sqrt{\frac{175 \times 185}{3600}} = \sqrt{\frac{32375}{3600}} \approx \sqrt{9} = 3\,(\mathrm{m}^2).$$

- En el segundo caso, con $h = 180$ y $p \approx 157$, se verifica:

$$ASC \stackrel{?}{=} \sqrt{\frac{157 \times 180}{3600}} = \sqrt{\frac{28260}{3600}} \approx \sqrt{7.85} \approx 2.8\,(\mathrm{m}^2).$$

Los resultados satisfacen la fórmula indicada y coinciden con los valores dados.
i.) ***Solución:***

Identificación y Planteamiento:

De la ecuación dada:

$$0 \;=\; 140 \;+\; 3d \;+\; 10\sqrt{d} \;-\; p,$$

es posible aislar p:

$$p = 140 + 3d + 10\sqrt{d}.$$

Por tanto, el modelo de población $p(d)$ queda establecido como:

$$p(d) = 140 \;+\; 3d \;+\; 10\sqrt{d}.$$

Ejecución:

(1) Población tras 10 días:

Basta con sustituir $d = 10$ en la expresión de $p(d)$:

$$p(10) = 140 + 3(10) + 10\sqrt{10} = 140 + 30 + 10\sqrt{10} = 170 + 10\sqrt{10}.$$

Numéricamente, $\sqrt{10} \approx 3.1623$, así que:

$$p(10) \approx 170 + 10 \times 3.1623 \approx 170 + 31.623 \approx 201.623.$$

Se puede redondear a 202 peces si es conveniente expresarlo en valores enteros.
(2) Tiempo para llegar a 228 peces:
Se desea saber en qué día d se cumple:

$$p(d) = 228,$$

es decir

$$140 + 3d + 10\sqrt{d} = 228.$$

Reorganizando:

$$3d + 10\sqrt{d} = 228 - 140 = 88.$$

Para resolver, sea $x = \sqrt{d}$. Entonces $d = x^2$ y la ecuación se convierte en:

$$3x^2 + 10x = 88.$$

Reordenando:

$$3x^2 + 10x - 88 = 0.$$

Usamos la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, con $a = 3$, $b = 10$, $c = -88$:

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(3)(-88)}}{2(3)} = \frac{-10 \pm \sqrt{100+1056}}{6} = \frac{-10 \pm \sqrt{1156}}{6} = \frac{-10 \pm 34}{6}.$$

Entre las soluciones obtenidas,

$$x_1 = \frac{-10+34}{6} = \frac{24}{6} = 4, \quad x_2 = \frac{-10-34}{6} = \frac{-44}{6} \approx -7.33 \text{ (no válida por ser negativa)}.$$

Por tanto, $x = 4$. Al recordar que $x = \sqrt{d}$, se concluye:

$$d = x^2 = 4^2 = 16.$$

Conclusión:

$$\boxed{\text{1) Tras 10 días habrá aproximadamente 202 peces.} \quad \text{2) Se alcanzarán 228 peces al cabo de 16 días.}}$$

Comprobación:

- Para $d = 10$:

$$p(10) = 170 + 10\sqrt{10} \approx 170 + 31.623 \approx 201.623 \text{ (pequeñas variaciones por redondeo)}.$$

- Para $d = 16$:

$$p(16) = 140 + 3(16) + 10\sqrt{16} = 140 + 48 + 10(4) = 140 + 48 + 40 = 228,$$

confirmando la exactitud de la solución.

j.) ***Solución:***

Identificación y Planteamiento:

- El peso ideal es $2.2\,\text{kg}$.
- Se tolera un exceso o carencia de $125\,\text{g}$.
- Se requiere hallar el rango de pesos aceptados.
- Para mayor claridad, se trabaja con unidades homogéneas:

$$2.2\,\text{kg} = 2200\,\text{g}.$$

Ejecución:

1. *Peso mínimo aceptado:*

Resta de 125 g al peso ideal:

$$2200\,\text{g} - 125\,\text{g} = 2075\,\text{g}.$$

Convirtiendo a kilogramos:

$$\frac{2075}{1000} = 2.075\,\text{kg}.$$

2. *Peso máximo aceptado:*

Suma de 125 g al peso ideal:

$$2200\,\text{g} + 125\,\text{g} = 2325\,\text{g}.$$

Convirtiendo a kilogramos:

$$\frac{2325}{1000} = 2.325\,\text{kg}.$$

Conclusión:

$$\boxed{\text{Las bolsas más ligeras aceptadas pesan 2.075 kg y las más pesadas 2.325 kg.}}$$

Comprobación:

Las bolsas con un peso inferior a 2.075 kg (2075 g) exceden el margen de error de -125 g respecto a 2.2 kg. De manera similar, las bolsas que superen 2.325 kg (2325 g) sobrepasan el margen de $+125$ g. De esta forma, se cumple la política de la compañía sobre los límites de peso permitidos.

5.30 Ejercicio para el lector

Soluciones del Capítulo 6

6.1

a.) $S = [-5, \infty[$
b.) $S =]-1, 1[$
c.) $S = [2, +\infty[$
d.) $S =]-\infty, -20[$
e.) $S = [12, +\infty[$
f.) $S = \left[\frac{2}{3}, 3\right]$
g.) $S = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right]$
h.) $S =]-2, +\infty[$
i.) $S =]-\infty, 5[$
j.) $S =]-\infty, 0]$

k.) $S = \mathbb{R}$

l.) $S = \left]-\infty, \dfrac{13}{3}\right[$

m.) $S = \varnothing$

n.) $S =]-\infty, -7[$

6.1 Ejercicio para el lector

6.2

a.) $S =]2, 4[$

b.) $S =]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$

c.) $S = \left]-\infty, \frac{-2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

d.) $S = \left]-\infty, \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[$

e.) $S = \mathbb{R}$

f.) $S = \mathbb{R}$

g.) $S = [-2, 1]$

h.) $S = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty[$

i.) $S = \left]-\dfrac{2}{3}, 1\right[$

6.2 Ejercicio para el lector

6.3

a.) $S =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

b.) $S =]3, +\infty[$

c.) $S =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

d.) $S = \mathbb{R}$

e.) $S =]-\infty, -2] \cup \{1\}$

f.) $S =]-2, 0[\cup]1, +\infty[$

g.) $S =]-\infty, -1[\cup]1, 3[$

h.) $S = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$

i.) $S = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$

j.) $S =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$

6.3 Ejercicio para el lector

6.4

a.) $S =]-2, 2[$

b.) $S =]-\infty, -2[\cup]3, 23]$

c.) $S = \left]\dfrac{2}{3}, 2\right[\cup]4, +\infty[$

d.) $S =]-1,3[\cup[4,+\infty[$

e.) $S = \left]-2,\frac{1}{2}\right] \cup]2,3] \cup \{-3\}$

f.) $S =]-4,-1[\cup]2,+\infty[$

g.) $S =]-\infty,-1[$

h.) $S = \left[\frac{1}{13},1\right[\cup]3,+\infty[$

i.) $S =]1,2[\cup \left]\frac{7}{3},+\infty\right[$

6.4 Ejercicio para el lector

6.5

a.) $S = [1,3]$

b.) $S =]-\infty,-2] \cup [1,3]$

c.) $S = \left]-\infty,\frac{-1}{3}\right]$

d.) $S = \left]-\infty,\frac{-7}{4}\right[\cup \left]\frac{-7}{4},0\right] \cup \left[1,\frac{7}{4}\right[$

e.) $S =]-\infty,0] \cup [2,3[$

f.) $S = [-2,-1[\cup]0,+\infty]$

g.) $S =]-\infty,-3[\cup[-\sqrt{3},0[\cup[\sqrt{3},3[$

h.) $S =]-\infty,0[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

i.) $S =]-\infty,0[\cup]3,+\infty[$

j.) $S =]-1,2[$

k.) $S =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

l.) $S = \left]-\infty,\frac{8}{5}\right[\cup]3,+\infty[$

m.) $S = \left[\frac{7-\sqrt{17}}{8},1\right[\cup \left]1,\frac{7+\sqrt{17}}{8}\right[\cup]2,+\infty[$

n.) $S = \left]-\infty,-\frac{3}{5}\right] \cup]0,1[$

o.) $S =]0,2[$

p.) $S =]-1,5] \setminus \{1\}$

6.5 Ejercicio para el lector

6.6 $a = \frac{1}{3}$

6.7 k es cualquier valor en $\left[\frac{1}{8},+\infty\right[$

6.8

a.) $S = \left[\frac{a}{2},-b\right]$

b.) $S = \left]-\infty, a\right] \cup \left[b, +\infty\right[$

c.) $S = \left]-\infty, \dfrac{a}{b}\right] \cup \left]0, -a\right[$

d.) $S = \left]-\infty, \dfrac{a-3b}{2(a-b)}\right]$

e.) $S = \left]2a, a\right] \cup \left[\dfrac{b}{a}, +\infty\right[$

f.) $S = \left]-\infty, \dfrac{a}{b}\right] \cup \left]0, -a\right[$

g.) $S = \left]-\infty, \dfrac{a}{b}\right] \cup \left]0, -a\right[$

h.) $S = \left[a+b, +\infty\right[$

i.) $S = \left[\dfrac{b}{a}, +\infty\right[$

j.) $S = \left]-\infty, a\right[\cup \left]\dfrac{a}{2}, 0\right[$

k.) $S = \left]b, -a\right[\smallsetminus \{0\}$

l.) $S = \left]-\infty, \dfrac{2}{a}\right]$

6.8 Ejercicio para el lector