TEC | Tecnológico de Costa Rica

Apoyo didáctico para prueba FARO del tema de función lineal y cuadrática

Elaborado por:

Jennany Ortiz Mata, carné: 2018133118

Robin Sequeira Solano, carné: 2018123596

Noviembre 2021

Índice

Cómo citar

Sequeira, R., y Ortiz, J. (2021). Apoyo didáctico para prueba FARO del tema de función lineal y cuadrática.

Agradecimientos

En primer lugar, agradecemos a la profesora M.Sc.Grettel Gutierrez Ruiz. Su conocimiento y apoyo nos ha acompañado en cada etapa de este proyecto para lograr los resultados deseados.

Además, un especial agradecimiento a la profesora Dra.Zuleyka Suarez Valdes-Ayala quien con mucha paciencia y de buena manera nos ha guiado para crecer día tras día como profesionales y personas.

También queremos agradecer a los directores y profesores de matemática del Liceo de Frailes con orientación tecnológica y al Liceo de San Diego por proporcionar todos los recursos y herramientas necesarios para llevar a cabo el proceso de la práctica docente.

Asimismo, extendemos nuestros agradecimientos a la Lic.María del Milagro Monge Fallas, profesora de secundaria del MEP, y al profesor de la escuela de matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica MS.c.Marcial Cordero Quirós por sus sugerencias brindadas.

Finalmente, nos gustaría agradecer a todos nuestros amigos y familiares que nos apoyaron incluso cuando perdimos la paciencia. Sin su ayuda incondicional, no habríamos logrado tales resultados.

1. Introducción

Este folleto nace como parte del proyecto del curso práctica docente de la carrera de enseñanza de matemáticas con entornos tecnológicos del Instituto Tecnológico de Costa Rica, con el objetivo de ofrecer a los estudiantes y profesores un resumen de los tópicos de función lineal y cuadrática que se evalúan en las pruebas FARO.

Las pruebas FARO son relativamente nuevas, por este motivo se busca mejorar el rendimiento de los estudiantes brindando un folleto con material de apoyo.
El siguiente material contará con teoría sobre función lineal y función cuadrática, además de diversos ejercicios y sus respectivas soluciones.

2. Habilidades

Las habilidades a desarrollar son las que se establecen para pruebas FARO según el Ministerio de Educación Pública.

- Representar gráficamente una función lineal.
- Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica.
- Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.
- Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
- Relacionar la representación gráfica de la función cuadrática con la algebraica.

3. Función Lineal

El criterio de la función lineal presenta la siguiente forma $f(x) = mx + b$ o $y = mx + b$.

Donde:

- m representa la pendiente de la recta.
- b representa la intersección o punto de corte con el eje Y.
- Las funciones lineales son funciones polinómicas.
- Su dominio y codominio son los números reales. Es decir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- La representación gráfica de una función lineal es una recta.

Ejemplos

1. $f(x) = 2x + 5$
   - La pendiente es $m = 2$
   - La intersección con el eje Y es $(0, 5)$
2. $f(x) = x - 13$
   - La pendiente es $m = 1$
   - La intersección con el eje Y es $(0, -13)$
3. $f(x) = 4$
   - La pendiente es $m = 0$
   - La intersección con el eje Y es $(0, 4)$
4. $f(x) = -8x$
   - La pendiente es $m = -8$
   - La intersección con el eje Y es $(0, 0)$

3.1. Gráfica de una función lineal

La gráfica de una función lineal corresponde a una línea recta.
A partir de su criterio podemos graficarla de dos formas distintas:

1. Por medio de dos puntos que pertenezcan a la función, en particular las intersecciones con los ejes.

   - Cuando $x = 0$, tenemos $(0, y)$
   - Cuando $f(x) = 0$, tenemos $(x, 0)$

   Con solo estos dos puntos se puede trazar la gráfica de la función lineal.

2. Por otro lado también se puede recurrir a la representación tabular para graficar, ubicando los puntos obtenidos en el plano cartesiano y trazando la recta que pasa por esos puntos.

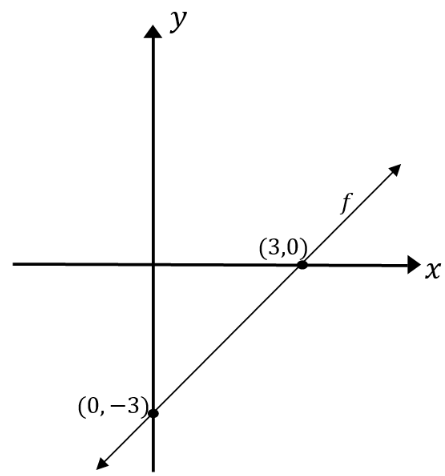
Ejemplo

Representar gráficamente la función lineal dada por $f(x) = x - 3$ a partir de las intersecciones con los ejes.

1. Determinar los dos puntos de intersección con los ejes.

   - Cuando $x = 0$
   $$\begin{aligned} f(0) &= 0 - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$
   El primer punto encontrado corresponde al par ordenado $(0, -3)$
   - Cuando $f(x) = 0$
   $$\begin{aligned} 0 &= x - 3 \\ \Longrightarrow \quad 3 &= x \end{aligned}$$
   El segundo punto encontrado corresponde al par ordenado $(3, 0)$

Así la gráfica queda:



2. Representar gráficamente la función lineal dada por $f(x) = x - 3$ a partir de la representación tabular y construir una tabla con los valores obtenidos anteriormente

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

Ahora realicemos el cálculo de los valores de $f(x)$ según su respectivo valor de x:

- Si $x = -1$

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1) - 3 \\ &= -4 \end{aligned}$$

- Si $x = 0$

$$\begin{aligned} f(0) &= (0) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

- Si $x = 1$

$$\begin{aligned} f(1) &= (1) - 3 \\ &= -2 \end{aligned}$$

- Si $x = 2$

$$\begin{aligned} f(2) &= (2) - 3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

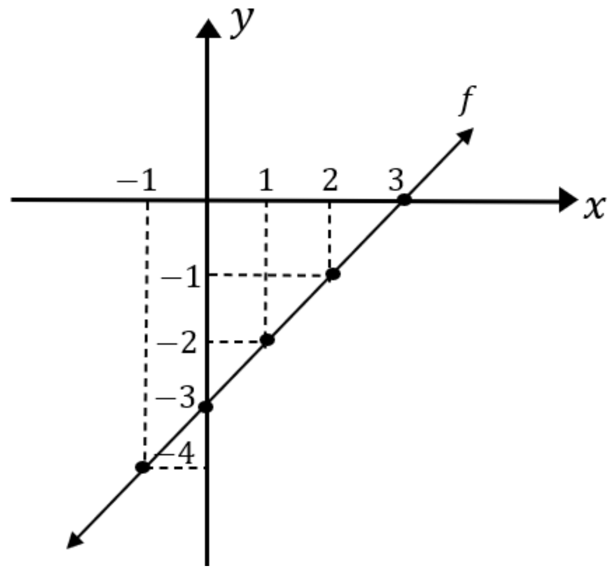
- Si $x = 3$

$$\begin{aligned} f(3) &= (3) - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Y a que calculamos los valores de $f(x)$, podemos completar la tabla, de la siguiente forma:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	-3	-2	-1	0

Ubicar los puntos obtenidos en el plano cartesiano y trazar la recta que pasa por esos puntos. Así la gráfica queda:



3.2. Pendiente de la función lineal

Sea l una recta no paralela al eje Y y $P_1(x_1, x_2), P(x_2, y_2)$ dos puntos diferentes de l. La pendiente m de la recta l se determina:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo 1

¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1, 5)$ y $(3, 9)$?

Podemos tomar la información de la siguiente manera:

- Del punto (1,5) tomamos $x_1 = 1$ y $y_1 = 5$
- Del punto (3,9) tomamos $x_2 = 3$ y $y_2 = 9$

Reemplazamos estos valores en la expresión:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \Longrightarrow \quad m &= \frac{9-5}{3-1} \\ \Longrightarrow \quad m &= \frac{4}{2} \\ \Longrightarrow \quad m &= 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ y $(-2, 0)$?

Podemos tomar la información de la siguiente manera:

- Del punto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ tomamos $x_1 = -1$ y $y_1 = \frac{1}{2}$
- Del punto $(-2, 0)$ tomamos $x_2 = -2$ y $y_2 = 0$

Reemplazamos estos valores en la expresión:

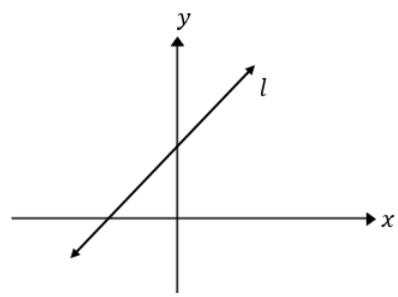
$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \implies m &= \frac{0 - \frac{1}{2}}{-2 - -1} \\ \implies m &= \frac{\frac{-1}{2}}{-1} \\ \implies m &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3.3. Crecimiento y decrecimiento de la función lineal

El valor de la pendiente nos indica si una función lineal es creciente, constante o decreciente.

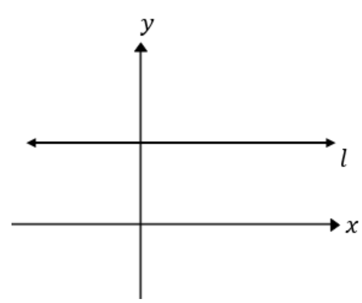
- Si $m > 0$, entonces la recta l es una función lineal creciente.

  Ejemplo:



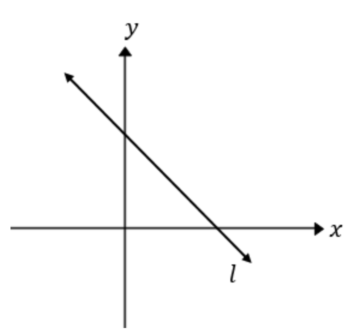
- Si $m = 0$, entonces la recta l es una función lineal constante.

  Ejemplo:



- Si $m < 0$, entonces la recta l es una función lineal decreciente.

  Ejemplo:



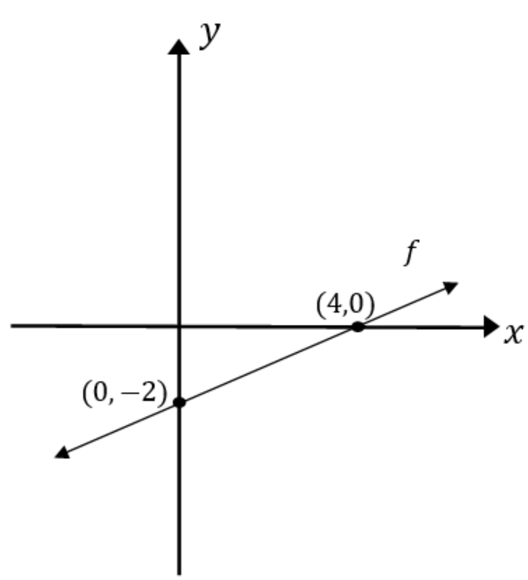
Ejemplo 1

Determine la monotonía y las intersecciones con los ejes de la función lineal con criterio $f(x) = \frac{x}{2} - 2$.

- La pendiente es $m = \frac{1}{2}$. Como es positiva, la función es creciente.
- La intersección con el eje Y es $(0, -2)$
- La intersección con el eje X es $(4, 0)$ pues:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{x}{2} - 2 \\ \Longrightarrow \quad 2 &= \frac{x}{2} \\ \Longrightarrow \quad 4 &= x \end{aligned}$$

Así, la gráfica queda:



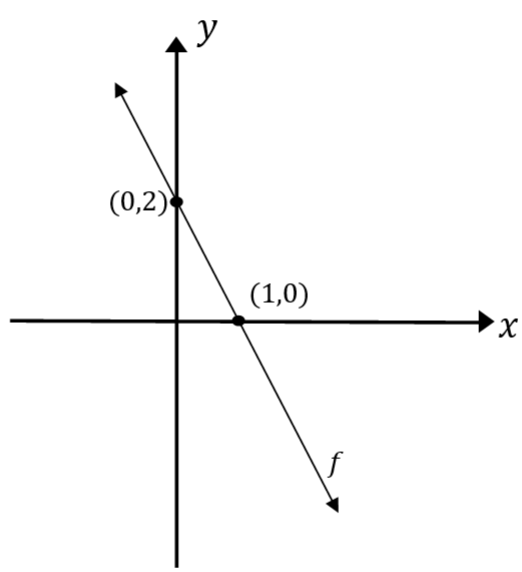
Ejemplo 2

Determine la monotonía y las intersecciones con los ejes de la función lineal con criterio $f(x) = -2x + 2$.

- La pendiente es $m = -2$. Como es negativa, la función es decreciente.
- La intersección con el eje Y es $(0, 2)$
- La intersección con el eje X es $(1, 0)$ pues:

$$\begin{aligned} 0 &= -2x + 2 \\ \implies -2 &= -2x \\ \implies 1 &= x \end{aligned}$$

Así, la gráfica queda:



3.4. Criterio de la función lineal

Para determinar el criterio de la función lineal, podemos hacerlo a partir de su gráfica o de algunos datos que pertenezcan a la función.

3.4.1. Caso I

Cálculo del criterio de la función lineal conociendo la pendiente y el punto de intersección con el eje de las ordenadas.

Cuando el valor de la pendiente y el valor del punto de intersección con el eje Y es conocido, solamente se debe sustituir dichos datos por m y b respectivamente en el criterio de las funciones lineales, $y = mx + b$.

Ejemplo:

Hallar el criterio de la función lineal cuya pendiente es -8 y cuyo punto de intersección con el eje de las ordenadas es 7.

Recuerde que el criterio de la función lineal es de la forma $y = mx + b$; como $m = -8$ y $b = 7$, entonces, sustituyendo en el criterio anterior se tiene: $y = -8x + 7$.

3.4.2. Caso II

Cálculo del criterio de la función lineal conociendo la pendiente y uno de sus puntos

Cuando se conoce la coordenada de un solo punto que pertenece a la recta y su pendiente, el procedimiento a seguir es el siguiente:

Sea la coordenada del punto $P(x_1, y_1)$ que pertenece a una recta l y m el valor de la pendiente. Usaremos el siguiente criterio:

$$f(x) = m(x - x_1) + y_1$$

Ejemplo

Encuentre el criterio de la función lineal de pendiente 5 que pasa por el punto (2,6).

Podemos tomar la información de la siguiente manera:

- Del punto (2,6) tomamos $x_1 = 2$ y $y_1 = 6$
- La pendiente $m = 5$

Reemplazamos estos valores en la expresión:

$$\begin{aligned} f(x) &= m(x - x_1) + y_1 \\ &= 5(x-2) + 6 \\ &= 5x - 10 + 6 \\ &= 5x - 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(x) = 5x - 4$

3.4.3. Caso III

Cálculo del criterio de la función lineal conociendo dos de sus puntos

Cuando se conocen dos puntos de una recta $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, se procede a calcular el criterio de la función lineal, calculando el valor de la pendiente m con la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Luego utilizando el criterio de la función lineal despejamos el valor de b de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ \implies b &= y - mx \end{aligned}$$

Y este valor de b lo calculamos sustituyendo los valores de x y y con alguno de los dos puntos ya conocidos.

Y por último, se sustituyen los valores de m y de b en el criterio de la función lineal.

Ejemplo 1

Encuentre el criterio de la función lineal que pasa por los puntos $P(2,4)$ y $Q(5,10)$.

Primero calculamos la pendiente:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{10-4}{5-2} \\ &= \frac{6}{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ahora que ya sabemos que $m = 2$ calculemos el valor de b, utilicemos el punto $P(2,4)$:

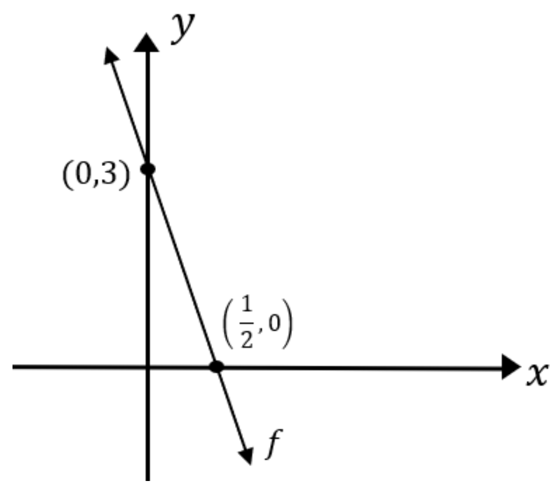
$$\begin{aligned} b &= y - mx \\ &= 4 - 2 \cdot 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ya sabemos los valores de m y b ahora los sustituimos en el criterio de la función lineal.

Por lo tanto $f(x) = 2x$

Ejemplo 2

Encuentre el criterio de la función lineal f, representada en la siguiente gráfica.



Note que los puntos $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $(0, 3)$ pertenecen a la gráfica de la función.

Primero calculamos la pendiente:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{0 - 3}{\frac{1}{2} - 0} \\ &= \frac{-3}{\frac{1}{2}} \\ &= -6 \end{aligned}$$

Ahora que ya sabemos que $m = -6$ calculemos el valor de b, utilicemos el punto $(0, 3)$:

$$\begin{aligned} b &= y - mx \\ &= 3 - -6 \cdot 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Ya sabemos los valores de m y b ahora los sustituimos en el criterio de la función lineal.

Por lo tanto $f(x) = -6x + 3$

4. Función cuadrática

El criterio de una función cuadrática presenta la siguiente forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad\qquad a \neq 0$$

$$o$$

$$y = ax^2 + bx + c \qquad\qquad a \neq 0$$

Donde:

- La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.
- Las funciones cuadráticas son funciones polinómicas de segundo grado.
- Su dominio y codominio son los números reales. Es decir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ejemplos de funciones cuadráticas:

1. $y = 3x^2 + 5x - 8$
    - $a =$ 3
    - $b =$ 5
    - $c =$ -8
2. $y = -2x^2 - 7x + 1$
    - $a =$ -2
    - $b =$ -7
    - $c =$ 1
3. $y = x^2 - 1$
    - $a =$ 1
    - $b =$ 0
    - $c =$ -1

4. $y = -2x^2$

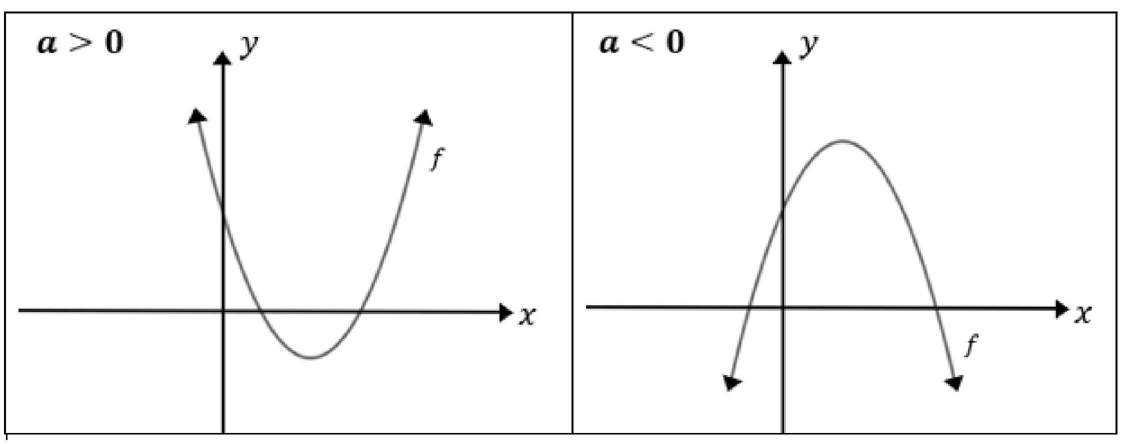
    - $a =$ -2
    - $b = 0$
    - $c = 0$

Es importante reconocer los coeficientes numéricos del criterio de una función cuadrática, ya que nos permitirá determinar ciertas características de las funciones cuadráticas.

4.1. Concavidad

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, y $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$

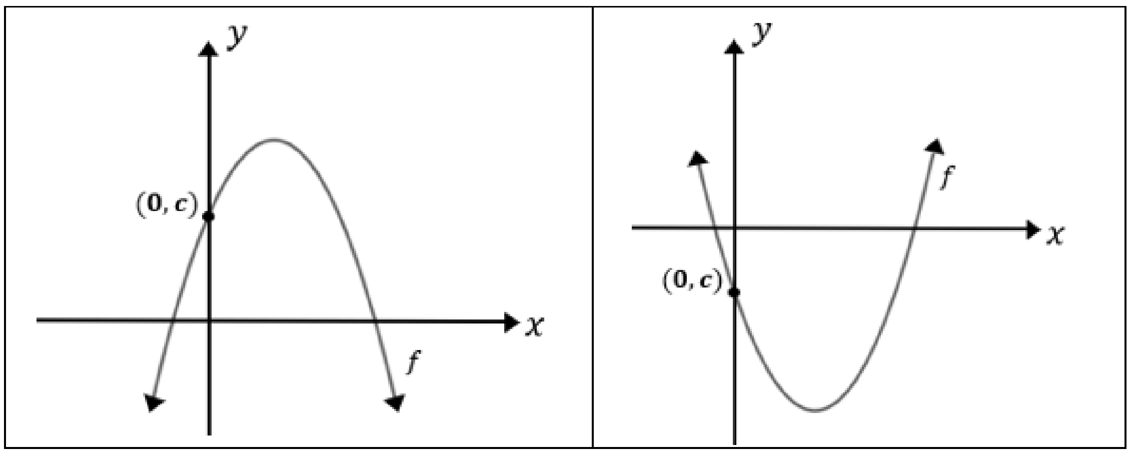
- Si $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba.
- Si $a < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo.



4.2. Punto de intersección con el eje de las ordenadas

En una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, la intersección con el eje Y tiene la forma $(0, c)$

También podemos encontrar esta intersección al sustituir las "x" por cero.



Ejemplo:

En la función $y = x^2 + 4x + 4$, note que es cóncava hacia arriba debido a que $a = 1$, por lo tanto $a > 0$, ahora, si $x = 0$ obtenemos:

$$y = 0^2 + 4 \cdot 0 + 4 \implies y = 4$$

$\therefore$ El punto de intersección con el eje de las ordenadas es (0,4)

4.3. Discriminante

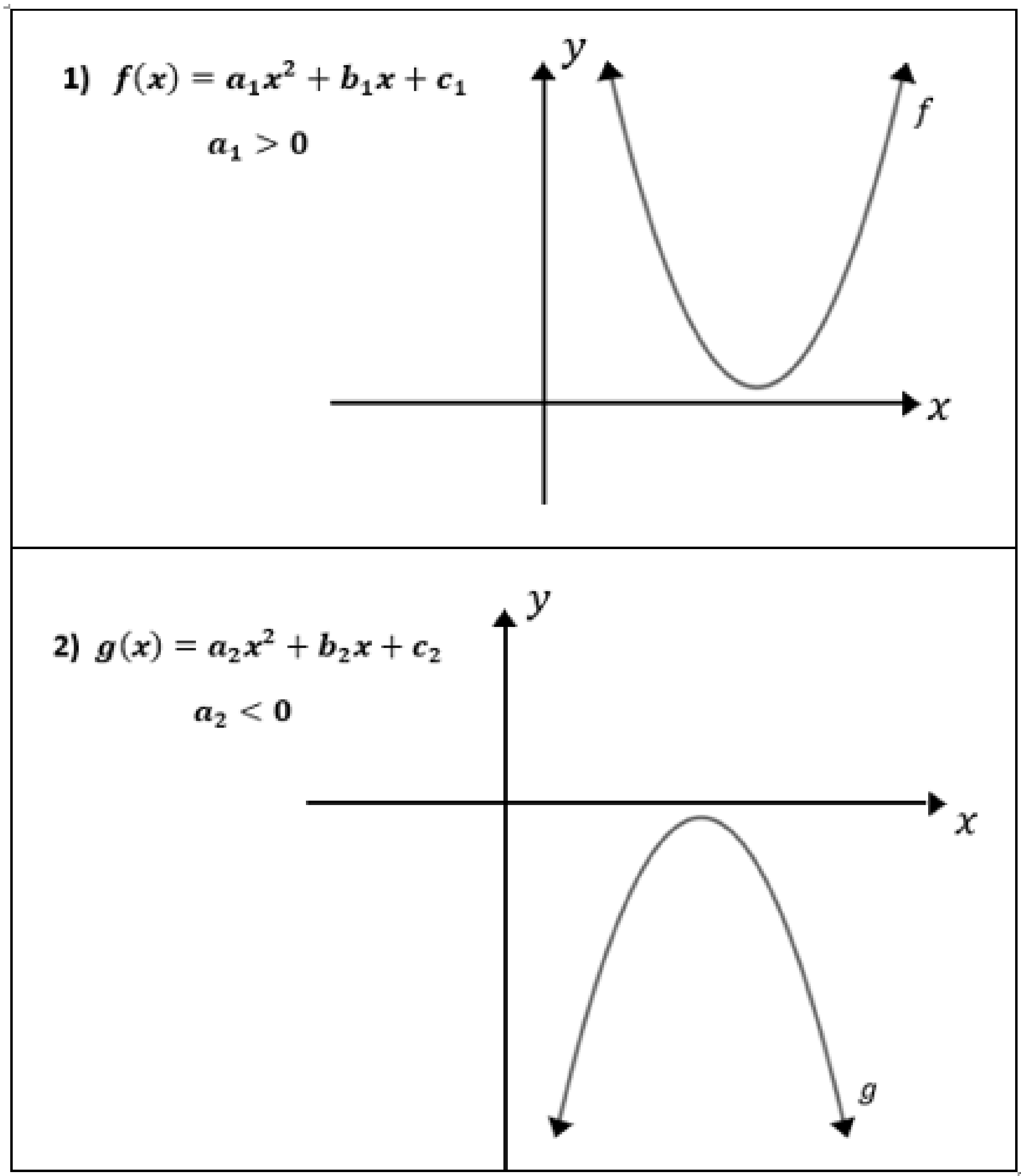
El cálculo del discriminante en una función cuadrática de la forma $y = ax^2+bx+c$ nos va a decir cuantas veces interseca la parábola al eje X, y viene dado por la formula:

$$\triangle = b^2 - 4ac$$

4.3.1. Caso I

Si $\triangle < 0$ la función cuadrática no interseca (corta) al eje X

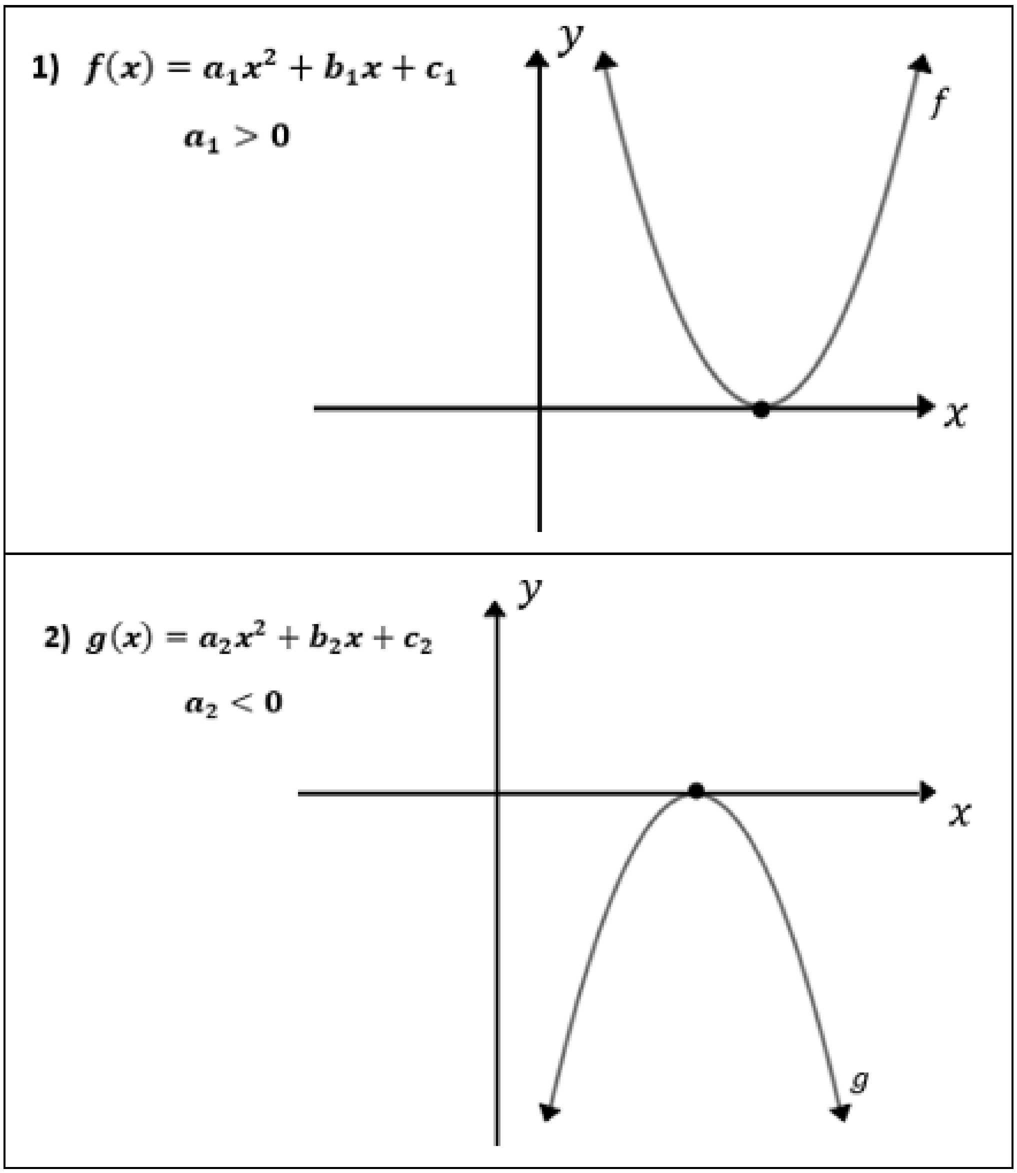
Ejemplo:



4.3.2. Caso II

Si $\triangle = 0$ la función cuadrática interseca (corta) al eje X en un solo punto.

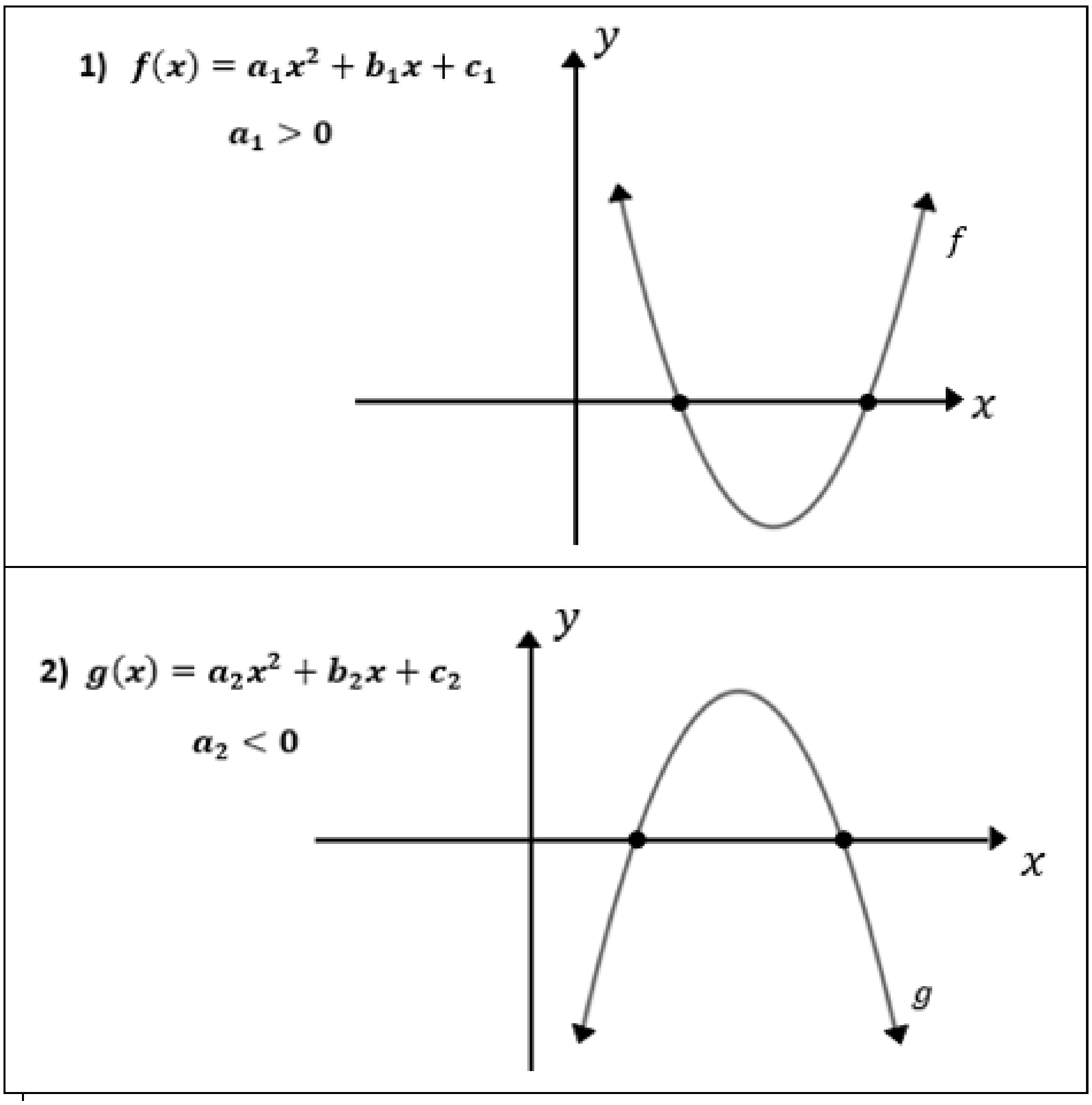
Ejemplo:



4.3.3. Caso III

Si $\triangle > 0$ la función cuadrática interseca (corta) al eje X en dos puntos diferentes.

Ejemplo:



4.4. Punto de intersección con el eje de las abscisas

La o las intersecciones con el eje X las encontramos cuando igualamos la función cuadrática a 0 y resolvemos la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con las siguientes formulas:

- Si $\triangle > 0$ la función interseca en dos puntos diferentes, los cuales son:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}$$

- Si $\triangle = 0$ la función interseca en dos puntos iguales, donde al utilizar las formulas anteriores tenemos lo siguiente:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}$$

  También podemos determinar esta intersección de la siguiente forma:

$$x = \left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$$

- Si $\triangle < 0$ la función no interseca el eje X

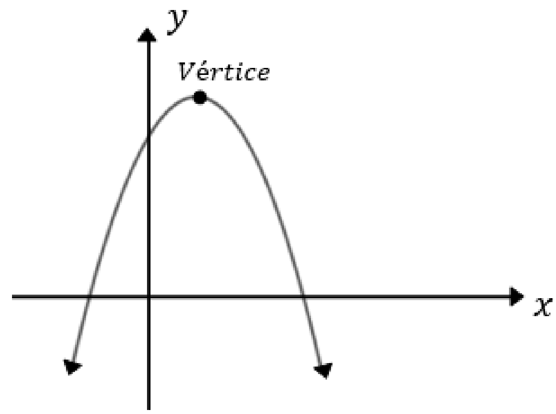
4.5. Vértice de una parábola de una función cuadrática

El vértice de una función cuadrática o parábola es el punto más máximo o mínimo Se llama vértice a la coordenada (x, y) donde la parábola alcanza un mínimo y un máximo.
A partir de la localización de este punto junto con la concavidad, se pueden determinar los intervalos de monotonía para la función cuadrática.

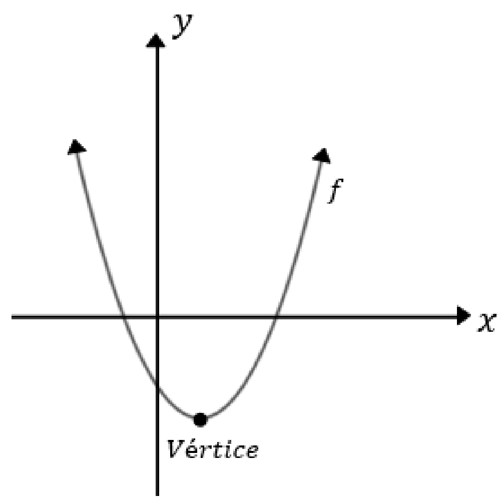
El vértice (V) lo determinamos de siguiente manera:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\triangle}{4a}\right)$$

- El vértice es un punto máximo si $a < 0$



- El vértice es un punto mínimo si $a > 0$



Ejemplo: Para la función $f(x) = x^2 - 4x + 8$, donde $a = 1$ $b = -4$ $c = 8$. El vértice se encuentra de la siguiente manera:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

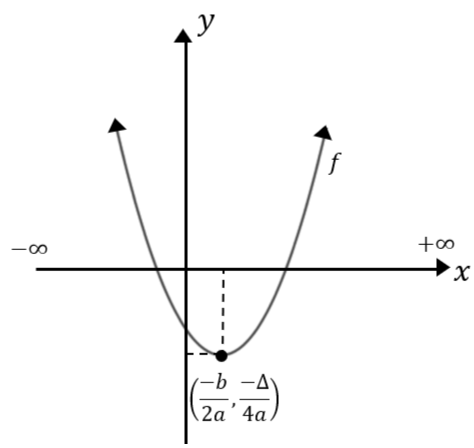
$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 8 - (-4)^2}{4 \cdot 1} = \frac{16}{4} = 4$$

$\therefore$ El vértice de la parábola es $V = (2, 4)$

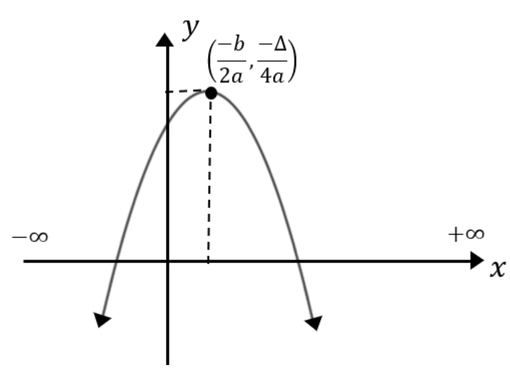
4.6. Intervalos de crecimiento o decrecimiento

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, y $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$

- Si $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba
    - f es estrictamente decreciente en $\left]-\infty, \dfrac{-b}{2a}\right[$
    - f es estrictamente creciente en $\left]\dfrac{-b}{2a}, +\infty\right[$



- Si $a < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo
    - f es estrictamente creciente en $\left]-\infty, \dfrac{-b}{2a}\right[$
    - f es estrictamente decreciente en $\left]\dfrac{-b}{2a}, +\infty\right[$

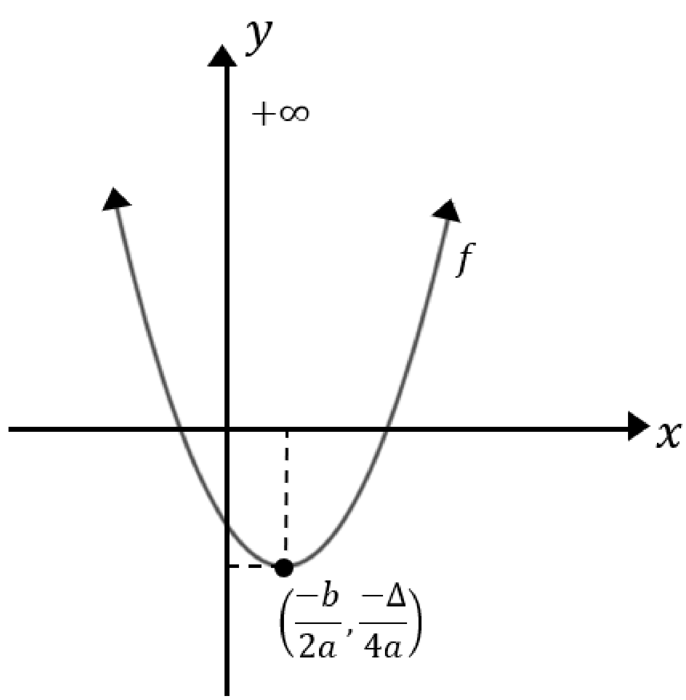


Nota: La notación de intervalos de monotonía no es la misma en todos los libros, algunos autores utilizan ambos paréntesis cerrados y otros autores los utilizan abiertos, para efectos de este documento se usarán abiertos, ya que se entenderá que en los extremos no se tiene certeza de si la función crece o decrece.

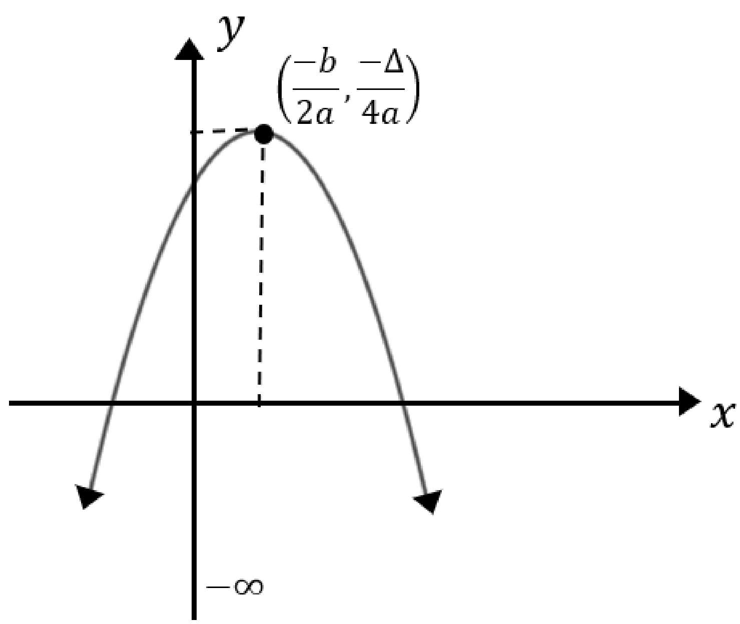
4.7. Ámbito de una función cuadrática

Como ya sabemos, el vértice es un punto máximo o mínimo.

- Si $a > 0$ entonces el ámbito de la función es $\left[\frac{-\triangle}{4a}, +\infty\right[$



- Si $a < 0$ entonces el ámbito de la función es $\left]-\infty, \frac{-\triangle}{4a}\right]$



4.8. Eje de simetría

La gráfica de f es simétrica respecto a la recta vertical dada por la fórmula: $x = \frac{-b}{2a}$ a dicha recta se le denomina eje de simetría de la parábola.

Ejemplo:

El eje de simetría de la función $y = -2x^2 + 4x - 1$ es la $x = 1$.

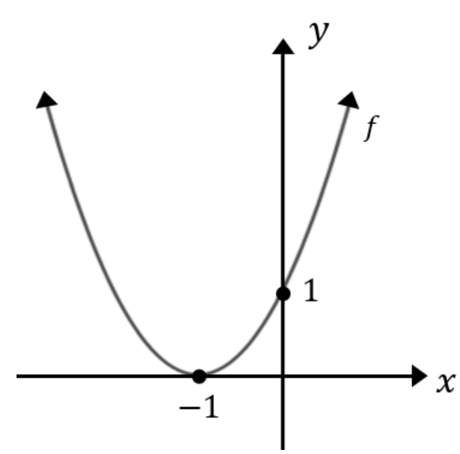
Veamos:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-2)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Ejemplo 1

Determine la concavidad, el discriminante, la intersección con los ejes , el vértice, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, el ámbito y el eje de simetría de la función cuadrática con criterio $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

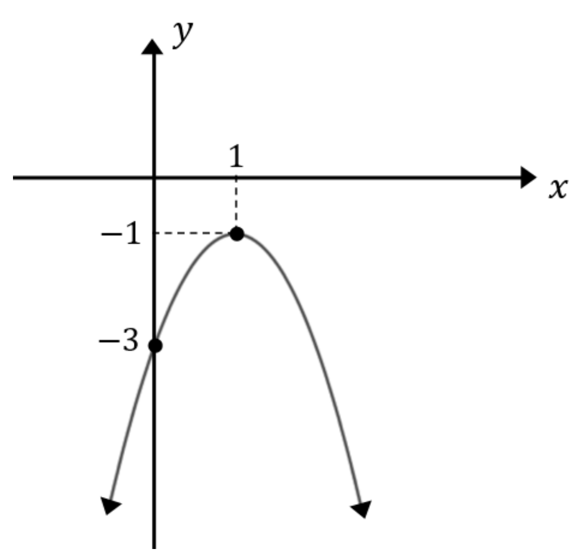
Coeficientes	$a = 1$ $b = 2$ $c = 1$
Concavidad	La parábola es cóncava hacia arriba $(a > 0)$
Intersección con el eje Y	La función interseca al eje Y en el punto $(0, c) = (0, 1)$.
Discriminante	$\triangle = b^2 - 4ac$ $\triangle = (2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (1)$ $\triangle = 0$ Interseca al eje X en dos puntos iguales
Intersección con el eje X	Se buscan las intersecciones con las formulas: $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} = \dfrac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}$ $x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-2 + \sqrt{0}}{2 \cdot 1}$ $x_1 = -1 = -1$ El par ordenado es: $(-1, 0)$
Vértice	$V = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\triangle}{4a} \right)$ $V = \left(\dfrac{-(2)}{2 \cdot 1}, \dfrac{0}{4 \cdot (1)} \right)$ $V = (-1, 0)$

Eje de simetría	Se calcula utilizando la fórmula: $x = \dfrac{-b}{2a}.$ $x = \dfrac{-2}{2 \cdot 1}$ $x = -1$
Intervalos donde crece o decrece	Como $a > 0$ f es estrictamente decreciente en $\left]-\infty, \dfrac{-b}{2a}\right[$ $=]-\infty, -1[$ f es estrictamente creciente en $\left]\dfrac{-b}{2a}, +\infty\right[$ $=]-1, +\infty[$
Ámbito	Como $a > 0$ El ámbito de f es $\left[\dfrac{-\triangle}{4a}, +\infty\right[$ $= \left[\dfrac{-0}{4 \cdot 1}, +\infty\right[$ $= [0, +\infty[$
Gráfica	

Ejemplo 2

Determine la concavidad, el discriminante, la intersección con los ejes , el vértice, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, el ámbito y el eje de simetría de la función cuadrática con criterio $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$.

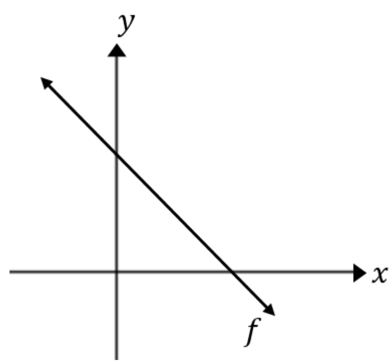
Coeficientes	$a = -2$ $b = 4$ $c = -3$
Concavidad	La parábola es cóncava hacia abajo ($a < 0$)
Intersección con el eje Y	La función interseca al eje Y en el punto $(0, c) = (0, -3)$.
Discriminante	$\triangle = b^2 - 4ac$ $\triangle = (4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3)$ $\triangle = -8$ NO interseca al eje X
Intersección con el eje X	NO interseca al eje X, porque $\triangle < 0$
Vértice	$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\triangle}{4a}\right)$ $V = \left(\frac{-(4)}{2 \cdot (-2)}, \frac{-(-8)}{4 \cdot (-2)}\right)$ $V = (1, -1)$
Eje de simetría	Se calcula utilizando la fórmula: $x = \frac{-b}{2a}$. $x = \frac{-4}{2 \cdot (-2)}$ $x = 1$

Intervalos donde crece o decrece	Como $a < 0$ f es estrictamente en creciente $\left]-\infty, \dfrac{-b}{2a}\right[$ $=]-\infty, 1[$ f es estrictamente decreciente en $\left]\dfrac{-b}{2a}, +\infty\right[$ $=]1, +\infty[$
Ámbito	Como $a < 0$ El ámbito de f es $\left]-\infty, \dfrac{-\triangle}{4a}\right]$ $= \left]-\infty, \dfrac{-(-8)}{4 \cdot -2}\right]$ $=]-\infty, -1]$
Gráfica	

5. Ejercicios

A continuación se presentan ejercicios sobre los temas de función lineal y cuadrática, vistos anteriormente.

1. Considere la siguiente gráfica de una función f:



De acuerdo con la información anterior, ¿Cuál de los siguientes criterios se ajusta mejor a la representación gráfica de f?

A) $f(x) = 3x + 2$

B) $f(x) = -3x + 2$

C) $f(x) = -3x - 2$

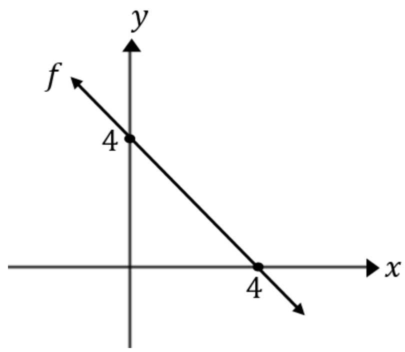
2. La pendiente de la función lineal que contiene los puntos $(-8, 5)$ y $(-2, 1)$ corresponde a:

A) $\frac{-2}{3}$

B) $\frac{-3}{2}$

C) $\frac{2}{3}$

3. De acuerdo con los datos de la gráfica, ¿cuál es el criterio de la función lineal f?



A) $y = -x - 4$

B) $y = x + 4$

C) $y = -x + 4$

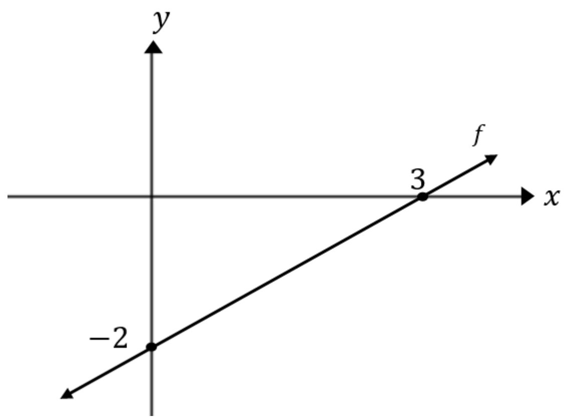
4. El punto donde la función definida por $y = \dfrac{3}{10}x - \dfrac{1}{2}$ se interseca con el eje X corresponde a:

A) $\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$

B) $\left(0, \dfrac{5}{3}\right)$

C) $\left(\dfrac{-1}{2}, 0\right)$

5. Considere la siguiente representación gráfica de la función f.



De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

I) La pendiente de f es 3

II) La gráfica de f interseca al eje Y en $(0, -2)$

De ellas, con certeza, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

A) Ambas

B) Solo la I

C) Solo la II

6. Si $(3, 2)$ es un punto que pertenece a la función $y = 4x + b$, entonces, el valor de **b** corresponde a:

A) -5

B) -10

C) -11

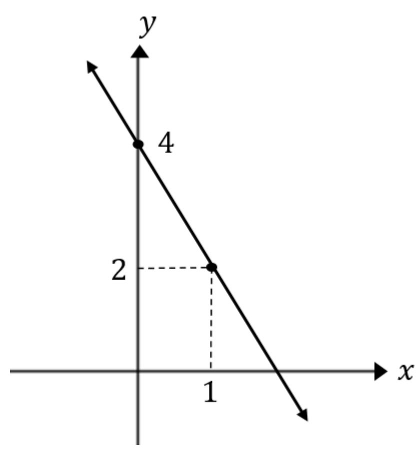
7. La intersección con el eje Y de la recta dada por $y = \dfrac{5x+2}{3}$ corresponde a:

   A) $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$

   B) $\left(0, \dfrac{-2}{5}\right)$

   C) $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$

8. Considere la siguiente representación gráfica de una función lineal f.



De acuerdo con los datos de la gráfica, la intersección de f con el eje de las ordenadas corresponde a:

   A) $(0, 4)$

   B) $(4, 0)$

   C) $(0, 2)$

9. El criterio de la función lineal con pendiente $m = 1$ y que pasa por el punto $(-1, 0)$ corresponde a:

   A) $f(x) = x - 1$

   B) $f(x) = x + 1$

   C) $f(x) = -x + 1$

10. El criterio de la función lineal con que pasa por los puntos $(0, 3)$ y $(-2, 0)$ corresponde a:

    A) $f(x) = \frac{3}{2}x - 3$

    B) $f(x) = \frac{-3}{2}x + 3$

    C) $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$

11. Considere las siguientes proposiciones referidas a las funciones f y g:

    I) $f(x) = x^2 + 5x - 3$

    II) $g(x) = -2x^2 - 7$

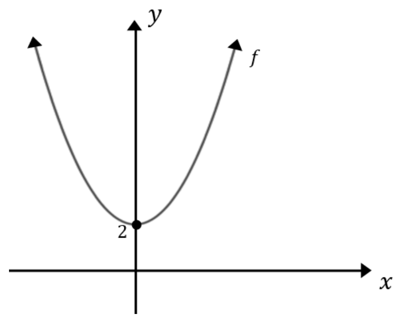
    De ellas, con certeza, ¿cuál o cuáles son crecientes en $[1, \infty[$?

    A) Ambas

    B) Solo la I

    C) Solo la II

12. Considere la siguiente información referida a la representación gráfica de una función f dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Siendo el punto $(0, 2)$ un mínimo



De acuerdo con la gráfica anterior, considere las siguientes proposiciones:

I) $a < 0$

II) f es creciente en $]0, +\infty[$

De ellas, con certeza, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

A) Ambas

B) Solo la I

C) Solo la II

13. Considere la siguiente información: Sea f una función dada por $f(x) = -x^2 + 6x$, con $\triangle > 0$. Considere las siguientes proposiciones:

    I) La gráfica f es cóncava hacia arriba.

    II) La gráfica f tiene dos intersecciones con el eje X

    De ellas, con certeza, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

    A) Ambas

    B) Solo la I

    C) Solo la II

14. Sea f una función cuadrática dada por $f(x) = 1 - x^2$. ¿Cual es el valor de $f(-3)$?

    A) 10

    B) -5

    C) -8

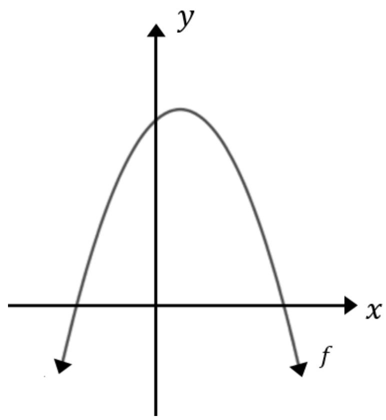
15. El eje de simetría de la gráfica de la función f dada por $f(x) = -x^2 - 6x$ corresponde a:

    A) $x = -3$

    B) $x = 3$

    C) $x = -9$

16. Considere la siguiente gráfica de la función f con criterio $f(x) = ax^2+bx+c$ con $a \neq 0$.



Considere las siguientes proposiciones sobre la función anterior:

I) $a < 0$

II) $c > 0$

De ellas, con certeza, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

A) Ambas

B) Solo la I

C) Solo la II

17. El ámbito de la función con criterio $f(x) = x^2 - 8x + 14$ corresponde a:

A) $[2, +\infty[$

B) $]-\infty, -2]$

C) $[-2, +\infty[$

18. La intersección de la función con criterio $f(x) = x^2 - 6x + 9$ respecto al eje X corresponde a:

    A) $(0, 3)$

    B) $(3, 0)$

    C) $(-3, 0)$

19. El vértice de la función con criterio $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$ corresponde a:

    A) $(2, 4)$

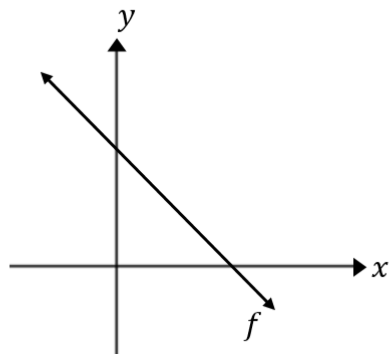
    B) $(2, -4)$

    C) $(-4, 2)$

6. Soluciones

A continuación se presentan las soluciones detalladas de los ejercicios anteriores.

1. Considere la siguiente gráfica de una función f:



De acuerdo con la información anterior, ¿Cuál de los siguientes criterios se ajusta mejor a la representación gráfica de f?

A) $f(x) = 3x + 2$

B) $f(x) = -3x + 2$

C) $f(x) = -3x - 2$

Solución y explicación:

Opción **B**

Recordemos que la función lineal tiene la forma $f(x) = mx+b$ donde m es la pendiente y b la intersección con el eje Y. Note que la gráfica es decreciente por lo que su pendiente m es negativa. Además, se observa que la gráfica interseca al eje Y en la parte positiva, lo que indica que $b > 0$. La opción que cumple ambas características es la opción B.

2. La pendiente de la función lineal que contiene los puntos $(-8, 5)$ y $(-2, 1)$ corresponde a:

   A) $\dfrac{-2}{3}$

   B) $\dfrac{-3}{2}$

   C) $\dfrac{2}{3}$

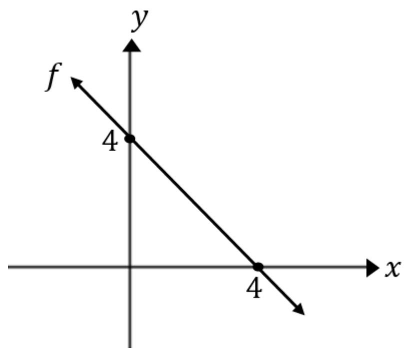
   Solución y explicación:

   Opción **A**

   Recordemos que el valor de la pendiente se calcula utilizando la siguiente fórmula
   $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, entonces en este caso se tiene:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \Longrightarrow \quad m &= \frac{1 - 5}{-2 - -8} \\ \Longrightarrow \quad m &= \frac{-4}{6} \\ \Longrightarrow \quad m &= \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

3. De acuerdo con los datos de la gráfica, ¿cuál es el criterio de la función lineal f?



A) $y = -x - 4$

B) $y = x + 4$

C) $y = -x + 4$

Solución y explicación:

Opción **C**

Recordemos que la función lineal tiene la forma $f(x) = mx + b$ donde m es la pendiente y b la intersección con el eje Y.

La pendiente la podemos calcular utilizando la fórmula, ya que podemos observar en la gráfica dos puntos, $(0, 4)$ y $(4, 0)$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{0-4}{4-0} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Además, se observa que la gráfica interseca al eje Y en 4, lo que indica que $b = 4$. La opción que cumple ambas características es la opción C.

4. El punto donde la función definida por $y = \frac{3}{10}x - \frac{1}{2}$ se interseca con el eje X corresponde a:

   A) $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$

   B) $\left(0, \frac{5}{3}\right)$

   C) $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$

   Solución y explicación:

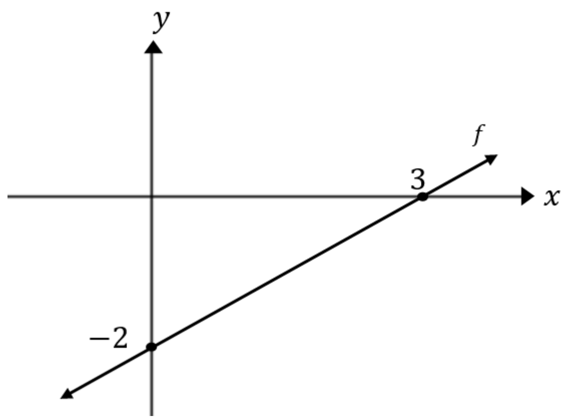
   Opción **A**

   Recordemos que la intersección con el eje X es un punto de la forma $(x, 0)$, entonces lo que debemos hacer es sustituir en la función $y = 0$ y despejar x:

$$
\begin{aligned}
& y &=& \frac{3}{10}x - \frac{1}{2} \\
\Longrightarrow \quad & 0 &=& \frac{3}{10}x - \frac{1}{2} \\
\Longrightarrow \quad & \frac{1}{2} &=& \frac{3}{10}x \\
\Longrightarrow \quad & \frac{1}{2} \div \frac{3}{10} &=& x \\
\Longrightarrow \quad & \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} &=& x \\
\Longrightarrow \quad & \frac{10}{6} &=& x \\
\Longrightarrow \quad & \frac{5}{3} &=& x
\end{aligned}
$$

   Por lo tanto, el punto de la forma $(x, 0)$ es $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$

5. Considere la siguiente representación gráfica de la función f.



De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

I) La pendiente de f es 3

II) La gráfica de f interseca al eje Y en $(0, -2)$

De ellas, con certeza, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

A) Ambas

B) Solo la I

C) Solo la II

Solución y explicación:

Opción **C**

I) La pendiente de f es 3

Note que se tienen los puntos $(3,0)$ y $(0,-2)$. La pendiente la calculamos con la fórmula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \Longrightarrow \quad & m = \frac{-2-0}{0-3} \\ \Longrightarrow \quad & m = \frac{-2}{-3} \\ \Longrightarrow \quad & m = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la proposición I es **FALSA**

II) La gráfica de f interseca al eje Y en $(0,-2)$

Recordemos que la intersección con el eje Y, es un punto de la forma $(0,Y)$, al observar la gráfica podemos ver que interseca al eje Y en $(0,-2)$

Por lo tanto, la proposición II es **VERDADERA**

Entonces se concluye que solo la proposición II es verdadera.

6. Si $(3, 2)$ es un punto que pertenece a la función $y = 4x + b$, entonces, el valor de **b** corresponde a:

   A) -5

   B) -10

   C) -11

   Solución y explicación:

   Opción **B**

   La función lineal presenta la forma $y = mx + b$, basta con sustituir los valores del punto $(3, 2)$ en la ecuación de la recta $y = 4x + b$ y despejar b:

$$\begin{aligned} & y &= \; & 4x + b \\ \Longrightarrow \quad & 2 &= \; & 4 \cdot 3 + b \\ \Longrightarrow \quad & 2 &= \; & 12 + b \\ \Longrightarrow \quad & 2 - 12 &= \; & b \\ \Longrightarrow \quad & -10 &= \; & b \end{aligned}$$

7. La intersección con el eje Y de la recta dada por $y = \dfrac{5x+2}{3}$ corresponde a:

   A) $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$

   B) $\left(0, \dfrac{-2}{5}\right)$

   C) $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$

   Solución y explicación:

   Opción **C**

   Solución 1:

   Recordemos que la intersección con el eje Y es un punto de la forma $(0, y)$, entonces lo que debemos hacer es sustituir en la función $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{5 \cdot 0 + 2}{3} \\ \Longrightarrow \quad y &= \frac{0+2}{3} \\ \Longrightarrow \quad y &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

   Por lo tanto, el punto de la forma $(0, y)$ es $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$

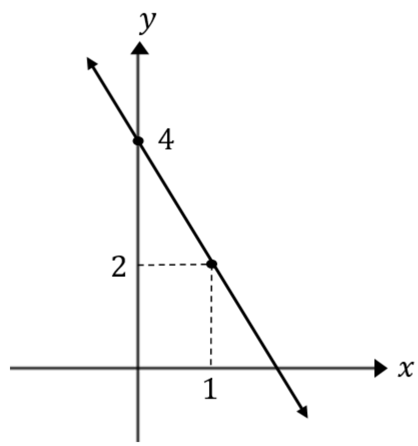
   Solución 2:

   Otra manera de hacerlo es separar el criterio dado de la siguiente forma:

   $y = \dfrac{5x+2}{3} = \dfrac{5x}{3} + \dfrac{2}{3}$

   Así, se observa que el valor de b en el criterio es $\dfrac{2}{3}$. Por lo tanto, la intersección con el eje Y es $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$

8. Considere la siguiente representación gráfica de una función lineal f.



De acuerdo con los datos de la gráfica, la intersección de f con el eje de las ordenadas corresponde a:

A) $(0, 4)$

B) $(4, 0)$

C) $(0, 2)$

Solución y explicación:

Opción **A**

Recordemos que la intersección con el eje Y o eje de las ordenadas, es un punto de la forma $(0, y)$, al observar la gráfica podemos ver que interseca al eje Y en $(0, 4)$

9. El criterio de la función lineal con pendiente $m = 1$ y que pasa por el punto $(-1, 0)$ corresponde a:

   A) $f(x) = x - 1$

   B) $f(x) = x + 1$

   C) $f(x) = -x + 1$

   Solución y explicación:

   Opción **B**

   Tomamos la información de la siguiente manera:

   - Del punto $(-1, 0)$ tomamos $x_1 = -1$ y $y_1 = 0$
   - La pendiente $m = 1$

   Reemplazamos estos valores en la expresión:

$$\begin{aligned} f(x) &= m(x - x_1) + y_1 \\ &= 1(x - (-1)) + 0 \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

   Por lo tanto $f(x) = x + 1$

10. El criterio de la función lineal con que pasa por los puntos $(0,3)$ y $(-2,0)$ corresponde a:

    A) $f(x) = \frac{3}{2}x - 3$

    B) $f(x) = \frac{-3}{2}x + 3$

    C) $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$

    Solución y explicación:

    Opción **C**

    Primero calculamos la pendiente:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{0-3}{-2-0} \\ &= \frac{-3}{-2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ahora que ya sabemos que $m = \frac{3}{2}$ calculemos el valor de b, utilicemos el punto $P(0,3)$:

$$\begin{aligned} b &= y - mx \\ &= 3 - \frac{3}{2} \cdot 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Ya sabemos los valores de m y b ahora los sustituimos en el criterio de la función lineal.

Por lo tanto $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$

11. Considere las siguientes proposiciones referidas a las funciones f y g:

    I) $f(x) = x^2 + 5x - 3$

    II) $g(x) = -2x^2 - 7$

    De ellas, con certeza, ¿cuál o cuáles son crecientes en $[1, \infty[$?

    A) Ambas

    B) Solo la I

    C) Solo la II

    Solución y explicación:

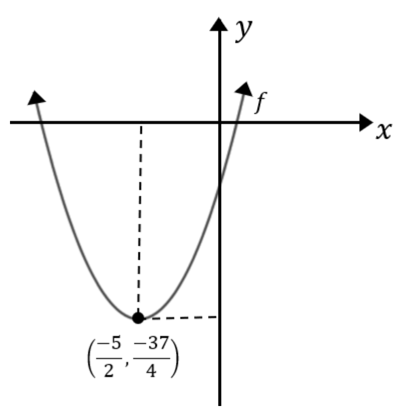
    Opción **B**

    En la proposición I, la función es cóncava hacia arriba.

    Su discriminante es $\triangle = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 37$

    Su vértice es $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\triangle}{4a}\right) = \left(\frac{-5}{2 \cdot 1}, \frac{-37}{4 \cdot 1}\right) = \left(\frac{-5}{2}, \frac{-37}{4}\right)$

    Crece: $\left]\frac{-5}{2}, +\infty\right[$

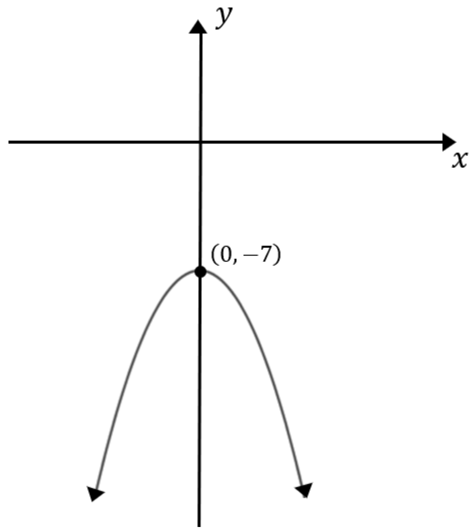


En la proposición II, la función es cóncava hacia abajo.

Su discriminante es $\triangle = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot -2 \cdot -7 = -56$

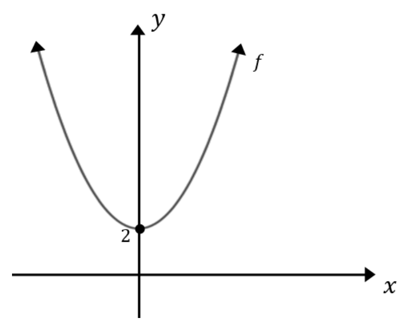
Su vértice es $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\triangle}{4a}\right) = \left(\frac{0}{2 \cdot -2}, \frac{56}{4 \cdot -2}\right) = (0, -7)$

Crece: $]-\infty, 0[$



$\therefore$ Solo la I cumple que en $[1, +\infty[$ sea creciente, porque dentro del intervalo $\left]\frac{-5}{2}, +\infty\right[$ se encuentra el intervalo $[1, +\infty[$.

12. Considere la siguiente información referida a la representación gráfica de una función f dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Siendo el punto $(0, 2)$ un mínimo



De acuerdo con la gráfica anterior, considere las siguientes proposiciones:

I) $a < 0$

II) f es creciente en $]0, +\infty[$

De ellas, con certeza, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

A) Ambas

B) Solo la I

C) Solo la II

Solución y explicación:

Opción **B**

I) $a < 0$ Podemos ver que la función es cóncava hacia arriba por lo que se concluye que el valor del coeficiente a es positivo.
Entonces la proposición I es falsa.

II) f es creciente en $]0, +\infty[$ Recordemos que el crecimiento y decrecimiento lo encontramos respecto al eje X y si observamos la gráfica claramente la función f es creciente en el intervalo de $]0, +\infty[$

13. Considere la siguiente información: Sea f una función dada por $f(x) = -x^2 + 6x$, con $\triangle > 0$. Considere las siguientes proposiciones:

    I) La gráfica f es cóncava hacia arriba.

    II) La gráfica f tiene dos intersecciones con el eje X

    De ellas, con certeza, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

    A) Ambas

    B) Solo la I

    C) Solo la II

    Solución y explicación:

    Opción **C**

    I) La gráfica f es cóncava hacia arriba.

    El valor del coeficiente a es negativo, por lo que se concluye que es cóncava hacia abajo. Entonces, la proposición I es falsa.

    II) La gráfica f tiene dos intersecciones con el eje X

    El enunciado nos dice que el discriminante es positivo, por lo que se concluye que tiene dos intersecciones con el eje X. Es decir, la proposición II es verdadera.

14. Sea f una función cuadrática dada por $f(x) = 1 - x^2$. ¿Cual es el valor de $f(-3)$?

    A) 10

    B) -5

    C) -8

    Solución y explicación:

    Opción **C**

    Recordemos que para encontrar el valor de $f(-3)$ debemos sustituir $x = -3$ en la función dada, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
& f(x) &=& \ 1 - x^2 \\
\Longrightarrow & f(-3) &=& \ 1 - (-3)^2 \\
\Longrightarrow & f(-3) &=& \ 1 - 9 \\
\Longrightarrow & f(-3) &=& \ -8
\end{aligned}$$

15. El eje de simetría de la gráfica de la función f dada por $f(x) = -x^2 - 6x$ corresponde a:

    A) $x = -3$

    B) $x = 3$

    C) $x = -9$

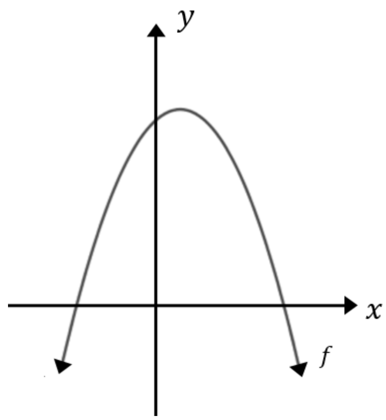
    Solución y explicación:

    Opción **A**

    Recordemos que el valor del eje de simetría se calcula utilizando la siguiente fórmula
    $x = \dfrac{-b}{2a}$, entonces en este caso se tiene:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b}{2a} \\ \Longrightarrow \quad x &= \frac{-(-6)}{2 \cdot -1} \\ \Longrightarrow \quad x &= \frac{6}{-2} \\ \Longrightarrow \quad x &= -3 \end{aligned}$$

16. Considere la siguiente gráfica de la función f con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$.



Considere las siguientes proposiciones sobre la función anterior:

I) $a < 0$

II) $c > 0$

De ellas, con certeza, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

A) Ambas

B) Solo la I

C) Solo la II

Solución y explicación:

Opción **A**

I) $a < 0$

Podemos ver que la función es cóncava hacia abajo, por lo que se concluye que el valor del coeficiente a es negativo.

Entonces, la proposición I es verdadera.

II) $c > 0$

Recordemos que en la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ el valor del coeficiente c es la intersección con el eje Y y en este caso la función interseca al eje Y en la parte positiva por lo que el valor de $c > 0$

Entonces, la proposición II es verdadera.

17. El ámbito de la función con criterio $f(x) = x^2 - 8x + 14$ corresponde a:

    A) $[2, +\infty[$

    B) $]-\infty, -2]$

    C) $[-2, +\infty[$

    Solución y explicación:

    Opción **C**

    Recordemos que el ámbito se calcula de la siguiente manera:

    Sabemos que:

$$a = 1$$

$$b = -8$$

$$c = 14$$

Primero calculamos el discriminante:

$$\triangle = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 = 8$$

Como $a > 0$

El ámbito de f es

$$\left[\frac{-\triangle}{4a}, +\infty\right[$$

$$= \left[\frac{-8}{4 \cdot 1}, +\infty\right[$$

$$= [-2, +\infty[$$

18. La intersección de la función con criterio $f(x) = x^2 - 6x + 9$ respecto al eje X corresponde a:

A) $(0, 3)$

B) $(3, 0)$

C) $(-3, 0)$

Solución y explicación:

Opción **B**

Recordemos que las intersecciones con el eje X son de la forma $(x, 0)$, entonces en este caso se buscan las intersecciones con las formulas:

Sabemos que:

$$a = 1$$

$$b = -6$$

$$c = 9$$

Primero calculamos el discriminante:

$$\triangle = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$$

Como $\triangle = 0$ tiene dos intersecciones iguales.

Y por último calculamos la intersección:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{-(-6) + \sqrt{0}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = 3$$

El par ordenado es: $(3, 0)$

19. El vértice de la función con criterio $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$ corresponde a:

    A) $(2, 4)$

    B) $(2, -4)$

    C) $(-4, 2)$

    Solución y explicación:

    Opción **B**

    Recordemos que el vértice de una función cuadrática se encuentra de la siguiente manera:

    Sabemos que:

$$a = 3$$

$$b = -12$$

$$c = 8$$

Primero calculamos el discriminante:

$$\triangle = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 48$$

Y por último encontremos el vértice con las fórmulas:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\triangle}{4a}\right)$$

$$V = \left(\frac{-(-12)}{2 \cdot (3)}, \frac{-(48)}{4 \cdot (3)}\right)$$

$$V = (2, -4)$$

7. Referencias

Chavarría, J., Gutiérrez, M., & Rodríguez, N. (Agosto de 2018). Funciones Algebraicas.

Ministerio de Educación Pública (2021). Guía Técnica faro secundaria. Recuperado de `https://www.mep.go.cr/sites/default/files/faro-guia-tecnica-secundaria.pdf`

Ministerio de Educación Pública (2012). Programas de estudio de matemáticas. Recuperado de `https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf`