Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica
Vol 24, No 1. Agosto, 2023 – Febrero, 2024

ISSN 1659 -0643

Relación de orden total en los complejos y algunas consecuencias

| Total order relation in the complex numbers and its implications |

Daniel Escobar Celis
danielcelis526@gmail.com
Universidad de Oriente
Venezuela

Recibido: 20 enero 2021 Aceptado: 1 marzo 2023

Resumen: En este trabajo deduciremos una relación de orden total en el conjunto de los números complejos a partir de la definición de igualdad de dos números complejos. Daremos una interpretación de esta relación y probaremos algunas de sus propiedades, como consecuencia mostraremos que dos de los cuatro enunciados de la propiedad arquimediana no aplican mientras que los otros dos sí. Por otra parte, enunciaremos una versión para los números complejos de la función valor absoluto y función parte entera, así como también estudiaremos algunos tipos de inecuaciones en $\mathbb{C}$, para finalizar, enunciaremos una versión para el conjunto $\mathbb{C}$ de las cortaduras de Dedekind.

Palabras Clave: relación de orden, orden en los complejos, inecuaciones en los complejos, cortaduras de Dedekind en los complejos.

Abstract: In this work we will derive a total order relation in the set of complex numbers from the definition of equality of two complex numbers. We will give an interpretation of this relationship and test some of its properties, as a consequence we will show that two of the four statements of the Arquimedian property do not apply while the other two do. On the other hand, we will estate a version for the complex numbers of absolute value function and integer function, as well as we will study some types of inequalities in $\mathbb{C}$, and finally we will estate a version for the set $\mathbb{C}$ of Dedekind's cuts.

Keywords: relationship of order, order in the complexes, inequalities in the complexes, Dedekind cuts in the complexes.

1. Introducción

Conjuntos como el de los números naturales, el de los enteros e incluso el de los reales cumplen con una propiedad llamada orden, que permite de manera intuitiva ordenar de tal modo que dados dos elementos arbitrarios del conjunto siempre se puedan efectuar comparaciones de orden entre ellos. Así, por ejemplo, si tomamos dos números reales tan disímiles como π y -2 podemos decir sin lugar a dudas que π es mayor que -2 y que -2 es menor que π. No obstante, cuando queremos ampliar esta propiedad al campo de los números complejos, la situación cambia de manera notable. Por ejemplo,

¿Acaso es $2i > 2$ o es $2 > 2i$? Resulta lógico pensar que de existir alguna relación análoga a "$>$" en los complejos una sola de las proposiciones anteriores sería verdadera, además, debido a que el conjunto de los números reales es subconjunto de los números complejos esta relación debería cumplir todas las propiedades de "$>$" de los números reales. En este orden de ideas Birkohff y Mac Lane (1970) señalan tres propiedades que cumplen los números enteros y que también aplican a los números reales. Estas propiedades se muestran a continuación.

Propiedad 1

1. Adición: La suma de dos enteros positivos es positiva.
2. Multiplicación: El producto de dos enteros positivos es positivo.
3. Ley de tricotomía: Para cualquier entero "a" resulta válida una y sólo una, de estas tres alternativas: o es a positivo, o es $a = 0$ o es $-a$ positivo.

Unida a la siguiente definición de dominio de integridad D (campo o cuerpo) ordenado.

Definición 1

Un dominio de integridad D se dice ordenado si existen en él ciertos elementos, llamados positivos, que satisfacen las leyes de tricotomía, adición y multiplicación, enunciados arriba para los enteros.

En este sentido muchos autores rechazan la existencia de un orden en los números complejos, por lo que lo denominan como un campo no ordenado. Por ejemplo, Cadenas (2012) da una demostración que denomina: "*imposibilidad para ordenar los números complejos*". En ella parte de las tres propiedades señaladas con anterioridad y supone la existencia de una relación de orden en los complejos que la cumple, a partir de allí llega a un absurdo que completa la demostración. Esto nos dice con claridad que no existe una relación de orden que cumpla las propiedades de adición, multiplicación y tricotomía, por lo que según la definición de Birkohff y Mac Lane (1970), el conjunto de los números complejos es un dominio de integridad D (campo) no ordenado. Sin embargo, ¿es el conjunto de los números complejos un campo no ordenado en todos los sentidos?

En el artículo de Guacaneme (2000) denominado *¿Inecuaciones en los complejos?*, el autor muestra que sí es posible establecer una relación de orden total en los complejos que cumpla la propiedad de tricotomía. Además, muestra una interpretación gráfica del conjunto solución de algunas inecuaciones en los complejos. El autor señala que dicha relación denominada "Criterio de Thieme" es mencionada por Rey Pastor en su libro "Elementos de análisis algebraico" de 1966.

En las siguientes páginas utilizaremos herramientas de la lógica para deducir esta relación a partir de la definición de igualdad de dos números complejos, e iremos más allá, estudiando sus propiedades y deduciendo algunas consecuencias de la existencia de dicha relación.

2. Orden en los complejos

2.1. Deducción de un orden en los complejos a partir de la relación de igualdad

A continuación, presentaremos las relaciones de orden en los complejos que vamos a deducir en esta sección:

Dados dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$; con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, las relaciones de orden en los complejos menor que y mayor que, se definen como:

$$z_1 \prec z_2 \Leftrightarrow (x_1 < x_2) \vee [(x_1 = x_2) \wedge (y_1 < y_2)]$$

y

$$z_1 \succ z_2 \Leftrightarrow (x_1 > x_2) \vee [(x_1 = x_2) \wedge (y_1 > y_2)]$$

Ahora procederemos a deducir dichas relaciones a partir de la definición de igualdad de dos números complejos. Sean $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$;

Se define la igualdad entre dos números complejos como:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2);$$

Negando ambos lados:

$$\neg(z_1 = z_2) \Leftrightarrow \neg[(x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2)];$$

Utilizando las leyes de Morgan:

$$z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow [(x_1 \neq x_2) \vee (y_1 \neq y_2)];$$

Por tricotomía de los números reales:

$$z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow [(x_1 < x_2) \vee (x_1 > x_2)] \vee [(y_1 < y_2) \vee (y_1 < y_2)];$$

Tomando en cuenta que $\forall$ proposición p, $\forall$ tautología T se cumple que:

$$p \vee T \equiv p \quad \text{y} \quad p \wedge T \equiv p$$

Ya que:

$$[(x_1 < x_2) \vee (x_1 = x_2) \vee (x_1 > x_2)]$$

y

$$[(y_1 < y_2) \vee (y_1 = y_2) \vee (y_1 > y_2)]$$

Son tautologías, luego:

$$\begin{aligned} z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow & \{[(x_1 < x_2) \vee (x_1 > x_2)] \wedge [(y_1 < y_2) \vee (y_1 = y_2) \vee (y_1 > y_2)]\} \\ & \vee \{[(y_1 < y_2) \vee (y_1 > y_2)] \wedge [(x_1 < x_2) \vee (x_1 = x_2) \vee (x_1 > x_2)]\} \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad distributiva de manera consecutiva se tiene:

$$\begin{aligned} z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow & [(x_1 < x_2) \wedge (y_1 < y_2)] \vee [(x_1 > x_2) \wedge (y_1 < y_2)] \\ & \vee [(x_1 < x_2) \wedge (y_1 = y_2)] \vee [(x_1 > x_2) \wedge (y_1 = y_2)] \\ & \vee [(x_1 < x_2) \wedge (y_1 > y_2)] \vee [(x_1 > x_2) \wedge (y_1 > y_2)] \\ & \vee [(y_1 < y_2) \wedge (x_1 < x_2)] \vee [(y_1 > y_2) \wedge (x_1 < x_2)] \\ & \vee [(y_1 < y_2) \wedge (x_1 = x_2)] \vee [(y_1 > y_2) \wedge (x_1 = x_2)] \\ & \vee [(y_1 < y_2) \wedge (x_1 > x_2)] \vee [(y_1 > y_2) \wedge (x_1 > x_2)] \end{aligned}$$

Utilizando las propiedades conmutativas y las leyes de absorción:

$$\begin{aligned} z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow & \{[(x_1 < x_2) \wedge (y_1 < y_2)] \vee [(x_1 > x_2) \wedge (y_1 < y_2)]\} \\ & \vee \{[(x_1 < x_2) \wedge (y_1 = y_2)] \vee [(x_1 > x_2) \wedge (y_1 = y_2)]\} \\ & \vee \{[(x_1 < x_2) \wedge (y_1 > y_2)] \vee [(x_1 > x_2) \wedge (y_1 > y_2)]\} \\ & \vee \{[(y_1 < y_2) \wedge (x_1 = x_2)] \vee [(y_1 > y_2) \wedge (x_1 = x_2)]\} \end{aligned}$$

Ahora podemos agrupar respecto a la variable x o a la variable y. Tomando en cuenta que si $y = 0$ nos queda el conjunto $\mathbb{R}$ que ya tiene definidas las relaciones de orden "$<$" y "$>$", agruparemos según x_1 y x_2.

Luego por conmutatividad y distributividad:

$$\begin{aligned} z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow & \{(x_1 < x_2) \wedge [(y_1 < y_2) \vee (y_1 = y_2) \vee (y_1 > y_2)]\} \\ & \vee \{[(x_1 = x_2) \wedge (y_1 < y_2)] \vee [(x_1 = x_2) \wedge (y_1 > y_2)]\} \\ & \vee \{(x_1 > x_2) \wedge [(y_1 < y_2) \vee (y_1 = y_2) \vee (y_1 > y_2)]\} \end{aligned}$$

Luego, aplicando tautología y las propiedades de absorción, conmutatividad y asociatividad:

$$\begin{aligned} z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow & \{(x_1 < x_2) \vee [(x_1 = x_2) \wedge (y_1 < y_2)]\} \\ & \vee \{(x_1 > x_2) \vee [(x_1 = x_2) \wedge (y_1 > y_2)]\} \end{aligned}$$

De esta manera hemos deducido las relaciones $\prec$ (menor que) y $\succ$ (mayor que), además, está claro que $(z_1 \prec z_2) \wedge (z_1 \succ z_2) \equiv C$ (contradicción) pues en caso contrario implica que alguna de las siguientes proposiciones "no son una contradicción":

$$\begin{aligned} i) &\quad (x_1 < x_2) \wedge (x_1 > x_2) \\ ii) &\quad (x_1 < x_2) \wedge (x_1 = x_2) \\ iii) &\quad (x_1 = x_2) \wedge (x_1 > x_2) \\ iv) &\quad (y_1 < y_2) \wedge (y_1 > y_2) \end{aligned}$$

Donde: $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ pero por la ley de tricotomía, i, ii, iii, iv son contradicciones. Por otra parte, se tiene que:

$$(z_1 = z_2) \vee \neg(z_1 = z_2) \equiv (z_1 = z_2) \vee (z_1 \neq z_2) \equiv T$$

Por lo que:

$$(z_1 = z_2) \vee (z_1 \neq z_2) \equiv (z_1 = z_2) \vee (z_1 \prec z_2) \vee (z_1 \succ z_2)$$

Lo que demuestra que las relaciones $\prec$, $=$, $\succ$ en $\mathbb{C}$ cumplen la ley de tricotomía. En otras palabras:

$$\forall\, z_1,\ z_2 \in \mathbb{C},\ \text{se cumple uno y solo uno de los enunciados:}$$
$$z_1 \prec z_2, \qquad z_1 = z_2, \qquad z_1 \succ z_2$$

2.2. Relación de orden en los complejos

Ahora probemos que las relaciones $\prec$, $\succ$ en $\mathbb{C}$ son relaciones de orden total. Las siguientes definiciones son extraídas de Rojo (1996).

Definición 2 (Orden estricto)

Sea $R \subset A^2$, con $a, b, c \in A$. R es una relación de orden estricto si y solo si es: arreflexiva, asimétrica y transitiva.

En símbolos:

$$\begin{array}{lll} R \subset A^2 \text{ es una relación} \Leftrightarrow & i)\ a \in A \Rightarrow (a,a) \notin R & \text{(arreflexividad)} \\ \text{de orden estricto} & ii)\ (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R & \text{(asimetría)} \\ & iii)\ (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R & \text{(transitividad)} \end{array}$$

Definición 3 (Orden parcial y total)

Sea R una relación de orden en A, con $a, b, c \in A$:

i) R es de orden parcial si y solo si existen pares de elementos incomparables.

$$\exists a \in A, \exists b \in A : \ (a, b) \notin R \wedge (b, a) \notin R$$

ii) El orden total es el caso contrario al orden parcial

$$\forall a, b \in A : \ a \neq b \Rightarrow (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$$

Definición 4 (Relaciones en $\mathbb{C}$)

Debido a la ley de tricotomía probada en el punto anterior se tiene que:

$$\neg(z_1 \succ z_2) \Leftrightarrow [(z_1 \prec z_2) \vee (z_1 = z_2)]$$

Y

$$\neg(z_1 \prec z_2) \Leftrightarrow [(z_1 \succ z_2) \vee (z_1 = z_2)]$$

De esta manera si $\prec$ es una relación de orden estricto y total, entonces $\succ$ es una relación de orden estricto y total (viceversa).

De la definición de "$\prec$" se tiene que:

$$z_1 \prec z_2 \Leftrightarrow (x_1 < x_2) \vee [(x_1 = x_2) \wedge (y_1 < y_2)]$$

Ahora, ya que $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ siempre se cumplen las siguientes proposiciones:

$$(x_1 < x_2) \Leftrightarrow (x_2 > x_1); (x_1 = x_2) \Leftrightarrow (x_2 = x_1)$$

y

$$(y_1 < y_2) \Leftrightarrow (y_2 > y_1)$$

De esta manera se tiene que:

$$\begin{aligned} z_1 \prec z_2 &\Leftrightarrow (x_1 < x_2) \vee [(x_1 = x_2) \wedge (y_1 < y_2)] \\ &\Leftrightarrow (x_2 > x_1) \vee [(x_2 = x_1) \wedge (y_2 > y_1)] \\ &\Leftrightarrow z_1 \succ z_2 \end{aligned}$$

De esta manera si $\prec$ es una relación de orden estricto y total, entonces $\succ$ es una relación de orden estricto y total (viceversa). Ahora probemos que en efecto $\prec$ es una relación de orden estricto y total.

Demostración. Se probará la arreflexividad, asimetría y transitivad.

i) Arreflexividad:

$$z_1 \prec z_1 \Leftrightarrow (x_1 < x_1) \vee [(x_1 = x_1) \wedge (y_1 < y_1)]$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $z_1 \not\prec z_1$ y $(\prec)$ es arreflexiva

ii) Asimetría:

$$z_1 \prec z_2 \Leftrightarrow (x_1 < x_2) \vee [(x_1 = x_2) \wedge (y_1 < y_2)]$$

Como

$$[x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 \not< x_1] \wedge [y_1 < y_2 \Rightarrow y_2 \not< y_1]$$

entonces $z_1 \prec z_2 \Rightarrow z_2 \not\prec z_1$ por lo tanto $\prec$ es asimétrica.

iii) Transitividad:

$$\begin{aligned}(z_1 \prec z_2) \wedge (z_2 \prec z_3) \Leftrightarrow &\{(x_1 < x_2) \vee [(x_1 = x_2) \wedge (y_1 < y_2)]\}\\ &\wedge \{(x_2 < x_3) \vee [(x_2 = x_3) \wedge (y_2 < y_3)]\}\end{aligned}$$

Aplicando distributividad:

$$\begin{aligned}(z_1 \prec z_2) \wedge (z_2 \prec z_3) \Leftrightarrow &[x_1 < x_2) \wedge (x_2 < x_3)]\\ &\vee \{(x_1 < x_2) \wedge [(x_2 = x_3) \wedge (y_2 < y_3)]\}\\ &\vee \{[(x_1 = x_2) \wedge (y_1 < y_2)] \wedge (x_2 < x_3)\}\\ &\vee \{[(x_1 = x_2) \wedge (y_1 < y_2)] \wedge [(x_2 = x_3) \wedge (y_2 < y_3)]\}\end{aligned}$$

Por transitividad en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(z_1 \prec z_2) \wedge (z_2 \prec z_3) \Leftrightarrow &(x_1 < x_3) \vee [(x_1 < x_3) \wedge (y_2 < y_3)]\\ &\vee [(x_1 < x_3) \wedge (y_1 < y_2)]\\ &\vee [(x_1 = x_3) \wedge (y_1 < y_3)]\end{aligned}$$

Pero $(x_1 < x_3) \Rightarrow (z_1 \prec z_3)$
y $[(x_1 = x_3) \wedge (y_1 < y_3)] \Rightarrow (z_1 \prec z_3)$
por lo que $(z_1 \prec z_2) \wedge (z_2 \prec z_3) \Rightarrow (z_1 \prec z_3)$ y por lo tanto $\prec$ es transitiva.

En conclusión, es una relación de orden estricto. De acuerdo con la ley de tricotomía y a que sí $\prec$ es una relación de orden estricto y total, entonces $\succ$ es una relación de orden estricto y total, se concluye que $\succ$ al igual que $\prec$ son relaciones de orden estricto totales. □

2.3. Interpretación de las relaciones $\prec$ y $\succ$ en $\mathbb{C}$

La recta real se puede dividir en tres partes: los números negativos, el cero y los números positivos. Se dice que un número está a la izquierda del cero si $x < 0$, de forma análoga si $x > 0$, x está a la derecha del cero. De esta manera el número cero divide a la recta real en tres conjuntos: Los números negativos $N = \{x \in \mathbb{R}; x < 0\}$, El cero $0 = \{0\}$. Y los números positivos $P = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$. En forma análoga a la anterior cada $x \in \mathbb{R}$ divide a la recta real en tres conjuntos: $X^- = \{y \in \mathbb{R}; y < x\}$, $X = \{x \in \mathbb{R}; x = x\}$ (Conjunto unitario) y $X^+ = \{y \in \mathbb{R}; y > x\}$. De esta manera las relaciones $x < y$, $x > y$ indican que x está a la izquierda de y $(x \in X^-)$ en el primer caso y a la derecha en el segundo caso $(x \in X^+)$. Si la recta real se coloca en forma vertical en vez de horizontal, entonces el conjunto de los negativos será el conjunto debajo del cero y el de los positivos el conjunto encima del cero.

De manera similar, dado dos números $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ entonces $z_1 \prec z_2$ indica que el número z_1 está más a la izquierda que z_2 y en el caso de que tengan la misma coordenada x entonces z_1 está más abajo de z_2. La interpretación de $z_1 \succ z_2$ es análoga. En la figura 1 se observa la representación gráfica de la relación de orden en $\mathbb{C}$.

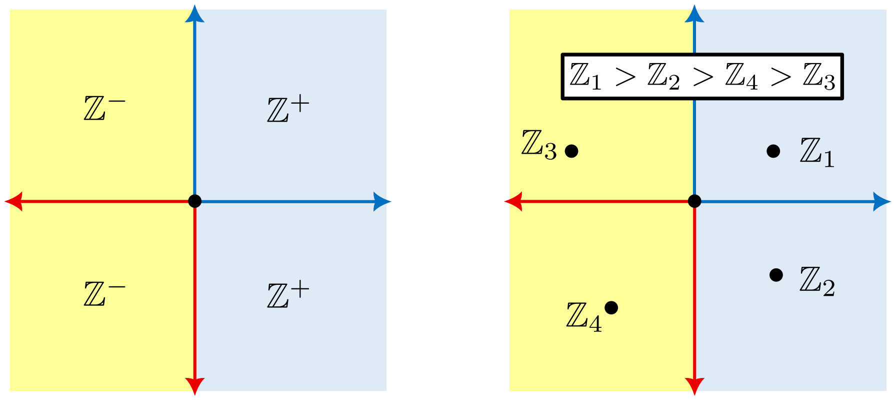

Figura 1: Representación gráfica de la relación de orden en $\mathbb{C}$. Elaboración propia.

3. Propiedades de las relaciones $\prec$ y $\succ$ en $\mathbb{C}$

Propiedad 2 : Propiedades de $<$ en $\mathbb{R}$

Dados $x, y, z, w, c \in \mathbb{R}$ la relación $<$ cumple las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} i) &\quad x < y \Rightarrow x + z < y + z \\ ii) &\quad x < y \wedge z < w \Rightarrow x + z < y + w \\ iii) &\quad \text{Si } c > 0 \wedge x < y \Rightarrow cx < cy \\ iv) &\quad \text{Si } c < 0 \wedge x < y \Rightarrow cx > cy \end{aligned}$$

Las proposiciones i y ii se cumplen de manera análoga para $>$.

Demostración. Ahora verifiquemos estas propiedades para la relación $\prec$ en $\mathbb{C}$:

- **Propiedad I:** $x < y \Rightarrow x + z < y + z$ Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tales que $z_1 \prec z_2$:

  Luego $z_1 \prec z_2 \Leftrightarrow (x_1 < x_2) \vee [(x_1 = x_2) \wedge (y_1 < y_2)]$;

  Por lo que:

$$\begin{aligned} z_1 + z_3 \prec z_2 + z_3 \Leftrightarrow &(x_1 + x_3 < x_2 + x_3) \\ &\vee [(x_1 + x_3 = x_2 + x_3) \wedge (y_1 + y_3 < y_2 + y_3)] \end{aligned}$$

  Lo cual es cierto por propiedades de "$<$" e "$=$".

- **Propiedad II:** $x < y \wedge z < w \Rightarrow x + z < y + w$ Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ tales que $z_1 \prec z_2$ y $z_3 \prec z_4$

  Como:

$$z_1 \prec z_2 \Leftrightarrow (x_1 < x_2) \vee [(x_1 = x_2) \wedge (y_1 < y_2)]$$

  y

$$z_3 \prec z_4 \Leftrightarrow (x_3 < x_4) \vee [(x_3 = x_4) \wedge (y_3 < y_4)]$$

Pueden darse 4 casos:

$i)$ $(z_1 \prec z_2) \wedge (z_3 \prec z_4) \Rightarrow (x_1 < x_2) \wedge (x_3 < x_4) \Rightarrow x_1 + x_3 < x_2 + x_4$

por lo que: $z_1 + z_3 \prec z_2 + z_4$

$$ii) \quad \begin{aligned}(z_1 \prec z_2) \wedge (z_3 \prec z_4) &\Rightarrow (x_1 < x_2) \wedge [(x_3 = x_4) \wedge (y_3 < y_4)] \\ &\Rightarrow x_1 + x_3 < x_2 + x_4 = x_2 + x_3;\end{aligned}$$

De esta manera: $z_1 + z_3 \prec z_2 + z_4$

$$iii) \quad \begin{aligned}(z_1 \prec z_2) \wedge (z_3 \prec z_4) &\Rightarrow [(x_1 = x_2) \wedge (y_1 < y_2)] \wedge (x_3 < x_4) \\ &\Rightarrow x_1 + x_3 < x_2 + x_4\end{aligned}$$

de modo que: $z_1 + z_3 \prec z_2 + z_4$

Por último:

$$iv) \quad \begin{aligned}(z_1 \prec z_2) \wedge (z_3 \prec z_4) &\Rightarrow [(x_1 = x_2) \wedge (y_1 < y_2)] \wedge [(x_3 = x_4) \wedge (y_3 < y_4)] \\ &\Rightarrow (x_1 + x_3 = x_2 + x_4) \wedge (y_1 + y_3 < y_2 + y_4\end{aligned}$$

lo que implica que: $z_1 + z_3 \prec z_2 + z_4$.

En conclusión, se cumple que: $(z_1 \prec z_2) \wedge (z_3 \prec z_4) \Rightarrow z_1 + z_3 \prec z_2 + z_4$.

- **Propiedad III:** Si $c > 0 \wedge x < y \Rightarrow cx < cy$ Sean $c = i \succ 0$; $x = -2 \prec 3i = y$ entonces:

$$\begin{aligned}(i) \cdot (-2) \prec (i) \cdot (3i) &\Rightarrow -2i \prec 3i^2 = -3 \\ &\Rightarrow (0 < -3) \vee [(0 = -3) \wedge (-2 < 0)]\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción, por lo tanto $-2 \prec 3i \Rightarrow (i) \cdot (-2) \succ (i) \cdot (3i)$

En conclusión, la proposición es falsa.

Sin embargo, sean $c \in \mathbb{R}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que:

$$\begin{aligned}(c > 0) \wedge (z_1 \prec z_2) &\Rightarrow cz_1 \prec cz_2 \\ &\Leftrightarrow (cx_1 < cx_2) \vee [(cx_1 = cx_2) \wedge (cy_1 < cy_2)]\end{aligned}$$

es siempre cierto.

- **Propiedad IV:** Si $c < 0 \wedge x < y \Rightarrow cx > cy$ En forma similar a la propiedad III, sean $c = -i \prec 0$; $x = -2 \prec 3i = y$ entonces:

$$-2 \prec 3i \Rightarrow (-i) \cdot (-2) \succ (-i) \cdot (3i)$$

Aplicando la proposición, luego:

$$(-i) \cdot (-2) \succ (-i) \cdot (3i) \Rightarrow 2i \succ -3i^2 \Rightarrow 2i \succ 3$$

por lo que: $(0 > 3) \vee [(0 = 3) \wedge (2 < 0)]$

Lo cual es una contradicción. Por lo que se concluye que la proposición es falsa.

Sin embargo, sean $c \in \mathbb{R}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que:

$$\begin{aligned}(c < 0) \wedge (z_1 \prec z_2) &\Rightarrow cz_1 \succ cz_2 \\ &\Leftrightarrow (cx_1 > cx_2) \vee [(cx_1 = cx_2) \wedge (cy_1 > cy_2)]\end{aligned}$$

es siempre cierto.

□

Propiedad 3 : Propiedad Arquimediana

Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_x$. (Tomado de Bartle (2005).

Corolario 1 Sean x, y, z números reales positivos. Entonces:

i) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z < ny$

ii) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n < y$

iii) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq z < n$.

En virtud de que trabajaremos con números complejos y que estos no cumplen todas las propiedades de orden que los números reales, examinaremos los cuatro enunciados de manera independiente. De esta manera:

Propiedad 4 : Propiedad arquimediana I $x < n_x$

En el caso de los números complejos la enunciaremos de la siguiente manera:

Si $z \in \mathbb{C}$, entonces existe $n_z \in \mathbb{N}$ tal que $z \prec n_z$

Demostración. Supongamos que la proposición es falsa. En tal caso existe un $\exists z \in \mathbb{C} : \nexists n_z \in \mathbb{N}$ tal que $z \prec n_z$. Sea $z = x + yi$, como $x \in \mathbb{R} \Rightarrow n_x \in \mathbb{N} : x < n_x$, sea $z_1 = n_x + 0yi$ por definición de $\prec$ se tiene que: $z \prec z_1$ ya que $x < n_x$, es decir que $z \prec n_x$ lo que contradice la falsedad de la proposición. En conclusión, $\mathbb{C}$ con $\prec$ es un conjunto arquimediano según i. $\square$

Propiedad 5 : Propiedad arquimediana II $z < n_y$

Definamos esta proposición de la siguiente manera:

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 \succ 0, z_2 \succ 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : z_1 \prec n z_2$

Demostración. Sean $z_1 = 2+2i \succ 0$ y $z_2 = 2i$ si la proposición es verdadera entonces: $\exists n \in \mathbb{N} : 2+2i \prec n(2i) = 2ni = 0 + 2ni$. Luego $2 + 2i \prec 0 + 2ni \Leftrightarrow (2 < 0) \vee [(2 = 0) \wedge (2 < 2n)]$ Lo cual es imposible. Por lo tanto $\mathbb{C}$ con $\prec$ es un conjunto "no arquimediano" ii. $\square$

Propiedad 6 : Propiedad arquimediana III $0 < 1/n < y$

Definamos esta proposición de la siguiente manera:

Sean $z \in \mathbb{C} : z \succ 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : 0 \prec 1/n \prec z$

Demostración. Sea $z = 0 + 2i \succ 0$, si la proposición es verdadera entonces: $\exists n \in \mathbb{N} : 0 \prec 1/n \prec 0 + 2i$. Por propiedad de los números naturales $1/n > 0$ ahora: $1/n \prec 0 + 2i \Leftrightarrow (1/n < 0) \vee [(1/n = 0) \wedge (0 < 2)]$. Pero $(1/n < 0) \wedge (1/n = 0)$ es imposible $\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mathbb{C}$ con $\prec$ es un conjunto "no arquimediano" según iii. $\square$

Propiedad 7 : Propiedad arquimediana IV $n - 1 \leq z < n$

En el caso de los números complejos la enunciaremos de la siguiente manera:

Si $z \in \mathbb{C} : z \succ 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \preccurlyeq z \prec n$

Demostración. Sea $z = x + yi$, por la propiedad arquimediana i sabemos que $\exists n_z \in \mathbb{N} : z \prec n_z$ luego por definición de $\prec$: $z \prec n_z \Leftrightarrow (x < n_z) \vee [(x = n_z) \wedge (y < 0)]$. Por propiedad de los números reales: $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $n_x - 1 \leq x < n_x$. Por lo que $n-1 \leq x \Rightarrow n-1 \preccurlyeq z$ y en conclusión, $\exists n \in \mathbb{N} : n-1 \preccurlyeq z \prec n$ y por lo tanto $\mathbb{C}$ con $\prec$ es un conjunto arquimediano según iv □

Otra demostración de esta propiedad es la siguiente:

Demostración. Dado $z \in \mathbb{C} : z \succ 0, z \succ 0 \Leftrightarrow (x > 0) \vee [(x = 0) \wedge (y > 0)]$. Sea $[\![x]\!]$ la parte entera de x donde $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$

- Si $x > 0$; tomemos $n = [\![x]\!] + 1$, como: $x < [\![x]\!] + 1 = n \Rightarrow z \prec n$, además $n - 1 = [\![x]\!] + 1 - 1 = [\![x]\!] \geq x \Rightarrow n - 1 \succcurlyeq z$ por lo que: $[\![x]\!] = n - 1 \preccurlyeq z \prec n = [\![x]\!] + 1$
- En forma análoga si $[\![x]\!] = x$
  - En caso de que $y < 0$, como $[\![x]\!] - 1 < x = [\![x]\!]$ tomemos a $n = [\![x]\!]$ en tal caso como $(x = n) \wedge (y < 0) \Rightarrow n - 1 \prec z \prec n$
  - En caso de que $y = 0$, tomemos $n = [\![x]\!] + 1$, por lo que:
  $$[\![x]\!] = n - 1 = z \prec n = [\![x]\!] + 1$$
  - Si $y > 0$, como $[\![x]\!] = x < [\![x]\!] + 1$, tomemos $n = [\![x]\!] + 1$. Luego: $n - 1 \prec z \prec n$

Con esto hemos cubierto todos los casos posibles y en conclusión, $\mathbb{C}$ con $\prec$ es un conjunto arquimediano según iv. □

Comentarios respecto a la propiedad arquimediana

En el conjunto de los reales las cuatro proposiciones son equivalentes. Sin embargo, al probarlas en el conjunto de los números complejos vemos que dos de ellas se cumplen y dos no. Esto nos lleva a pensar que en rasgos generales la propiedad 3 y su corolario 1 en su ítem iii, son equivalentes entre sí y los ítems i y ii, del corolario 1 de la propiedad 3, también lo son, pero para que este par de conjuntos proposicionales puedan ser equivalentes entre sí deben cumplirse ciertas condiciones. Esto se debe a que la propiedad 3 y su corolario 1 en su ítem iii, de la propiedad 3, dependen de la propiedad aditiva que, como vimos en la sección 3, cumplen los números complejos, sin embargo, los ítems i y ii, del corolario 1 de la propiedad 3, dependen de la propiedad multiplicativa que según la proposición iv de la propiedad 2 no se cumple en los números complejos. De esta manera diremos que el conjunto de los números complejos C es un conjunto "semi-arquimediano" y utilizaremos solo los enunciados de la propiedad 3 y su corolario 1 en su ítem iii como propiedades. Además, el corolario 1 en su ítem iii incluye a la propiedad 3 así que nos limitaremos a nombrar al corolario 1 en su ítem iii de la propiedad 3. Por otra parte, esta propiedad puede ampliarse a Z de la siguiente manera:

Propiedad 8

Si $z \in \mathbb{C}$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n - 1 \preccurlyeq z \prec n$

Demostración. La propiedad ya está probada para $z \succ 0$, en caso de $z = 0$ basta tomar $n = 1$, así que solo falta verificar $z \prec 0$. Para ello definamos la función $.[\![z]\!]. = [\![Re(z)]\!]$ (parte entera de la parte real de z) ahora si $y \geq 0$ o $x \neq [\![x]\!]$ tomemos $n = .[\![z]\!]. + 1$, sea $z = x + yi$ verifiquemos que en efecto $n - 1 \preccurlyeq z \prec n$; $.[\![z]\!]. + 1 - 1 \preccurlyeq z \prec .[\![z]\!]. + 1$; $[\![x]\!] \preccurlyeq x + yi \prec [\![x]\!] + 1$ por definición de $\preccurlyeq$ y de $\prec$ se tiene que: $x + yi \succcurlyeq [\![x]\!] \Leftrightarrow (x > [\![x]\!]) \vee [(x = [\![x]\!]) \wedge (y \geq 0)]$; por propiedad de los números reales $x \geq [\![x]\!], \forall x \in \mathbb{R}$ y $x + yi \prec [\![x]\!] + 1 \Leftrightarrow (x < [\![x]\!] + 1) \vee [(x = [\![x]\!] + 1) \wedge (y < 0)]$ y por propiedad de los números reales $x < [\![x]\!] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Supongamos ahora que $y < 0$ con $x = [\![x]\!]$, ahora tomemos $n = .[\![z]\!].$ luego $.[\![z]\!]. - 1 \preccurlyeq z \prec .[\![z]\!].$; $[\![x]\!] - 1 \preccurlyeq x + yi \prec [\![x]\!]$ por definición de $\preccurlyeq$ y de $\prec$ se tiene que: $x + yi \succcurlyeq [\![x]\!] - 1 \Leftrightarrow (x > [\![x]\!] - 1) \vee [(x = [\![x]\!] - 1) \wedge (y \geq 0)]$; pero $x > [\![x]\!] - 1, \forall x \in \mathbb{R}$ además $x + yi \prec [\![x]\!] \Leftrightarrow (x < [\![x]\!]) \vee [(x = [\![x]\!]) \wedge (y < 0)]$ por lo tanto la proposición es verdadera. □

Resumen 1 : Propiedades $\prec$ y $\succ$ en $\mathbb{C}$

Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}$

i) $(z_1 \prec z_2) \Rightarrow z_1 + z_3 \prec z_2 + z_3$

ii) $(z_1 \prec z_2) \wedge (z_3 \prec z_4) \Rightarrow z_1 + z_3 \prec z_2 + z_4$

iii) $(c > 0) \wedge (z_1 \prec z_2) \Rightarrow cz_1 \prec cz_2$

iv) $(c > 0) \wedge (z_1 \prec z_2) \Rightarrow cz_1 \succ cz_2$

v) $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$: $n - 1 \preccurlyeq z \prec n$

4. Consecuencias de las relaciones $\prec$ y $\succ$ en $\mathbb{C}$ y sus propiedades

4.1. Valor absoluto según $\prec$ y $\succ$ en $\mathbb{C}$

De la ley de tricotomía probada en la sección 2.1 y por ser $\prec$ y $\succ$ relaciones de orden total en $\mathbb{C}$ (ver sección 2.2 se deduce la existencia de la función valor absoluto, la cual definiremos como:

$$.|\quad|. : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ tal que: } .|z|. = \begin{cases} -z \text{ si } z \prec 0 \\ z \text{ si } z \succcurlyeq 0 \end{cases}$$

Esta función transforma las coordenadas del plano $\mathbb{R}^2$ a los cuadrantes I y IV sin incluir la semirecta bi, $b < 0$. En general la función valor absoluto en $\mathbb{C}$ asigna el mismo valor a aquellos números que pertenezcan al primer cuadrante, al cuarto, o a alguno de los ejes positivos, mientras que al resto le asigna el valor correspondiente a un giro de $180°$.

En las figuras 2 y 3 se muestran las representaciones gráficas del valor absoluto en $\mathbb{C}$ de $\mathbb{Z}^+$ y $\mathbb{Z}^-$ respectivamente.

4.2. Función parte entera de z según $\prec$ y $\succ$ en $\mathbb{C}$

Esta función se deduce de la propiedad arquimediana v del resumen presentado en el resumen 1, y la definiremos como: $[\![\quad]\!] : \mathbb{C} \to \mathbb{Z}$ tal que: $[\![z]\!] = n$ y $[\![z]\!] \preccurlyeq z \prec [\![z]\!] + 1$ donde $n \in \mathbb{Z}$. En la figura 4 se muestra la representación gráfica de la función parte entera de $\mathbb{Z}$.

4.3. Inecuaciones en $\mathbb{C}$

Esta es la consecuencia más directa de la existencia de las relaciones $\prec$ y $\succ$ en $\mathbb{C}$. En esta sección resolveremos algunos tipos de inecuaciones y veremos su interpretación gráfica. A continuación, resolveremos varios casos de la relación: $\prec$, los casos de $\preccurlyeq$, $\succ$ y $\succcurlyeq$ se resuelven de manera análoga.

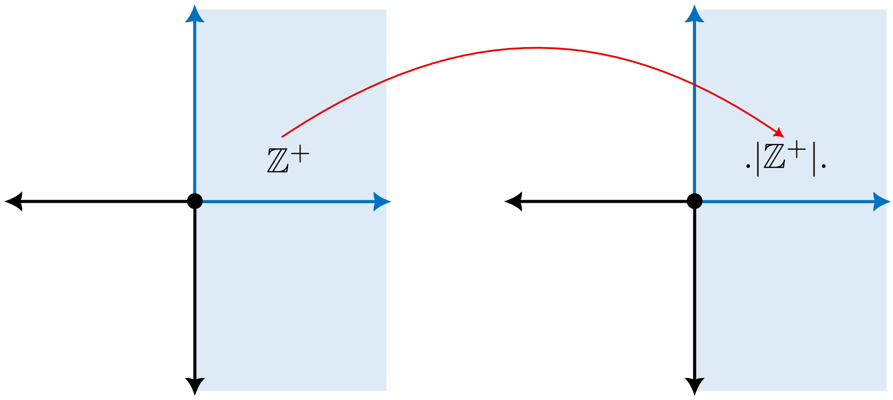

Figura 2: Valor absoluto en $\mathbb{C}$ de $\mathbb{Z}^+$. Elaboración propia.

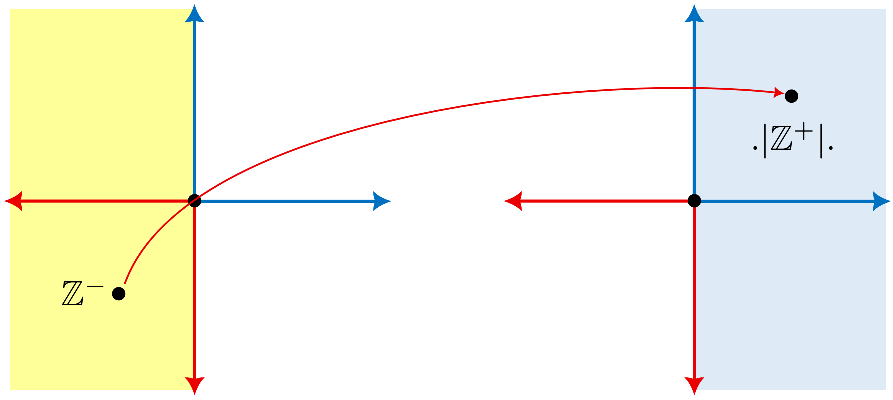

Figura 3: Valor absoluto en $\mathbb{C}$ de $\mathbb{Z}^-$. Elaboración propia.

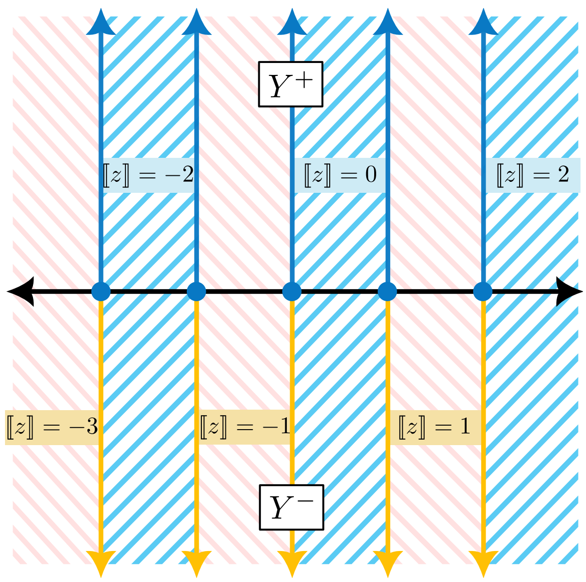

Figura 4: Representación gráfica de la función parte entera de $\mathbb{Z}$. Elaboración propia.

4.3.1. Inecuaciones de la forma $z + z_1 \prec z_2$

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, con $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ determinemos el conjunto solución de: $z + z_1 \prec z_2$; de la propiedad i del resumen 1: $z + z_1 - z_1 \prec z_2 - z_1$; luego $z \prec z_2 - z_1$ por definición de $\prec$: $z_1 \prec z_2 \Leftrightarrow (x_1 < x_2) \vee [(x_1 = x_2) \wedge (y_1 < y_2)]$ luego $z \prec z_2 - z_1 \Leftrightarrow (x < x_2 - x_1) \vee [(x = x_2 - x_1) \wedge (y < y_2 - y_1)]$.

Ejemplo 1

Sean $z_1 = 2+3i$ y $z_2 = 5-4i$ determinemos el conjunto solución de: $z+z_1 \prec z_2$; $x+yi+2+3i \prec 5-4i$; $x+yi \prec 3-7i$; Por lo que: $x+yi \prec 3-7i \Leftrightarrow (x<3) \vee [(x=3) \wedge (y<-7)]$. La solución de este ejemplo se puede observar en la figura 5.

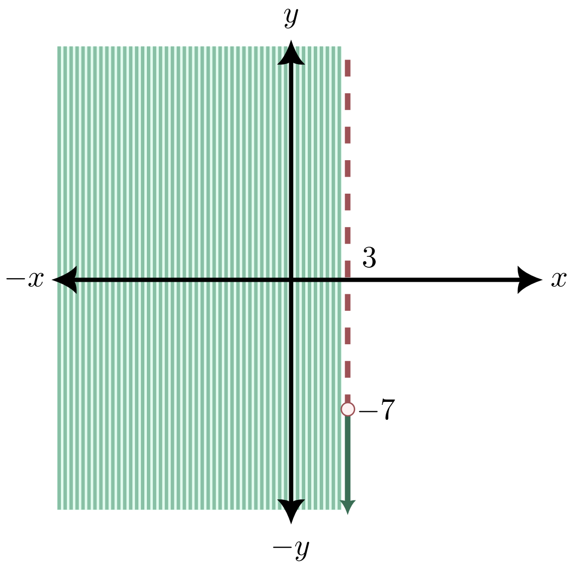

Figura 5: Solución gráfica del ejemplo 1. Elaboración propia.

4.3.2. Inecuaciones de la forma $z_1 z + z_2 \prec z_3$

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, con $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ y $z_3 = x_3 + iy_3$ determinemos el conjunto solución de: $z_1 z + z_2 \prec z_3$; de la propiedad i del resumen 1, se tiene $z_1 z \prec z_3 - z_2$

Luego $(x_1 + iy_1)(x+iy) \prec (x_3 + iy_3) - (x_2 + iy_2) \Rightarrow (x_1 x - y_1 y) + i(x_1 y + y_1 x) \prec (x_3 - x_2) + i(y_3 - y_2)$

luego por definición de $\prec$:

$$\begin{aligned} &(x_1 x - y_1 y) + i(x_1 y + y_1 x) \prec (x_3 - x_2) + i(y_3 - y_2) \\ \Leftrightarrow &(x_1 x - y_1 y < x_3 - x_2) \vee [(x_1 x - y_1 y = x_3 - x_2) \wedge (x_1 y + y_1 x < y_3 - y_2)]; \end{aligned}$$

despejando y en cada ecuación/inecuación:

$$z_1 z + z_2 \prec z_3 \Rightarrow \left(y > \frac{x_1}{y_1}x - \frac{x_3 - x_2}{y_1}\right) \vee \left[\left(y = \frac{x_1}{y_1}x - \frac{x_3 - x_2}{y_1}\right) \wedge \left(y < -\frac{y_1 x}{x_1} + \frac{y_3 - y_2}{x_1}\right)\right]$$

Ejemplo 2

Sean $z_1 = -1+4i$; $z_2 = 2-5i$ y $z_3 = -3-i$ determinemos el conjunto solución de:

$$z_1 z + z_2 \prec z_3; (-1+4i)(x+yi) + (2-5i) \prec (-3-i)$$

aplicando distributiva, la propiedad de la propiedad i del resumen 1, se tiene y agrupando términos se obtiene:

$$(-x-4y) + (4x-y)i \prec -5+4i$$

y por definición de $\prec$:

$$(-x-4y) + (4x-y)i \prec -5+4i \Leftrightarrow (-x-4y < -5) \vee [(-x-4y = -5) \wedge (4x - y < 4i)]$$

por lo que el conjunto solución de $(-1+4i)(x+yi)+(2-5i) \prec (-3-i)$ viene dado por:

$$S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \left(y>-\frac{x}{4}+\frac{5}{4}\right)\vee\left[\left(y=-\frac{x}{4}+\frac{5}{4}\right)\wedge(y>4x-4)\right]\right\}$$

La solución de este ejemplo se puede observar en la figura 6.

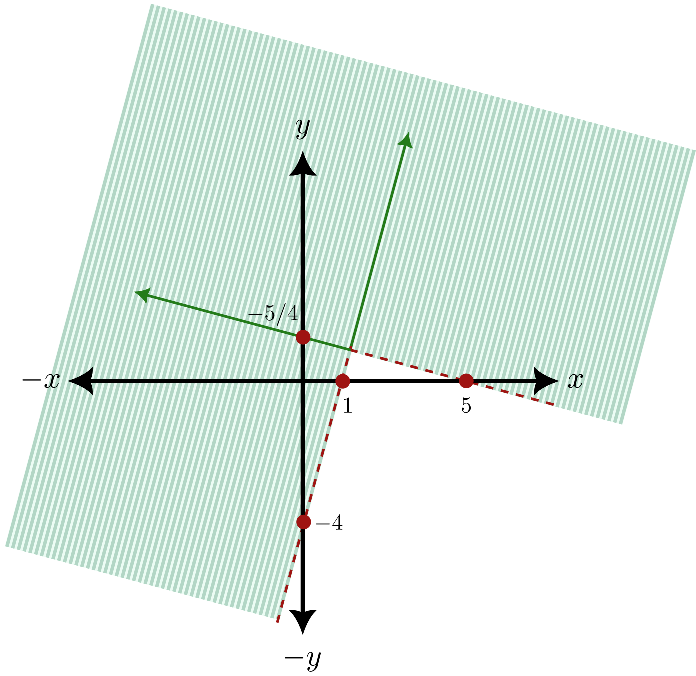

Figura 6: Solución gráfica del ejemplo 2. Elaboración propia.

4.3.3. Inecuaciones de la forma $z_1z^2+z_2z+z_3 \prec z_4$

Sean $z_1,z_2,z_3,z_4\in\mathbb{C}$, con $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, $z_3=x_3+iy_3$ y $z_4=x_4+iy_4$

determinemos el conjunto solución de: $z_1z^2+z_2z+z_3 \prec z_4$

sustituyendo z_1,z_2,z_3,z_4: $(x_1+y_1i)(x+yi)^2+(x_2+y_2i)(x+yi)+(x_3+y_3i) \prec (x_4+y_4i)$

desarrollando las operaciones y agrupando términos se tiene:

$\left[x_1\left(x^2-y^2\right)-2y_1xy+x_2x-y_2y+x_3-x_4\right]+\left[y_1\left(x^2-y^2\right)+2x_1xy+x_2y+y_2x+y_3-y_4\right]i \prec 0$

Donde $f(x,y)=x_1\left(x^2-y^2\right)-2y_1xy+x_2x-y_2y+x_3-x_4$

y $g(x,y)=y_1\left(x^2-y^2\right)+2x_1xy+x_2y+y_2x+y_3-y_4$

son hipérbolas en el plano xy. De esta manera, de la definición de $\prec$, el conjunto solución de: $z_1z^2+z_2z+z_3 \prec z_4$ viene dado por:

$$\left[x_1\left(x^2-y^2\right)-2y_1xy+x_2x-y_2y+x_3-x_4<0\right]$$
$$\vee\left[\begin{array}{c}\left(x_1\left(x^2-y^2\right)-2y_1xy+x_2x-y_2y+x_3-x_4=0\right)\\ \wedge\left(y_1\left(x^2-y^2\right)+2x_1xy+x_2y+y_2x+y_3-y_4<0\right)\end{array}\right]$$

4.4. Conjuntos acotados y teorema de Dedekind en $\mathbb{C}$

Esta es una consecuencia no tan obvia de la relación de orden en $\mathbb{C}$. A continuación, repasaremos su definición en $\mathbb{R}$ antes de enunciar la versión en $\mathbb{C}$.

Definición 5 Partición de un conjunto no vacío (Tomado de Rojo, 1996)

Sean dos conjuntos $A \neq \varnothing$ e $I \neq \varnothing$ tales que, cualquiera que sea el elemento $u \in I$, existe un subconjunto $K_u \subset A$. El conjunto $\{K_u/u \in I\}$ es una partición de A si y solo si

i) $\forall u : u \in I \Rightarrow K_u \neq \varnothing$

ii) $u \neq v \Rightarrow K_u \cap K_v = \varnothing$

iii) $\forall a \in A, \exists u \in I \Rightarrow a \in K_u$.

Definición 6 Conjunto acotado (Tomado de Rudin, 1978)

Sea E un conjunto de números reales. Si hay un número y, tal que $x \leq y$ para todo $x \in E$, decimos que E está acotado superiormente y llamamos a y cota superior de E. Del mismo modo se define la cota inferior. Si E está acotado superior e inferiormente, se dice simplemente que E está acotado.

Definición 7 Cortadura de Dedekind en K (tomado de Bravo Flores, 1971)

Sean A, A' subconjuntos de K, un cuerpo ordenado. El par (A, A') define una cortadura de Dedekind en K si:

1. (A, A') define una partición en K
2. $x \in A, y \in A' \Rightarrow x < y$

A se llama la clase inferior de la cortadura y A' la clase superior de la cortadura. Una cortadura se llama sin frontera si la clase inferior no tiene mayor elemento ni la clase superior un menor elemento.
Las definiciones 6 y 7 pueden ser adaptadas a $\mathbb{C}$ mediante la relación de orden $\prec$.

Definición 8 (Conjunto acotado en $\mathbb{C}$)

Sea $E \subset \mathbb{C}$. Si $\exists y \in \mathbb{C} : x \preccurlyeq y$, para todo $x \in E$, decimos que E está acotado superiormente y llamamos a y cota superior de E. Del mismo modo se define la cota inferior. Si E está acotado superior e inferiormente, se dice simplemente que E está acotado.

Definición 9 (Cortadura de Dedekind en $\mathbb{C}$)

Sean A, A' subconjuntos de $\mathbb{C}$. El par (A, A') define una cortadura de Dedekind en $\mathbb{C}$ si:

1. (A, A') define una partición en $\mathbb{C}$
2. $x \in A, y \in A' \Rightarrow x \prec y$

A se llama la clase inferior de la cortadura y A' la clase superior de la cortadura. Una cortadura se llama sin frontera si la clase inferior no tiene mayor elemento ni la clase superior un menor elemento.

Proposición

Todo número $z \in \mathbb{C}$ define una cortadura de Dedekind en $\mathbb{C}$.

Demostración. A continuación, se presenta la prueba:

1. (K_1, K_2) define una partición en $\mathbb{C}$. Dado un $z \in \mathbb{C}$ arbitrario, definamos a los conjuntos K_1 y K_2 de la siguiente forma:

$$K_1 = \{a \in \mathbb{C} : a \prec z\} \text{ y } K_2 = \{b \in \mathbb{C} : b \succcurlyeq z\};$$

Sea $I = \{1, 2\}$. Probemos que el conjunto $K = \{K_u : u \in I\} = \{K_1, K_2\}$ es una partición de $\mathbb{C}$

i) $\forall u : u \in I \Rightarrow K_u \neq \varnothing$: por la propiedad v del resumen 1.
$\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow n \in \mathbb{Z}$ tal que $n - 1 \preccurlyeq z \prec n$ como $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$, esto nos garantiza que tanto K_1 como K_2 son no vacíos.

ii) $u \neq v \Rightarrow K_u \cap K_v = \varnothing$ supongamos que $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$ por lo que:

$$x \in \mathbb{C} : x \in K_1 \text{ y } x \in K_2$$

lo que significa que:

$$(x \prec z) \wedge (x \succcurlyeq z)$$

pero por tricotomía en $\mathbb{C}$ esto es imposible, de este modo

$$K_1 \cap K_2 = \varnothing$$

iii) $\forall a \in A, \exists u \in I \Rightarrow a \in K_u$, de nuevo por tricotomía en $\mathbb{C}$,

$$\forall x, z \in \mathbb{C} \Rightarrow x \prec z, x = z, x \succ z,$$
$$\text{si } x \prec z \Rightarrow x \in K_1$$
$$\text{si } x = z \Rightarrow x \in K_2$$
$$\text{y}$$
$$\text{si } x \succ z \Rightarrow x \in K_2$$

de manera K define una partición de $\mathbb{C}$.

2. $x \in K_1$, y $K_2 \Rightarrow x \prec y$
dado un $z \in \mathbb{C}$ arbitrario, $(x \in K_1) \wedge (y \in K_2) \Rightarrow (x \prec z) \wedge (y \succcurlyeq z)$
luego: $(x \in K_1) \wedge (y \in K_2) \Rightarrow x \prec z \preccurlyeq y$
y por transitividad se tiene que: $(x \in K_1) \wedge (y \in K_2) \Rightarrow x \prec y$.

De esta manera hemos probado la versión en $\mathbb{C}$ del teorema de completitud.

□

5. Conclusiones

En este trabajo se mostró que se puede construir una relación de orden total en el campo de los números complejos. Esta relación cumple una propiedad análoga a la aditiva de la relación de orden estándar en $\mathbb{R}$, pero no la multiplicativa. De lo anterior se deduce que la relación de orden cumple dos de los enunciados de la propiedad arquimediana y los otros dos no. Así mismo se mostró que a partir de esta relación de orden y sus propiedades se pueden deducir funciones en los complejos análogas al valor absoluto y función parte entera. Como consecuencia directa de la relación de orden presentada se encuentran inecuaciones en el campo complejo, por lo que se presentaron como ejemplo inecuaciones de primero y segundo grado. Por último, se utilizó la relación de orden en los complejos para construir cortaduras de Dedekind en el plano complejo, análogas a las de la recta real.

6. Bibliografía

[1] Bartle, R. (2005). *Introducción al análisis matemático de una variable*. Mexico: Limusa.

[2] Birkohff, G., & Mac Lane, S. (1970). *Álgebra Moderna*. Barcelona: Vicens-vives, 4ta edición.

[3] Bravo Flores, R. (1971). *Fundamentos de los sistemas numéricos*. México D.F: Interamericana.

[4] Cadenas A., R. A. (2012). *Matemática I*. Mérida: Consejo de Publicaciones, Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Universidad de Los Andes.

[5] Guacaneme, E. (2000). ¿Inecuaciones en los complejos? *Revista EMA*, 6(1), 27-39.

[6] Rojo, A. (1996). *Álgebra I*. Buenos Aires: El Ateneo.

[7] Rudin, W. (1978). *Principios de análisis matemático*. Mexico: McGRAW-HILL, 2da edición.