Walter Mora F. et al.

Apuntes y Prácticas del curso

Álgebra Lineal para Computación

Visualización Interactiva con Wolfram CDFPlayer (libre)

Compartir

https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/no_revisado/

Las aplicaciones interactivas requieren haber instalado la aplicación gratuita Wolfram CDFPlayer
https://www.wolfram.com/cdf-player/

Wolfram CDF Player

Revista
Matemática, Educación e Internet. (https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/no_revisado/).

Índice general

Créditos

Esta práctica: "Práctica del curso Álgebra Lineal para Computación" es el resultado de la selección de ejercicios de las prácticas consignadas en la bibliografía que aparece al final de este documento. En la elaboración de este material participaron los siguientes profesores:

Walter Mora F.	Coordinador
Cristian Páez P.	Coordinador
Manuel Alfaro	
Erick Chacón	
Bryan Rodríguez	
Randy Wynta	

Asistentes:

Citar como:

W. Mora et al. "Práctica del curso Álgebra Lineal para Computación. Selección de ejercicios." Revista digital, Matemática, Educación e Internet.
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/practicas/

Capítulo 1

Matrices

1.1 Operaciones básicas

Recordemos que la entrada ij de la matriz A es $\langle A\rangle_{ij}$ y que la fila i es $A_{(i)}$ y la columna j es $A^{(j)}$. Usamos la notación $A_n = A_{n\times n}$.

1) Si A y B son matrices del mismo orden, entonces $\langle A\pm B\rangle_{ij} = \langle A\rangle_{ij} \pm \langle B\rangle_{ij}$

2) $\langle \alpha A\rangle_{ij} = \alpha\langle A\rangle_{ij}$

3) $\langle A_{n\times k}B_{k\times m}\rangle_{ij} = \sum_{i=1}^{k}\langle A\rangle_{ik}\langle B\rangle_{kj}$

4) $\langle A^T\rangle_{ij} = \langle A\rangle_{ji}$

5) $\langle I\rangle_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i=j \\ 0 & \text{si} \quad i\neq j \end{cases}$

6) $\mathbb{1}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1}$

1.2 Propiedades de la suma y el producto

1) Para $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y $A,B,C\in\mathcal{M}_{m\times n}$, se cumple:

   a) $A+B=B+A$
   b) $(A+B)+C=A+(B+C)$
   c) $A+0_{m\times n}=0_{m\times n}+A=A$
   d) $A+(-A)=(-A)+A=0_{m\times n}$
   e) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$
   f) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
   g) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
   h) $I^T=I$
   i) $(\alpha A)^T=\alpha A^T$
   j) $(A+B)^T=A^T+B^T$

2) Para $\alpha\in\mathbb{R}, A,B\in\mathcal{M}_{m\times n}, C\in\mathcal{M}_{n\times p}, D\in\mathcal{M}_{p\times s}, F\in\mathcal{M}_{r\times m}$ se cumple:

   a) $F(A+B)=FA+FB$
   b) $(A+B)C=AC+BC$
   c) $I_mA=A=AI_n$
   d) $A(\alpha C)=(\alpha A)C=\alpha(AC)$
   e) $(A^T)^T=A$
   f) $(AC)^T=C^TA^T$
   g) $0_{r\times m}A=0_{r\times n}$
   h) $A0_{n\times p}=0_{m\times p}$
   i) $(AC)D=A(CD)$

1.3 Ejercicios

Operaciones básicas

1.3.1 Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, calcule $A\mathbb{1}_3$

1.3.2 Si $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, calcule XX^T y X^TX

1.3.3 Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, calcule $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

1.3.4 Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule $AA^T - (3I)^2$

1.3.5 Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

1) Determine alguna matriz $B_{2\times 2} \neq \mathbf{0}$ tal que $AB = \mathbf{0}$
2) Determine alguna matriz $C_{2\times 2}$ tal que $AC \neq \mathbf{0}$
3) Determine alguna matriz $D_{2\times 2} \neq \mathbf{0}$ tal que $AD = DA$

1.3.6 Sea $X = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule XAX^T

1.3.7 Determine una matriz $A_{2\times 2}$ tal que

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} + f$$

1.3.8 Sea $A_{3\times 3}$ definida por $\langle A \rangle_{ij} = \begin{cases} i & \text{si} \quad i \geq j \\ 0 & \text{si} \quad i < j \end{cases}$ y $B_{3\times 3}$ definida por $\langle B \rangle_{ij} = \begin{cases} j & \text{si} \quad i \leq j \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$

Determine explícitamente A y B y realice el producto AB

1.3.9 Sea $A_{3\times 3}$ definida por $\langle A \rangle_{ij} = (-1)^{i+j}$ y $B_{3\times 3}$ definida por $\langle B \rangle_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{si} \quad i > j \\ 0 & \text{si} \quad i = j \\ i-j & \text{si} \quad i < j \end{cases}$

Determine explícitamente A y B y realice el producto AB

1.3.10 Muestre que para realizar el producto $A_{n\times k}B_{k\times m}$ se deben hacer nkm multiplicaciones.

1.3.11 Considere los productos equivalentes $A_{3\times 4}(B_{4\times 2}C_{2\times 5})$ y $(A_{3\times 4}B_{4\times 2})C_{2\times 5}$. ¿Cuál es la escogencia de paréntesis óptima?, es decir, ¿En cuál producto, $A(BC)$ o $(AB)C$, se deben hacer menos multiplicaciones?

Demostraciones "entrada por entrada"

1.3.12 En esta lista, no debe asumir las propiedades de matrices enunciadas más arriba pero sí las operaciones básicas!. Muestre, **"entrada por entrada"** que

1) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

2) $I_n A_n = A_n$

3) $(A_n B_n C_n)^T = C^T B^T A^T$

4) $(A_n{}^T B_n)^T = B_n{}^T A_n$

5) $(A_n^T B_n C_n)^T = C_n{}^T B_n{}^T A_n$

6) si $A \in \mathcal{M}_{p\times q}$, $B \in \mathcal{M}_{r\times q}$ y $C \in \mathcal{M}_{q\times r}$, entonces $A(B-2C^T)^T = AB^T - 2AC$

7) si $A \in \mathcal{M}_{r\times p}$, $B \in \mathcal{M}_{q\times r}$ y $C \in \mathcal{M}_{r\times q}$, entonces $(2B^T - C)^T A = 2BA - C^T A$

1.3.13 Sean A y B matrices de tamaño $p\times q$, y sea C alguna matriz de tamaño $p\times m$. Demuestre, entrada por entrada, que $A^T C + B^T C = (A+B)^T C$

1.3.14 Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ demuestre, entrada por entrada, que

$$\left(A^2 + B^T\right)^T = B + \left(A^T\right)^2$$

1.3.15 Muestre, **"entrada por entrada"** que

1) si A_n es triangular inferior (es decir, $\langle A\rangle_{ij} = 0$ si $i<j$) y si B_n es triangular inferior, entonces AB es triangular inferior

2) si $\boldsymbol{A}_n$ es triangular superior (es decir, $\langle \boldsymbol{A}\rangle_{\boldsymbol{ij}} = 0$ si $i > j$) y si $\boldsymbol{B}_n$ es triangular superior, entonces $\boldsymbol{AB}$ es triangular superior

3) si $\boldsymbol{B}_m$ está definida por $\langle \boldsymbol{B}\rangle_{\boldsymbol{ij}} = 0$ si $\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}$ y las entradas $\langle \boldsymbol{B}\rangle_{\boldsymbol{ii}} \neq 0$ y todas distintos ($\boldsymbol{B}$ es una matriz "diagonal"), entonces en general $\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m \neq \boldsymbol{B}_m\boldsymbol{A}_m$. ¿Qué propiedad debería tener $\boldsymbol{A}$ para que conmute con $\boldsymbol{B}$?

4) si $\boldsymbol{A}_n$ tiene la fila $\boldsymbol{i}$ llena de ceros (una "fila nula") entonces $\boldsymbol{AB}_n$ también tiene al menos una fila nula.

5) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}_n + \boldsymbol{A}_n^{\boldsymbol{T}})$ es simétrica (es decir, que la entrada $\boldsymbol{ij}$ es igual a la entrada $\boldsymbol{ji}$)

1.3.16 Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $A, \mathbf{0} \in \mathcal{M}_{p\times w}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$, con $\mathbf{0}$ matriz nula. Demuestre, entrada por entrada, que $\left((\alpha A + \mathbf{0})^T B\right)^T = \alpha\left(B^T A\right)$

Cálculos usando propiedades de matrices

1.3.17 Use solo álgebra de matrices para simplificar las siguientes expresiones

1) $(\boldsymbol{AB}^{\boldsymbol{T}})^{\boldsymbol{T}}$
2) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A})^{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$
3) $[\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}})]^{\boldsymbol{T}}$
4) $[(\boldsymbol{AB})^{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{C})]^{\boldsymbol{T}}$
5) $[(A + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})(A - \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})]^{\boldsymbol{T}}$

1.3.18 Si $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, desarrolle $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$

1.3.19 Si $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, desarrolle $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^2$

1.3.20 Sea $k \in \mathbb{R}$ y considere las matrices reales $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{C}$ definidas como:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & k \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Si se sabe que $\boldsymbol{AB}^T + \boldsymbol{A} = (2\boldsymbol{C})^T + 2\boldsymbol{B}^T$ determine la matriz $\boldsymbol{B}$ que satisface dicha ecuación (usando álgebra matricial y sin resolver sistema de ecuaciones alguno).

1.3.21 Utilice inducción matemática y demuestre que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.3.22 Sean $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{CB}$ y $\boldsymbol{C}^2 = \boldsymbol{0_n}$
Demuestre, usando Inducción Matemática, que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$, se cumple que:

$$\boldsymbol{A}^{n+1} = \boldsymbol{B}^n \left[\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})\,\boldsymbol{C}\right]$$

1.3.23 Matrices simétricas y antisimétricas.

1) Sea $\boldsymbol{A}_{m\times n} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{m\times n}}(\mathbb{R})$. Verifique que las matrices $\boldsymbol{AA}^T$ y $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ son simétricas.

2) Muestre que si $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ es simétrica y si $\boldsymbol{B}_{n\times m}$ es una matriz arbitraria, entonces $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB}$ es simétrica

3) Muestre que $\boldsymbol{A}$ es simétrica si y sólo si $\boldsymbol{A}^T$ es simétrica

4) Muestre que si $\boldsymbol{A}$ es simétrica entonces $\boldsymbol{A}^n$ es simétrica

5) $\boldsymbol{A}$ se dice *antisimétrica* si $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$. Muestre que

   a) si $\boldsymbol{A}$ es antisimétrica entonces $\boldsymbol{A}$ debe ser cuadrada y los elementos de la diagonal deben ser ceros

   b) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T$ es simétrica $\forall \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{n\times n}}$

   c) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^T$ es antisimétrica $\forall \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{n\times n}}$

6) Muestre que si $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ y $\boldsymbol{B}_{n\times n}$ son antisimétricas entonces $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{BA}$

7) Muestre que si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son simétricas entonces, $\boldsymbol{AB}$ es simétrica si y sólo si $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$

1.3.24 Una matriz de tamaño $m \times m$ se dice que es antisimétrica si cumple que $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$.

1) Si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -8 & 0 & c \\ d & 3 & 0 \end{bmatrix}$, determine valores para a, b, c y d de manera que $\boldsymbol{A}$ sea una matriz antisimétrica.

2) Demuestre que $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^T$ es antisimétrica, con $\boldsymbol{B}$ de tamaño $n \times n$.

1.3.25 Se dice que una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica si cumple que $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$. Demuestre que si $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica y $\boldsymbol{C} \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$, entonces $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{BC}$ es una matriz simétrica.

1.4 Operaciones elementales. Reducción Gaussiana

Forma escalonada. Recordemos que una matriz está **escalonada** por filas si cumple con las siguientes propiedades:

a.) Todos las filas nulas están en la parte inferior de la matriz.

b.) El primer elemento no nulo de cada fila ("pivote") está a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior

Forma escalonada reducida. La matriz está en **forma escalonada reducida** si está **escalonada** y cumple

c.) En cada fila no nula, primer elemento no nulo de cada fila ("pivote") es igual a uno

d.) Todos los elementos por encima de los pivotes son nulos

Por ejemplo, las siguientes matrices están en forma escalonada reducida (los pivotes están en cajas: $\boxed{pivote}$).

Escalonada	Escalonada reducida
$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{-3} & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 5 & -6 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Operaciones elementales. Tenemos tres operaciones elementales de fila

- $A \xrightarrow{c\overline{F_i}} A'$ multiplica la fila i de A por el escalar $c \neq 0$. El resultado es la nueva matriz A'

- $A \xrightarrow{cF_i + h\overline{F_j}} A'$ multiplica las filas i y j de A por los escalares $c, h \neq 0$, luego suma miembro a miembro y reemplaza la fila j de A. El resultado es la nueva matriz A'

- $A \xrightarrow{F_i, F_j} A'$ Intercambia las filas i y j de A. El resultado es la nueva matriz A'

  La barra en $\overline{F_j}$ se usa para especificar cuál fila va a ser modificada.

Eliminación Gaussiana. Este algoritmo reduce una matriz hasta una forma escalonada. "Eliminación Gauss-Jordan" reduce hasta las forma escalonada reducida. En seudocódigo sería

■ Algoritmo 1.1: Eliminación Gaussiana sin pivoteo parcial

```
for (k in 1:(n-1)){       # desde columna k=1 hasta k=n-1
  if(a_kk==0){
                  c = Indice primera fila con a_ck !=0, c>k
                  Fk,Fc    # intercambio de filas
                  Si c no existe, k=k+1 #cambia de columna
                 }
  # Eliminar en columna k,  debajo de la diagonal
  for (i in (k+1):n){
                 Fi = Fi - a_ik/a_kk * Fk
  }
}
```

Eliminación libre de fracciones. En álgebra comptacional (factorización de polinomios, cálculo de primitivas, etc.) se hace eliminación sobre matrices con entradas enteras o con polinomios con coeficientes enteros (con entradas como α, $\alpha^2 - 1$, etc.), y se usa una variante llamada "Algoritmo de Bareiss" de doble paso ([5, pp. 389-399]). Para cálculos "a mano" podemos usar una versión muy simple, llamada "eliminación libre de divisiones" (su problema es el creciemnto incomtrolable de las entradas)

■ Algoritmo 1.2: Eliminación Gaussiana libre de divisiones

```
#Preferiblemente usar algoritmo de Bareiss!
  for (k in 1:(n-1)){       # desde columna k=1 hasta k=n-1
    if(a_kk==0){
                  c = Indice primera fila con a_ck !=0, c>k
                  Fk,Fc   # intercambio de filas
                  Si c no existe, k=k+1
                 }
  # Eliminar en columna k
  for (i in (k+1):n){   # debajo de la diagonal
                 Fi = a_kk*Fi - a_ik* Fk
  }
}
```

1.5 Ejercicios

1.5.1 Use eliminación Gauss-Jordan para obtener la forma escalonada y la forma escalonada reducida de las siguientes matrices

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

2) $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

3) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1.6 Matriz inversa

Una matriz $A_{n\times n}$ es invertible (o "no singular") si existe $B_{n\times n}$ tal que $AB = BA = I$. Se escribe $B = A^{-1}$

1.6.1 Propiedades de la matriz inversa

Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es invertible, entonces

A^{-1} es única y además, si $AB = I$ entonces $B = A^{-1}$ (no hay que probar $BA = I$).

a.) $(A^{-1})^{-1} = A$

b.) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

c.) $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}(A)^{-1}$ si $\alpha \neq 0$

d.) Si $B_{n\times n}$ es invertible, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Observación: En general, $A + B$ no es invertible, aún cuando A y B son invertibles. La inversa de la suma existe bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, eun caso especial del *teorema inverso del binomio* establece que dadas las matrices $A_{p\times p}, B_{p\times p}$, donde A, B y $B + BA^{-1}B$ son invertibles, entonces

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \left(\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}$$

Una exposición más general la puede ver en `https://en.wikipedia.org/wiki/Woodbury_matrix_identity`

1.7 Ejercicios

1.7.1 Use eliminación Gaussiana para determinar si la inversa de las siguientes matrices existe. Si existe, determine la inversa.

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3) $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,

4) $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

5) $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix}$

6) Sea $k\neq 0$, calcule la inversa de $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k & 0 & 0 & 0\\ 1 & k & 0 & 0\\ 0 & 1 & k & 0\\ 0 & 0 & 1 & k\end{bmatrix}$

1.7.2 Sean $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

1) Verifique que $(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{I_2})^{-1}=\boldsymbol{AB}$

2) Sin resolver sistema de ecuaciones alguno determine la matriz $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{ABX}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}$

1.7.3 Sean $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{X}\in M_n(\mathbb{R})$ tales que $\left(2\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{C}-I_n\right)^T=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{X})$.

a.) Si se sabe que $\boldsymbol{C}$ una matriz simétrica e invertible, utilice únicamente álgebra matrices para despejar a la matriz $\boldsymbol{X}$.

b.) Determine explícitamente la matriz $\boldsymbol{X}$ para el caso particular en que:

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

1.7.4 Muestre que si $\boldsymbol{A}$ es invertible y $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$

1.7.5 Muestre que si $\boldsymbol{A}$ es invertible y $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$, entonces $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})=\boldsymbol{0}$ (es decir, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$)

1.7.6 Muestre que si $\boldsymbol{A}^3_{n\times n}=\boldsymbol{0}$, entonces $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$

1.7.7 Sean $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{\mathcal{M}}_{n\times n}(\mathbb{R})$, tales que $\boldsymbol{A}$ y $\left(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^T\right)$ son invertibles y

$$2(\boldsymbol{XA})^T=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^T$$

a.) Utilice únicamente álgebra matrices para despejar la matriz X.

b.) Determine explícitamente la matriz X para el caso particular en que:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.7.8 Sean $A, B, C, X \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Supongamos que A y B son matrices invertibles tales que $(AXB)^T + C = I$. Use solo álgebra de matrices para despejar X en términos de A, B, C e I

1.7.9 Sean $A, B, X \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Supongamos que $A - B$ es invertible y que $XA^T = I + (BX^T)^T$. Use solo álgebra de matrices para despejar X en términos de A, B e I

1.7.10 Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Supongamos que B y $(I - AB)$ son matrices invertibles. Muestre que

1) $(I - AB)^{-1} = B^{-1}(B^{-1} - A)^{-1}$

2) $B(I - AB)^{-1}B^{-1} - B(I - AB)^{-1}A = I$

3) Use los resultados anteriores para verificar que $(I - AB)^{-1} = I + A(I - BA)^{-1}$

1.7.11 Considere las matrices $A_{m\times m}$ y $B_{m\times n}$

a.) Determine el orden de las matrices X y D de tal manera que se pueda realizar los productos en la ecuación $XA^T - B^T = XD^T$

b.) Si $(A - D)^T$ es invertible y si $XA^T - B^T = XD^T$, use solo álgebra de matrices para despejar X en términos de A, B y D

1.7.12 Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Determine una matriz X tal que $A(X^T + B) = C$

1.7.13 Considere las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando únicamente álgebra de matrices determine, de manera explícita, la matriz X que satisface la ecuación matricial siguiente:

$$XAB^T = AB^T + XC^2$$

1.7.14 Considere las matrices $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{U}$ definidas por:

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

1) Determine $\boldsymbol{R}^{-1}$.

2) Determine la matriz $\boldsymbol{W}$ que satisface la igualdad $\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{W}^T+\boldsymbol{S}\right)=\boldsymbol{U}$.

1.7.15 Sea $k \in \mathbb{R}$ y considere las matrices reales $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{C}$ definidas como:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & k \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Si se sabe que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T+\boldsymbol{A}=(2\boldsymbol{C})^T+2\boldsymbol{B}^T$ determine la matriz $\boldsymbol{B}$ que satisface dicha ecuación (usando álgebra matricial y sin resolver sistema de ecuaciones alguno).

1.7.16 Considere las matrices $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Determine, sin resolver sistemas de ecuaciones, la matriz $\boldsymbol{P}$ que satisfaga $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_3$

1.7.17 Sean $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

1) Verifique que $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}_2)^{-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$

2) Sin resolver sistema de ecuaciones alguno determine la matriz $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}$

1.7.18 Considere las matrices siguientes:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine la matriz $\boldsymbol{X}$ que satisface la igualdad siguiente: $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$

1.7.19 Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices no singulares de orden n, tales que $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$. Demuestre que $(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B})^{-1}=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$

1.7.20 $A_{n\times n}$ es ortogonal si $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^t=\boldsymbol{I}$.

1) Muestre que toda matriz ortogonal es invertible (¿cuál sería su inversa?).

2) Verifique que la siguiente matriz $\boldsymbol{P}$ es ortogonal y calcule su inversa *sin utilizar eliminación.*

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

1.7.21 Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada. Muestre que si $\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$ entonces $\boldsymbol{A}$ debe ser invertible.

1.7.22 Mostrar que si $\boldsymbol{A}_n$ tiene la propiedad de que todas sus filas suman lo mismo (es decir,la suma de las entradas de cada fila es igual para todas las filas) entonces, si $\boldsymbol{A}^{-1}$ existe, también tiene esta propiedad, es decir, tiene la propiedad de que todas sus filas suman lo mismo . Sugerencia: Si la suma de cada fila es a, calcule $\boldsymbol{A}_n \mathbb{1}_n = ...$

1.7.23 Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$

1) Demuestre, utilizando inducción matemática, que:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{B}^k = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{Q}$$

2) Considere las matrices siguientes:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \ \text{ y } \ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$, utilice el resultado del inciso (a) y determine, de manera explícita, la matriz $\boldsymbol{D}^7$

1.7.24 Sean las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, con α una constante real distinta de cero.

1) Halle $\boldsymbol{A}^{-1}$

2) Determine, de manera explícita, la matriz $\boldsymbol{Q}$, tal que $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{B}$

1.7.25 Sea $\boldsymbol{A}$ alguna matriz de orden n; se dice que $\boldsymbol{A}$ es *nilpotente* si, y sólo si, $\exists k \in \mathbb{N}$, tal que $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{0}_n$. Demuestre que si $\alpha \neq 0$, entonces la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \frac{-1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix}$ es nilpotente

1.7.26 Sea $\boldsymbol{A}$ alguna matriz de orden n; si $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}_n$, se dice que $\boldsymbol{A}$ es involutiva y si $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, se dice que $\boldsymbol{A}$ es idempotente.

1) Determine si la matriz $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ es involutiva, idempotente o si no es de alguno de los tipos mencionados.

2) Demuestre que si $\boldsymbol{B}$ es alguna matriz de orden n, tal que $\boldsymbol{B}$ es idempotente, entonces la matriz $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{2B} - \boldsymbol{I_n}$ es involutiva.

3) Si $\boldsymbol{P}$ es una matriz involutiva o una matriz idempotente, ¿cuáles son los posibles valores para $\text{Det}(\boldsymbol{P})$?

Capítulo 2

Determinantes

2.1 Definición y propiedades

Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, "el determinante de A" se denota $\text{Det}(A)$ o también $\text{Det}(A)$. El determinante de A se define por recurrencia, pero es bueno tener a mano el determinante de las matrices 2×2 y 3×3,

- Si $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{Det}(A) = a_1b_2 - a_2b_1$

- Si $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{Det}(A) = \begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \end{array}$ $\left[\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right] = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$

Fórmula de Laplace. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, el *"menor"* M_{ij}^A es el determinante de la matriz $(n-1\times(n-1))$ que se obtiene removiendo la fila i y la columna j de A. El cofactor A_{ij} se define como $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}^A$. Si k es cualquier fila fija de A, entonces la expansión por cofactores (o regla de Laplace) es

$$\text{Det}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \langle A \rangle_{kj} M_{kj}^A$$

Propiedades del determinante

Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

1) Si $A \xrightarrow{F_i, F_j} B \implies \text{Det}(A) = -\text{Det}(B)$

2) Si $A \xrightarrow{hF_i + k\overline{F}_j} B \implies \text{Det}(A) = \dfrac{1}{k}\text{Det}(B)$ (recordemos que $h, k \neq 0$)

3) $\text{Det}(\lambda\, A_{n\times n}) = \lambda^n \text{Det}(A)$

4) Si A es triangular (superior o inferior) entonces $\text{Det}(A) = \langle A \rangle_{11} \langle A \rangle_{22} \cdots \langle A \rangle_{nn}$

5) Si A tiene una fila o una columna con únicamente ceros, entonces $\text{Det}(A) = 0$.

6) $\text{Det}(A) = \text{Det}(A^T)$

7) $\text{Det}(AB) = \text{Det}(A)\text{Det}(B)$

8) $\text{Det}(A) \neq 0$ si y solo si A^{-1} existe

9) $\text{Det}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\text{Det}(A)}$ si la inversa existe.

Determinantes e inversas. La **adjunta** de A es $\mathbf{Adj}(A) = \overline{A}^T$, donde $\overline{A}$ es la matriz de cofactores, es decir, $\langle\overline{A}\rangle_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+1}M_{ij}^A$. Se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{\operatorname{Det}(A)}\mathbf{Adj}(A) \; = \; \frac{1}{\operatorname{Det}(A)}\begin{bmatrix} \langle\overline{A}\rangle_{11} & \cdots & \langle\overline{A}\rangle_{n1} \\ \langle\overline{A}\rangle_{12} & \cdots & \langle\overline{A}\rangle_{n2} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle\overline{A}\rangle_{1n} & \cdots & \langle\overline{A}\rangle_{nn} \end{bmatrix}$$

Observación. En general $\operatorname{Det}(A+B) \neq \operatorname{Det}(A) + \operatorname{Det}(B)$. Bajo ciertas condiciones, se pueden establecer algunas identidades para el determinante de la suma, por ejemplo si $A_{n\times n}$ es invertible y si $B_{n\times n}$ se puede descomponer como $B_{n\times n} = U_{n\times m}V_{n\times m}^T$, entonces

$$\operatorname{Det}(A+B) = \operatorname{Det}(I_m + V^T A^{-1} U)\operatorname{Det}(A)$$

2.2 Ejercicios

2.2.1 Calcule el determinante de las siguientes matrices (recuerde que si usa eliminación Gaussina, el pivote debe ser *no nulo*; la fórmula de expansión por cofactores no tiene esta restricción y podemos combinar ambos métodos).

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

3) $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & k & 4 & 2 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$

4) $D = \begin{bmatrix} k & 2 & 0 \\ 2 & k & 4 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

5) $E = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

6) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

2.2.2 Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ y si $a \neq 1$, use la **adjunta** de A para completar las entradas que faltan en el cálculo de la inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{2-2a}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 28-2a & 2a-18 & 8-2a \\ 0 & -6 & 4 & \\ a+1 & & 8-2a & a-4 \\ a+1 & 4a-17 & & 3a-4 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Para las siguientes matrices, determine el o los valores de k para los cuales la inversa existe y use la matriz adjunta para calcular la inversa (en el caso de que exista)

1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} k & 2 & 0 \\ 2 & k & 4 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

2) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & k & 4 & 2 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$

2.2.4 Sea $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique que $\boldsymbol{A}$ es invertible y calcule $\boldsymbol{A}^{-1}$

2.2.5 Si $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{B}_{n\times n} = \boldsymbol{0}$ siendo $\boldsymbol{A} \neq 0$ y $\boldsymbol{B} \neq 0$, muestre que entonces, $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| = 0$

2.2.6 Sea $Q \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n\times n}$. Verifique que si $\boldsymbol{QQ^T = I}$ entonces $|\boldsymbol{Q}| = \pm 1$

2.2.7 Muestre $\operatorname{Det}(\mathbb{I}_n + \mathbb{I}_n) \neq \operatorname{Det}(\boldsymbol{I_n}) + \operatorname{Det}(\boldsymbol{I_n})$ si $n > 1$.

2.2.8 Sea $P \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n\times n}$. Verifique que si $\boldsymbol{P = -P^T}$ entonces $|\boldsymbol{P^T}| = (-1)^n|\boldsymbol{P}|$ y, en particular, que si n es impar, entonces $|P| = 0$

2.2.9 Si se sabe que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices cuadradas de orden cinco y, además, $\operatorname{Det}(\boldsymbol{A}) = 2$ y $\operatorname{Det}(\boldsymbol{B}) = -3$, calcule $\operatorname{Det}(\boldsymbol{2A^{-1}B^T})$

2.2.10 Si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n\times n}$ tales que $\operatorname{Det}(\boldsymbol{B}) = \dfrac{1}{8}$ y $\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{B}^{-1}$. Calcule $\operatorname{Det}(\boldsymbol{2A^T A^{-1} A^2})$

2.2.11 Si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{4\times 4}$ tales que $|\boldsymbol{A}| = -5$, $|B^{-1}| = \dfrac{4}{3}$. Calcule $\left|\boldsymbol{2B}\operatorname{Adj}(\boldsymbol{A^T})\right|$

2.2.12 Si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{3\times 3}$ tales que $2\boldsymbol{AC} = I + \boldsymbol{BC}$ y $|2A - B| = 2$. Calcule $\left|(6A - 3B)^{-1}\boldsymbol{C}^T\right|$

2.2.13 Sean $\boldsymbol{A}_{3\times 3}$ y $\boldsymbol{B}_{3\times 3}$ matrices invertibles. Si $|\,\boldsymbol{B}\,| = 10$, calcule $|\,(\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}\,|$

2.2.14 Si $|\,\boldsymbol{A}_{5\times 5}\,| = 2$, calcule $|\,3(\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{A})^T\boldsymbol{A}^{-1} - 2I\,|$

2.2.15 Sean $\boldsymbol{A}_{3\times 3}$ y $\boldsymbol{B}_{3\times 3}$ matrices invertibles. Si $|\,\boldsymbol{B}\,| = 10$, calcule $|\,(\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}\,|$

2.2.16 Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Si se sabe que $\boldsymbol{2AC = I_3 + BC}$ y $\operatorname{Det}(\boldsymbol{2A - B}) = 2$, calcule:

$$\operatorname{Det}(\boldsymbol{(6A - 3B)^{-1}C^T})$$

2.2.17 Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{X} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calcule $\left|(6\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{X}^T\right|$ si se sabe que $2\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{BX}$ y $\left|2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\right| = 2$

2.2.18 Sea $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y se sabe que Det $(\boldsymbol{A}) = -3$, calcule Det $\left(\boldsymbol{A}^2 \, (-2\boldsymbol{B}) \, \boldsymbol{B}^T\right)$

2.2.19 Sean $C, D \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, tales que $|CD| = 4$ y $|2D| = 64$. Calcule:

$$\left| D\, C^2\, D^T\, (4C)^{-1} \right|$$

2.2.20 Sea $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix}$ tal que $\text{Det}(\boldsymbol{A}) = 2$, y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3-x & 3-y & 3-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{bmatrix}$. Calcule Det$(\boldsymbol{B})$

2.2.21 Sean $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} n & -1 & 1 \\ 4 & m & -1 \\ s & 1 & r \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2s & 2 & 2r \\ 4-2s & m-2 & -1-2r \\ n & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Si Det $(\boldsymbol{A}) = 2\alpha$, con $\alpha \neq 0$, y si las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices equivalentes por filas (una se obtiene de la otra con una sucesión de operaciones elementales), calcule Det $\left(\boldsymbol{4A^{-1}\alpha B^T}\right)$.

2.2.22 Verifique que $A = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$

2.2.23 Si $\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & a \end{vmatrix} = 1999$, calcule $\begin{vmatrix} a-b & 3 & a \\ b-c & 3 & b \\ c-a & 3 & c \end{vmatrix}$

2.2.24 Si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule el determinante de las siguientes matrices

1) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3a+4 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{bmatrix}$

2.2.25 Si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Calcule el determinante de las siguientes matrices

1) Det$(\boldsymbol{3A})$

2) Det$(\boldsymbol{2A^{-1}})$

3) $\text{Det}(\boldsymbol{B})$ si $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ d & e & f \end{bmatrix}$

2.2.26 Considere las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dadas por:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -4z_1 & z_1-2y_1 & x_1 \\ -4z_2 & z_2-2y_2 & x_2 \\ -4z_3 & z_3-2y_3 & x_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

Si se sabe que $|\boldsymbol{B}| = -2$, halle $\left|\boldsymbol{A}^T\left(3\boldsymbol{B}\right)^{-1}\right|$

2.2.27 Calcule $|\boldsymbol{A}|$ si se tiene que:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & b+a \end{bmatrix}$$

2.2.28 Supongamos que existe una matriz invertible $\boldsymbol{P}$ tal que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$

1) Muestre que $\text{Det}(\boldsymbol{A}) = \text{Det}(\boldsymbol{B})$

2) Muestre que $\text{Det}(\boldsymbol{A} - \alpha\boldsymbol{I}) = \text{Det}(\boldsymbol{B} - \alpha\boldsymbol{I})$

Capítulo 3

Sistemas de ecuaciones lineales

3.1 Resultados importantes

Consideremos el sistema $A_{n\times n}X = b$. Entonces

1) Si $\text{Det}(A) \neq 0$, el sistema tiene solución única.

2) Si $\text{Det}(A) = 0$, el sistema o tiene infinitas soluciones ("con parámetros") o no tiene solución

3) Si A' es la forma escalonada (o la forma escalonada reducida) de la matriz A, entonces los sistemas $A_{n\times n}X = b$ y $A'_{n\times n}X = b$ tiene la misma solución (que podría ser conjunto vacío)

Rango. El rango de una matriz $A_{n\times m}$ es el número de filas no nulas en la forma escalonada reducida.

Consideremos el sistema $A_{n\times m}X = b$. Entonces

1) Si $\text{Rango}(A) < \text{Rango}(A|b)$ entonces el sistema no tiene soluciones

2) Si $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A|b) = m$ entonces el sistema tiene solución única

3) Si $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A|b) < m$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones con una catidad de parámetros igual a $m - \text{Rango}(A)$

3.2 Ejercicios

3.2.1 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones. Si el sistema tiene infinitas soluciones, dé la solución general y una solución particular.

1) $\left\{\begin{array}{rcr} x+y+2z &=& 9\\ 2y-7z &=& -17\\ 3x+6y-5z &=& 0\end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z &=& 0\\ 2x+5y+2z &=& 0\\ -7x+7y+z &=& 0\end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z &=& 0\\ -2x+5y+2z &=& 0\\ -7x+7y+z &=& 0\end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x-3y &=& -2\\ 2x+y &=& 1\\ 3x+2y &=& 1\end{array}\right.$

5) $\begin{cases} 2x-3y+w &= -2 \\ 2x+y-z &= 1 \\ 3x+2y+z &= 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} w+2x-3y &= -2 \\ -2x+3y-z &= 1 \\ -2x-3y+z &= 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x-3y &= -2 \\ -2x+3y-z &= 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} a+b+3c &= -2 \\ a+b+c &= 4 \\ 2a+3b &= 2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} s+t+3u &= -2 \\ s+t+u &= -4 \\ s+t &= -1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} s+t+3u &= -2 \\ s+t &= 1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} s+t+3u &= -2 \\ s+t &= 1 \\ t-1 &= 0 \end{cases}$

3.2.2 $\begin{cases} x+y &= 2 \\ 2x+2y &= 4 \end{cases}$ es $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}$

3.2.3 ¿Para qué valores de λ el siguiente sistema tiene infinitas soluciones?

$$\begin{cases} (\lambda-3)x+y=0 \\ x+(\lambda-3)y=0 \end{cases}$$

3.2.4 Determine los valores de a y b para que el sistema que sigue tenga infinitas soluciones y calcule estas soluciones

$$\begin{cases} ax-by &= b \\ x+by &= 0 \end{cases}$$

3.2.5 Determine los valores de a y b para que el sistema que sigue tenga a.) solución única y b.) infinitas soluciones. Calcule estas soluciones

$$\begin{cases} ax+by=0 \\ bx-by=0 \end{cases}$$

3.2.6 Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde $m,n \in \mathbb{R}$; determine lo que se pide en cada caso.

$$\begin{cases} mx-3y &= 1 \\ 2mx+my &= n \end{cases}$$

¿Qué valores deben tomar m y n, respectivamente, para que el sistema:

1) tenga solución única;

2) no tenga solución;

3) posea infinito número de soluciones?

3.2.7 Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y considere el sistema de ecuaciones lineales dado por:

$$\begin{cases} x + ay - z &= 0 \\ ax + y + z &= b \\ x + y + az &= 0 \end{cases}$$

Determine, todos los valores de a y de b, en caso de que hubieran, de manera que para cada caso, el sistema anterior:

a.) Tenga solución única y enuncie la solución

b.) No tenga solución.

c.) Tenga infinito número de soluciones y enuncie el conjunto solución.

3.2.8 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y Considere el sistema de ecuaciones lineales dado por:

$$\begin{cases} x + \alpha y - 7z = 4\alpha - 1 \\ x + (\alpha + 1)y - (\alpha + 6)z = 3\alpha + 1 \\ \alpha y - 6z = 3\alpha - 2 \end{cases}$$

Determine todos los valores de α de manera que, para cada caso, el sistema anterior:

a.) Tenga solución única y enuncie la solución

b.) No tenga solución.

c.) Tenga infinito número de soluciones y enuncie el conjunto solución.

3.2.9 Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y considere el sistema lineal $\begin{cases} x - \alpha y &= \beta \\ 2x + y &= \alpha \end{cases}$
Determine todos los valores para α y para β de manera que el sistema:

1) Posea solución única.

2) Sea inconsistente.

3) Tenga infinito número de soluciones e indique una solución particular.

3.2.10 Encuentre el valor o los valores (si hubiera) de k para que el sistema que sigue tenga otras soluciones además de la solución trivial $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. Indique las soluciones.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z &= 0 \\ -x + 7y - z &= 0 \\ 4x - 11y + kz &= 0 \end{cases}$$

3.2.11 ¿Cómo se deben elegir los coeficientes a, b y c de modo que el sistema

$$\begin{cases} ax + by - 3z &= -3 \\ -2x - by + cz &= -1 \\ ax + 3y - cz &= -3 \end{cases}$$

tenga la solución $x = 1, y = -1, z = 2$?

3.2.12 Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_1x+a_2y+a_3z+a_4w &= & a_1 \\ b_1x+b_2y+b_3z+b_4w &= & b_1 \\ c_1x+c_2y+c_3z+c_4w &= & c_1 \\ d_1x+d_2y+d_3z+d_4w &= & d_1 \end{cases}.$$

Si se sabe que tiene solución única, obtenga los valores de x, y, z y w (Sugerencia: use Cramer).

3.2.13 Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x+y+z &= & 1 \\ 2x+py+2z &= & -2 \\ 4x+2py+4z &= & m \end{cases}$$

1) Determine todos los valores de p y m, respectivamente, de manera que el sistema tenga infinito número de soluciones dependiendo de un parámetro.

2) ¿Existe algún valor para p de manera que el sistema de ecuaciones posea solución única? Justifique.

3) Indique todos los valores de p y m, respectivamente, de manera que el sistema sea inconsistente.

3.2.14 Considere el sistema $\begin{cases} x &+& 4y &-& z &+& w &=& 1 \\ x &+& ay &+& z &+& w &=& 0 \\ 2x &+& ay &+& 3z &+& w &=& 0 \\ x &+& y &+& 3z &-& w &=& 1 \end{cases}.$

1) Verifique que el sistema tiene solucion única solo si $a \neq -1$

2) Use la regla de Cramer para obtener las soluciones que faltan:

$$x=-\frac{3-2a}{a+1},\; y=\boxed{},\; z=-\frac{2a-3}{2(a+1)},\; w=\boxed{}$$

3.2.15

Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{cases}$$

Determine el valor o los valores (en caso de existir) que debe tomar la constante real a para que el sistema de ecuaciones anterior:

1) Tenga solución única (halle el conjunto solución).

2) Posea infinito número de soluciones (enuncie una solución particular).

3) No tenga solución.

3.2.16 Considere el sistema lineal $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$. Utilizando el método eliminación de Gauss–Jordan, determine su conjunto solución para $a = -2$

3.2.17 Considere el sistema lineal $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Determine todos los valores para α de manera que el sistema:

1) Posea solución única.

2) Tenga infinito número de soluciones.

3) Sea inconsistente.

3.2.18 Si se tiene que $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 & \alpha \end{array}\right]$ es matriz aumentada de algún sistema de ecuaciones lineales, determine todos los valores para α y para β de manera que $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$ sea una solución del sistema.

3.2.19 Resuelva el siguiente sistema homogéneo $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ y dé un par de soluciones particulares.

Capítulo 4

Estructuras Algebraicas

4.1 Grupos y subgrupos

La estructura algebraica $(G,*)$ es un grupo si

1) $*$ es cerrada en G
2) $*$ es asociativa en G
3) Existe $e \in G$ tal que $a*e = e*a = a$, para todo $a \in G$. Al elemento e se le llama "elemento neutro" de G respecto a $*$ y se demuestra, más adelante, que es único.
4) Para todo $a \in G$ existe un inverso, $a^{-1} \in G$ tal que $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$, donde e es *el* elemento neutro.

Si $*$ es conmutativa, $(G,*)$ se dice "grupo abeliano".

Consideremos un grupo $(G,*)$. Si H es subconjunto no vacío de G, tal que $(H,*)$ es grupo, entonces decimos que H es subgrupo del grupo G y usamos la notación $H \leq G$.

Sea $(G,*)$ un grupo. Entonces $H \leq G$ si y sólo si $a*b^{-1} \in H$ para todo $a,b \in H$

4.2 Anillos y campos

El triple $(G,\oplus,*)$ tiene estructura de anillo si

1) $(G,\oplus)$ es un grupo conmutativo.
2) La "multiplicación" $*$ es asociativa.
3) Para todo $a,b,c \in G$, $a*(b\oplus c) = a*b\oplus a*c$ y $(b\oplus c)*a = b*a\oplus c*a$.

Si la "multiplicación" es conmutativa, $(G,\oplus,*)$ se dice anillo conmutativo.

Si H es un subconjunto no vacío de G, entonces $(H,\oplus,*)$ es un subanillo de $(G,\oplus,*)$ si y solo si $a\oplus -b \in H$ y $a*b \in H$, para todo $a,b \in H$.

Si G tiene más de un elemento, el triple $(G,\oplus,*)$ tiene estructura de campo si $(G,\oplus,*)$ es un anillo conmutativo y $(G-\{0_G\},*)$ es un grupo. El campo es conmutativo si la operación $*$ es conmutativa.

Nota: Si $H \subset \mathcal{M}_{m\times n}$ entonces la estructura $(H,+,\cdot)$ (suma y multiplicación usual de matrices) hereda la conmutatividad y la asociatividad en la suma, la asociatividad en el producto y la distribuitividad de la suma respecto al producto.

4.3 Ejercicios

4.3.1 Sea $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ tal que } a,b,c,d \in \mathbb{R} \wedge ad - bc = 1 \right\}$. Consideremos el par $(G,\cdot)$ donde '$\cdot$' es la multiplicación usual de matrices. Verifique que $(G,\cdot)$ es un grupo (un subgrupo de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)

4.3.2 Sobre $\mathbb{R}^*$ se define la operación $a * b = 2ab$. Verifique que $(\mathbb{R}^*,*)$ es un grupo conmutativo.

4.3.3 Sea $G = \{(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \text{ tal que } a \neq 0\}$ y $(a,b)*(c,d) = (ac, ad+b)$. Verifique que $(G,*)$ es un grupo no conmutativo.

4.3.4 Verifique que $\mathbb{R} - \{-1\}$ con la operación $a \circ b = a + b + ab$, es un grupo abeliano.

4.3.5 En $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ se define la operación $*$ como

$$(a,b)*(c,d) = (a+c+3, 2bd)$$

Si se sabe que $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,*)$ es un grupo abeliano, calcule

$$(-4,1)^3 * \left[\left(1,\frac{4}{3}\right) * (2,-3)^{-2}\right]^2$$

4.3.6 Sea $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \text{ con } a \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0 \right\}$. Consideremos el par $(G,\cdot)$ donde '$\cdot$' es la multiplicación usual de matrices.

a.) Verifique que $\forall A,B \in G,\ AB = BA$

b.) ¿$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G$?

c.) Verifique que si $A \in G$ entonces $|A| = 0$.

d.) Verifique que existe $E \in G$ tal que $EA = A,\ \forall A \in G$

e.) Asumiendo que la matriz E del ítem anterior es única, verifique que $\forall A \in G$, existe $\bar{A} \in G$ tal que $A\bar{A} = E$

4.3.7 Sea $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \text{ con } a \in \mathbb{R} \right\}$. Consideremos el par $(G,+,\cdot)$ con la suma y la multiplicación usual de matrices. Verifique que $(G,+,\cdot)$ es un campo (ver ejercicio 4.3.6).

4.3.8 Sea $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix} \text{ tal que } a,b \in \mathbb{Z} \right\}$. ¿Es $(G,+,\cdot)$ un subanillo del anillo $(\mathcal{M}_{2\times 2},+,\cdot)$?

4.3.9 Sea $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{bmatrix} \text{ tal que } a,b \in \mathbb{Z} \right\}$. ¿Es $(G,+,\cdot)$ un subanillo del anillo $(\mathcal{M}_{2\times 2},+,\cdot)$?

4.3.10 Sea $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \text{ tal que } a,b \in \mathbb{Z} \right\}$. ¿Es $(G,+,\cdot)$ un subanillo del anillo $(\mathcal{M}_{2\times 2},+,\cdot)$?

4.3.11 Sea $\mathcal{D} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \text{ tal que } a,b \in \mathbb{R} \right\}$. Si se sabe que $(\mathcal{D},+,\cdot)$ es anillo, verifique que es conmutativo con elemento unidad. ¿Posee divisores de cero?. ¿Es un campo?

4.3.12 Sea $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \text{ tal que } a,b,d \in \mathbb{R} \right\}$. ¿Es $(S,+,\cdot)$ un subanillo del anillo $(\mathcal{M}_{2\times 2},+,\cdot)$?. ¿Es un campo?

4.3.13 Sea $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ tal que } a \in \mathbb{R} \right\}$. ¿Es $(S,+,\cdot)$ un subanillo del anillo $(\mathcal{M}_{2\times 2},+,\cdot)$?. ¿Es un campo?

4.3.14 Sea $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \text{ con } a,b \in \mathbb{Z} \right\}$. Probar que $(G,+,\cdot)$ es un subanillo de $\mathcal{M}_{n\times n}$

4.3.15 Sea $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \text{ con } a,b \in \mathbb{Q} \right\}$. Probar que $(G,+,\cdot)$ es un campo (ver el ejercicio 4.3.18).

4.3.16 Muestre que $(\mathbb{R},\oplus,\otimes)$ es un campo si $a \oplus b = a+b+1$ y $a \otimes b = a+b+ab$

4.3.17 Sea $Z[\sqrt{2}] = \left\{ a+b\sqrt{2} \text{ tal que } a,b \in \mathbb{Z} \right\}$. ¿Es $(Z[\sqrt{2}],+,\cdot)$ es un anillo?

4.3.18 Sea $Q[\sqrt{2}] = \left\{ a+b\sqrt{2} \text{ tal que } a,b \in \mathbb{Q} \right\}$.

a.) Verifique que *no existen* $p,q \in \mathbb{Q}$ tal que $\dfrac{p}{q} = \sqrt{2}$. (Sugerencia: Razone por contradicción, suponga que la fracción está totalmente simplificada y que $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$. Luego deduzca que p,q deberían ser pares!).

b.) Hay elemento neutro multiplicativo, determine cuál es.

c.) Verifique que el inverso multiplicativo de $p+q\sqrt{2}$ es $\dfrac{p}{p^2-rq^2}+\dfrac{-q}{p^2-rq^2}\sqrt{2}$. Observe que por el ítem a.), este inverso está bien definido para cuaquier $p,q\in\mathbb{Q}$.

d.) Muestre que $(Q[\sqrt{2}],+,\cdot)$ es una campo

4.3.19 Sea $(\mathcal{G},*)$ algún grupo con elemento neutro e. Usando inducción matemática, demuestre que $\forall x,y\in\mathcal{G},\forall n\in\mathbb{Z}^+$, se cumple que $(x'*y*x)^n = x'*y^n*x$.

4.3.20 Considere los grupos $\left(\mathbb{Z}_2,+\right)$ y $\left(\mathbb{Z}_3,+\right)$ y sea $\mathcal{G}=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$. $\forall\,(a,b),(c,d)\in\mathcal{G}$ se define:

$$(a,b)*(c,d)=(a+c,b+d)$$

Si se sabe que $(\mathcal{G},*)$ es grupo:

1) Determine los seis elementos de $\mathcal{G}$.

2) Determine la tabla de operación binaria para $(\mathcal{G},*)$.

3) Encuentre el simétrico del elemento $(1,1)$.

4.3.21 En $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ se define la operación $\otimes$ de la manera siguiente: $\forall\,(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$,

$$(a,b)\otimes(c,d)=(3ac,d+b-4)$$

Si se define $\mathcal{H}=\left\{(x,4)\ \text{ tal que }\ x\in\mathbb{R}^*\right\}$ y se sabe que $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\otimes)$ es grupo abeliano, demuestre que $(\mathcal{H},\otimes)\leq(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\otimes)$.

4.3.22 Sea e el elemento neutro del grupo $(\mathcal{G},*)$.
Demuestre que $\mathcal{G}$ es abeliano si, y sólo si, $(x*y)^2=x^2*y^2$, $\forall x,y\in\mathcal{G}$.

4.3.23 Si se sabe que $(\mathcal{G},*)$ es algún grupo con elemento neutro e y $a\in\mathcal{G}$, con a fijo, demuestre que $\mathcal{H}=\left\{x\in\mathcal{G}\ \text{ tal que }\ x*a=a*x\right\}$ es subgrupo de $\mathcal{G}$.

4.3.24 En $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ se define la operación $\otimes$ de la manera siguiente: $\forall\,(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, $(a,b)\otimes(c,d)=(3ac,b+d+5)$ Si se define $\mathcal{H}=\left\{(x,5k)\ \text{ tal que }\ x\in\mathbb{R}^*,k\in\mathbb{Z}\right\}$, y se sabe que $\left(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\otimes\right)$ es grupo, demuestre que $(\mathcal{H},\otimes)\leq(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\otimes)$.

4.3.25 Si se sabe que $\left(\mathbb{Z}_6,+,\cdot\right)$ es un anillo, determine si este posee divisores de cero o no. Justifique su respuesta.

4.3.26 Sea $m\in\mathbb{Z}^+$, m fijo. Se define el conjunto $m\mathbb{Z}$ de la manera siguiente:

$$m\mathbb{Z}=\left\{x\in\mathbb{Z}\ \text{ tal que }\ \exists k\in\mathbb{Z}\text{ con } x=mk\right\}$$

Demuestre que $(m\mathbb{Z},+)$ es subgrupo de $(\mathbb{Z},+)$.

4.3.27 En $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ se define la operación $\otimes$ de la manera siguiente: $\forall\,(a,b)\,,(c,d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$,

$$(a,b) \otimes (c,d) = (3ac, b+d+5)$$

Si se define $\mathcal{H} = \left\{ (x,5k) \text{ tal que } x \in \mathbb{R}^*, k \in \mathbb{Z} \right\}$, y se sabe que $\left(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \otimes\right)$ es grupo, demuestre que $(\mathcal{H},\otimes) \leq (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \otimes)$.

4.3.28 Sea $\mathcal{H} = \left\{ x \in \mathbb{Q}^* \text{ tal que } x = \dfrac{2^m}{3^k}, \text{ con } m,k \in \mathbb{Z} \right\}$. Demuestre que $(\mathcal{H},\cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$.

4.3.29 Sea $(\mathcal{G},*)$ algún grupo cuyo elemento neutro es e. Usando inducción matemática, demuestre que $\forall x,y \in \mathcal{G}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que $\left(x' * y * x\right)^n = x' * y^n * x$

4.3.30 Considere los grupos $\left(\mathbb{Z}_2,+\right)$ y $\left(\mathbb{Z}_3,+\right)$ y sea $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. $\forall\,(a,b),(c,d) \in \mathcal{G}$ se define:

$$(a,b) * (c,d) = (a+c, b+d)$$

Si se sabe que $(\mathcal{G},*)$ es grupo:

1) Determine los seis elementos de $\mathcal{G}$

2) Determine la tabla de operación binaria para $(\mathcal{G},*)$

3) Encuentre el elemento simétrico de $\left(\hat{1},\hat{1}\right)$

4.3.31 Sea $\left(\mathcal{G},*\right)$ un grupo cuyo elemento neutro es e y sea t un elemento fijo de $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{H} = \left\{ x \in \mathcal{G} \text{ tal que } x * t = t * x \right\}$, demuestre que $\left(\mathcal{H},*\right)$ es subgrupo de $\left(\mathcal{G},*\right)$

4.3.32 Sea $(\mathcal{G},*)$ un grupo cuyo elemento neutro es e; demuestre que si $(x*y)^2 = x^2 * y^2, \forall x,y \in \mathcal{G}$, entonces $(\mathcal{G},*)$ es abeliano.

4.3.33 Si $\mathcal{W} = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \dfrac{5^k}{7^m}, \text{ con } k,m \in \mathbb{Z} \right\}$, pruebe que $(\mathcal{W},\cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{R}^*,\cdot)$

4.3.34 Sea $\mathcal{H} \neq \varnothing$, y sean $\circledast$ y $\odot$ dos opeaciones binarias. Si se sabe que $(\mathcal{H},\circledast,\odot)$ es anillo unitario, indique las únicas propiedades que hacen falta para que $(\mathcal{H},\circledast,\odot)$ sea campo.

4.3.35 Sea $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Si "$\cdot$" representa la multiplicación usual de números reales:

1) Demuestre que $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ es un grupo abeliano.

2) Si $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^* \text{ tal que } x \geq 1\}$, determine si $\mathcal{H}$ es subgrupo de $\mathbb{R}^*$ o no lo es.

4.3.36 Sea e el elemento neutro del grupo $(\mathcal{G},*)$. Demuestre que $\mathcal{G}$ es abeliano si, y sólo si, $(x*y)^2 = x^2 * y^2, \forall x,y \in \mathcal{G}$.

4.3.37 Si $(\mathcal{A},+,\cdot)$ es un anillo y $x \in \mathcal{A}$, se dice que x es *idempotente* si $x^2 = x$.
Para cada uno de los anillos que se enuncian a continuación, determine todos sus elementos idempotentes.

1) $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$

2) $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$

4.3.38 Sea $(\mathcal{A},+,\cdot)$ un anillo conmutativo ¿Cuáles son las propiedades, adicionales a las de anillo, que se deben cumplir para que $(\mathcal{A},+,\cdot)$ sea campo?

4.3.39 Sean $\oplus$ y $\otimes$ dos operaciones internas definidas sobre $\mathcal{A} = \left\{a,b,c,d\right\}$. Asumiendo que $\left(\mathcal{A},\oplus,\otimes\right)$ es anillo, complete las tablas de operación binaria que se enuncian a continuación. Justifique cómo obtiene cada uno de los elementos que hacen falta.

$\oplus$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a		c
c	c	d	a	
d	d		b	a

$\otimes$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b		
c	a			a
d	a	b	c	

Sugerencia: Complete primero la tabla de operación binaria para $(\mathcal{A},\oplus)$. Luego, desarrolle

$$d \otimes (d \oplus b) = (d \otimes d) \oplus (d \otimes b) \quad \text{y} \quad (d \oplus b) \otimes d = (d \otimes d) \oplus (b \otimes d)$$

4.3.40 Considere los grupos $\left(\mathbb{Z}_3,+\right)$ y $\left(\mathbb{Z}_2,+\right)$ y sea $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$. $\forall\,(a,b),(c,d) \in \mathcal{G}$ se define:

$$(a,b) * (c,d) = (a+c, b+d)$$

Si se sabe que $(\mathcal{G},*)$ es grupo:

1) Determine la tabla de operación binaria para $(\mathcal{G},*)$

2) Encuentre el simétrico de cada uno de los elementos de $\mathcal{G}$

4.3.41 Si $(\mathcal{G},*)$ es algún grupo con elemento neutro e y $x \in \mathcal{G}$, se dice que x es un elemento *involutivo* de $\mathcal{G}$ si, y solo si, $x^2 = e$.

1) Determine todos los elementos *involutivos* del grupo $\left(\mathbb{Z}_4,+\right)$

2) Determine todos los elementos *involutivos* del grupo $(\mathbb{R}^*,\cdot)$

4.3.42 Considere la estructura $(\mathbb{R},\otimes)$, donde se define $\otimes$ de la manera siguiente:

$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ a \otimes b = 5b^2 - ab + a^2 - b$$

1) Determine si la estructura $(\mathbb{R},\otimes)$ posee elemento neutro o no.

2) Se dice que un elemento z de $\mathbb{R}$ es idempotente si $z \otimes z = z$. Determine todos los elementos idempotentes de $(\mathbb{R},\otimes)$.

4.3.43 Demuestre que $\mathcal{H} = \left\{x \in \mathbb{R}^* \text{ tal que } x = 3^m,\ m \in \mathbb{Z}\right\}$ es subgrupo de $(\mathbb{R}^*,\cdot)$

Capítulo 5

Espacios Vectoriales

5.1 Espacios y subespacios vectoriales

Un espacio vectorial $\mathcal{V}$ (o espacio lineal) sobre $\mathbb{R}$ es un conjunto de objetos sobre los cuales se ha definido una suma, denotada con el símbolo ”+” y un producto escalar (una manera de multiplicar estos objetos con números reales) denotado de la manera usual y que cumple las siguientes propiedades:

1) $\vec{v}+\vec{w}\in\mathcal{V},\ \forall\vec{v},\vec{w}\in\mathcal{V}$

2) $\alpha\vec{v}\in\mathcal{V},\ \forall\vec{v}\in\mathcal{V},\forall\alpha\in\mathbb{R}$

3) $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v},\ \forall\vec{v},\vec{w}\in\mathcal{V}$

4) $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+v)+\vec{w},\ \forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathcal{V}$

5) $\exists\vec{0}_V\in\mathcal{V}$ tal que $\vec{v}+\vec{0}_{\mathcal{V}}=\vec{v},\ \forall\vec{v}\in\mathcal{V}$

6) $\forall\vec{v}\in\mathcal{V}\ \exists-\vec{v}\in\mathcal{V}$ tal que $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}_V$

7) $(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v},\ \forall\vec{v}\in\mathcal{V},\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

8) $(\vec{v}+\vec{w})\alpha=\alpha\vec{v}+\alpha\vec{w},\ \forall\vec{v},\vec{w}\in\mathcal{V},\forall\alpha\in\mathbb{R}$

9) $(\alpha\beta)\vec{v}=\alpha(\beta\vec{v}),\ \forall\vec{v}\in\mathcal{V},\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

10) $1\vec{v}=\vec{v},\ \forall\vec{v}\in\mathcal{V}$

Ejemplos de espacios vectoriales son los conjuntos $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{n\times m}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^n$ con las operaciones de suma y producto por un escalar ya definidas. De ahora en adelante llamaremos “vectores” a los elementos de un espacio vectorial. Frecuentemente, **0** se sobreentiende en el contexto como el neutro aditivo $\vec{0}_{\mathcal{V}}$ mientras que 0 es el escalar nulo.

Propiedades. Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial real, entonces $\forall\vec{v},\vec{w}\in\mathcal{V}$ y $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ se tiene

1) $0\cdot\vec{v}=\vec{0}_V$

2) $\alpha\vec{0}_V=\vec{0}_V$

3) $\alpha\vec{v}=\vec{0}_V\implies\alpha=0\vee\vec{v}=\vec{0}_V$

4) Si $\alpha\neq0$ y $\alpha\vec{v}=\alpha\vec{w}\implies\vec{v}=\vec{w}$

Subespacios vectoriales. $\emptyset\neq\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{V}$ si $\mathcal{W}$ es espacio vectorial. Esta relación se denota $\mathcal{W}\leq\mathcal{V}$. Tomando en cuenta las propiedades que $\mathcal{W}$ hereda de $\mathcal{V}$, se puede usar el siguiente criterio: $\mathcal{W}\leq\mathcal{V}$ si $\mathcal{W}\neq\emptyset$ y $\vec{v}+\alpha\vec{u}\in\mathcal{W},\ \forall\vec{v},\vec{u}\in\mathcal{W},\forall\alpha\in\mathbb{R}$

5.2 Ejercicios

5.2.1 Si $\mathcal{W} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } ax+by+cz=0, \text{ con } a,b \text{ y } c \text{ números reales fijos}\right\}$, demuestre que $\mathcal{W}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

5.2.2 Demuestre que si $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son subespacios de algún espacio vectorial real $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \{u_1 + u_2 \text{ tal que } u_1 \in \mathcal{W}_1, u_2 \in \mathcal{W}_2\}$ también es subespacio de $\mathcal{V}$.

5.2.3 Demuestre que $\mathcal{H} = \left\{ \boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tal que } \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{A} \rangle_{ii} = 0 \right\}$ es subespacio de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

5.2.4 Sea $\mathcal{H} = \left\{a+bx+cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } a-2b+3c=0\right\}$. Determine si $\mathcal{H}$ es subespacio de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o no lo es. Justifique.

5.2.5 Si se sabe que $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial real, determine en cada uno de los casos si $\mathcal{W}$ es subespacio de $\mathcal{V}$ o no lo es. Justifique.

1) $\mathcal{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } a=0, b=c, d\geq 0 \right\}, \ \mathcal{V} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

2) $\mathcal{W} = \left\{a+bx+cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } 2a-b=3c\right\}, \ \mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

3) $\mathcal{W} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } 2x-y=0\right\}, \ \mathcal{V} = \mathbb{R}^2$

5.2.6 Demuestre que $\mathcal{W} = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } b+c+d=0\right\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^4$

5.2.7 Considere los subconjuntos de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que se enuncian y, según sea el caso, demuestre que $\mathcal{H}$ es subespacio de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o justifique por qué no se cumple que $\mathcal{H}$ sea subespacio de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1) $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tal que } \boldsymbol{AA} = \boldsymbol{A}\}$

2) $\mathcal{H} = \left\{\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tal que } \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}\right\}$

5.2.8 Si se sabe que $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial real, determine en cada uno de los casos si $\mathcal{W}$ es subespacio de $\mathcal{V}$ o no lo es. Justifique.

1) $\mathcal{W} = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \text{ tal que } p(0) = p(1)\}, \ \mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

2) $\mathcal{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } a\geq 0, b=c, d=0 \right\}, \ \mathcal{V} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

3) $\mathcal{V} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x=y \text{ y } xy<0\}$

5.2.9 Si $\mathcal{W} = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \delta a + \lambda b - c = 0, \text{ con } \delta \text{ y } \lambda \text{ números reales fijos}\right\}$, demuestre que $\mathcal{W}$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$

5.2.10 Si se tiene que $\mathcal{W} = \left\{a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } a - 2b + 3c = 0\right\}$, verifique que $\mathcal{W}$ es subespacio de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

5.2.11 Si $\mathcal{W} = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \delta a + \lambda b - c = 0, \text{ con } \delta \text{ y } \lambda \text{ números reales fijos}\right\}$, demuestre que $\mathcal{W}$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$

5.2.12 Demuestre que $\mathcal{H} = \left\{\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tal que } \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{A} \rangle_{ii} = 0\right\}$ es subespacio de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

5.2.13 Sea $\mathcal{V}$ algún espacio vectorial real y sean $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ subespacios de $\mathcal{V}$. Demuestre que $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ es también subespacio de $\mathcal{V}$.

5.2.14 Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son dos subconjuntos no vacíos de un espacio vectorial $\mathcal{V}$, entonces la suma de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, que se expresa como $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$, es el conjunto $\left\{x + y \text{ tal que } x \in \mathcal{S}_1, y \in \mathcal{S}_2\right\}$. Demuestre que si $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son subespacios de un espacio vectorial $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ es también subespacio de $\mathcal{V}$

5.2.15 Sea $\mathcal{W} = \left\{(x,y,y-x) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } y \geq 0\right\}$ ¿Es $\mathcal{W}$ subespacio de $\mathbb{R}^3$? Justifique.

5.2.16 Sea $\mathcal{V} = \left\{f \in \mathcal{C}[a,b] \text{ tal que } f(a) = -f(b), \forall x \in [a,b]\right\}$ ¿Es $\mathcal{V}$ subespacio de $\mathcal{C}[a,b]$? Justifique.

5.2.17 Sea $\mathcal{W} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & b \end{bmatrix} \text{ tal que } a,b \in \mathbb{R}\right\}$. Demuestre que $\mathcal{W}$ es un subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

5.3 Bases y dimensión

La definición de "dimensión" de un espacio vectorial se hace de manera algebraica. En un espacio vectorial como $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, el concepto de dimensión tiene el sentido geométrico usual: La cantidad de ejes (o vectores que generan estos ejes). El sistema de ejes es lo que llamamos una "base" del espacio. Por ejemplo, $\mathbb{R}^3$ tiene tres ejes, el eje X generado por $\boldsymbol{e_1} = (1,0,0)$, el eje Y generado por $\boldsymbol{e_2} = (0,1,0)$ y el eje Z generado por $\boldsymbol{e_3} = (0,0,1)$. Entonces, $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ es una "base"de $\mathbb{R}^3$ y la dimensión de este espacio es 3

Independencia Lineal

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial. Si $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\} \subseteq \mathcal{V}$ entonces decimos que B es un conjunto *linealmente independiente* (y lo abreviamos "***l.i.***") si el sistema lineal $\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i = \vec{0}_V$ tiene como única solución $a_1 = 0, a_2 = 0, ..., a_k = 0$. En otro caso, se dice que B es *linealmente dependiente* (y lo abreviamos "***l.d.***")

Lo que se garantiza con la definición anterior es que si un conjunto es ***l.d.***, entonces *al menos* un $\vec{v}_j$ se puede despejar como una combinación lineal de los otros $\vec{v}_i's$. Si el conjunto es ***l.i.*** esto no puede pasar.

Conjunto generador. $\mathcal{W}$ es *generado* por $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ si $\mathcal{W} = \left\{\vec{w} \text{ tal que } \vec{w} = \sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i,\ a_i \in \mathbb{R}\right\}$. Escribimos $\mathcal{W} = \text{Gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$.

Base. Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ un subconjunto del espacio vectorial $\mathcal{V}$. Decimos que B es **una** *base* de $\mathcal{V}$ si B genera a $\mathcal{V}$ y si B es $\boldsymbol{l.i.}$ El espacio es de dimensión finita si tiene una base finita.

Una base del $\mathbb{R}^n$ es $\{(1,0,0,...0),(0,1,0,..0),...,(0,0,...,0,1)\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ y $\dim \mathbb{R}^n = n$. A esta base se le llama *base canónica* o base "natural". Esta base corresponde a los vectores que generan los ejes usuales en los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

La base canónica de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ son las nm matrices $B = \{\boldsymbol{E_{11}}, \boldsymbol{E_{12}}, ..., \boldsymbol{E_{nm}}\}$ donde la matriz $\boldsymbol{E_{ij}}$ tiene todas sus entradas nulas, excepto la entrada ij que es 1. Por tanto, $\dim \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) = nm$.

Por ejemplo, la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$.

La base canónica de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ es $B = \{1, x, ..., x^n\}$ y por tanto, $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n+1$.

En general, una base de $\mathcal{V}$ juega el mismo papel que un sistema de ejes en el $\mathbb{R}^n$. Una base nos permite hablar de las "coordenadas" de un vector en una base dada.

Espacio de columnas. Si $\mathcal{V}$ se puede ver como el conjunto generado por las columnas de una matriz $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ (el espacio de columnas de $\boldsymbol{A}$), es decir, $\mathcal{V} = \left\{\boldsymbol{A}\vec{X} \text{ tal que } \vec{X} \in \mathcal{M}_{n\times 1}\right\}$; entonces, como las operaciones elementales de fila no cambian las relaciones de dependencia de los vectores columna, una base de $\mathcal{V}$ esta conformada por las columnas de $\boldsymbol{A}$ que corresponden a las columnas *que contienen los pivotes* en la forma escalonada reducida de $\boldsymbol{A}$. Esta última matriz revela las dependencias entre las columnas de $\boldsymbol{A}$.

Espacio de filas. Si $\mathcal{V}$ se puede ver como el conjunto generado por las filas de una matriz $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ (el espacio de filas de $\boldsymbol{A}$),entonces, como las operaciones elementales de fila no cambian las relaciones de dependencia de los vectores fila, una base de $\mathcal{V}$ esta conformada por las filas *no nulas* de forma escalonada reducida de $\boldsymbol{A}$. Para obtener una base en términos de las filas de la matriz original $\boldsymbol{A}$ podríamos usar el algoritmo correspondiente para el espacio de columnas de $\boldsymbol{A}^T$.

Teorema 5.1

1) Si $\mathcal{V}$ tiene una base con un número finito k de elementos, todas las bases de $\mathcal{V}$ tiene este mismo número de elementos. En este caso decimos que la *dimensión* de $\mathcal{V}$ es k y escribimos dím $\mathcal{V} = k$.

2) Si $\mathcal{V} = \text{Gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ entonces dím $\mathcal{V} \leq k$.

3) Si $\mathcal{V} = \text{Gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ entonces si el rango de la matriz $\boldsymbol{A} = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k]$ es k entonces dím $V = k$.

4) Si dím $\mathcal{V} = k$ y si $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\} \subset \mathcal{V}$ con $n > k$ entonces B es $\boldsymbol{l.d.}$

5) Si $\mathcal{W}$ es subespacio de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}$ es de dimensión finita entonces dím $\mathcal{W}\leq$dím $\mathcal{V}$. Si tienen la misma dimensión, entonces $\mathcal{W}=\mathcal{V}$

6) Si $\mathcal{V}$ es de dimensión finita, cualquier subconjunto ***l.i***. en $\mathcal{V}$ es parte de una base.

5.4 Ejercicios

5.4.1 Determine si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son "***l.i***" o "***l.d***" en $\mathbb{R}^3$.

a.) $B=\{(1,2,3),(1,1,1)\}$

b.) $B=\{(1,2,3),(1,1,1),(2,0,1)\}$.

c.) $B=\{(1,2,3),(1,1,1),(1,4,7)\}$.

5.4.2 Para cada uno de los casos que se enuncian, determine si el conjunto B es ***l.d.*** o ***l.i.***

a.) $B=\{(1,\,-2,3),\ (2,\,-2,0),\ (0,1,7)\}$ en $\mathbb{R}^3$

b.) $B=\{1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3\}$ en $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$

c.) $B=\{(-1,2),\ (2,\ 0),\ (0,3)\}$ en $\mathbb{R}^2$

d.) $B=\{(1,\,-3,0),\ (11,\,-6,12)\}$ en $\mathbb{R}^3$

e.) $B=\{x-2x^2,\ x^2-4x,\ 8x^2-7x\}$ en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

f.) $B=\{\ (4,4,0,0),(0,0,6,6),\ (-5,0,5,5)\}$ en $\mathbb{R}^4$

g.) $B=\{3-x,\ 2x(x-1),\ x^2-1,\ 3\,(2-x^2),\ x+2\}$ en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

5.4.3 Determine si los vectores $u_1=(2,-1,0,-1)$, $u_2=(1,0,1,-1)$ y $u_3=(-1,1,1,0)$ son linealmente dependientes o linealmente independientes en $\mathbb{R}^4$

5.4.4 En $P_5(\mathbb{R})$ ¿el conjunto $B=\left\{x,x^2,x^3+x+1\right\}$ es ***l.i***.?

5.4.5 Determine si el conjunto $S=\left\{\begin{bmatrix}1&2&-3\\4&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3&-4\\6&5&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&8&-11\\16&10&9\end{bmatrix}\right\}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente en $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

5.4.6 Sea $B=\{u,w,x,z\}$ algún subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial real $\mathcal{V}$. Si se definen $y=2u-x-3z$, $m=2x+3w-4u$, $t=w-2z$, determine si $D=\{y,m,t\}$ es linealmente depediente o linealmente independiente.

5.4.7 En $\boldsymbol{\mathcal{M}_{2\times 2}}$, ¿el conjunto $B=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}\right\}$ es ***l.i***.?

5.4.8 Considere el conjunto $B = \{(k-2, 1, -1), (2, -k, 4), (8, -11, 1+k)\}$. Para qué valor (o valores) de k se cumple que B es $l.d$?

5.4.9 Consideremos el subespacio $\mathcal{W} = \{(t, s-t, s)$ tal que $t, s \in \mathbb{R}\}$. Dé un conjunto generador para $\mathcal{W}$.

5.4.10 Consideremos el subespacio $\mathcal{W} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x - 2y + z = 0\right\}$. Dé un conjunto generador para $\mathcal{W}$.

5.4.11 Sean $S = \{(1,1,9,-4), (2,-1,3,2), (-1,1,1,-3)\}$ y $\vec{u} = (a, b, 0, -1)$. Determine el valor (o los valores) de los parámetros a y b, de manera que se cumpla que $\vec{u} \in \text{Gen}(S)$

5.4.12 Para cada uno de los casos que se enuncian, determine si los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ generan $\mathbb{R}^3$. Si generan $\mathbb{R}^3$, ¿son base?.

a.) $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (2,2,0)$ y $\vec{w} = (3,0,0)$

b.) $\vec{u} = (1,1,0)$, $\vec{v} = (0,1,1)$ y $\vec{w} = (1,0,1)$

c.) $\vec{u} = (2,-1,3)$, $\vec{v} = (4,1,2)$ y $\vec{w} = (8,-1,8)$

5.4.13 Considere los vectores de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, definidos por:

$$p(x) = 4x^2 + x + 2, \;\; q(x) = 3x^2 - x + 1, \;\; r(x) = 5x^2 + 2x + 3 \quad \text{y} \quad s(x) = 5x^2 + 9x + 5$$

Determine si $s(x) \in \text{Gen}\{p(x), q(x), r(x)\}$.

5.4.14 Determine la dimensión de cada uno de los subespacios siguientes (debe justificar su respuesta)

a.) $\mathcal{V} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{bmatrix} \text{ tal que } a, b \in \mathbb{R} \right\}$

b.) $\mathcal{W} = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } a - 4b - c = 0\right\}$

c.) $\mathcal{W} = \{(a, b, 0) \text{ tal que } a, b \in \mathbb{R}\}$

d.) $\mathcal{W} = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } 2a - 7b + c = 0\right\}$

e.) $\mathcal{W} = \{(a, 0, a+b, b, a-b) \text{ tal que } a, b \in \mathbb{R}\}$

f.) $\mathcal{W} = \left\{ \begin{bmatrix} -b & a \\ a & b \end{bmatrix} \text{ tal que } a, b \in \mathbb{R} \right\}$

g.) $\mathcal{W} = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } a + b - c = 0, -2a - b + 3c = 0\right\}$

h.) $\mathcal{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \text{ tal que } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

i.) $\mathcal{W} = \{(a, 2a, 3a) \text{ tal que } a \in \mathbb{R}\}$

5.4.15 Sea $\mathcal{W} = \text{Gen}\{1,2,1),(1,-2,5),(-1,-2,1),(1,2,0)\}$. Determine la dimensión de $\mathcal{W}$.

5.4.16 Consideremos el subespacio $\mathcal{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x - 2y + z = 0\}$. Dé una base para $\mathcal{W}$.

5.4.17 Consideremos el subespacio $\mathcal{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x - 2y + z = 0\}$. Dé una base de $W^\perp = \left\{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \vec{u} \cdot \vec{w} = 0, \, \forall\, \vec{w} \in \mathcal{W}\right\}$.

5.4.18 Considere el conjunto B definido como $B = \left\{1+x, 1-x, 1-x^2, x^3+x^2+x+1\right\}$. Determine si el polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores de B o no.

5.4.19 Si $\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}$ es un subconjunto ***l.i*** de algún espacio vectorial real $\mathcal{V}$, determine la relación para las constantes reales a y b de manera que $\{\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{y}, a\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} - b\boldsymbol{y}\}$ también sea subconjunto ***l.i*** de $\mathcal{V}$

5.4.20 Sea $\mathcal{W} = \left\{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})\right\}$, tal que $a + b + c + d = 0, p'(1) = 0$. Determine un conjunto S de manera que $\text{Gen}(S) = \mathcal{W}$.

5.4.21 Sea $B = \{u, w, x, z\}$ algún subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial real $\mathcal{V}$. Si se definen $y = 2u - x - 3z$, $m = 2x + 3w - 4u$, $t = w - 2z$, determine si $\mathcal{H} = \{y, m, t\}$ es linealmente depediente o linealmente independiente.

5.4.22 Si se sabe que $\mathcal{W} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } a - b = 0, c + 2d = 0\right\}$ es subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, determine una base de $\mathcal{W}$ y $\dim(\mathcal{W})$

5.4.23 Sean A_1 y A_2 vectores definidos como $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $A_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

1) Verifique que $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de A_1 y A_2

2) Si el vector $\vec{v}$ está definido como $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ 1 - 8\alpha \\ -5\alpha - 3 \end{bmatrix}$, determine todos los valores de la constante real α para que $\vec{v} \in \text{Gen}(\{A_1, A_2\})$

5.4.24 Sea $\{x, y, z\}$ un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^3$. Demuestre que $\mathcal{B} = \{x, x + y, y - z\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$

5.4.25 Considere los vectores $u, w \in \mathbb{R}^3$, tales que $u = (-4, \alpha - 1, 0)$ y $w = (2, 2 - \beta, 0)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Encuentre los valores de α y β para que se cumplan, de manera simultánea, las condiciones siguientes:

1) u y w son linealmente dependientes.

2) $u \in \text{Gen}\left(\{(2,1,3),(-1,0,1)\}\right)$

5.4.26 En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ considere los siguientes cuatro vectores $p(x) = 2 - 5x + 3x^2 + x^3$, $q(x) = 1 + x^2 + x^3$, $r(x) = 3 - x - 2x^2 + 2x^3$ y $s(x) = -1 + 3x + x^2$. Escriba, en caso de ser posible, el vector $p(x)$ como una combinación lineal de los vetores $q(x)$, $r(x)$ y $s(x)$

5.4.27 Sean $\mathcal{V}$ algún espacio vectorial real y $S = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n}\}$ un subconjunto de $\mathcal{V}$, tal que $\mathcal{S}$ es linealmente independiente. Si $\vec{x} \in \mathcal{V}$, tal que $\vec{x} \notin \text{Gen}(\mathcal{S})$, demuestre que el conjunto $\mathcal{H} = \{x, u_1, \vec{u_2}, \ldots, u_n\}$ es, también, linealmente independiente.

5.4.28 Determine si los vectores $\vec{u} = (2,-1,0,-1)$, $\vec{v} = (1,0,1,-1)$ y $\vec{w} = (-1,1,1,0)$ son linealmente dependientes o linealmente independientes. Determine una forma general para expresar el espacio vectorial $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

5.4.29 Considere el conjunto B definido como $B = \left\{1 + x, 1 - x, 1 - x^2, x^3 + x^2 + x + 1\right\}$. Determine si el polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores de B o no.

5.4.30 Si $\mathcal{W} = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \delta a + \lambda b - c = 0, \text{ con } \delta \text{ y } \lambda \text{ números reales fijos}\right\}$. Si sabemos que $\mathcal{W}$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$, determine una base para este espacio.

5.4.31 Si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, encuentre una base para el espacio de las soluciones del sistema homogéneo $\boldsymbol{A}x = 0$

5.4.32 Sea $\mathcal{S}$ el conjunto solución del sistema $\begin{cases} x - 2y + z &= 1 \\ 3x - 6y &= 9 \end{cases}$. ¿Es $\mathcal{S}$ un espacio vectorial?

5.4.33 Sea $\mathcal{S}$ el conjunto solución del sistema $\begin{cases} x - 2y + z &= 0 \\ 3x - 6y &= 0 \end{cases}$. Verifique que $\mathcal{S}$ es espacio vectorial y determine una base para $\mathcal{S}$

5.4.34 Si se sabe que $\mathcal{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } a - d = 0, 2b - c = 0 \right\}$ es subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, determine:

1) Una base de $\mathcal{W}$ y $\dim(\mathcal{W})$

2) Una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a partir de la base de $\mathcal{W}$

5.4.35 Si se sabe que $\mathcal{V} = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} A = A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ es subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

1) Halle tres elementos de $\mathcal{V}$

2) Determine una base de $\mathcal{V}$ y $\dim(\mathcal{V})$

5.5 Coordenadas de un vector en una base

Si $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ entonces las coordenadas de un punto $P = (p_1, p_2, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$ en la base $\vec{B}$ son

$$[P]_B = (a_1, a_2, ..., a_n) \text{ con } P = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n$$

Las coordenadas de P en la base canónica son

$$[P]_C = (p_1, p_2, ..., p_n) \text{ pues } P = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + ... pa_n\vec{e}_n$$

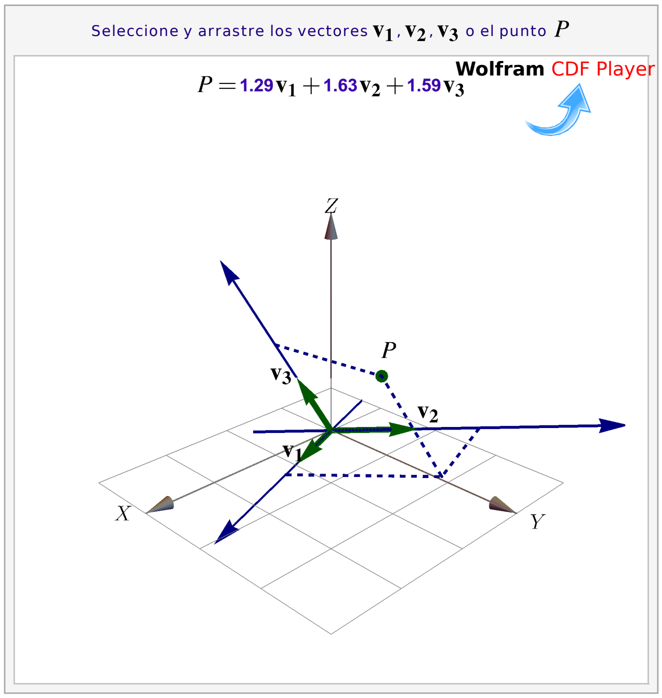

Figura 5.1: Coordenadas de un punto P en la base $\vec{B}$

Como $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ tiene base canónica $B = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$, entonces

$$[a_0 + a_1x + ... + a_nx^n]_C = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

5.6 Ejercicios

5.6.1 $B = \{(1,3), (1,-3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Determine $[(2,1)]_B$ y haga una representación gráfica, mostrando la base (vectores) y las coordenadas de $(2,1)$ en la base B

5.6.2 $B = \{(1,2,1), (1,-2,5), (-1,-2,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

a.) Determine $[(-4,5,1)]_B$ y haga una representación gráfica, mostrando la base (vectores) y las coordenadas de $(-4,5,1)$ en la base B

b.) Determine $[(x,y,z)]_B$

c.) Determine $[(a,a,a)]_B$

d.) Determine $[(a,b,a)]_B$

5.6.3 Se sabe que $\mathcal{W} = \{p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ tal que $p(4) = 3p(2)\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. Además una base de $\mathcal{W}$ es $B = \{x-1,\ x^2+2,\ x^3+20,\ x^4+104\}$. Para los siguientes elementos de $\mathcal{W}$ determine

a.) $[x^4+5x^2+2x+112]_B$

b.) $[-4x^4+x^2-414]_B$

c.) $[-2x^4+8x^3+x^2-46]_B$

5.6.4 Se sabe que $\mathcal{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ tal que } a+3b-c-5d=0 \text{ y } -2a-6b+3c+14d=0 \right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Además una base de $\mathcal{W}$ es $B = \left\{ \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Para los siguientes elementos de $\mathcal{W}$ determine

a.) $\left[\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} \right]_B$

b.) $\left[\begin{pmatrix} 2c-3a & a \\ -8c & 2c \end{pmatrix} \right]_B$

Capítulo 6

Transformaciones Lineales

6.1 Preliminares

Si $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son espacios vectoriales, una función $\mathcal{T}:\mathcal{V}\rightarrow\mathcal{W}$ es una *transformación lineal*, abreviado "***t.l.***", si

$$\mathcal{T}(\vec{v}+\alpha\vec{u})=\mathcal{T}(\vec{v})+\alpha\mathcal{T}(\vec{u}),\ \forall\,\vec{v},\vec{u}\in\mathcal{V},\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

La acción de $\mathcal{T}$ es enviar combinaciones lineales de $\mathcal{V}$ en combinaciones lineales de $\mathcal{W}$ (en $\mathbb{R}^n$ envía líneas a líneas y el cero al cero).

Teorema 6.1

Sea $\mathcal{T}:\mathcal{V}\rightarrow\mathcal{W}$ ***t.l.***, entonces

a.) $\mathcal{T}(\alpha\vec{v})=\alpha\mathcal{T}(\vec{v}),\ \alpha\in\mathbb{R}$

b.) $\mathcal{T}(\vec{0})=\vec{0}$

c.) Si $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}$ es un conjunto generador de $\mathcal{V}$, entonces si $\vec{v}=a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+...+a_n\vec{v}_n$, se tiene $\mathcal{T}(\vec{v})=\mathcal{T}(a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+...+a_n\vec{v}_n)=a_1\mathcal{T}(\vec{v}_1)+a_2\mathcal{T}\vec{v}_2)+...+a_n\mathcal{T}\vec{v}_n)$.

Esto dice que $\mathcal{T}$ se conoce totalmente por su acción sobre una base.

Si $\mathcal{T}:\mathcal{V}\rightarrow\mathcal{W}$ es ***t.l.***, entonces el núcleo de $\mathcal{T}$ es $\mathbf{Nucl}\,\mathcal{T}=\{\vec{v}\in\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{T}(\vec{v})=\vec{0}\}\subseteq\mathcal{V}$. A veces se escribe $\mathrm{Ker}\,\mathcal{T}$. Este conjunto es subespacio vectorial de $\mathcal{V}$.

Si $\mathcal{T}:\mathcal{V}\rightarrow\mathcal{W}$ es ***t.l.***, entonces la imagen de $\mathcal{T}$ es $\mathbf{Img}\,\mathcal{T}=\{\vec{w}\in\mathcal{W}$ tal que $\exists\vec{v}\in\mathcal{V}$ con $\mathcal{T}(\vec{v})=\vec{w}\}\subseteq\mathcal{W}$. Este conjunto es subespacio vectorial de $\mathcal{W}$.

Teorema 6.2

Sea $\mathcal{T}:\mathcal{V}\rightarrow\mathcal{W}$ ***t.l.***, entonces

1) $\mathcal{T}$ es inyectiva (invertible) si y sólo si $\mathbf{Nucl}\,\mathcal{T}=\{\vec{0_{\mathcal{V}}}\}$

2) $\mathcal{T}$ es sobreyectiva si $\mathbf{Img}\,\mathcal{T}=\mathcal{W}$

3) $\vec{0_{\mathcal{V}}}\in\mathbf{Nucl}\,\mathcal{T}$

4) $\mathcal{T}(\vec{0})=\vec{0_{\mathcal{W}}}\in\mathbf{Img}\,\mathcal{T}$

5) Si $\mathcal{T}$ es *biyectiva (isomorfismo)*, tenemos

a) B es ***l.i.*** en $\mathcal{V}$ si y sólo si $\mathcal{T}(B)$ es ***l.i.*** en $\mathcal{W}$

b) B es un conjunto generador de $\mathcal{V}$ si y sólo si $\mathcal{T}(B)$ en un conjunto generador de $\mathcal{W}$

c) B es una base de $\mathcal{V}$ si y sólo si $\mathcal{T}(B)$ en una base de $\mathcal{W}$

6) $\dim \mathbf{Nucl}\,\mathcal{T} + \dim \mathbf{Img}\,\mathcal{T} = \dim \mathcal{V}$

7) Si $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$ (finita) entonces: $\mathcal{T}$ es inyectiva $\iff$ $\mathcal{T}$ es sobreyectiva .

6.2 Ejercicios

6.2.1 Demuestre que si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son transformaciones lineales, tales que $\mathcal{T}_1(\vec{x}_i) = \mathcal{T}_2(\vec{x}_i), \forall x_i \in B$, siendo $B = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ una base de $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{T}_1(\vec{u}) = \mathcal{T}_2(\vec{u}),\ \forall \vec{u} \in \mathcal{V}$

6.2.2 Sea $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una transformación lineal. Demuestre que $\mathbf{Nucl}\,(\mathcal{T})$ es subespacio de $\mathcal{V}$.

6.2.3 Sea $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $\mathcal{T}(1,0) = (1,2,0)$ y $\mathcal{T}(0,1) = (0,3,4)$. Determine $\mathcal{T}(x,y)$

6.2.4 Sea $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $\mathcal{T}(1,1) = (5,6)$ y $\mathcal{T}(1,-1) = (7,8)$. Determine $\mathcal{T}(x,y)$

6.2.5 Sea $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{T}(x,y,z) = (x,\ x+y+z)$.

1) Verifique que $\mathcal{T}$ es transformación lineal.

2) Determine una base para $\mathbf{Nucl}\,(\mathcal{T})$.

3) Determine una base para $\mathbf{Img}\,\mathcal{T}$.

6.2.6 Sea $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{T}(x,y,z) = (x-y,\ x+y,\ y+z)$.

1) Verifique que $\mathcal{T}$ es transformación lineal.

2) Determine una base para $\mathbf{Nucl}\,(\mathcal{T})$.

3) Determine una base para $\mathbf{Img}\,\mathcal{T}$.

6.2.7 Sea $\mathcal{T} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, tal que $\mathcal{T}\left(a + b\,x + c\,x^2\right) = a + b\,x^2$

1) Verifique que $\mathcal{T}$ es una transformación lineal.

2) Determine dos elementos de $\mathbf{Nucl}\,(\mathcal{T})$

3) Determine una base para $\mathbf{Img}\,(\mathcal{T})$

4) Determine $\dim(\mathbf{Nucl}\,(\mathcal{T}))$ y $\dim(\mathbf{Img}\,(\mathcal{T}))$

6.2.8 Sea $\mathcal{T}:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{T}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=2ax^2+(b-a)x+c+d$.

1) Verifique que $\mathcal{T}$ es transformación lineal.

2) Determine una base para $\mathbf{Nucl}(\mathcal{T})$.

3) Determine una base para $\mathbf{Img}\,\mathcal{T}$.

6.2.9 Sea $A_{3\times 3}$ una matriz fija y $\mathcal{T}:\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ definida por $\mathcal{T}(\vec{X})=A\vec{X}$. Muestre que $\mathcal{T}$ es transformación lineal.

6.2.10 Considere la transformación lineal $\mathcal{T}:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$. Si $\mathbf{Nucl}(\mathcal{T})=\left\{\vec{0}_{\mathcal{V}}\right\}$ y el conjunto de vectores $\left\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\right\}$ es linealmente independiente, demuestre que el conjunto de vectores $\left\{\mathcal{T}(\vec{v}_1),\mathcal{T}(\vec{v}_2),\ldots,\mathcal{T}(\vec{v}_n)\right\}$ también es linealmente independiente.

6.2.11 Considere el conjunto $B=\left\{2x,x-3,2-x^2+x\right\}$.

a.) Verifique que B es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

b.) Si $\mathcal{T}:\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3$ es una transformación lineal, con $\mathcal{T}(2x)=(0,2,1)$, $\mathcal{T}(x-3)=(0,-4,-2)$ y $\mathcal{T}\left(2-x^2+x\right)=(0,-2,2)$, determine $\mathcal{T}\left(a+bx+cx^2\right)$, siendo $a+bx+cx^2\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

6.2.12 Sea $\mathcal{T}:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ una transformación lineal. Demuestre que $\mathbf{Img}(\mathcal{T})$ es subespacio de $\mathcal{W}$.

6.2.13 Considere el conjunto $B=\left\{x^2,3x-2x^2,3+x\right\}$.

a.) Verifique que B es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

b.) Si se sabe que $\mathcal{T}:\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es una transformación lineal, con $\mathcal{T}\left(x^2\right)=-4x-2x^2$, $\mathcal{T}\left(3x-2x^2\right)=2x+x^2$ y $\mathcal{T}(3+x)=-2x-2x^2$, determine $\mathcal{T}\left(a+bx+cx^2\right)$, siendo $a+bx+cx^2\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

6.2.14 Sea $\mathcal{T}:\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3$, tal que $\mathcal{T}\left(a+bx+cx^2\right)=(2b-c,a,c-2a-2b)$

1) Verifique que $\mathcal{T}$ es una transformación lineal.

2) Obtenga el núcleo de $\mathcal{T}$ y la nulidad de $\mathcal{T}$.

3) Obtenga el rango de $\mathcal{T}$ y una base de la imagen de $\mathcal{T}$.

6.2.15 Sea $\mathcal{T}:\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, tal que $\mathcal{T}\left(a+bx+cx^2\right)=(3b+a)+(a+b-c)x+(c+2b)x^2$ una transformación lineal. Determine si $\mathcal{T}$ es inyectiva o no lo es. Justifique.

6.2.16 Sea $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ y $\mathcal{T}:\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ definida por $\mathcal{T}(\vec{X})=A\vec{X}$.

a.) Muestre que $\mathcal{T}$ es transformación lineal.

b.) Determine una base para el núcleo de $\mathcal{T}$, ¿Es $\mathcal{T}$ invertible?, si es así, calcule $\mathcal{T}^{-1}(\vec{X})$.

c.) Determine una base para el la imgen de $\mathcal{T}$

6.3 Matriz asociada a una transformación

Sea $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Recordemos que si $C = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces si

$$\vec{v} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + ... + a_n\vec{e_n},$$

se tiene

$$\mathcal{T}(\vec{v}) = \mathcal{T}(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + ... + a_n\vec{e_n}) = a_1\mathcal{T}(\vec{e_1}) + a_2\mathcal{T}(\vec{e_2}) + ... + a_n\mathcal{T}(\vec{e_n})$$

Si escribimos cada $\mathcal{T}(\vec{e_i})$ como *un vector columna*, entonces tenemos una versión matricial del resultado anterior:

$$\mathcal{T}(v) = \begin{bmatrix} \mathcal{T}(\vec{e_1}) & \mathcal{T}(\vec{e_2}) & ... & \mathcal{T}(\vec{e_n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Si $C_1 = \{e_1, \vec{e_2}, ..., e_n\}$ es la base canónica de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es transformación lineal, entonces *la matriz asociada* (o *matriz estándar*) de $\mathcal{T}$ es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de cada $\mathcal{T}(\vec{e_i})$ en la base canónica C_2 de $\mathcal{W}$

$$\boldsymbol{A}_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} [\,\mathcal{T}(\vec{e_1})]_{C_2} \; [\mathcal{T}(\vec{e_2})]_{C_2} \cdots [\mathcal{T}(\vec{e_n})]_{C_2} \end{bmatrix}$$

También se escribe $\boldsymbol{A}_{\mathcal{T}} = [\mathcal{T}]_{C_1}^{C_2}$ y, en este caso, $big[\mathcal{T}(\vec{v})]_{C_2} = \boldsymbol{A}_T[\vec{v}]_{C_1}$

En particular, si $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathbb{R}^n$, entonces $\mathcal{T}(\vec{v}) = \boldsymbol{A}_T\vec{v}$ (escribiendo $\mathcal{T}(\vec{v})$ como vector columna).

Si $B_1 = \{v_1, \vec{v_2}, ..., v_n\}$ es una base de $\mathcal{V}$ y $B_2 = \{w_1, \vec{w_2}, ..., w_m\}$ es una base de $\mathcal{W}$ y si $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es transformación lineal, entonces la matriz $\mathcal{T}$, de la base B_1 en la base B_2, es la matriz cuyas *columnas* son las coordenadas de cada $\mathcal{T}(\vec{v_i})$ en la base B_2 de $\mathcal{W}$,

$$[\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} [\,\mathcal{T}(\vec{v_1})]_{B_2} \; [\mathcal{T}(\vec{v_2})]_{B_2} \cdots [\mathcal{T}(\vec{v_n})]_{B_2} \end{bmatrix}$$

En este caso,

$$[\mathcal{T}(\vec{x})]_{B_2} = [\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2} [\vec{x}]_{B_1},$$

es decir, si conoce las coordenadas de $\vec{x}$ en la base B_1 y la matriz $[\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2}$, entonces puede calcular las coordenadas de $\mathcal{T}(\vec{x})$ en la base B_2 usando un producto matricial

La matriz de cambio de base, de la base B_1 a la base B_2, se construye con la transformación identidad: $[I]_{B_1}^{B_2}$. En este caso $[\vec{x}]_{B_2} = [I]_{B_1}^{B_2} [\vec{x}]_{B_1}$.

Si $\mathcal{S} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ y $\mathcal{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ y si B_1, B_2 y B_3 son bases de $\mathcal{V}, \mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$, respectivamente, entonces

$$[\mathcal{T} \circ \mathcal{S}]_{B_1}^{B_3} = [\mathcal{T}]_{B_2}^{B_3} [\mathcal{S}]_{B_1}^{B_2}$$

En particular, si $\mathcal{V} = \mathcal{U} = \mathcal{W}$ y C su base canónica, entonces $[\mathcal{T} \circ \mathcal{S}]_C = [\mathcal{T}]_C\,[\mathcal{S}]_C$. A veces, por abuso del lenguaje, se escribe TS para indicar la composición.

Si $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es transformación lineal invertible, entonces

$$\left([\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} = \left[\mathcal{T}^{-1}\right]_{B_1}^{B_2}$$

y en particular

$$A_T^{-1} = \left[\mathcal{T}^{-1}\right]_C$$

6.4 Ejercicios

6.4.1 Sea $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una t.l. definida por $\mathcal{T}(x,y) = (x,y,x+y+z)$. Cosidere las bases de $\mathbb{R}^3$:

$$B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)\} \text{ y } B_2 = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

a.) Calcule la matriz estándar de $\mathcal{T}$

b.) Calcule $[\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2}$ y usando esta matriz, calcule $[\mathcal{T}((1,1,3))]_{B_2}$

6.4.2 Sea $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una t.l. definida por $\mathcal{T}(x,y) = (x-y,x+y)$. Sea $B_1 = \{(1,1),(-1,2)\}$ y $B_2 = \{(1,0),(-2,2)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$.

a.) Calcule la matriz estándar de $\mathcal{T}$

b.) Calcule $[\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2}$ y usando esta matriz, calcule $[\mathcal{T}((2,5))]_{B_2}$

6.4.3 Sea $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal. Considere las bases de $\mathbb{R}^3$,

$$B = \{(1,3,0),(1,1,0),(0,0,1)\} \text{ y } C = \{(1,0,0),\,(0,1,0),\,(0,0,1)\}$$

Si se sabe que $T(1,3,0) = (2,6,0)$, $T(1,1,0) = (1,1,0)$ y $T(0,0,1) = (0,0,0)$.

a.) Calcule $[T]_B^B$

b.) Calcule $[\mathcal{T}]_B^C$

c.) Calcule las coordenadas del vector (x,y,z) en la base B, es decir, calcule $[(x,y,z)]_B$

d.) Usando la matriz $[\mathcal{T}]_B^C$, calcule $T(x,y,z) = [T(x,y,z)]_C$

e.) Sin usar el item d.), calcule $T(x,y,z)$

6.4.4 Sea $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal. Considere las bases de $\mathbb{R}^3$,

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,-1)\} \text{ y } C = \{(1,0,0),\,(0,1,0),\,(0,0,1)\}$$

Si se sabe que $T(1,0,0) = (2,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,3,0)$ y $T(0,1,-1) = (1,1,1)$.

a.) Calcule $[T]_B^B$ y $[T]_B^C$

b.) Calcule las coordenadas del vector (x,y,z) en la base B, es decir, calcule $[(x,y,z)]_B$

c.) Usando la matriz $[\mathcal{T}]_B^C$, calcule $T(x,y,z) = [T(x,y,z)]_C$

6.4.5 Sea $\mathcal{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathcal{T}(x,y) = (x-y,z,x+y)$. Sea $B_1 = \{(1,1,1),(-1,2,3),(0,0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,0,0),(-2,2,2),-1,-1,-1\}$ bases de $\mathbb{R}^3$.

a.) Calcule la matriz estándar de $\mathcal{T}$

b.) Calcule $[\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2}$ y usando esta matriz, calcule $[\mathcal{T}((2,2,4))]_{B_2}$

6.4.6 Sea $\mathcal{T}: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, tal que $\mathcal{T}\left(a+bx+cx^2\right) = a - ax + (a+c)x^2$ una transformación lineal. Considerando las bases $B_1 = \left\{1,x^2,2x\right\}$ y $B_2 = \left\{-x,1,x^2\right\}$ de $P_2(\mathbb{R})$.

a.) Calcule $[2x-x^2+5]_{B_1}$ y $\mathcal{T}\left(2x-x^2+5\right)$

b.) Determine a matriz estándar de $\mathcal{T}$

c.) Determine a matriz de la transformación de $\mathcal{T}$ de la base B_1 a la base B_2 y use esta matriz para calcular $\left[\mathcal{T}\left(2x-x^2+5\right)\right]_{B_2}$

6.4.7 Sea $\mathcal{T}: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{T}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2ax^2 + (b-a)x + c + d$. $\mathcal{T}$ es transformación lineal.

1) Determine la matriz estándar de $\mathcal{T}$

2) Calcule $\mathcal{T}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right)$ usando la matriz estándar de $\mathcal{T}$

6.4.8 Sean $B = \{(1,0,-1),(0,1,1),(-1,1,0)\}$, $C = \{1-x,1+x\}$ y $\mathcal{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, tal que $\mathcal{T}(a,b,c) = b+c+(a+b)x$

1) Demuestre que $\mathcal{T}$ es transformación lineal.

2) Demuestre que B y C son bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, respectivamente.

3) Determine la matriz de representación de $\mathcal{T}$ relativa a las bases B y C

6.4.9 Sea $\mathcal{T}: \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, tal que: $\mathcal{T}(a+bx) = (2a+b,a+b)$. Si $\mathcal{T}$ es una transformación lineal biyectiva, determine:

1) Una matriz asociada de $\mathcal{T}$

2) La fórmula explícita para $\mathcal{T}^{-1}$

6.4.10 Sea $\mathcal{T}: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, tal que $\mathcal{T}\left(a+bx+cx^2\right) = -2a + (2b-c+a)x + bx^2 + 2cx^3$ una transformación lineal. Si se tiene que $B_1 = \left\{x,1,x^2\right\}$ y $B_2 = \left\{x^3,-x,2,x^2\right\}$ son bases del dominio y del codominio de $\mathcal{T}$, respectivamente, conteste lo que se pide en cada caso:

1) Determine la matriz $[\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2}$

2) Calcule $[2-3x+4x^2]_{B_1}$ y utilizando la matriz de representación de $\mathcal{T}$ que obtuvo en el inciso (a), verifique que

$$\left[\mathcal{T}\left(2-3x+4x^2\right)\right]_{B_2} = [8x^3-3x^2-8x-4]_{B_2}$$

.

6.4.11 Sean $B=\{(1,0,-1),(0,1,1),(-1,1,0)\}$, $C=\{1-x,1+x\}$ y $\mathcal{T}:\mathbb{R}^3\to\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, tal que $\mathcal{T}(a,b,c)=b+c+(a+b)x$

1) Demuestre que $\mathcal{T}$ es transformación lineal.

2) Demuestre que B y C son bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, respectivamente.

3) Determine la matriz de representación de $\mathcal{T}$ relativa a las bases B y C

6.4.12 Sean $\mathcal{T}:\mathbb{R}^3\to P_1(\mathbb{R})$ una transformación lineal, tal que $\mathcal{T}(a,b,c)=(b+c)+(a+b)x$, $B_1=\{(1,0,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, $B_2=\{1-x,x\}$ una base de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ y $\vec{w}$ un vector de $\mathbb{R}^3$, tal que $[\vec{w}]_{B_1}=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}$

1) Obtenga la matriz para $\mathcal{T}$ asociada a las bases B_1 y B_2; es decir, $[\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2}$

2) Calcule $[\mathcal{T}(\vec{w})]_{B_2}$ sin utilizar la matriz $[\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2}$

3) Calcule $[\mathcal{T}(\vec{w})]_{B_2}$ utilizando la matriz $[\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2}$

6.4.13 Sea $B=\left\{e^x\operatorname{sen}x, e^x\cos x\right\}$ un conjunto linealmente independiente y $\mathcal{V}=\operatorname{Gen}(B)$. Si $\mathcal{T}:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ es una transformación lineal, tal que $\mathcal{T}(f(x))=f'(x)$, $\forall f\in\mathcal{V}$; determine:

1) $\mathcal{T}(e^x\operatorname{sen}x)$ y $\mathcal{T}(e^x\cos x)$

2) $[\mathcal{T}]_B$

3) $\mathcal{T}^{-1}(\alpha e^x\operatorname{sen}x+\beta e^x\cos x)$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

6.4.14 Si se sabe que $M=\begin{bmatrix}-2&-1&-2\\0&2&-1\\1&0&1\end{bmatrix}$ es la matriz asociada de $\mathcal{T}:\mathbb{R}^3\to\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ relativa a las bases canónicas del dominio y del codominio de $\mathcal{T}$, respectivamente, y que $\mathcal{T}$ es tanto inyectiva como sobreyectiva, determine la fórmula explícita para $\mathcal{T}^{-1}:\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3$

6.4.15 Si se sabe que $B=\left\{1+2x,x-x^2,1+3x^2\right\}$ es una base de $P_2(\mathbb{R})$, C_1 es la base estándar (canónica) de $P_2(\mathbb{R})$, C_2 es la base estándar (canónica) de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{T}:P_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2$ es una transformación lineal, tal que $\mathcal{T}(1+2x)=(2,-4)$, $\mathcal{T}\left(x-x^2\right)=(-1,2)$ y $\mathcal{T}\left(1+3x^2\right)=(1,-2)$, determine $[\mathcal{T}]_{C_1}^{C_2}$

6.4.16 Sea $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una transformación lineal, tal que $\mathbf{Nucl}(\mathcal{T}) = \left\{0\right\}$. Demuestre que si $\left\{v_1, v_2, \ldots, v_n\right\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathcal{V}$, entonces $\left\{\mathcal{T}(v_1), \mathcal{T}(v_2), \ldots, \mathcal{T}(v_n)\right\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathcal{W}$.

6.4.17 Sean $B = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ y $D = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}\}$ bases de $\mathbb{R}^2$, tales que $\boldsymbol{w_1} = \boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_2}$ y $\boldsymbol{w_2} = 3\boldsymbol{v_1}$. Si se sabe que $[T]_B^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, para alguna transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

1) Calcule $[T\,(2v_1 - v_2)]_D$
2) Encuentre $[T]_B$
3) Calcule $[I]_B^D$, donde $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación identidad.

6.5 Vectores y valores propios

Preliminares. El número real λ es valor propio de $\boldsymbol{A_{n\times n}}$ si existe $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, con $\vec{v} \neq \vec{0}$, tal que $\boldsymbol{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

Si λ es valor propio de $\boldsymbol{A}$, entonces $\boldsymbol{A}\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones $\vec{v}$ (incluida la solución $\vec{v} = 0$), y la matriz asociada $\boldsymbol{A} - \lambda I$ tiene determinante nulo. Los valores propios reales de $\boldsymbol{A}$ son las raíces reales del *polinomio característico* $p(x) = |\boldsymbol{A} - xI|$ (si $\boldsymbol{A}$ es simétrica, todos los valores propios son reales).

Si λ_i es valor propio de $\boldsymbol{A}$, el espacio solución del sistema $\boldsymbol{A}\vec{v} = \lambda_i\vec{v}$ es el espacio (vectorial) propio E_{λ_i} asociado a λ_i

Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ son los valores propios (distintos) de $\boldsymbol{A}$, y si $B = \{\vec{v}_1, ...\vec{v}_k\}$ es un conjunto de vectores propios asociados, donde $\vec{v}_i$ esta asociado a λ_i, entonces B es ***l.i***.

a.) $\boldsymbol{A}_n$ tiene a lo sumo, n valores propios

b.) Si $\boldsymbol{A}$ es triangular, los miembros de la diagonal son los valores propios de $\boldsymbol{A}$

c.) $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}$ y $\boldsymbol{A}$ tienen los mismos valores propios

Diagonalización. $\boldsymbol{A}_n$ es diagonalizable si existe $\boldsymbol{C}_n$ invertible y una matriz D *diagonal*, tal que

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{D}$$

a.) $\boldsymbol{A}_n$ es diagonalizable si y sólo si $\boldsymbol{A}_n$ tiene n *vectores* propios ***l.i.***

b.) Si $\boldsymbol{A}_n$ es diagonalizable, entonces $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ y las columnas de $\boldsymbol{C}$ son los respectivos vectores propios de la diagonal (las bases de cada espacio propio). Si un espacio propio tiene bases con más de un elemento, el vector propio asociado se repite en la diagonal de $\boldsymbol{D}$.

Además, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i} = n$

c.) Observe que, como caso particular, $\boldsymbol{A}_n$ es diagonalizable si tiene n valores propiso distintos.

6.6 Ejercicios

Vectores y valores propios

6.6.1 Considere la matriz $\boldsymbol{A}$ definida como $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

Determine:

1) Todos los valores propios λ de $\boldsymbol{A}$

2) Un vector propio asociado con cada valor propio λ

6.6.2 Considere la matriz $\boldsymbol{A}$ dada por $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

a.) Compruebe que $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$ son los únicos valores propios de $\boldsymbol{A}$.

b.) Determine una base del espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 2$.

6.6.3 Considere la matriz $\boldsymbol{C}$ definida por $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

1) Determine los valores propios de $\boldsymbol{A}$

2) Determine una base para cada espacios propio E_λ

6.6.4 Considere la matriz $\boldsymbol{A}$ definida como $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ c & 0 \end{bmatrix}$ ¿Qué valor o valores debe tomar c para que $\boldsymbol{A}$ tenga dos valores propios reales diferentes?

6.6.5 Considere la matriz $\boldsymbol{A}$ dada por

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine los valores propios de $\boldsymbol{A}$ y el espacio propio asociado al valor propio.

6.6.6 Considere la matriz $\boldsymbol{A}$ dada por $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

1) Compruebe que $\lambda = 1$ y $\lambda = 10$ son los únicos valores propios de $\boldsymbol{A}$

2) Determine una base del espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 1$

6.6.7 Sea $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

1) Determine todos los valores propios de $\boldsymbol{A}$

2) Halle una base para E_2

6.6.8 Sea $\boldsymbol{A}_{m\times n} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

a.) Verifique que las matrices $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ y $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ son simétricas y que tienen los mismos valores propios *no nulos*.

b.) $(*)$ Verifique que los valores propios de las las matrices $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ y $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$, son números ≥ 0 (es decir, no son negativos). Sugerencia: Recuerde que $||A_{n\times 1}||^2 = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ y que este es un número no negativo. Verifique que $||A\vec{v}||^2 = \lambda||\vec{v}||^2$ y luego concluya.

Diagonalización

6.6.9 Determine si las siguientes matrices son diagonalizables. Si es así, determine $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$.

a.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

b.) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

c.) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

d.) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

La representación matricial "más simple" de una transformación

6.6.10 Para las siguinetes transformaciones lineales, obtenga la representación matricial en la base B indicada a.) $\mathcal{T}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. $\mathcal{T}_1(x,y) = (x+2y, 4x+3y)$. Si $B = \{(1,-1), (1,2)\}$, calcule $[\mathcal{T}_1]_B^B$.

b.) $\mathcal{T}_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. $\mathcal{T}_2(x,y,z) = (4x-3y-3z, 3x-2y-3z, -x+y+2z)$.
Si $B = \{(1,0,1), (1,1,0), (-3,-3,1)\}$, calcule $[\mathcal{T}_2]_B^B$.

c.) $\mathcal{T}_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. $\mathcal{T}_3(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z)$.
Si $B = \{(-1,1,0), (-1,0,1), (1,1,1)\}$, calcule $[\mathcal{T}_3]_B^B$.

6.6.11 Determine una matriz $\boldsymbol{A}_{3\times 3}$ no trivial (es decir, no triangular) tal que

a.) $\boldsymbol{A}$ solo tiene un único valor propio $\lambda = 5$

b.) $\boldsymbol{A}$ solo tiene dos valores propios $\lambda = 5$ y $\lambda = -5$

c.) $\boldsymbol{A}$ solo tiene dos valores propios $\lambda = 5$, $\lambda = -5$ y $\lambda = 0$

6.6.12 Determine una matriz $\boldsymbol{A}_{3\times 3}$ con tres valores propios tales que

El valore propio $\lambda = 1$ este asociado a $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$

El valore propio $\lambda = -2$ este asociado a $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

El valore propio $\lambda = 2$ este asociado a $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$

Capítulo 7

Exámenes y sus soluciones

7.1 I parcial, I semestre 2018

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAL PARA COMPUTACIÓN

TIEMPO: 2 HORAS, 40 MINUTOS
PUNTAJE: 36 PUNTOS
I SEMESTRE DEL 2018

I Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, deben aparecer todos los pasos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, utilizando únicamente bolígrafo azul o negro para resolver la prueba, en un cuaderno de examen o en hojas debidamente grapadas. No son procedentes reclamos sobre preguntas resueltas con lápiz ni lapicero de tinta borrable o que presenten algún tipo de alteración. Solo se permite el uso de calculadora científica no programable.

---

1) Sean $A, B, C, X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, tales que A y $\left(2I - A^T\right)$ son invertibles y $2\,(XA)^T = B + A^T A X^T$.

a) **[3 puntos]** Utilice únicamente propiedades de las operaciones entre matrices para despejar la matriz X.

Solución:

$$
\begin{aligned}
2\,(XA)^T &= B + A^T A X^T \\
2XA &= B^T + XA^T A \\
X\left(2A - A^T A\right) &= B^T \\
X\left(2I - A^T\right)A &= B^T \\
X &= B^T A^{-1}\left(2I - A^T\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

b) **[3 puntos]** Determine explícitamente la matriz X para el caso particular en que:

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Solución:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } \left(2I-A^T\right)^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1/3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow X=B^TA^{-1}\left(2I-A^T\right)^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -2/3 \\ -2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

2) **[4 puntos]** Si $A,B\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ demuestre, entrada por entrada, que

$$\left(A^2+B^T\right)^T=B+\left(A^T\right)^2$$

Solución:

$\forall i=1,2,\ldots,n, \forall j=1,2,\ldots,n$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle(A^2+B^T)^T\rangle_{ij} &= \langle A^2+B^T\rangle_{ji}\\
&= \langle A^2\rangle_{ji}+\langle B^T\rangle_{ji}\\
&= \langle B^T\rangle_{ji}+\langle A^2\rangle_{ji}\\
&= \langle B^T\rangle_{ji}+\langle AA\rangle_{ji}\\
&= \langle B^T\rangle_{ji}+\sum_{k=1}^{n}\langle A\rangle_{jk}\langle A\rangle_{ki}\\
&= \langle B^T\rangle_{ji}+\sum_{k=1}^{n}\langle A\rangle_{ki}\langle A\rangle_{jk}\\
&= \langle B\rangle_{ij}+\sum_{k=1}^{n}\langle A^T\rangle_{ik}\langle A^T\rangle_{kj}\\
&= \langle B\rangle_{ij}+\langle A^TA^T\rangle_{ij}\\
&= \langle B\rangle_{ij}+\langle (A^T)^2\rangle_{ij}\\
&= \langle B+(A^T)^2\rangle_{ij}
\end{aligned}$$

3) **[4 puntos]** Sean $C,D\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, tales que $|CD|=4$ y $|2D|=64$. Calcule: $\left|D\,C^2\,D^T\,(4C)^{-1}\right|$

Solución:

$$\begin{cases} \text{Como } |2D|=64 \Longrightarrow 2^3\,|D|=64 & \Longrightarrow \quad |D|=64/8=8 \\ \text{Además, } |CD|=4 & \Longrightarrow \quad |C|\,|D|=4 \Longrightarrow |C|=4/8=1/2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\left|D\,C^2\,D^T\,(4C)^{-1}\right| &= |D|\,|C^2|\,\left|D^T\right|\left|(4C)^{-1}\right| \\
&= |D|\,|C|^2\left|D^T\right|\left|(4C)^{-1}\right| \\
&= |D|\,|C|^2\,|D|\left|(4C)^{-1}\right| \\
&= |D|\,|C|^2\,|D|\,\frac{1}{|4C|} \\
&= |D|^2\,|C|^2\,\frac{1}{|4C|} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

4) Considere el sistema de ecuaciones lineales de variables x y y dado por:

$$\begin{cases} ax-3y &= 1 \\ 2ax+ay &= b \end{cases}$$

Determine el valor o los valores de las constantes reales a y b de manera que, para cada caso, el sistema anterior:

a) **[2 puntos]** Tenga solución única y enuncie la solución.

b) **[3 puntos]** No tenga solución.

c) **[3 puntos]** Tenga infinito número de soluciones y enuncie el conjunto solución.

Solución:

La matriz asociada es $A=\begin{bmatrix} a & -3 \\ 2a & a\end{bmatrix}$, entonces $|A|=a(a+6)$.

a.) Si $\text{Det}(A)\neq 0 \implies a\neq 0 \wedge a\neq -6$. En este caso el sistema tiene solución única:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & -3 & 1 \\ 2a & a & b\end{array}\right] \xrightarrow{-2F_1+F_2} \left[\begin{array}{cc|c} a & -3 & 1 \\ 0 & a+6 & b-2\end{array}\right] \implies \begin{cases} ax-3y &= 1 \\ (a+6)y &= b-2 \end{cases} \implies \begin{cases} x=\frac{a+3b}{a(a+6)} \\ y=\frac{b-2}{a+6}\end{cases}$$

b.) Si $\text{Det}(A)=0 \implies a=0 \vee a=-6$. En este caso la solución depende del valor de b.

- Si $a=0 \implies \begin{cases} -3y &= 1 \\ 0 &= b\end{cases} \implies \begin{cases} \text{Si } b=0 \implies S=\left\{\left(x,-\frac{1}{3}\right),\ x\in\mathbb{R}\right\} \\ \text{Si } b\neq 0 \implies \text{No hay solución}\end{cases}$

- Si $a=-6 \implies \begin{cases} -6x-3y &= 1 \\ -12x-6y &= b\end{cases} \xrightarrow{-2F_1+F_2} \begin{cases} -6x-3y &= 1 \\ 0 &= b-2\end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} \text{Si } b=2 &\implies S=\left\{\left(x,-\frac{1}{3}-2x\right),\ x\in\mathbb{R}\right\} \\ \text{Si } b\neq 2 &\implies \text{No hay solución}\end{cases}$$

5) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + w &= 0 \\ -x + 2y + z &= 0 \\ 3y - 2z + w &= 2 \\ 2x - z + 4w &= 0 \end{cases}$$

a) **[3 puntos]** Verifique que el sistema tiene solución única usando el determinante de su matriz asociada.

Solución:

El determinante de la matriz asociada es distinto de cero, el sistema de ecuaciones posee solución única.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1+F_2]{-2F_1+F_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot -6 = -6$$

b) **[3 puntos]** Utilice la regla de Cramer para determinarel valor de y.

Solución:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-2 \cdot 3}{-6} = 1$$

6) Sea $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \text{ tal que } a, b \in \mathbb{Q} \right\}$. Consideremos $(G, +, \cdot)$ con las operaciones usuales de suma y producto en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si se sabe que $(G, +)$ es grupo abeliano,

a) **[4 puntos]** muestre que $(G, +, \cdot)$ es anillo conmutativo.

Solución:

Note que $G \neq \emptyset$, ya que la matriz nula está en G. Además, la multiplicación es una operación interna en G, ya que $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{bmatrix} \in G$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 + 2bb_1 & ab_1 + ba_1 \\ 2ba_1 + 2ab_1 & 2bb_1 + aa_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 + 2bb_1 & ab_1 + a_1 b \\ 2\left(ab_1 + a_1 b\right) & aa_1 + 2bb_1 \end{bmatrix} \in G$$

Dado que $(G, +)$ es grupo abeliano, para que $(G, +, \cdot)$ sea anillo conmutativo solo hace falta probar que la multiplicación sea conmutatica, asociativa y distributiva con respecto a la suma. Estas últimas dos propiedades son inmediatas (se heredan de las propiedades en matrices con estas operaciones).

- Conmutatividad de la multiplicación: sean $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{bmatrix} \in G$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} aa_1 + b2b_1 & ab_1 + ba_1 \\ 2ba_1 + a2b_1 & 2bb_1 + aa_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 a + b_1 2b & a_1 b + b_1 a \\ 2b_1 a + a_1 2b & 2b_1 b + a_1 a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Y así, queda demostrado que $(G, +, \cdot)$ es anillo conmutativo.

b) **[4 puntos]** muestre que $(H, +, \cdot)$ es campo, donde

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \text{ tal que } a \in \mathbb{Q} \right\}$$

Solución:

Note que H posee más de un elemento, pues las matrices nula e identidad están en H. Además, H es subconjunto de G y ya hemos demostrado que G es anillo conmutativo.

- Ambas operaciones son operaciones internas en H:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{bmatrix} \in H \text{ y } \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \in H$$

- $(H, +)$ es grupo abeliano, pues + es asociativa y conmutativa en H (se hereda de G). Además,

$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in H$. Y si $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in H \implies \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \in H.$

• $(H - \{\mathbf{0}\}, \cdot)$ es grupo abeliano, pues $\cdot$ es asociativa y conmutativa en H (se hereda de G).

$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H - \{\mathbf{0}\}$. Si $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in H - \{\mathbf{0}\} \implies \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \in H - \{\mathbf{0}\}.$

• La multimplicación es distributiva con respecto a la adición, se hereda de las propiedades de matrices.

Con todo lo anterior, se demostró que $(H, \mathbf{+}, \cdot)$ es campo.

7.2 II parcial, I semestre 2018

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAL PARA COMPUTACIÓN

TIEMPO: 2 HORAS, 40 MINUTOS
PUNTAJE: 35 PUNTOS
I SEMESTRE DEL 2018

II Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, deben aparecer todos los pasos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, utilizando únicamente bolígrafo azul o negro para resolver la prueba, en un cuaderno de examen o en hojas debidamente grapadas. No son procedentes reclamos sobre preguntas resueltas con lápiz ni lapicero de tinta borrable o que presenten algún tipo de alteración. Solo se permite el uso de calculadora científica no programable.

---

1) Sea $\mathcal{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \text{ tal que } a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$.

a.) **[4 puntos]** Verifique que $\mathcal{W}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{3\times 2}$

Solución:

Primero, $\mathcal{W} \neq \varnothing$, pues $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{W}$.

Hay que probar que $\alpha u \vec{+} v \in \mathcal{W}$, para todo $\vec{u,v} \in \mathcal{W}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Si se toman $\vec{u} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \in \mathcal{W}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} d & e \\ d+e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \in \mathcal{W}$, para demostrar que $\mathcal{W}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{3\times 2}$

$$\begin{aligned} \alpha u \vec{+} v &= \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ d+e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha a + d & \alpha b + e \\ \alpha a + \alpha b + d + e & 0 \\ 0 & \alpha c + f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha a + d & \alpha b + e \\ (\alpha a + d) + (\alpha b + e) & 0 \\ 0 & \alpha c + f \end{bmatrix} \in \mathcal{W} \end{aligned}$$

pues esta matriz tiene efectivamente la forma de los elementos de $\mathcal{W}$

b.) **[3 puntos]** Determine un conjunto generador para $\mathcal{W}$

Solución:

Basta con reescribir los elementos de $\mathcal{W}$ como una combinación lineal de tres matrices:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \text{ tal que } a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \text{ tal que } a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tal que } a,b,c \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

Entonces, $\mathcal{W} = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

c.) **[3 puntos]** Determine una base para $\mathcal{W}$

Solución:

Como el conjunto $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ genera $\mathcal{W}$, entonces solo falta probar B que es linealmente independiente para demostrar que este conjunto es base de $\mathcal{W}$.

Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned}
a_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1+a_2 & 0 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Como la solución $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ es única, B es base de $\mathcal{W}$

2) A continuación se dan tres conjuntos, *ninguno de ellos es subespacio vectorial* del espacio vectorial $\mathcal{V}$ que se indica. Explique por qué.

a.) **[2 puntos]** $\mathcal{W}=\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ ab & a\end{bmatrix} \text{ tal que } a,b\in\mathbb{R}\right\}$. $\mathcal{W}\not\leq \mathcal{M}_{2\times 2}$

Solución:

Si $\begin{bmatrix} a & b\\ ab & a\end{bmatrix}\in\mathcal{W}$ y $\alpha\in\mathbb{R}$, para asegurar que $\mathcal{W}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ se debe cumplir $\alpha\begin{bmatrix} a & b\\ ab & a\end{bmatrix}\in\mathcal{W}$ pero, si $\alpha\notin\{0,\pm 1\}$ y $a,b\neq 0$, entonces

$\alpha\begin{bmatrix} a & b\\ ab & a\end{bmatrix}\notin\mathcal{W}$ pues $\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b\\ \alpha ab & \alpha a\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b\\ \alpha a\cdot\alpha b & \alpha a\end{bmatrix}$

b.) **[2 puntos]** $\mathcal{W}$ es el conjunto solución del sistema $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-3z & = & 0\\ x-2y+z & = & 1\end{array}\right.$. $\mathcal{W}\not\leq\mathbb{R}^3$

Solución:

Es claro que $(x,y,z)=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$ no es solución del sistema de ecuaciones propuesto, pues por la segunda ecuación se llega al absurdo $0=1$, por tanto $(0,0,0)\notin\mathcal{W}$.

c.) **[2 puntos]** $\mathcal{W}=\left\{a+bx+cx^2\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } c\geq 0\right\}$. $\mathcal{W}\not\leq\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

Solución:

Tomando cualquier $a+bx+cx^2\in\mathcal{W}$ y cualquier $\alpha\in\mathbb{R}$, para asegurar que $\mathcal{W}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ se debe cumplir $\alpha\left(a+bx+cx^2\right)\in\mathcal{W}$. No obstante, si $\alpha<0$ y si $c>0$, tenemos

$$\alpha\left(a+bx+cx^2\right)=\alpha a+\alpha bx+\alpha cx^2\notin\mathcal{W} \text{ pues } \alpha c<0$$

3) Considere el conjunto $A=\left\{\begin{pmatrix}2\\7\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}\right\}$ y el vector $\vec{u}=\begin{pmatrix}6\lambda\\7\\12\beta\end{pmatrix}$ con $\lambda,\ \beta\in\mathbb{R}$

a.) **[2 puntos]** Verifique que $\vec{w}=\begin{pmatrix}-3\\-12\\-3\end{pmatrix}\in\text{Gen}(A)$

Solución:

Se debe verificar que $\vec{w}$ se puede escribir como combinación lineal de los elementos de A.

$$a_1\begin{pmatrix}2\\7\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-12\\-3\end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix}2a_1\\7a_1-3a_2\\-6a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-12\\-3\end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} 2\alpha &= -3\\ 7a_1-3a_2 &= -12\\ -6a_2 &= -3\end{cases} \implies \begin{cases} a_1 &= -\dfrac{3}{2}\\ a_2 &= \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

b.) **[3 puntos]** Si se sabe que $\vec{u}\in \text{Gen}(A)$, determine el valor de la expresión $7\lambda+2\beta$

Solución:

Como $\vec{u}\in\text{Gen}(A)$, existen $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ tales que

$$a_1\begin{pmatrix}2\\7\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\lambda\\7\\12\beta\end{pmatrix}, \text{ es decir, } \begin{pmatrix}2a_1\\7a_1-3a_2\\-6a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\lambda\\7\\12\beta\end{pmatrix}. \text{ Entonces}$$

$$\begin{cases} 2a_1 &= 6\lambda\\ 7a_1-3a_2 &= 7\\ -6a_2 &= 12\beta\end{cases} \implies \begin{cases} a_1 &= 3\lambda\\ 7a_1-3a_2 &= 7\\ a_2 &= -2\beta\end{cases} \implies \begin{cases} 7\cdot 3\lambda-3\cdot -2\beta &= 7 \end{cases} \quad \therefore$$

$$7\lambda+2\beta=\frac{7}{3}$$

4) **[5 puntos]** Consideremos el subespacio $\mathcal{W}=\text{Gen}\{(3,-1,6,1),\ (-2,10,-6,0),\ (-1,5,-3,0),\ (1,9,0,1)\}$. Determine la dimensión de $\mathcal{W}$.

Solución:

Necesitamos una base para $\mathcal{W}$.

Primera manera: Si se toman $\begin{cases}\vec{u} &= (3,-1,6,1)\\ \vec{v} &= (-2,10,-6,0)\\ \vec{w} &= (-1,5,-3,0)\\ \vec{x} &= (1,9,0,1)\end{cases}$

se puede notar que $v=\vec{2}w$ y que $x=\vec{u}+v$, por tanto $\{u,v,\vec{w},x\}$ es l.d. Reescribiendo $\mathcal{W}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{W}=\text{Gen}\{u,v,\vec{w},x\} &= \{a_1\vec{u}+a_2\vec{v}+a_3\vec{w}+a_4\vec{x} \text{ tal que } a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{R}\}\\ &= \left\{a_1\vec{u}+a_2\vec{v}+\frac{a_3}{2}\vec{v}+a_4(u\vec{+}v) \text{ tal que } a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{(a_1+a_4)\vec{u}+(a_2+\frac{a_3}{2}+a_4)\vec{v} \text{ tal que } a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathcal{W}=\text{Gen}\{u,\vec{v}\}$

Además $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es l.i. pues $\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v} = (0,0,0,0) \implies \begin{cases} 3\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + 10\alpha_2 &= 0 \\ 6\alpha_1 - 6\alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 &= 0 \end{cases} \implies$

$\begin{cases} \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 &= 0 \end{cases}$

$\therefore\ \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es una base de $\mathcal{W}$ y $\dim\mathcal{W} = 2$

Segunda manera: Las relaciones $\vec{v} = 2w$ y $x = \vec{u} + v$ se pueden obtener reduciendo el espacio de columnas: Como $\mathcal{W}$ es el espacio generado por las columnas de $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 10 & 5 & 9 \\ 6 & -6 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y como las operaciones elementales de fila no modifican las relaciones de dependencia entre los vectores columna, obteniendo la forma escalonada reducida, logramos información de los vectores que conforman una base de $\mathcal{W}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 10 & 5 & 9 \\ 6 & -6 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \ldots \rightarrow \begin{array}{cccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto nos dice $\dim\mathcal{W} = 2$ y que una base de $\mathcal{W}$ es $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ pues de la matriz reducida se ve que $\vec{v_3} = \frac{1}{2}v_2$ y que $v_4 = \vec{v}_1 + v_2$

5) Considere $\mathcal{W} = \left\{a + bx + cx^2 \in P_2(\mathbb{R}) / a + 2b - c = 0\right\}$

a.) **(3 puntos)** Verifique que $\mathcal{W}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

Solución:

Una opción es reescribir $\mathcal{W} = \left\{a + bx + (a+2b)x^2 \in P_2(\mathbb{R})\right\}$.

$1 + 2 \cdot x + 5 \cdot x^2 \in \mathcal{W}$ por tanto $\mathcal{W} \neq \emptyset$.

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{W}$ con $\vec{u} = a + b\,x + (a+2b)\,x^2$ y $\vec{v} = p + q\,x + (p+2q)\,x^2$. Debemos verificar que $\vec{u} + \alpha\vec{v} \in \mathcal{W}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \vec{u} + \alpha\vec{v} &= a + b\,x + (a+2b)\,x^2 + p + q\,x + (p+2q)\,x^2 \\ &= a + p\ +\ (b+q)\,x + [a + p\ +\ 2(b+q)]\,x^2 \in \mathcal{W} \end{aligned}$$

b.) **(4 puntos)** Determine una base B para $\mathcal{W}$

Solución:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \left\{a + bx + (a+2b)\,x^2 \in P_2(\mathbb{R})\right\} \\ &= \left\{a\left(1+x^2\right) + b\left(x+2x^2\right) \text{ tal que } a, b \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

$\therefore\ \mathcal{W} = \text{Gen}\left\{1+x^2, x+2x^2\right\}$

Falta demostrar que $\left\{1+x^2, x+2x^2\right\}$ es linealmente independiente.

$a_1\left(1+x^2\right) + a_2\left(x+2x^2\right) = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$

$\Longrightarrow a_1 + a_2x + (a_1+2a_2)\,x^2 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a_1 &=& 0 \\ a_2 &=& 0 \\ a_1+2a_2 &=& 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a_1 &=& 0 \\ a_2 &=& 0 \end{array}\right.$$

Por lo tanto, como $\left\{1+x^2, x+2x^2\right\}$ es linealmente independiente y genera $\mathcal{W}$, entonces esuna base de $\mathcal{W}$.

c.) **(2 puntos)** Verifique que $p(x) = 2 - 5x - 8x^2 \in \mathcal{W}$ y además calcule las coordenadas de $p(x)$ en la base B, es decir, calcule $[p(x)]_B$

Solución:

Primero, note que $p(x) = 2 - 5x - 8x^2 \in \mathcal{W}$, pues $2 + 2\cdot(-5) - (-8) = 0$.

Por otro lado, como $B = \left\{1+x^2, x+2x^2\right\}$ es base de $\mathcal{W}$, basta encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha\left(1+x^2\right) + \beta\left(x+2x^2\right) = 2 - 5x - 8x^2$$

$$\alpha + \beta x + (\alpha+2\beta)\,x^2 = 2 - 5x - 8x^2 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& 2 \\ \beta &=& -5 \\ \alpha+2\beta &=& -8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& 2 \\ \beta &=& -5 \end{array}\right.$$

Por lo tanto, $[p(x)]_B = (2, -5)$.

7.3 III parcial, I semestre 2018

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAL PARA COMPUTACIÓN

TIEMPO: 2 HORAS, 10 MINUTOS
PUNTAJE: 36 PUNTOS
I SEMESTRE DEL 2018

III Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, deben aparecer todos los pasos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, utilizando únicamente bolígrafo azul o negro para resolver la prueba, en un cuaderno de examen o en hojas debidamente grapadas. No son procedentes reclamos sobre preguntas resueltas con lápiz ni lapicero de tinta borrable o que presenten algún tipo de alteración. Solo se permite el uso de calculadora científica no programable.

---

1) Sea $\mathcal{T} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{T}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2ax^2 + (c-b)x$.

a.) **[3 puntos]** Verifique que $\mathcal{T}$ es transformación lineal

b.) **[4 puntos]** Determine una base para el núcleo de $\mathcal{T}$. ¿Es $\mathcal{T}$ inyectiva?

c.) **[2 puntos]** Determine la dimensión de **Img** $\mathcal{T}$

Solución:

a.) Hqm $\mathcal{T}(v+\alpha w) = \mathcal{T}(v) + \alpha\mathcal{T}(w)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\right) &= \mathcal{T}\left(\begin{bmatrix} a+\alpha a' & b+\alpha b' \\ c+\alpha c' & d+\alpha d' \end{bmatrix}\right) \\
&= 2(a+\alpha a')x^2 + (c+\alpha c' - b - \alpha b')x \\
&= 2ax^2 + \alpha a'x^2 + (c-b)x + \alpha(c'-b')x \\
&= 2ax^2 + (c-b)x \ + \ 2\alpha a'x^2 + \alpha(c'-b')x \\
&= \mathcal{T}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + \alpha\mathcal{T}\left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

---

b.) $\mathcal{T}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2ax^2 + (c-b)x = 0\cdot x^2 + 0\cdot x \implies a = 0 \ \wedge \ b = c$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ncl}\,\mathcal{T} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & c \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right\} &= \left\{c\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ con } c,d \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

El conjunto $\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ es l.i. pues $a_1\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Longrightarrow a_1 = a_2 = 0$ (única)

$\therefore \left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ es base del núcleo de $\mathcal{T}$ y, además $\mathcal{T}$ no es inyectiva

c.) Como dim **Núcl** $\mathcal{T}$+dim **Img** $\mathcal{T} = 4$, entonces dim **Img** $\mathcal{T} = 2$.

Esto también se puede establecer observando que $\{x^2, x\}$ es base de la imagen

2) Las siguientes transformaciones no son lineales, indique por qué.

a.) **[2 puntos]** $\mathcal{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \mathcal{T}(x,y,z) = (x, x+y+z+1, x-z)$

b.) **[2 puntos]** $\mathcal{T}: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \mathcal{T}(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix}a & b\\ c^2 & c\end{bmatrix}$

Solución:

a.) $\mathcal{T}(0,0,0) = (0,1,0) \neq (0,0,0)$

b.) En general, $\alpha\mathcal{T}(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix}\alpha a & \alpha b\\ \alpha c^2 & \alpha c\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}\alpha a & \alpha b\\ \alpha^2 c^2 & \alpha c\end{bmatrix} = \mathcal{T}(\alpha a + \alpha bx + \alpha cx^2)$

3) Sea $\mathcal{T}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Si $B_1 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,1,1,0),(0,0,-1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$ y si se sabe que $\mathcal{T}(1,0,0,0) = (1,0)$, $\mathcal{T}(0,1,0,0) = (0,2)$, $\mathcal{T}(1,1,1,0) = (0,0)$ y $\mathcal{T}(0,0,-1,1) = (-1,1)$, y si C es la base canónica de $\mathbb{R}^2$,

a.) **[2 puntos]** Determine la matriz $[\mathcal{T}]_{B_1}^{C}$

b.) **[2 puntos]** Verifique que $[(x,y,z,w)]_{B_1} = (x-z-w,\ y-z-w,\ w+z,\ w)$

c.) **[3 puntos]** Usando la matriz $[\mathcal{T}]_{B_1}^{C}$, determine $\mathcal{T}(x,y,z,w) = [\mathcal{T}(x,y,z,w)]_C$

d.) **[4 puntos]** Si $B_2 = \{(1,0),(1,-1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, determine la matriz $[\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2}$

Solución:

a.)
$$\begin{aligned}[\mathcal{T}]_{B_1}^{C} &= \Big[\ [\mathcal{T}(1,0,0,0)]_C\ \ [\mathcal{T}(0,1,0,0)]_C\ \ [\mathcal{T}(1,1,1,0)]_C\ \ [\mathcal{T}(0,0,-1,1)]_C\ \Big]\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

b.) Se verifica directamente que

$$\begin{aligned}(x,y,z,w) &= (x-z-w)\cdot(1,0,0,0)+(y-z-w)\cdot(0,1,0,0)+(w+z)\cdot(1,1,1,0)\\ &\quad +w\cdot(0,0,-1,1)\end{aligned}$$

c.) $[\mathcal{T}(x,y,z,w)]_C = [\mathcal{T}]_{B_1}^{C}[(x,y,z,w)]_{B_1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-z-w\\ y-z-w\\ w+z\\ w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x-z-2w\\ 2y-2z-w\end{bmatrix}$

d.) $[\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2} = \Big[\, [\mathcal{T}(1,0,0,0)]_{B_2} \;\; [\mathcal{T}(0,1,0,0)]_{B_2} \;\; [\mathcal{T}(1,1,1,0)]_{B_2} \;\; [\mathcal{T}(0,0,-1,1)]_{B_2} \,\Big]$

$$\begin{array}{lclclcl}
[\mathcal{T}(1,0,0,0)]_{B_2} &=& \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} & \text{pues } \mathcal{T}(1,0,0,0) &=& (1,0) &=& 1\cdot(1,0)+0\cdot(1,-1)\\
[\mathcal{T}(0,1,0,0)]_{B_2} &=& \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix} & \text{pues } \mathcal{T}(0,1,0,0) &=& (0,2) &=& 2\cdot(1,0)-2\cdot(1,-1)\\
[\mathcal{T}(1,1,1,0)]_{B_2} &=& \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & \text{pues } \mathcal{T}(1,1,1,0) &=& (0,0) &=& 0\cdot(1,0)+0\cdot(1,-1)\\
[\mathcal{T}(0,0,-1,1)]_{B_2} &=& \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} & \text{pues } \mathcal{T}(0,0,-1,1) &=& (-1,1) &=& 0\cdot(1,0)-1\cdot(1,-1)
\end{array}$$

$$\therefore\; [\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

4) Considere la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 27 & -27 & 9\end{bmatrix}$

a.) **[3 puntos]** Calcule el polinomio característico de $\boldsymbol{A}$

b.) **[1 puntos]** Verifique que $\lambda=3$ es el único valor característico de $\boldsymbol{A}$

c.) **[3 puntos]** Determine una base para el espacio propio asociado a $\lambda=3$

Solución:

a.) $p(\lambda) = \begin{vmatrix}0-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 27 & -27 & 9-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3+9\lambda^2-27\lambda+27$

b.) Aplicando división sintética obtenemos: $p(\lambda) = (\lambda-3)(-\lambda^2+6\lambda-9) = -(\lambda-3)^3$, es decir, $\lambda = 3$ es el único valor propio de A

c.) $A - 3I = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 27 & -27 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{9F_1+F_3} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -18 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-6F_2+F_3} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} -3x & +y & & = & 0 \\ & -3y & +z & = & 0 \end{array} \right. \implies z = 3y \wedge x = \frac{y}{3}$$

$E_3 = \left\{ y\left(\frac{1}{3}, 1, 3\right) \text{ tal que } y \in \mathbb{R} \right\} \implies E_3 = \text{Gen}\left\{\left(\frac{1}{3}, 1, 3\right)\right\}$ y, por tanto, una base para E_3

es $\left\{\left(\frac{1}{3}, 1, 3\right)\right\}$ por ser este conjunto l.i.

7.4 Reposición, I semestre 2018

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAL PARA COMPUTACIÓN

TIEMPO: 3 HORAS, 45 MINUTOS
PUNTAJE: 41 PUNTOS
I SEMESTRE DEL 2018

Examen de reposición: Solución breve

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, deben aparecer todos los pasos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, utilizando únicamente bolígrafo azul o negro para resolver la prueba, en un cuaderno de examen o en hojas debidamente grapadas. No son procedentes reclamos sobre preguntas resueltas con lápiz ni lapicero de tinta borrable o que presenten algún tipo de alteración. Solo se permite el uso de calculadora científica no programable.

---

1) **[4 puntos]** Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ demuestre, ***entrada por entrada***, que $(A-B)^T A = A^T A - B^T A$

Solución:

Hqm $\langle (A-B)^T A\rangle_{ij} = \langle A^T A - B^T A\rangle_{ij}$

$$\begin{aligned}
\langle (A-B)^T A\rangle_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} \langle (A-B)^T\rangle_{ik}\langle A\rangle_{kj}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle A-B\rangle_{ki}\langle A\rangle_{kj}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle A\rangle_{ki}\langle A\rangle_{kj} - \langle B\rangle_{ki}\langle A\rangle_{kj}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle A^T\rangle_{ik}\langle A\rangle_{kj} - \sum_{k=1}^{n} \langle B^T\rangle_{ik}\langle A\rangle_{kj} = \langle A^T A - B^T A\rangle_{ij}
\end{aligned}$$

2) Considere las matrices $A_{2\times 3}$, $B_{3\times 2}$, $C_{2\times 2}$, y $X_{2\times 2}$. Se sabe que $AB-C$ y C son invertibles.

a.) **[3 puntos]** ***Usando únicamente álgebra de matrices***, verifique que si $XABC^{-1}-C^{-1}=X$, entonces la matriz X que satisface la relación es $X=(AB-C)^{-1}$

Solución:

$$\begin{aligned}
XABC^{-1}-C^{-1}=X &\implies XAB-I=XC\\
&\implies XAB-XC=I\\
&\implies X(AB-C)=I\\
&\implies X=(AB-C)^{-1}
\end{aligned}$$

b.) **[3 puntos]** Sabiendo que $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ -2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} 3 & -2\\ -3 & -7\end{bmatrix}$, determine la matriz X

Solución:

Como $AB-C$ y C son invertibles, podemos aplicar el despeje de X

$$AB-C = \begin{bmatrix} 4 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2\\ -3 & -7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 5 & 6\end{bmatrix}$$

Cálculo de $X=(AB-C)^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0\\ 5 & 6 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{-5F_1+F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -5 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{-F_2+F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 6 & -1\\ 0 & 1 & -5 & 1\end{array}\right] \therefore X=\begin{bmatrix} 6 & -1\\ -5 & 1\end{bmatrix}$$

3) **[2 puntos]** $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ con } a,b \in \mathbb{Q} \right\}$. Consideremos el par $(G,+,\cdot)$ con la suma y la multiplicación usual de matrices. Asumiendo que $(G,+,\cdot)$ es un anillo conmutativo, verifique que $(G,+,\cdot)$ ***no*** es un campo.

Solución:

La operación "**·**" es cerrada, pero "falla" en los inversos. Como $\boldsymbol{I}_2 \in G$, las inversas se calculan de la manera usual. Y la inversa de $\boldsymbol{A}$ existe solo si $\text{Det}(\boldsymbol{A}) \neq 0$.

Si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \in G - \{0_G\} \implies \text{Det}(\boldsymbol{A}) = a^2 - b^2$, que se anula si $a = b$.

4) **[4 puntos]** Considere el sistema de ecuaciones lineales: $\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + 3z & = & 0 \\ -x - y + 6z & = & 0 \\ x + 2y + \boldsymbol{a}z & = & 0 \end{array} \right.$

Determine el o los valores de $\boldsymbol{a}$, para los que el sistema tiene infinitas soluciones y obtenga el conjunto solución del sistema.

Solución:

La matriz asociada al sistema es $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$ y $\text{Det}(\boldsymbol{A}) = -27 - 3\boldsymbol{a}$. Por lo tanto, la única posibilidad de que haya infinitas soluciones ocurre si $\boldsymbol{a} = -9$. Ahora aplicamos eliminación, con $\boldsymbol{a} = -9$, para determinar si el sistema tiene solución y, si hay, obtener el conjunto solución.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[F_1+F_2]{F_1-F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & -4 & 12 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{4F_2-3F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tenemos $\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + 3z & = & 0 \\ -3y + 9z & = & 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & \dfrac{y}{3} \end{array} \right.$

5) Sea $\mathcal{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2} \text{ tal que } a - b = 0 \wedge a - c = 0 \right\}$.

a.) **[3 puntos]** Verifique que $\mathcal{W}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$

Solución:

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & d \end{bmatrix} \text{ tal que } a,d \in \mathbb{R} \right\} \neq \emptyset$$

$$\begin{bmatrix} a & a \\ a & d \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} p & p \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+\alpha p & a+\alpha p \\ a+\alpha p & d+\alpha q \end{bmatrix} \in \mathcal{W}$$

b.) **[3 puntos]** Determine una base para $\mathcal{W}$.

Solución:

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & d \end{bmatrix} \text{ tal que } a,d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tal que } a,d \in \mathbb{R} \right\}$$

Entonces $\mathcal{W}$ está generado por el conuunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ y como este conjunto es l.i., entonces es una base de $\mathcal{W}$

6) Consideremos el conjunto $B = \{(2,-3,0),\ (4,\boldsymbol{a},0),\ (\boldsymbol{a}^2,1,\boldsymbol{a})\}$.

a.) **[3 puntos]** Determine el o los valores de $\boldsymbol{a}$ de tal manera que el conjunto B sea l.d. (linealmente dependiente).

Solución:

El sistema $a_1 \cdot (2,-3,0) + a_2 \cdot (4,\boldsymbol{a},0) + a_3 \cdot (\boldsymbol{a}^2,1,\boldsymbol{a}) = (0,0,0)$ tiene matriz asociada $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & \boldsymbol{a}^2 \\ -3 & \boldsymbol{a} & 1 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$ y como $\text{Det}(\boldsymbol{A}) = 2\boldsymbol{a}^2 + 12\boldsymbol{a}$, entoces el conjunto es l.d. si $\boldsymbol{a} = 0$ o $\boldsymbol{a} = -6$

b.) **[3 puntos]** Verifique que si $\boldsymbol{a} = -6$ entonces $(34,4,-6) \in \text{Gen}(B)$

Solución:

Si $\boldsymbol{a} = -6$, entonces $(34,4,-6) = -1 \cdot (2,-3,0) + 0 \cdot (4,\boldsymbol{a},0) + 1 \cdot (\boldsymbol{a}^2,1,\boldsymbol{a})$

7) Consideremos los conjuntos $B_1 = \{(1,0,1),(1,1,1),(0,0,-1)\}$ y $B_2 = \{(-1,0,0),(0,2,0),(0,2,1)\}$. Estos conjuntos son bases de $\mathbb{R}^3$. Sea $\mathcal{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$\mathcal{T}(1,0,1) = (0,0,0),\ \mathcal{T}(1,1,1) = (-5,20,5) \text{ y } \mathcal{T}(0,0,-1) = (-1,4,1)$$

a.) **[4 puntos]** Determine $[\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2}$

Solución:

$$\begin{array}{rclcl} \mathcal{T}(1,0,1) & = & (0,0,0) & = & 0\cdot(-1,0,0)+0\cdot(0,2,0)+0\cdot(0,2,1) \\ \mathcal{T}(1,1,1) & = & (-5,20,5) & = & 5\cdot(-1,0,0)+5\cdot(0,2,0)+5\cdot(0,2,1) \\ \mathcal{T}(0,0,-1) & = & (-1,4,1) & = & 1\cdot(-1,0,0)+1\cdot(0,2,0)+1\cdot(0,2,1) \end{array} \implies [\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

b.) **[2 puntos]** Determine a_2 si se sabe que $\big[(x,y,z)\big]_{B_1} = \begin{bmatrix} x-y \\ a_2 \\ x-z \end{bmatrix}$

Solución:

$$\big[(x,y,z)\big]_{B_1} = \begin{bmatrix} x-y \\ y \\ x-z \end{bmatrix}$$

c.) **[3 puntos]** Determine $\big[\mathcal{T}(1,2,3)\big]_{B_2}$ usando la matriz $[\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2}$

Solución:

$$\big[\mathcal{T}(1,2,3)\big]_{B_2} = [\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2}\big[(1,2,3)\big]_{B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

8) **[4 puntos]** Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sabiendo que $\lambda = 1$ es un valor propio de A, determine una base para del espacio propio asociado a a este valor propio.

Solución:

Una base para E_1 es $\{(0,0,1),(1,1,0)\}$

Bibliografía

[1] Anton, H. *Elementary Linear Algebra.* Wiley. 2010

[2] Arce, C.; González J.; Castillo, W. "*Álgebra Lineal*". Editorial Universidad de Costa Rica. 2009.

[3] Bronson R. *Linear Algebra: An Introduction.* Academic Press. 1995

[4] Fonseca C. *Ejercicios de Álgebra Lineal.* Folleto Univesidad de Costa Rica. 2012.

[5] K. Geddes, S. Czapor, G. Labahn. *Algorithms for Computer Algebra.* Springer; 1992.

[6] Grossman, S. "*Álgebra Lineal*". Ed. Iberoaméricana.

[7] Gutiérrez M. *Sistemas de ecuaciones lineales, Matrices Determinantes. Folleto de prácticas.* Folleto, ITCR.

[8] Hoffman, K. y Kunze, R "*Álgebra Lineal*". Ediciones Zacatenco. 1965

[9] Larson R. *Elementary Linear Algebra.* Wadsworth Publishing Co Inc. 2012

[10] Páez, C. (2013). *Matrices y sistemas lineales*. Costa Rica: `https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/`

[11] ——— (2015). *Estructuras algebraicas*. Librería del TEC.

[12] ——— (2015). *Espacios vectoriales*. Librería del TEC.

[13] ——— (2015). *Transformaciones lineales*. Librería del TEC.

[14] Rodríguez Kendall. *Ejercicios Resueltos de Álgebra Lineal para Computación.* Foolleto ITCR. 2013.

Capítulo 8

Solución de los ejercicios

Soluciones del Capítulo 1

1.3. Operaciones básicas

1.3.1 $A\mathbb{1}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$

1.3.2 $XX^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad X^TX = 10$

1.3.3 $\begin{bmatrix} x+2y+3z \\ 2x+3y+4z \\ 4z-x \end{bmatrix}$

1.3.4 $\begin{bmatrix} -4 & 8 & -1 \\ 8 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -8 \end{bmatrix}$

1.3.5 Hay infinitas opciones, por ejemplo: $B = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$ con $x \neq y$

1.3.6 $X\,A\,X^T = x^2 + 4xy + 3y^2$

1.3.7 $A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & a \end{bmatrix}$

1.3.8 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 12 \\ 3 & 12 & 27 \end{bmatrix}$

1.3.9 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ y $AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

1.3.10 Cada entrada del producto requiere k multiplicaciones pues $\langle A_{n\times k}B_{k\times m}\rangle_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \langle A\rangle_{ik}\langle B\rangle_{kj}$ y como el producto AB tiene nm entradas, entonces son nkm multiplicaciones.

1.3.11 En la primera opción se hacen 100 multilpicaciones y en la segunda 54.

1.3. Demostraciones "entrada por entrada"

1.3.12

1) $\langle(\alpha A)^T\rangle_{ij} = \langle\alpha A\rangle_{ji} = \alpha\langle A\rangle_{ji} = \alpha\langle A^T\rangle_{ij}$

2) Usamos la definición $\langle I\rangle_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i=j \\ 0 & \text{si} \quad i\neq j \end{cases}$.

$\langle IA\rangle_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\langle I\rangle_{ik}\langle A\rangle_{kj} = 0+0+...+\langle I\rangle_{ii}\langle A\rangle_{ij}+0+...0 \;=\; \langle A\rangle_{ij}$

3)

4) Usamos la definición del producto.

$$\begin{aligned}
\langle(A^TB)^T\rangle_{ij} &= \langle A^TB\rangle_{ji} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\langle A^T\rangle_{jk}\langle B\rangle_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\langle B^T\rangle_{ik}\langle A\rangle_{kj} \\
&= \langle B^TA\rangle_{ij}
\end{aligned}$$

5) Usamos la definición del producto y el hecho de que $\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{h=1}^{n}a_{ij}\right] = \sum_{h=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ij}\right]$

$$\begin{aligned}
\langle(A^TBC)^T\rangle_{ij} &= \langle A^TBC\rangle_{ji} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\langle A^TB\rangle_{jk}\langle C\rangle_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{h=1}^{n}\langle A^T\rangle_{jh}\langle B\rangle_{hk}\right]\langle C\rangle_{ki}, \text{ ahora, intercambiamos sumatorias y acomodamos,} \\
&= \sum_{h=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\langle C^T\rangle_{ik}\langle B^T\rangle_{kh}\right]\langle A^T\rangle_{jh} \\
&= \sum_{h=1}^{n}\langle C^TB^T\rangle_{ih}\langle A\rangle_{hj} \\
&= \langle C^TB^TA\rangle_{ij}
\end{aligned}$$

6) Inicio: Como A es de orden $p\times q$ y $(B-2C^T)^T$ es de orden $q\times r$, entonces

$\langle A(B-2C^T)^T\rangle_{ij} = \sum_{k=1}^{q}\langle A\rangle_{ik}\langle(B-2C^T)^T\rangle_{kj} \;=\; \sum_{k=1}^{q}\langle A\rangle_{ik}\langle B-2C^T\rangle_{jk} \;=\; ...$

7) Inicio: Como $(\mathbf{2B^T - C})^T$ es de orden $q \times r$ y $\boldsymbol{A}$ es de orden $r \times p$, entonces

$$\langle (\mathbf{2B^T} - \boldsymbol{C})^T \boldsymbol{A} \rangle_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \langle (\mathbf{2B^T} - \boldsymbol{C})^T \rangle_{ik} \langle \boldsymbol{A} \rangle_{kj} = \ldots$$

1.3.13

1.3.14

1.3.15

1) **Hqm** $\langle \boldsymbol{AB} \rangle_{ij} = 0$ si $\boldsymbol{i} < \boldsymbol{j}$.

Supongamos que $\boldsymbol{i} < \boldsymbol{j}$, entonces, analizamos los sumandos de $\langle \boldsymbol{AB} \rangle_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \langle \boldsymbol{A} \rangle_{ik} \langle \boldsymbol{B} \rangle_{kj}$

$\langle \boldsymbol{B} \rangle_{kj} = 0$ si $\boldsymbol{k} < \boldsymbol{j}$, es decir, si $k = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{i} \leq j - 1$

$\langle \boldsymbol{A} \rangle_{ik} = 0$ si $\boldsymbol{i} < \boldsymbol{k}$, es decir, si $k = \boldsymbol{i} + \mathbf{1}, i + 2, \ldots, n$

$$\therefore \langle \boldsymbol{AB} \rangle_{ij} = \sum_{k=1}^{\boldsymbol{i}} \langle \boldsymbol{A} \rangle_{ik} \langle \boldsymbol{B} \rangle_{kj} + \sum_{k=\boldsymbol{i}+\mathbf{1}}^{n} \langle \boldsymbol{A} \rangle_{ik} \langle \boldsymbol{B} \rangle_{kj} = 0 \text{ si } \boldsymbol{i} < \boldsymbol{j}$$

2)

3) Desarrolle $\langle \boldsymbol{AB} \rangle_{ij}$ y $\langle \boldsymbol{BA} \rangle_{ij}$, usando la propiedad de $\boldsymbol{B}$, para establecer dónde está la diferencia. Luego puede construir un contra-ejemplo.

El cálculo anterior probaría que $\boldsymbol{A}$ conmuta con $\boldsymbol{B}$ si $\boldsymbol{A}$ es diagonal

4)

5)

1.3.16

1.3. Demostraciones usando propiedades de matrices

1.3.17

1)

2) $\boldsymbol{A}^T(2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B})$

3)

4)

5)

1.3.18

1.3.19

1.3.20

1.3.21

1.3.22

1.3.23

1) Debe mostrar que $(B^T AB)^T = B^T AB$

2) Use la definición

3) Use la definición

4) A se dice *antisimétrica* si $A^T = -A$.

   a.) ${A^T}_{n\times m} = -A_{m\times n} \implies n = m$ y $\langle A\rangle_{kk} = -\langle A\rangle_{kk} \implies \langle A\rangle_{kk} = 0.$

   b.) Debe mostrar que $(A + A^T)^T = A + A^T$

   c.) Debe mostrar que $A - A^T = -\left(A - A^T\right)^T$

5)

6)

1.3.24

1.3.25

1.4. Forma escalonada reducida

1.5.1

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.6. Matriz inversa

1.7.1

1) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

2) $\boldsymbol{B^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) $\boldsymbol{C^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -x & xz-y \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4) $\boldsymbol{D^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5) $\boldsymbol{E}$ no es invertible.

6) $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 \\ -\frac{1}{k^4} & \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$

1.7.2

1.7.3

a.) $\boldsymbol{X} = \frac{1}{3}\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{CD}+\boldsymbol{I})$

b.) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

1.7.4

1.7.5 Por asociatividad, $\boldsymbol{A(AB-BA)} = \boldsymbol{A}-(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, usando el ítem anterior.

1.7.6 Debe verificar que $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2) = \boldsymbol{I}$. Proceda!

1.7.7

1.7.8 $X = \boldsymbol{A^{-1}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C^T})\boldsymbol{B^{-1}}$

1.7.9 $X = [(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}]^{\boldsymbol{T}}$

1.7.10 Observe que $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AB})^{-1} = (\boldsymbol{B^{-1}B}-\boldsymbol{AB})^{-1}$. Con este puede resolver el ítem 1) y usando este último, el ítem 2). El ítem 3) resulta de verificar que $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B^{-1}B}-\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{I}$

1.7.11 Tenemos $\boldsymbol{X_{n\times m}}$ y $\boldsymbol{D_{m\times m}}$ y $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B^T}[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D})^{\boldsymbol{T}}]^{-1}$

1.7.12 $X = \begin{bmatrix} -x-2 & 1 & -9 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

1.7.13 Si $AB^T - C^2$ es invertible, entonces

$$\begin{array}{rrcl} & XAB^T - XC^2 & = & AB^T \\ \Longrightarrow & X(AB^T - C^2) & = & AB^T \\ \Longrightarrow & X & = & AB^T(AB^T - C^2)^{-1} \end{array}$$

Luego solo queda calcular, con las matrices dadas:

$$AB^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(AB^T - C^2)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

1.7.14

1.7.15

1.7.16

1.7.17

1.7.18

1.7.19

1.7.20

1.7.21 $A(A+2I) = I$, entonces puede deducir que la inversa existe y decir quién es!

1.7.22

1.7.23

1.7.24

1.7.25

1.7.26

Soluciones del Capítulo 2

2.1. Determinantes

2.2.1

1) $\text{Det}(\boldsymbol{A}) = -3$

2) $\text{Det}(\boldsymbol{B}) = 3k - 12$

3) Una estrategia es primero hacer una redución en la primera columna y luego calculamos usando expansión por cofactores. $\text{Det}(\boldsymbol{C}) = 0$

4) $\text{Det}(\boldsymbol{D}) = k\left(k^2 - 4\right)$

5) Una estrategia es primero hacer una redución en la primera columna y luego calculamos usando expansión por cofactores. $\text{Det}(\boldsymbol{A}) = -2 - 2a$

6) $\text{Det}(\boldsymbol{A}) = -180$

2.2.2 $$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2-2a}\begin{pmatrix} 1 & 28-2a & 2a-18 & 8-2a \\ 0 & -6 & 4 & -2 \\ a+1 & 2a-13 & 8-2a & a-4 \\ a+1 & 4a-17 & 10-4a & 3a-4 \end{pmatrix}$$

2.2.3

2.2.4 $\text{Det}(\boldsymbol{A}) = 1$ y $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.2.5 Por contradicción: Si $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, entonces $\boldsymbol{A}$ es invertible, es decir, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$, contradicción!

2.2.6

2.2.7 $\text{Det}(\mathbb{I}_n + \mathbb{I}_n) = \text{Det}(2\boldsymbol{I}_n) = 2^n\text{Det}(\boldsymbol{I}_n) = 2^n \neq \text{Det}(\boldsymbol{I}_n) + \text{Det}(\boldsymbol{I}_n) = 2$

2.2.8

2.2.9

2.2.10 $\text{Det}(\boldsymbol{2A^TA^{-1}A^2}) = 128$

2.2.11 Primero, despeje $\textbf{Adj}(\boldsymbol{A})$ en la fórmula de la inversa. $\left|\boldsymbol{2B}\text{Adj}(\boldsymbol{A^T})\right| = -1500$

2.2.12 Observe que $|2A - B| = 2$ y $|2AC - BC| = |2A - B|\,|C| = |I| = 1$. Entonces

$$\text{Det}((\boldsymbol{6A} - \boldsymbol{3B})^{-1}\boldsymbol{C^T}) = \frac{1}{108}$$

2.2.13 $|(AB)^{-1}A+B^{-1}| = |B^{-1}A^{-1}A+B^{-1}| = |2B^{-1}| = \dfrac{2^3}{|B|} = \dfrac{2^3}{10}$

2.2.14

2.2.15

2.2.16

2.2.17

2.2.18

2.2.19 $\dfrac{1}{2}$

2.2.20 $\text{Det}(B) = 12$

2.2.21

2.2.22

2.2.23

2.2.24

1) $|B| = -12$
2) $|C| = 3$

2.2.25

1) $\text{Det}(3A) = 135$
2) $\text{Det}(2A^{-1}) = \dfrac{8}{5}$
3) $\text{Det}(B) =$

2.2.26

2.2.27

2.2.28

1) $\text{Det}(B) = \text{Det}(P^{-1})\text{Det}(P)\text{Det}(A) = \text{Det}(A)$
2) $\text{Det}(B-\alpha I) = \text{Det}(P^{-1}AP - \alpha P^{-1}P) = \text{Det}(A-\alpha I)$ (sacando los factores comunes P^{-1} y P)

Soluciones del Capítulo 3

3.1. Sistemas de ecuaciones lineales

3.2.1

1) $x=1,\ y=2,\ z=3$
2) $x\in\mathbb{R},\ y=\frac{4x}{3},\ z=-\frac{7x}{3}$. Una solución particular es $x=0,\ y=0$ y $z=0$
3) Solución única: $x=0,\ y=0$ y $z=0$
4) No tiene solución
5) Infinitas soluciones. Solución general

$$x\in\mathbb{R},\ \ y=\frac{2}{3}-\frac{5x}{3},\ \ z=\frac{x}{3}-\frac{1}{3},\ \ w=-7x.$$

Una solución particular es: $x=3,\ y=-\frac{13}{3},\ z=\frac{2}{3},\ w=-21.$

6) $y\in\mathbb{R},\ x=-\frac{1}{2},\ z=3y,\ w=3y-1.$ Una solución particular es, por ejemplo

$$y=0,\ x=-\frac{1}{2},\ z=0,\ w=-1$$

7)
La solución es $x\in\mathbb{R},\ y=\frac{2}{3}+\frac{2x}{3},\ z=1.$

Una solución particular es $x=0,\ y=2/3$ y $z=1$
8) Infinitas soluciones: $d\in\mathbb{R},\ a=19+d,\ b=-12-d, c=-3$. Una solución particular es $d=0,\ a=19,\ b=-12$ y $c=-3$
9) No tiene solución
10) Infinitas soluciones: $s\in\mathbb{R},\ t=1-s,\ u=-1$. Una solución particular es $s=5,\ t=-4, u=-1.$
11) $s=0,\ t=1, u=-1.$

3.2.2 La solución es $y=t,\ x=2-t$, solo resta poner $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ como combinación lineal de matrices

3.2.3

3.2.4

3.2.5

a.) Como es un sistema 2×2, podemos usar el criterio del determinante. Si $\mathrm{Det}(\boldsymbol{A})=-b(a+b)\neq 0$ el sistema tiene solución única. Como es homogéneo, solo hay la única posibilidad de $x=0,\ y=0$ si $b\neq 0$ y $a\neq -b$

b.) Como es un sistema 2×2, podemos usar el criterio del determinante. Si $\mathrm{Det}(\boldsymbol{A})=0$ entonces el sistema o no tiene solución o tiene infinitas soluciones. Como el sistema es homogéneo, deberían entonces haber infinitas soluciones.

$$\text{Det}(\boldsymbol{A}) = \left| \begin{bmatrix} a & b \\ b & -b \end{bmatrix} \right| = -b(a+b) = 0 \implies \begin{cases} b &= 0 \\ a &= -b \end{cases}$$

Análisis de casos:

a) Si $b=0$ entonces $\begin{cases} ax &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=0 & \text{si} & a \neq 0 \\ x & \text{arbitrario si} & a=0 \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} \text{Si } b=0 \wedge a=0 \implies X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, x,y \in \mathbb{R} \\ \\ \text{Si } b=0 \wedge a \neq 0 \implies X = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b) Si $a=-b$ entonces $\begin{cases} -bx+by &= 0 \\ bx-by &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=y & \text{si} & b \neq 0 \\ x,y & \text{arbitrarios si} & b=0 \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} \text{Si } b \neq 0 \wedge a=-b \implies X = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} \\ \\ \text{Si } b=0 \wedge a=0 \implies X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, x,y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3.2.6

3.2.7 $\text{Det}(\boldsymbol{A}) = a - a^3$. Hay solución única si $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1$. En este caso, $x = \dfrac{(a^2+1)\,b}{a\,(a^2-1)}$, $y = \dfrac{1}{2}\left(a^2x - ab - ax + b - 2x\right)$ y $z = \dfrac{1}{2}(b + ab + 2x - ax - a^2x)$

Si $\text{Det}(\boldsymbol{A}) = 0$ entonces no hay solución si $b \neq 0$. Para el caso $b=0$ tenemos infinitas soluciones y $x \in \mathbb{R}$, $y = \dfrac{1}{2}\left(a^2 - a - 2\right)$ y $z = -\dfrac{1}{2}\left(a^2 + a - 2\right)x$

3.2.8 $\text{Det}(\boldsymbol{A}) = (\alpha+2)(\alpha-3)$. Si $(\alpha+2)(\alpha-3) \neq 0$ tenemos solución única $x = \dfrac{\alpha^2-\alpha-4}{\alpha-3}$, $y = -\alpha^2 + \alpha x - \alpha - x + 3$ y $z = -1 - \alpha + x$.

Si $\text{Det}(\boldsymbol{A}) = 0$ solo hay solución cuando $\alpha = -2$. En este caso $x \in \mathbb{R}$, $y = 1 - 3x$ y $z = 1 + x$. En el caso $\alpha = 3$, no hay solución.

3.2.9

3.2.10 El determinante de la matriz asociada $\boldsymbol{A}$ es $\text{Det}(\boldsymbol{A}) = 11k - 95$. Si $k \neq \dfrac{95}{11}$ hay solución única $x=0$, $y=0$ y $z=0$. Si $k = \dfrac{95}{11}$, la solución es $y = \dfrac{3x}{32}$, $z = -\dfrac{11x}{32}$ (infinitas soluciones)

3.2.11

3.2.12 $x = \dfrac{|A|}{|A|} = 1, \; y = \dfrac{0}{|A|} = 0$ (pues $|A_2| = 0$ ya que sus dos primeras filas se repiten).

3.2.13

3.2.14

1) $|A| = 2 - 2a \implies |A| \neq 0$ si $a \neq -1$

2)
$$x = -\frac{3-2a}{a+1}, \; y = \ldots\ldots., \; z = -\frac{2a-3}{2(a+1)}, \; w = \ldots\ldots$$

$y = \dfrac{1}{a+1}, \; w = -\dfrac{4a-3}{2(a+1)}$

3.2.15

3.2.16

3.2.17

3.2.18

3.2.19

Soluciones del Capítulo 4

4.3. Grupos

4.3.1

a.) **Cerradura:** Si $A, B \in G \implies \text{Det}(AB) = \text{Det}(A)\text{Det}(B) = 1 \implies AB \in G$

b.) La asociativodad la hereda de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

c.) El neutro multiplicativo es $I_2 \in G$ pues $\text{Det}(I_2) = 1$

d.) Si $A \in G$ entonces la inversa existe y, $\text{Det}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\text{Det}(A)} = 1 \implies A^{-1} \in G$

4.3.2

a.) **Cerradura:** $a * b = 2ab \in \mathbb{R}^*$ pues $a, b \neq 0$.

b.) **Asociatividad:** $\begin{cases} a*(b*c) & = & a*2bc & = & 4abc \\ (a*b)*c & = & 2ab*c & = & 4abc \end{cases}$ ✓

c.) **Neutro:** $\begin{cases} a*e &= a \implies a = 2ae \implies e = \dfrac{1}{2}. \\ \dfrac{1}{2}*a &= a \end{cases}$

d.) **Inversos:** $\begin{cases} a*a' &= 2aa' = \dfrac{1}{2} \implies a' = \dfrac{1}{4a} \text{ pues } a \neq 0. \\ \\ \dfrac{1}{4a}*a &= 2\dfrac{1}{4a}a = \dfrac{1}{2}. \quad \therefore \forall a \in \mathbb{R}^*,\ a^{-1} = \dfrac{1}{4a}. \end{cases}$ ✓

e.) El grupo $(G,*)$ es conmutativo pues $a*b = b*a = 2ab$.

4.3.3

a.) **Cerradura:** $(a,b)*(c,d) = (ac, ad+b) \in G$ pues $ac \neq 0$.

b.) **Asociatividad:** $\begin{cases} (a,b)*((c,d)*(p,q)) &= (acp,\ acq+ad+b) \\ ((a,b)*(c,d))*(p,q) &= (acp,\ acq+ad+b) \end{cases}$ ✓

c.) **Neutro:** $\begin{cases} (a,b)*(e_1,e_2) &= (a,b) \implies (a\cdot e_1,\ a\cdot e_2+b) = (a,b) \implies (e_1,e_2)=(1,0) \\ (e_1,e_2)*(a,b) &= (1,0)*(a,b) = (a,b) \end{cases}$

d.) **Inversos:** $\begin{cases} (a,b)*(a',b') &= (1,0) \implies (a',b') = \left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{b}{a}\right) \text{ pues } a,b \neq 0. \\ \\ \left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{b}{a}\right)*(a,b) &= (1,0). \quad \therefore \forall (a,b) \in G,\ (a,b)^{-1} = \left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{b}{a}\right). \end{cases}$ ✓

e.) El grupo $(G,*)$ no es conmutativo pues $(a,b)*(c,d) = (ac,\ ad+b)$ pero $(c,d)*(a,b) = (ac,\ bc+d)$

4.3.4

a.) **Cerradura:** Si $a,b \in \mathbb{R}-\{-1\}$ es claro que $a\circ b = a+b+ab \in \mathbb{R}$. Solo falta probar que $a\circ b = a+b+ab \in \mathbb{R}-\{-1\}$, es decir, $a+b+ab \neq -1$. Para probar esto, observe que

$a+b+ab = -1 \iff a+b+ab+1 = 0 \iff (a+1)(b+1) = 0$, lo cual es imposible, pues $a,b \in \mathbb{R}-\{-1\}$.

b.) **Asociatividad:** $\begin{cases} (a\circ b)\circ c &= (a+b+ab)\circ c &= a+b+ab+c+(a+b+ab)c \\ a\circ(b\circ c) &= a\circ(b+c+bc) &= a+b+c+bc+a(b+c+bc) \end{cases}$

Desarrollando se verifica que las os expresiones son iguales.

c.) **Conmutatividad:** $a\circ b = a+b+ab = b+a+ba = b\circ a$ pues la suma y el producto son conmutativas en $\mathbb{R}$.

d.) **Neutro:** Por el ítem anterior, solo necesitamos resolver la ecuación $a \circ e = a$.

$$a \circ e = a \iff a + e + ae = a \iff e(a+1) = 0 \iff e = 0 \text{ pues } a \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

e.) **Inversos:** Por el ítem anterior, solo necesitamos resolver la ecuación $a \circ \bar{a} = e = 0$.

$$a \circ \bar{a} = 0 \iff a + \bar{a} + a\bar{a} = 0 \iff \bar{a}(1+a) = -a \implies \bar{a} = -\frac{a}{1+a} \in \mathbb{R} - \{-1\} \text{ pues } -\frac{a}{1+a} \neq -1.$$

Como $a \neq -1$, todos los elementos de $\mathbb{R} - \{-1\}$ tienen inverso.

4.3.5 $(-4,1)^3 = (-4,1) * (-4,1) * (-4,1) = (-4 + -4 + 3,\ 2 \cdot 1 \cdot 1) * (-4,1) = (-5,\ 2) * (-4,1) = (-6,\ 4)$.

Para calcular $(2,-3)^{-2}$ requerimos calcular el neutro (e_1,e_2) para poder calcular inversos.

a.) **Neutro:** $(a,b) * (e_1,e_2) = (a,b) \implies (e_1,e_2) = \left(-3,\ \frac{1}{2}\right)$

b.) **Inversos:** $(a,b) * (a',b') = \left(-3,\ \frac{1}{2}\right) \implies (a',b') = (a,b)^{-1} = \left(-6-a,\ \frac{1}{4b}\right)$ pues $b \in \mathbb{R}^*$

c.) $(-4,1)^3 * \left[\left(1,\ \frac{4}{3}\right) * (2,-3)^{-2}\right]^2 = (-6,4) * \left[\left(1,\ \frac{4}{3}\right) * \left(-13,\ \frac{1}{72}\right)\right]^2 = (-6,4) * \left(-9,\ \frac{1}{27}\right)^2 = \left(-18,\ \frac{16}{729}\right)$

4.3.6

a.)

b.)

c.)

d.) $E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in G$

e.) $\bar{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \end{bmatrix} \in G$

4.3. Anillos y campos

4.3.7

4.3.8

4.3.9

4.3.10

4.3.11

4.3.12

4.3.13

4.3.14

4.3.15 Debe probar las propiedades adicionales de campo (recuerde que algunas propiedades se heredan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$). Por ejemplo,

Cerradura: $\left[\begin{array}{cc} a & b \\ 2b & a \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} a' & b' \\ 2b' & a' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} aa'+2bb' & ba'+ab' \\ 2\left(ba'+ab'\right) & aa'+2bb' \end{array}\right] \in G$

El inverso multiplicativo: Si $A = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ 2b & a \end{array}\right] \Longrightarrow A^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{a}{a^2-2b^2} & -\frac{b}{a^2-2b^2} \\ -\frac{2b}{a^2-2b^2} & \frac{a}{a^2-2b^2} \end{array}\right].$

Observe que para todo $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q},\ \dfrac{a}{b} \neq \sqrt{2}$

4.3.16

4.3.17

4.3.18

4.3.19

4.3.20

4.3.21

4.3.22

4.3.23

4.3.24

4.3.25

4.3.26

4.3.27

4.3.28

4.3.29

4.3.30

4.3.31

4.3.32

4.3.33

4.3.34

4.3.35

4.3.36

4.3.37

4.3.38

4.3.39

4.3.40

4.3.41

4.3.42

4.3.43

Soluciones del Capítulo 5

5.2. Subespacios vectoriales

5.2.1

5.2.2

5.2.3

5.2.4

5.2.5

1) $\mathcal{W} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } d \geq 0 \right\}.$

$$\vec{v} + \alpha\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 + \alpha b_2 \\ b_1 + \alpha b_2 & d_1 + \alpha d_2 \end{bmatrix}.$$

Mmmmm, tiene la forma de los elementos de $\mathcal{W}$ pero podría pasar que $d_1 + \alpha d_2 < 0$, tomando d_1, d_2 y $\alpha < 0$ de manera adecuada. Por ejemplo, si $d_1 = 1,\ d_2 = 3$ y $\alpha = -1$ entonces $d_1 + \alpha d_2 < 0$. $\therefore\ \mathcal{W}$ no es subespacio vectorial de $\mathcal{V}$

2) $\mathcal{W}=\{a+(2a-3c)x+cx^2\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\}$ sí es subespacio de $\mathcal{V}$ pues $\mathcal{W}\neq\emptyset$ (¿por qué?) y además

$$\begin{aligned}\vec{v}+\alpha\vec{u} &= a_1+(2a_1-3c_1)x+c_1x^2 + \alpha a_2+\alpha(2a_2-3c_2)x+\alpha c_2x^2\\ &= a_1+\alpha a_2+[2(a_1+\alpha a_2)-3(c_1+\alpha c_2)]x+(c_1+\alpha c_2)x^2\in\mathcal{W}.\end{aligned}$$

3) $\mathcal{W}=\{(x,2x)\in\mathbb{R}^2\}$ sí es subespacio de $\mathcal{V}$ pues, $\mathcal{W}\neq\emptyset$ (¿por qué?) y además si $\vec{v,u}\in\mathcal{W}$, entonces digamos que $\vec{v}=a(1,2)$ y $\vec{u}=b(1,2)$. Así,

$$\vec{v}+\alpha\vec{u} = (a+\alpha b)(1,2)\in\mathcal{W}.$$

5.2.6

5.2.7

5.2.8

1) No es subespacio vectorial: Si $\boldsymbol{A}\in\mathcal{W}\implies \alpha A\notin\mathcal{W}$ pues en general $\alpha A\alpha A\neq\alpha A$.

2) Sí es subespacio vectorial. $\mathcal{W}\neq\emptyset$ (¿por qué?) y $(\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\alpha\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B}\ \forall\ \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathcal{W}$ y $\alpha\in\mathbb{R}$

3) $\mathcal{W}=\emptyset$ entonces no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$

5.2.9

5.2.10

5.2.11

5.2.12

5.2.13

5.2.14

5.2.15

5.2.16

5.2.17

5.4. Independencia lineal

5.4.1

a.) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \\ 2x+z & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow x=0,\, y=0,\, z=0. \;\therefore\; B$ es ***l.i***

b.) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow x=0,\, y=0,\, z=0. \;\therefore\; B$ es ***l.i***

c.) B es ***l.d*** pues, resolviendo el sistema, obtenemos $(1,4,7)=3(1,2,3)-2(1,1,1)$

5.4.2

5.4.3

5.4.4 **Solución:** Si escribimos $a_1x+a_2x^2+a_3(x^3+x+1)=0$ esto quiere decir que $a_1x+a_2x^2+a_3(x^3+x+1)$ es una función constante (en este caso es el polinomio nulo, que es el neutro aditivo en $P_5[\mathbb{R}]$) asi que la ecuación $a_1x+a_2x^2+a_3(x^3+x+1)=0$ es válida para todo x. Luego

- poniendo $x=0$ obtenemos $a_3=0$

- poniendo, digamos, $x=1$ y $x=2$ obtenemos el sistema homogéneo $\left\{\begin{array}{rcl} a_1+a_2 & = & 0 \\ 2a_1+4a_2 & = & 0 \end{array}\right.$ que tiene solución única $a_1=0,\, a_2=0$ dado que el determinante de la matriz asociada es $\neq 0$

5.4.5

5.4.6

5.4.7 **Solución:** $a_1\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right]+a_2\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]=0_{2\times 2} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a_1+0a_2 & = & 0 \\ 0a_1+0a_2 & = & 0 \\ a_1+0a_2 & = & 0 \\ a_1+2a_2 & = & 0 \end{array}\right.$ de donde obtenemos $a_1=a_2=0$

5.4.8

5.4.9 **Solución:** Podemos obtener un conjunto generador para $\mathcal{W}$ observando que

$$(t,s-t,s)=t(1,-1,0)+s(0,1,1)$$

.
Esto nos dice que $\mathcal{W}=\text{Gen}\left\{(1,-1,0),(0,1,1)\right\}$.

5.4.10 **Solución:** Podemos obtener un conjunto generador para $\mathcal{W}$ observando que los vectores de $\mathcal{W}$ son de la forma $(2y-z,y,z) = y(2,1,0)+z(-1,0,1)$. Esto nos dice que $\mathcal{W} = \text{Gen}\{(2,1,0),(-1,0,1)\}$.

5.4.11

5.4.12

5.4.13

5.4.14

5.4.15 **Solución:** Puesto que $B = \{(1,2,1),(1,-2,5),(-1,-2,1),(1,2,0)\}$ es un conjunto de 4 elementos de $\mathbb{R}^3$ entonces es ***l.d.*** y B solamente genera a W. Como $\text{Det}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$, entonces $B = \{(1,2,1),(1,-2,5),(-1,-2,1)\}$ sí es una base de $\mathcal{W}$ y $\dim \mathcal{W} = 3$, es decir, $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$.

Otra manera de obtener la dimensión de $\mathcal{W}$ es calcular el rango de la matriz $\boldsymbol{A}$ que sigue (obteniendo la escalonada reducida).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto nos dice que $Rang(\boldsymbol{A}) = 3$, luego la dimensión de $\mathcal{W}$ es 3, es decir, $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$

5.4.16 **Solución:** Podemos obtener una base de $\mathcal{W}$ observando que los vectores de $\mathcal{W}$ son de la forma $(2y-z,y,z) = y(2,1,0)+z(-1,0,1)$. Esto nos dice que $\mathcal{W} = \text{Gen}\{2,1,0),(-1,0,1)\}$. Además este conjunto es ***l.i.*** por lo que es una base de $\mathcal{W}$

5.4.17 **Solución:** Por definición si $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3) \in \mathcal{W}^{\perp}$, entonces $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0\ \forall \vec{w} \in \mathcal{W}$. De aquí obtenemos que $\vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot(a_1(2,1,0)+a_2(-1,0,1)) = 0$. Para satisfacer esta relación basta con que $\vec{u}\cdot((2,1,0)+(-1,0,1)) = 0$. Así obtenenemos el sistema

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 &= 0 \\ -u_1 + u_3 &= 0 \end{cases}$$

Este sistema tien infinitas soluciones. Una manera de expresar estas soluciones es poniendo $u_1 = t$, $u_2 = -2t$, $u_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Luego $\vec{u} = t(1,-2,1)$. Esto muestra que $\mathcal{W}^{\perp} = \text{Gen}\{(1,-2,1)\}$ y como este es un conjunto ***l.i.*** entonces una base de $\mathcal{W}$ es $\{(1,-2,1)\}$ (pues la dimsensión de $\mathcal{W}$ no puede ser más grande que 1)

5.4.18

5.4.19

5.4.20

5.4.21

5.4.22 Veamos que si $\vec{v} \in \mathcal{W}$ entonces $\vec{v} = \begin{bmatrix} a & a \\ -2d & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Por tanto,

$$\mathcal{W} = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ahora, resolviendo el sistema $a_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ obtenemos solución única $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$. Por tanto el conjunto generador es una base de $\mathcal{W}$

5.4.23

5.4.24

5.4.25

5.4.26

5.4.27

5.4.28

5.4.29

5.4.30

5.4.31

5.4.32 No, $(0,0,0) \notin \mathcal{S}$

5.4.33 $\mathcal{S} = \{(2t, t, 0) \text{ tal que } t \in \mathbb{R}\}$. Una base es $B = \{(1,1,0)\}$

5.4.34

5.4.35

5.6. Coordenadas de un vector en una base

5.6.1

5.6.2

a.) $[(-4,5,1)]_B = \left(5, -\frac{15}{4}, \frac{3}{2}\right)$

b.) ...

c.) $[(a,a,a)]_B = \Big(-2a, a, a\Big)$

d.) $[(a,b,a)]_B = \left(\frac{1}{2}(b-5a), \frac{1}{4}(5a-b), a\right)$

5.6.3

a.) $[x^4+5x^2+2x+112]_B = (2,5,0,1)$

b.) $[-4x^4+x^2-414]_B = (0,1,0,-4)$

c.) $[-2x^4+8x^3+x^2-46]_B = (0,1,8,-2)$

5.6.4

a.) $\left[\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}\right]_B = (2,-3)$

b.) $\left[\begin{pmatrix} 2c-3a & a \\ -8c & 2c \end{pmatrix}\right]_B = (a,2c)$

Soluciones del Capítulo 6

6.2. Transformaciones lineales

6.2.1 **Solución:** Como B es base de $\mathcal{V}$ y $\vec{u} \in \mathcal{V}$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_1(\vec{u}) & = & \mathcal{T}_1(a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \ldots + a_n\vec{x}_n) \\ & = & a_1\mathcal{T}_1(\vec{x}_1) + a_2\mathcal{T}_1(\vec{x}_2) + \ldots + a_n\mathcal{T}_1(\vec{x}_n) \\ & = & a_1\mathcal{T}_2(\vec{x}_1) + a_2\mathcal{T}_2(\vec{x}_2) + \ldots + a_n\mathcal{T}_2(\vec{x}_n) \ \text{(por hipótesis)} \\ & = & \mathcal{T}_2(a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \ldots + a_n\vec{x}_n) \\ & = & \mathcal{T}_2(\vec{u}) \end{array}$$

6.2.2

6.2.3 $\mathcal{T}(x,y) = \mathcal{T}(x(1,0)+y(0,1)) = x\mathcal{T}(1,0) + y\mathcal{T}(0,1) = (x, 2x+3y, 4y)$

6.2.4 $\mathcal{T}(x,y) = (6x-y, 7x-y)$

6.2.5

6.2.6

6.2.7

6.2.8

6.2.9

6.2.10

6.2.11

6.2.12

6.2.13

6.2.14 **Solución:**

1) Sean $a+bx+cx^2, a_1+b_1x+c_1x^2 \in P_2(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{T}\left(\alpha\left(a+bx+cx^2\right)+a_1+b_1x+c_1x^2\right) \\
= & \mathcal{T}\left(\alpha a+\alpha bx+\alpha cx^2+a_1+b_1x+c_1x^2\right) \\
= & \mathcal{T}\left((\alpha a+a_1)+(\alpha b+b_1)x+(\alpha c+c_1)x^2\right) \\
= & \left(2(\alpha b+b_1)-(\alpha c+c_1), \alpha a+a_1, (\alpha c+c_1)-2(\alpha a+a_1)-2(\alpha b+b_1)\right) \\
= & \left(2\alpha b+2b_1-\alpha c-c_1, \alpha a+a_1, \alpha c+c_1-2\alpha a-2a_1-2\alpha b-2b_1\right) \\
= & \left(2\alpha b-\alpha c, \alpha a, \alpha c-2\alpha a-2\alpha b\right)+\left(2b_1-c_1, a_1, c_1-2a_1-2b_1\right) \\
= & \alpha\left(2b-c, a, c-2a-2b\right)+\left(2b_1-c_1, a_1, c_1-2a_1-2b_1\right) \\
= & \alpha\mathcal{T}\left(a+bx+cx^2\right)+\mathcal{T}\left(a_1+b_1x+c_1x^2\right)
\end{aligned}$$

2) Sea $a+bx+cx^2 \in \textbf{Nucl}(\mathcal{T})$

Como $a+bx+cx^2 \in \textbf{Nucl}(\mathcal{T}) \implies \mathcal{T}\left(a+bx+cx^2\right)=(0,0,0)$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{T}\left(a+bx+cx^2\right)=0 \\
\implies & (2b-c, a, c-2a-2b)=(0,0,0) \\
\implies & \begin{cases} 2b-c=0 \\ a=0 \\ c-2a-2b=0 \end{cases} \\
\implies & c=2b
\end{aligned}$$

De esta manera, $\textbf{Nucl}(\mathcal{T})=\left\{bx+2bx^2 / b \in \mathbb{R}\right\}$

Una base de $\textbf{Nucl}(\mathcal{T})$ es el conjunto $B=\left\{x+2x^2\right\}$; así, nulidad de $\mathcal{T}$ es 1.

Como la nulidad de $\mathcal{T}$ es 1, se tiene que el rango de $\mathcal{T}$ es igual a 2 (note que la dimensión del dominio es 3).

Dado que una base del núcleo de $\mathcal{T}$ es $B=\left\{x+2x^2\right\}$, a partir de esta se puede obtener una base para el dominio.

El conjunto $B_1=\left\{x+2x^2, 1, x\right\}$ es una base del domio (fueron agregados los vectores 1 y x). El conjunto $B_2=\{\mathcal{T}(1), \mathcal{T}(x)\}=\{(0,1,-2),(2,0,-2)\}$ es una base de la imagen de $\mathcal{T}$.

6.2.15 **Solución:**
Hay que recordar que $\mathcal{T}$ es inyectiva si, y solo si, su núcleo está conformado únicamente por el vector nulo.
Sea $a+bx+cx^2 \in \mathbf{Nucl}(\mathcal{T})$
Como $a+bx+cx^2 \in \mathbf{Nucl}(\mathcal{T}) \implies \mathcal{T}\left(a+bx+cx^2\right)=0$

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}\left(a+bx+cx^2\right)=0 \\ \implies & (3b+a)+(a+b-c)\,x+(c+2b)\,x^2=0 \end{aligned}$$

Si $x=0$ se tiene que $3b+a=0$
Al derivar en ambos miembros de la igualdad $(3b+a)+(a+b-c)\,x+(c+2b)\,x^2=0$, se obtiene $a+b-c+2\,(c+2b)\,x=0$
Evaluando nuevamente en $x=0$ se tiene $a+b-c=0$
Al derivar en ambos miembros de la igualdad $a+b-c+2\,(c+2b)\,x=0$, se obtiene $2\,(c+2b)=0$
Así, debe cumplirse que $\begin{cases} 3b+a=0 \\ a+b-c=0 \\ 2\,(c+2b)=0 \end{cases}$
Utilizando el método de Gauss–Jordan, se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} a=\frac{3c}{2} \\ \\ b=\frac{-c}{2} \end{cases}$$

De esta manera, $\mathbf{Nucl}(\mathcal{T})=\left\{\frac{3c}{2}-\frac{c}{2}x+cx^2/c\in\mathbb{R}\right\}$ y se concluye que $\mathcal{T}$ no es inyectiva.

6.2.16

6.4. Matriz de una transformación

6.4.1

a.) Matriz estándar de $\mathcal{T}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(1,0,0) &= (1,0,1) \\ \mathcal{T}(0,1,0) &= (0,1,1) \\ \mathcal{T}(0,0,1) &= (0,0,1) \end{aligned} \implies A_{\mathcal{T}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b.) $[\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(1,0,0) &= 1\cdot(1,1,0)-1\cdot(0,1,0)+1\cdot(0,0,1) \\ \mathcal{T}(0,1,0) &= 0\cdot(1,1,0)+1\cdot(0,1,0)+1\cdot(0,0,1) \\ \mathcal{T}(1,1,1) &= 1\cdot(1,1,0)+0\cdot(0,1,0)+3\cdot(0,0,1) \end{aligned} \implies [\mathcal{T}]_{B_1}^{B_2}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(1,1,3)=-2\cdot(1,0,0)-2\cdot(0,1,0)+3\cdot(1,1,1) \implies [(1,1,3)]_{B_1}=(-2,-2,3)$$

$$[\mathcal{T}(1,1,3)]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

6.4.2

6.4.3

a.) $[T]_B^B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b.) $[\mathcal{T}]_B^C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c.) $[(x,y,z)]_B = \left(\dfrac{y-x}{2}, \dfrac{3x-y}{2}, z\right)$

d.) $T(x,y,z) = [T(x,y,z)]_C = [\mathcal{T}]_B^C\,[(x,y,z)]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{y-x}{2} \\ \frac{3x-y}{2} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y+x}{2} \\ \frac{5y+3x}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

e.) Utilizamos el teorema 6.1 c.)

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T\left[\frac{y-x}{2}(1,3,0) + \frac{3x-y}{2}(1,1,0) + z\,(0,0,1)\right] \\ &= \frac{y-x}{2}T(1,3,0) + \frac{3x-y}{2}T(1,1,0) + z\,T(0,0,1) \\ &= \frac{y-x}{2}(2,6,0) + \frac{3x-y}{2}(1,1,0) + z\,(0,0,0) \\ &= \left(\frac{y+x}{2}, \frac{5y+3x}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

6.4.4

a.) $[T]_B^B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $[T]_B^C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b.) $(x,y,z) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,1,-1) \implies a_1 = x,\ a_2 = y+z$ y $a_3 = -z.$

$\therefore\ \ [(x,y,z)]_B = (x, y+z, -z)$

c.) $T(x,y,z) = [T(x,y,z)]_C = [T]_B^C[(x,y,z)]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y+z \\ -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-z \\ 3y+2z \\ -z \end{bmatrix}$

6.4.5

6.4.6

6.4.7 Como $T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2x^2 - x$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = x$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1$, entonces si C_1 es la base canónica de $\mathcal{M}_2$ y C_2 la base canónica de $\mathcal{P}_2$, tenemos en coordenadas,

1) $\boldsymbol{A}_T = \left[\left[T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]_{C_2} \left[T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]_{C_2} \left[T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]_{C_2} \left[T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right]_{C_2} \right]$

$\boldsymbol{A}_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2) $\left[\mathcal{T}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right)\right]_{C_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, es decir, $\mathcal{T}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) = 5 + x + 2x^2$

6.4.8

6.4.9

6.4.10

6.4.11

6.4.12

6.4.13

6.4.14

6.4.15

6.4.16

6.4.17

6.5. Vectores y valores propios

6.6.1

6.6.2

a.) Si λ es un valor propio de la matriz $\boldsymbol{A}$ se cumple que:

$$\begin{aligned}
&\left|\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right| = 0\\
\Longrightarrow\quad &\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & -2\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix} = 0\\
\Longrightarrow\quad &(2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}-\lambda & -2\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = 0\\
\Longrightarrow\quad &(2-\lambda)\cdot[-\lambda(3-\lambda)-1\cdot -2] = 0\\
\Longrightarrow\quad &(2-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+2\right) = 0\\
\Longrightarrow\quad &(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0
\end{aligned}$$

De esta manera, los únicos valores propios de $\boldsymbol{A}$ son $\lambda = 2$ y $\lambda = 1$.

b.) Sea $\vec{u} = \begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 2$.

Se busca $\vec{u}$ de manera que se satisfaga $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$

$$\begin{aligned}
&A\vec{u} = \lambda\vec{u}\\
\Longrightarrow\quad &\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}\\
\Longrightarrow\quad &\begin{bmatrix}-2c\\ a+2b+c\\ a+3c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b\\ 2c\end{bmatrix}\\
\Longrightarrow\quad &\left\{\begin{array}{rcl}-2c & = & 2a\\ a+2b+c & = & 2b\\ a+3c & = & 2c\end{array}\right.\\
\Longrightarrow\quad &\left\{\begin{array}{rcl}-2a-2c & = & 0\\ a+c & = & 0\\ a+c & = & 0\end{array}\right.\\
\Longrightarrow\quad &a = -c
\end{aligned}$$

Así, E_2 (el espacio propio de A asociado al valor propio $\lambda = 2$) está dado por $E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -c \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ tal que } b, c \in \mathbb{R} \right\}$

Por lo tanto, el conjunto $B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de E_2 (note que son dos vectores independientes que generan a dicho espacio).

6.6.3

1) $|A - \lambda I| = (4-\lambda)(2-\lambda)$. Los valores propios son $\lambda = 2$ y $\lambda = 4$

2) Bases para E_2 y E_4 :

$$E_2: \text{ Resolvemos } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies E_2 = \{(0,t) \text{ tal que } t \in \mathbb{R}\} \text{ y una base es } B = \{(0,1)\}$$

$$E_4: \text{ Resolvemos } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies E_4 = \{(t,-2t) \text{ tal que } t \in \mathbb{R}\} \text{ y una base es } B = \{(1,-2)\}$$

6.6.4

6.6.5

6.6.6

6.6.7

6.6.8

a.) De acuerdo a las propiedades de las transpuestas, $(AA^T)^T = AA^T$. Por otra parte, las matrices AA^T y A^TA tienen los mismos valores propios *no nulos* pues si existen $\lambda \neq 0$ y $\vec{v} \neq 0$ tales que $AA^T\vec{v} = \lambda\vec{v}$ entonces

$A^TAA^T\vec{v} = \lambda A^T\vec{v} \implies A^TA(A^T\vec{v}) = \lambda(A^T\vec{v})$, es decir, $\vec{w} = A^T\vec{v}$ es vector propio de A^TA, o lo que es lo mismo, λ es también valor propio, no nulo, de A^TA. Observe que $\vec{w} \neq 0$ pues $A(A^T\vec{v}) = \lambda\vec{v} \neq 0$.

b.) $(*)$

6.6. Diagonalización

6.6.9

a.) Sí. $C = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

b.) El polinomio característico es $p(x) = -(x-1)^2(x-2)$. Ahora calculamos las bases de los espacios propios de $\lambda_1 = 1$ (son dos vectores) y $\lambda_1 = 2$ (solo un vector), los vectores de cada base se colocan como columnas de $\boldsymbol{C}$ y obtenemos $\boldsymbol{D}$ en ese mismo orden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

c.) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d.) No es diagonalizable. Las dimensiones de los espacios propios suman solo 2

6.6. La representación matricial "más simple" de una transformación

6.6.10

a.) $[\mathcal{T}_1]_B^B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

b.) $[\mathcal{T}_2]_B^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

c.) $[\mathcal{T}_3]_B^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

6.6.11

a.) Empecemos por una matriz triangular cuyo único valor propio sea $\lambda = 5$. Por ejemplo matriz

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ahora una matriz *no-triangular*, con los mismos valores propios que $\boldsymbol{B}$ es $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$, si las columnas de $\boldsymbol{P}$ son un conjunto l.i. Por ejemplo, si $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{23}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{11}{2} \\ 6 & \frac{5}{3} & \frac{14}{3} \\ -\frac{7}{2} & \frac{11}{6} & \frac{11}{6} \end{bmatrix}$ tiene como único valor propio $\lambda = 5$. Observe que no sirve iniciar con la matriz $5\boldsymbol{I}_3$ (¿porqué?)

b.) Empezamos con una matriz diagonal con los valores propios deseados, por ejemplo

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz buscada (no-triangular) podría ser $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$, como en el ítem anterior c.) Use las ideas anteriores para obtener una matriz $\boldsymbol{A}$.

6.6.12 Iniciando con $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, entonces,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -8 & -5 \\ -8 & 4 & -8 \\ -5 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$