Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica
Vol 24, No 1. Agosto, 2023 – Febrero, 2024
ISSN 1659 -0643

Del test de Chika a un criterio general de divisibilidad entre cualquier número primo o compuesto (terminados en 1, 3, 7, 9): características y consecuencias

From the chika test to a general criteria of severability between any prime or composite number (ended in 1, 3, 7, 9): characteristics and consequences

Alexander José Villarroel Salazar
trabajos_alexvilla@hotmail.com
Investigador Independiente
Venezuela

Francisco Javier Villarroel Rosillo
fjvillr02@gmail.com
Investigador Independiente
Venezuela

Recibido: 14 junio 2022 Aceptado: 19 marzo 2023

Resumen: El propósito del siguiente artículo es mostrar un criterio general de divisibilidad que se basa en una manipulación matemática del test de Chika, el cual permite romper con el actual caos de criterios, pruebas y test existentes (que son muchas veces por sus variaciones y formas de planteamiento difíciles de recordar) lo cual conlleva a establecer las formas de dividir entre números terminados en 1, 3, 7 y 9 en los cuales se encuentran todos los primos con la excepción del 2 y el 5, ya que para estos divisores las formas de división son conocidas. En cuanto a metodología surgió inicialmente de curiosidad, ensayo y error, el listado de los que he llamado "pivotes de división". Luego se presentan los métodos de determinación de dichos pivotes, se desarrollan los conceptos de números simbólicos y familia de pivotes de división, se analizan las consecuencias que los cálculos realizados tienen en relación a los números compuestos. Todo ello permite obtener un criterio de divisibilidad único. Para finalizar se muestra el teorema general divisibilidad junto con su demostración, así como los procedimientos seguidos y sus implicaciones en cuanto a la divisibilidad.

Palabras Clave: divisibilidad, números primos, números compuestos, criterio de divisibilidad, test de Chika.

Abstract: The purpose of the following article is to show a general criterion of divisibility that is based on a mathematical manipulation of the Chika test, which allows breaking with the current chaos of existing criteria, tests and tests (which are many times due to their variations and forms of approach difficult to remember) which leads to establishing the forms of dividing between numbers ending in 1, 3, 7 and 9 in which all the primes are found with the exception of 2 and 5, since for these divisors the forms of known son division. As soon as a principle of curiosity, trial and error arose, the list of what he called "division pivots". Then the methods for determining these pivots are presented, the concepts of symbolic numbers and the family of division pivots are developed, and the consequences that the calculations carried out have in relation to composite numbers are analyzed. All this makes it possible to obtain a single divisibility criterion. Finally, the general divisibility theorem is shown along with its proof, as well as the procedures followed and their impressions regarding divisibility.

Keywords: divisibility, prime numbers, composite numbers, divisibility criterion, Chika test.

1. Introducción

Históricamente han sido muchas las propuestas de criterios de divisibilidad que se han dado a conocer a lo largo de la historia de las matemáticas desde los pitagóricos hasta la actualidad pasando por Euclides, Fermat, entre otros muchos matemáticos que se han interesado por el tema de la divisibilidad, hasta llegar a diversas pruebas por saber cuándo un número es divisible entre 2, 3, 5, 7, 11, 13 o cualquier otro.

Recientemente fue descubierto por un niño de 12 años llamado Chika Ofili una forma para probar cuando un número es divisible entre 7. Sin embargo, los diferentes test realizados difieren para un divisor u otro lo cual hace engorroso el aprendizaje de los diversos test de divisibilidad, ya que el método que funciona en relación a un divisor puede ser muy diferente al método usado para otro tipo de divisores.

En este artículo se plantea, como por el estudio y generalización del test de Chika, se puede llegar a un criterio general de división que no abarca a los números pares, pues su divisibilidad es evidente entre 2, ni a los números terminados en 5 o 0, ya los mismos son divisibles entre 5, pero que se relaciona como la forma de dividir entre cualquier número terminado en 1, 3, 7 y 9, con lo cual se logra abarcar todos los test conocidos y se obtiene una gran ventaja (jamás alcanzada por método de divisibilidad alguno) que es poder contar con un procedimiento único que permitirá probar la divisibilidad entre todos los primos y entre números compuestos para los que en muchos casos no se conoce siquiera algún criterio de divisibilidad actualmente.

Por ello, el fin del presente artículo es presentar este criterio general de divisibilidad que constituye una herramienta matemática práctica y sencilla, de carácter iterativo y que permite obtener una forma de comprobar las posibilidades de división entre números primos y compuestos terminados en 1, 3, 7 y 9. Para ello se presenta la forma de hallar los pivotes de división por ensayo y error (como lo habría hallado Chika), luego se presenta otro segundo método del hallazgo de los pivotes de división en una forma eficiente por medio de fórmulas y se presentan las características y las implicaciones que representa la creación del criterio general de divisibilidad.

2. Un poco de historia sobre la divisibilidad

Bodi (2008, p. 20) plantea en uno de sus trabajos que "el estudio de los divisores y de la descomposición factorial de los números naturales ha constituido un capítulo fundamental de la aritmética desde el comienzo de la matemática", es decir, que es uno de los problemas en los cuales, aunque se han desarrollado muchas pruebas particulares no se cuenta con un método notable que se pueda adaptar a varios números al mismo tiempo. En efecto, al estudiar el bagaje de criterios de divisibilidad en los libros de teoría de números y buscar en las páginas web. Algunos ejemplos de los libros consultados son los siguientes:

- Mora (2010, pp. 51-52) presenta una sección titulada trucos de divisibilidad donde presenta la decisión entre 2, 3, 9 y 11.
- Niven y Zuckerman (1976, pp. 9-19) trata sobre conceptos de divisibilidad sin detenerse al estudio de divisores particulares.
- Varona (2019, pp.32-39) expone el tema de divisibilidad y habla sobre criterios de divisibilidad.

Durante la revisión se pudo apreciar que el criterio para el 2, es diferente para el 3, el 5, el 7, el 11, el 13 y en muchos casos se desconocen criterios para dividir entre 17, 19, 23, 29 y los otros primos. Esto indica que a pesar de que es un problema muy antiguo no se ha llegado a un criterio de divisibilidad general que evite que se tenga que contar con criterios que difieren mucho en su aplicación.

Osorio y Castañeda (2014) hablando sobre el tema de la divisibilidad y el enfoque de varias civilizaciones plantean lo siguiente:

> Los antiguos egipcios empezaron a utilizar conceptos de divisibilidad como producto de la necesidad del pago de impuestos en función del área de los terrenos que poseían. En el famoso papiro egipcio de Rhind y en el papiro de Moscú se dejaron evidencias acerca de la divisibilidad pues estos dan solución a los problemas de medida. Al igual que los egipcios, los babilonios tenían un sistema decimal y otro sexagesimal, pues este sistema facilitaba la subdivisión exacta, pues 60 es divisible por 2, 3, 6, 12, 15, 20 y 30. La matemática mesopotámica fue mucho más avanzada que la egipcia, pues eran mucho más prácticos. Esto nos muestra como las civilizaciones antiguas buscaban la manera de simplificar cálculos utilizando números que fueran múltiplos de otros (p.13)

Stewart citado por Osorio y Castañeda (2014) mencionó en su libro los aportes de los indios y de los árabes y al respecto menciona que:

> Bhaskara (1114) en su libro Lilavati, incluye ideas de aritmética, como la conocida Regla del nueve, pero llamada por Bhaskara "sacar nueves", utilizada para la comprobación de operaciones y reglas para la divisibilidad de 2, 3, 5, 7 y 9, basado en las sumas de las cifras de un número. También se sabe que la divisibilidad por 2, 5, 3 y 9 ya era conocida por los indios mucho antes, pero la divisibilidad por 11 no se conoció sino hasta el siglo XVI.

Estas citas revelan que la divisibilidad ha sido objeto de estudio de muchas culturas desde épocas muy antiguas, ya que les interesaba dicho conocimiento con varios fines entre los cuales se encuentran principalmente los comerciales y el propio conocimiento matemático como tal. En mi opinión personal la divisibilidad no surgió en primera instancia con propósitos comerciales sino de la necesidad de repartir provisiones, alimentos, animales, herencias y pertenencias en partes iguales para evitar problemas de inconformidad, la necesidad de formar lotes de tierra con igualdad y justicia y otros eventos relacionados con la búsqueda de que todos quedaran conformes y la incapacidad de dividir y querer quedarse o apoderarse de todo era la razón de muchas guerras y conflictos. Luego esto cobró trascendencia en otros aspectos vivenciales, en los trueques y negocios hasta llegar a la matemática.

La obra de Osorio et al. (2014) cuenta la historia de la divisibilidad señalando que matemáticos como Fibonacci (1180-1250) estudiaron criterios de divisibilidad en su libro Liber abaci (1202) y entre los capítulos II al V se refieren a las operaciones fundamentales de los números, la descomposición de los números en factores primos y la divisibilidad por 2, 3, 4, 5 y otros, y en el siglo XVI, Stevin (1548 – 1620), realizó la extensión de la teoría de la divisibilidad, pues gracias a su obra publicada en 1634 "Œuvres (courses) mathématiques..." extiende el algoritmo de Euclides al cálculo del máximo común divisor de dos polinomios.

Según Dickson (2005) y McDowell (2018) "Posiblemente uno de los primeros criterios de divisibilidad registrados es el encontrado en el Talmud de Babilonia, obra compilada entre los siglos tercero y sexto de nuestra era. Este criterio es sobre divisibilidad por 7, en lenguaje matemático moderno dice: si a y b son números enteros, $100a + b$ es divisible por 7 si $2a + b$ es divisible por 7". Es muy interesante saber estos datos históricos que muestran que la divisibilidad ha sido un tema de estudio de las personas desde hace muchos años.

Por otra parte, con el surgimiento del teorema fundamental de la aritmética de Gauss que estudia la factorización y expresión de todos los números en base a los números primos, como ladrillos fundamentales de todos los números naturales hubo un creciente interés en generar criterios de divisibilidad entre los diversos números primos lo cual no ha sido logrado del todo.

Respecto al mismo tema, Kisacanin (2002), Dickson, (2005) y McDowell (2018) indican que Blaise Pascal en su artículo De Numeris Multiplicabas planteaba un criterio de divisibilidad general basado en la suma de las cifras que componen un número y para eso comienza haciendo una proposición única: reconocer con la sola inspección de la suma de sus cifras si un número dado es divisible por otro dado. Sin embargo, Pascal estuvo apegado en parte a las ideas de Fibonacci en relación a la divisibilidad entre 9 como se puede apreciar a continuación:

> "(...) las propiedades de la divisibilidad de números deducidos de la suma de las cifras de sus cifras se apoyan al mismo tiempo en una naturaleza inherente de los números y su representación en el sistema decimal de numeración. En los otros sistemas, por ejemplo, en el duodecimal el cual usa dos nuevos dígitos, en orden como se asigna el número 10 y el número 11, podría ser no del todo cierto que todo número cuya suma es múltiplo de 9, es múltiplo de 9. Pero este método que yo he dado a conocer y la demostración que he dado resulta adecuado en este sistema y en cualquier otro (...)".
>
> Y concluye que "uno podría también saber que, en este sistema de numeración cualquier número cuya suma de dígitos es un múltiplo de 11, es un múltiplo de 11. En nuestro sistema decimal, la prueba de divisibilidad para 11, sería necesaria que la suma formada por el último dígito, restada del siguiente al último, luego el siguiente restado del anterior, etc., sea un múltiplo de 11. Sería fácil justificar estas dos reglas para obtener algunas otras (...)". Tomado de Glaser (1971, p. 18)

De lo confuso de los enunciados anteriores puede apreciarse que muchos matemáticos tenían ideas interesantes, pero algo equivocadas en relación a la divisibilidad. Sin embargo, con esas formas de pensar abrieron los caminos para el desarrollo posterior que ha tenido la divisibilidad, la factorización, el estudio de los números primos, y otros temas relacionados como lo son las congruencias numéricas y la aritmética de tipo modular.

Uno de los matemáticos que aclaró mucho el camino fue Gauss con su teorema fundamental de la aritmética y sus estudios de congruencias y modularidad numérica. En relación a los logros de este brillante matemático los autores Blancas, Itzà y Tetlalmatzi (2020, p.72) señalan que "Gauss (1777 - 1855) presenta, al final del primer capítulo de su obra Disquisitiones arithmeticae, varios métodos para comprobar cálculos numéricos empleando congruencias (Oré, 1988). Dentro de estos criterios se encuentran los que permiten saber si un número se puede dividir por otro, sin tener que realizar la división y en una forma relativamente sencilla".

En efecto, para saber si un número p es factor en la descomposición de cierto número entero N en factores primos, es equivalente a decidir si N es divisible entre p, por lo que los criterios de divisibilidad juegan un rol determinante.

3. El test de Chika Ofili

Sin embargo, a pesar de los grandes esfuerzos matemáticos realizados la historia de la divisibilidad ha llegado hasta nuestros días y no se ha detenido. En el año 2019 según varias informaciones registradas en Google, YouTube y otros medios de internet se sabe que un niño sudafricano llamado Chika Ofili recibió un premio escolar por haber descubierto un nuevo test para probar la división entre 7. En efecto, esta noticia fue un boom en el 2019 y se puede obtener información acerca de este hecho. Solo por mencionar algunas fuentes de dicha noticia presento a continuación varios artículos:

- Un nigeriano de 12 años premiado por hacer que las matemáticas sean más fáciles de aprender. 18 de noviembre de 2019.

- CHIKA OFILI y el criterio de divisibilidad del 7.

- Chika Ofili.

- Chika Ofili: 12-year-old UK-based Nigerian gets special recognition award in maths Wednesday, August 12, 20.

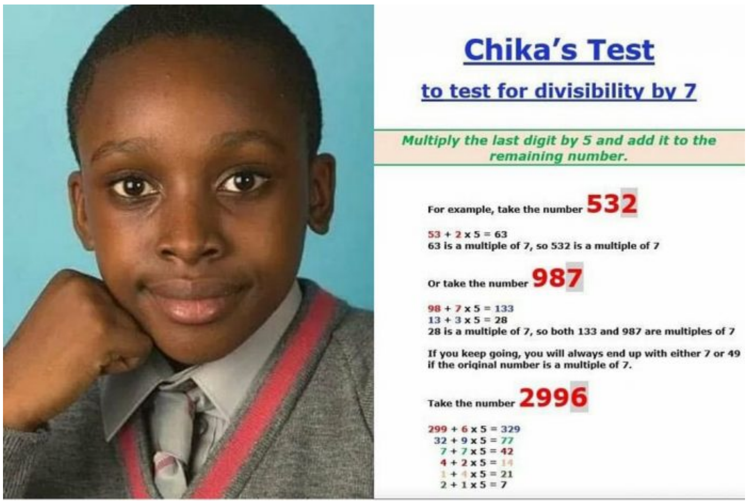

Figura 1: El test de Chika Ofili. Tomada de Imágenes de Chika Ofili en Google

Figura 2: Chika mostrando su premio con su familia. Tomada de Google

Chika Ofili mostró a su maestra una prueba de división entre 7, con el cual hizo historia, tras su descubrimiento en el campo de las matemáticas por descubrir la nueva prueba de divisibilidad de 7. Algunos ejemplos de su aplicación son los siguientes:

Ejemplo 1

¿Es **532** divisible entre 7?

Consideramos la cifra de las unidades (**2**) y el resto del número (**53**)
Multiplicamos la cifra de las unidades por 5: $\mathbf{2} \cdot 5 = 10$
Sumamos esta cantidad al resto del número: $\mathbf{53} + 10 = 63$
¿Es 63 divisible entre 7? sí, y de acuerdo con la regla de Chika, también lo es **532**.

Ejemplo 2

¿Es **987** divisible entre 7?

Procedemos de igual forma, aunque hay que aplicar el proceso dos veces (el método es iterativo): $\mathbf{7} \cdot 5 = 35$ $\mathbf{98} + 35 = \mathbf{133}$ $\mathbf{3} \cdot 5 = 15$ $\mathbf{13} + 15 = 28$ ¿Es 28 múltiplo de 7? Sí y por tanto también lo es **987**

La conocida popularmente como prueba de Chika que consta de lo siguiente:

3.1. Prueba o Test de Chika

Es similar a la regla anterior, pero es más simple y rápida que ella.

Paso 1: Separe el último dígito del número.

Paso 2: Multiplica el último dígito por 5 y súmalo al número restante.

Paso 3: Repite los pasos a menos que obtengas un número entre 0 y 70.

Paso 4: Si el resultado es divisible por 7, el número con el que empezaste también es divisible por 7.

Algo interesante sobre esta prueba es que el paso 3 otorga a la misma una característica de iteratividad que permite reducir un gran número si fuera este el caso a un número de uno o dos dígitos para comprobar la divisibilidad. Por otra parte, es significativo que Simón Ellis, que es un experto matemático y hermano de la maestra de Chika hizo una prueba algebraica que demuestra la certeza de la prueba y además descubrió que la prueba funciona si comienzas multiplicando el último dígito por 12, 19, 26, 33... y luego lo sumas a la parte restante del número. Por este descubrimiento Chika Ofili ha sido premiado en los TruLittle Hero Awards.

3.1.1. Demostración de la prueba de Chika

Hay dos formas de demostración de la prueba o Test de Chika que se presentan a continuación ya que las mismas ofrecen elementos significativos para la demostración posterior del criterio o teorema general de divisibilidad. Las mismas fueron tomadas de los artículos relacionados con Chika Ofili y la página web de Simón Ellis. En la exposición de las demostraciones se han dejado los mismos comentarios de Simón Ellis, quien se encargó de hacer las demostraciones. (Es preciso aclarar que por un uso limitado del inglés las traducciones de las palabras no pueden ser del todo exactas sin embargo la parte numérica si lo es).

Forma 1: Sea N cualquier número (es decir, un número positivo entero). Sea b el dígito de sus unidades y sea a la parte restante del número (es decir, el número obtenido al borrar el dígito de las unidades).

Entonces, claramente:

$$N = 10a + b.$$

El procedimiento reemplaza N por el número $n = a + 5b$. Entonces tenemos la siguiente declaración probar:

$10a + b$ es divisible por 7 si y solo si $a + 5b$ es divisible por 7.

Puede que no sea inmediatamente obvio cómo va a ser esto demostrado. Pero el truco es encontrar una combinación de las dos expresiones, $10a + b$ y $a + 5b$, que es visiblemente un múltiplo de 7. Observando que $10 - 3 = 7$, que es un múltiplo de 7, podemos intentar restar 3 veces la segunda expresión de la primera, y esto funciona inmediatamente:

$$(10a + b) - 3(a + 5b) = 7a - 14b = 7(a - 2b).$$

Esto significa que $(10a + b) - 3(a + 5b)$ es un múltiplo de 7. Es decir, $N - 3n$ es un múltiplo de 7, decir $N - 3n = 7r$. Nuestra tarea ya casi ha terminado.

- Suponga que n es un múltiplo de 7, digamos $n = 7s$. Entonces tenemos:

  $$N = 3n + 7r = 21s + 7r = 7(3s + r),$$

  mostrando que N es múltiplo de 7.

- Suponga que N es un múltiplo de 7, digamos $N = 7k$. Entonces tenemos:

  $$3n = N - 7r = 7k - 7r = 7(k - r),$$

  mostrando que $3n$ es un múltiplo de 7 y por lo tanto que n en sí mismo es un múltiplo de 7 (esto funciona porque 3 y 7 son coprimos y por lo tanto no interfieren con la divisibilidad de cada uno)

Sólo resta señalar que el procedimiento puede ser llevado iterativamente hacia adelante. En cada paso, el número de dígitos disminuye en 1, por lo que pronto obtenemos un número para el cual la divisibilidad por 7 puede ser comprobado mentalmente. Entonces el procedimiento es muy eficiente en su funcionamiento. □

Forma 2: Sea n el número que estamos probando y c sea el "número de Chika" (¡recuerda esto!)

Escribimos $n = 10a + b$ (b es el dígito final y a es el resto del número)

luego $c = a + 5b$ (el resto del número más 5 veces el dígito final)

Primero debemos demostrar que si el número de Chika $(a + 5b)$ es divisible por 7, entonces el número que estamos probando $(10a + b)$ también es divisible por 7.

Si c es divisible por 7

entonces $c = 7k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de enteros (números enteros)

y $a + 5b = 7k$

entonces $a = 7k - 5b$

entonces $n = 10(7k - 5b) + b$

entonces $n = 70k - 50b + b$

entonces $n = 70k - 49b$

entonces $n = 7(10k - 7b)$

lo cual, dado que $(10k - 7b) \in \mathbb{Z}$, significa que n es divisible por 7.

Hasta aquí todo bien.

Pero todo lo que hemos demostrado es que SI c es divisible por 7 ENTONCES también lo es n.

Ahora tenemos que demostrar que SI n es divisible por 7 ENTONCES también lo es c (es decir, el método siempre funciona).

Aquí vamos de nuevo...

Si n es divisible por 7

entonces $n = 7l$ para algunos $l \in \mathbb{Z}$

y $10a + b = 7l$

entonces $b = 7l - 10a$

entonces $c = a + 5(7l - 10a)$

entonces $c = a + 35l - 50a$

entonces $c = 35l - 49a$

entonces $c = 7(5l - 7a)$

lo cual, dado que $(5l - 7a) \in \mathbb{Z}$, significa que n es divisible por 7

Así que hemos demostrado que:

SI c es divisible por 7 ENTONCES n también lo es

y SI n es divisible por 7 ENTONCES c también lo es

Pero, todavía hay una pregunta más a considerar:

¿Qué pasa si c ES divisible por 7 para alguna n que NO lo es?

Comprobemos esto también...

Si n NO es divisible por 7

entonces $n = 7m + q$ para algunos $m \in \mathbb{Z}$ y $q \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

entonces $10a + b = 7m + q$

entonces $b = 7m + q - 10a$

entonces $c = a + 5(7m + q - 10a)$

entonces $c = a + 35m + 5q - 50a$

entonces $c = 35m - 49a + 5q$

entonces $c = 7(5m - 7a) + 5q$

Como $5q$ no puede tener un factor de 7 si $q \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, c no tiene un factor de 7 y, por lo tanto, el número de Chika no será divisible por 7 a menos que el número original n lo sea.

¡Así que ahora hemos demostrado que el método nunca dará un "falso positivo" y nuestra prueba está completa!

Simón Ellis

18 de septiembre de 2019 □

4. Criterios de divisibilidad

En líneas generales he visto que "un criterio de divisibilidad entre un número es una regla numérica que permite saber si un número se puede dividir por otro, sin tener que realizar la división operativamente y en una forma relativamente sencilla que es aplicable a un posible conjunto de números que cumplen cierta característica aditiva y/o multiplicativa". En efecto, se puede afirmar, sin lugar a dudas que estos criterios se basan en un grupo de condiciones que debe cumplir un número para llegar a la conclusión de que es divisible entre otro, sin dejar ningún residuo. Esto significa, que los criterios de divisibilidad se basan en ciertos aspectos que deben cumplir los números para saber que al dividirse entre otro se obtenga como resultado un número entero y residuo cero, es decir, desde este concepto se puede decir, por poner un ejemplo, que son divisibles entre 3 aquellos números que son múltiplos de 3 o son de la forma $3k$, es decir, aquellos que tienen a 3 como un factor primo sea este con exponente 1 o cualquier exponente. Estos aspectos relacionan los términos múltiplos, divisores, factores primos, divisores y factorización y muestran que todos son perspectivas del tema relacionado con la divisibilidad y sus criterios.

Para Zazkis (2000, p.235) "la existencia de significados diferentes para factores y divisores contribuye a la confusión .... Desde el punto de vista de la teoría de números los factores y los divisores son sinónimos y describen una relación entre los números naturales". Este autor muestra que el conocimiento de los divisores de los números naturales sigue siendo un problema muy complicado para llegar a un entendimiento total del mismo que permita obtener un significado único acerca del tema. Esta es quizás la razón por la que se da la existencia de diferentes criterios de divisibilidad que tienen diferencias muy notables entre los primeros primos y que impiden que existan criterios para primos más grandes, ya que a medida que crece su número de cifras se hace imposible determinar un criterio de divisibilidad que sea satisfactorio.

A continuación, se presenta una imagen en la cual se muestra la variabilidad que existe entre los criterios de divisibilidad para los números del 2 al 10.

Criterio de divisibilidad del 2 al 10

- Criterio de divisibilidad del 2: Todo número par que termine en 0, 2, 4, 6 u 8, es divisible entre 2.
- Criterio de divisibilidad del 3: Un número es divisible entre 3 si la suma de sus dígitos es igual a 3 o un múltiplo de 3. Por ejemplo, 108: si sumamos sus dígitos tenemos: $1+0+8 = 9$. Por lo tanto 108 es divisible entre 3.
- Criterio de divisibilidad del 4: Un número es divisible entre 4 cuando sus últimos dos

dígitos son 0 o un múltiplo de 4. Por ejemplo, 400 300 y 516 son divisibles entre 4 porque terminan en 00 y en 16, respectivamente, siendo este último un múltiplo de 4 $(16 = 4 \cdot 4)$.

- Criterio de divisibilidad del 5: Un número es divisible entre 5 cuando su ultimo dígito es un 5 o un 0.
- Criterio de divisibilidad del 6: un número debe cumplir con los criterios de divisibilidad del 2 y del 3 para ser divisible entre 6. Por ejemplo 1440 termina en 0 y a su vez al sumar sus dígitos $(1 + 4 + 4 + 0)$ obtenemos 9 que es un múltiplo de 3.
- Criterio de divisibilidad del 7: se debe multiplicar el ultimo dígito por 2 y restarlo del número que conforman los demás dígitos, esto hasta que queda un numero de solo un dígito. Si este es un 0 o un 7, el número es divisible entre 7.
- Criterio de divisibilidad del 8: los últimos tres dígitos deben ser múltiplos de 8 o iguales a 0, Por ejemplo 5000 y 1504.
- Criterio de divisibilidad del 9: la suma de los dígitos debe ser un múltiplo de 9- por ejemplo, 1575. Pues si sumamos $1 + 5 + 7 + 5$ obtenemos 18.
- Criterio de divisibilidad del 10: Para que un número sea divisible entre 10 solo debe terminar en 0.

Criterios de divisibilidad para algunos números entre 11 y 125.

- Criterio de divisibilidad del 11: Sumando las cifras (del número) en posición impar por un lado y las de posición par por otro. Luego se resta el resultado de ambas sumas obtenidas. Si el resultado es cero (0 es un múltiplo de 11, el número es divisible entre este. Si el número tiene solo dos cifras y estas son iguales será múltiplo de 11.
- Criterio de divisibilidad del 13: Un número es divisible entre 13 cuando al separar la ultima cifra de la derecha, multiplicarla por 9 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a cero o un múltiplo de 13.
- Criterio de divisibilidad del 14: Un número es divisible entre 14 cuando es par y divisible entre 7.
- Criterio de divisibilidad del 15: Un número es divisible entre 15 cuando es divisible entre 3 y 5.
- Criterio de divisibilidad del 17: Un número es divisible entre 17 cuando al separar la última cifra de la derecha, multiplicándola por 5 y restarla de las cifras restantes la diferencia es 0 o un múltiplo de 17.
- Criterio de divisibilidad del 18: Un número es divisible entre 18 si es par y divisible entre 9 (si es par y además la suma de sus dígitos es múltiplo de 9).
- Criterio de divisibilidad del 19: Un número es divisible entre 19 si al separar la cifra de las unidades, multiplicarla por 2 y sumar a las cifras restantes el resultado es un múltiplo de 9.
- Criterio de divisibilidad del 20: Un número es divisible entre 20 si sus dos últimas cifras son 00 o múltiplos de 209. Cualquier número par que tenga uno o más ceros a la derecha es múltiplo de 20.
- Criterio de divisibilidad del 25: Un número es divisible entre 25 si dos últimas cifras son 0 o un múltiplo de 25 (25,50, 75,...).

- Criterio de divisibilidad del 29: Un número es divisible entre 29 si al separar la cifra de las unidades, multiplicarla por 3 y sumar a las cifras restantes el resultado es un múltiplo de 29.
- Criterio de divisibilidad del 31: Un número es divisible entre 31 si al separar la cifra de las unidades, multiplicarlas por 3 y restar a las cifras restantes el numero es múltiplo de 3.
- Criterio de divisibilidad del 50: Un número es divisible entre 50 cuando sus dos últimas cifras son 00 o 50.
- Criterio de divisibilidad del 100: Un número es divisible entre 100 si dicho número termina en 00.
- Criterio de divisibilidad del 125: Un número es divisible entre 125 si sus tres últimas cifras son 000 o múltiplo de 125.

De los criterios anteriores se puede observar que para cada número se aplica un criterio de divisibilidad diferente al que se usa para probar cuando es divisor de cierto tipo de números.

5. Divisibilidad

Sepúlveda y Tinoco (2000, p. 84-85) indican tres proposiciones interesantes relacionadas con la divisibilidad

Proposición 1

Sean los enteros a, b y c. $c|a$ y $c|b$, si y solo si $c|(ma + nb)$, para cualesquiera enteros m y n.

Proposición 2

Sea p un número primo, si $p|ab$ si se tiene que a no es divisible entre p, entonces b es divisible entre p.

Proposición 3 Criterios del 2 y del 5

Para cualquier entero positivo N.

1. N es divisible entre 2 sí y sólo si la cifra de las unidades de N es par (0,2,4, 6 u 8)
2. N es divisible entre 5 sí y sólo si la cifra de las unidades de N es 0 ó 5.

Por otra parte, al hablar sobre la divisibilidad, los autores Graña et. al. (2010, p.45) señalan que "Si $a, b \in \mathbb{Z}$ decimos que a divide a b si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = q \cdot a$, donde q es el cociente de la división de b por a. Para expresar simbólicamente este hecho, se escribe $a|b$. También se dice que b es divisible por a, o que a es un divisor de b. Por ejemplo, 2 divide a 2 (en efecto, $2 = 1 \cdot 2$); 2 también divide a 4, a 6, a 8, a 20, y a todos los números pares. Justamente, un número es par si es divisible por 2".

Al tratar sobre divisibilidad Zuckerman y Niven (1976, p.11) plantean que un entero b es divisible por un entero a, no cero, si existe un entero x tal que $b = ax$ y se escribe a $a|b$.

6. Resultados de la investigación

Aunque se parte del test de Chika y de un proceso de revisión documental para justificar teorías y estudios previos que sirvan de marco teórico a la presente investigación, este trabajo aporta un significativo teorema general de divisibilidad, pero es pertinente presentar los pormenores que permiten presentar los conceptos de pivotes de división y números simbólicos (de carácter iterativo) así como los elementos que dan lugar al teorema y su demostración.

6.1. Aclaratoria

Se debe aclarar primeramente que sobre divisibilidad se conocen hasta la actualidad algunas de las pruebas usuales de divisibilidad por 2, 3, 5, y otros números como se mostró en las figuras 3 y 4 antes presentadas, pero la revisión documental no muestra la existencia de ningún criterio de divisibilidad con caracteristivas de generalización. En efecto, se pudo apreciar que respecto a este tema de muy antigua data y de muchas revisiones por parte de otros matemáticos son poco eficientes o muy particulares para ciertos divisores los tests o pruebas existentes. Sin embargo, el sencillo razonamiento usado por Chika Ofili, con sus características de iteratividad, eficiencia y fácil forma de demostrar fue de gran inspiración para comenzar este trabajo que surge de considerar una serie de aspectos generales sobre los diversos criterios de divisibilidad , entre los cuales están los siguientes:

1. ¿Por qué para cada divisor sea este primo o compuesto hay pruebas totalmente diferentes y en el caso de un número hay muchas veces varios tipos de pruebas?
2. ¿Cómo se haría un criterio que fuese más general y evitara el caos de tener que pensar diferente para cada tipo de divisor?
3. ¿Se puede usar el test de chika para obtener un criterio general de divisibilidad de números?

Para aprender más acerca delos cuestionamientos anteriores fue necesaria la búsqueda de información sobre estos temas en libros y principalmente en internet, de lo cual se pudo precisar que muchas de las pruebas tenían varios detalles comunes entre los cuales son importantes los que se presentan a continuación:

1. Varios métodos truncaban el número original separando las unidades y de allí multiplicaban por cierto número y luego restaban o sumaban de manera que si el segundo número obtenido después de hacer el truncamiento del número y las operaciones cumplía con ser divisible entre el divisor de turno, entonces el número original era divisible.
2. Los métodos buscaban un número representativo o simbólico a partir del original que tendía a disminuir y sobre el cual se aplicaban las iteraciones hasta llegar a un valor cada vez menor que fuese fácil ver que es divisible por el divisor de turno, por el hecho de pertenecer a la tabla de múltiplos de este.
3. Habían muchos criterios diferentes y existían diversas pruebas. Por supuesto entre dichas pruebas había unas más eficientes que otras en términos de rapidez, iterabilidad, fácil manejo, entre otros aspectos.
4. Algunos de ellos tienen cierto carácter iterativo, es decir, se puede comenzar con un número de varios dígitos y el proceso es reiterativo y permite obtener una serie de números tales que si el reducido a dos dígitos o un dígito es divisible, entonces lo son todos los números intermedios hasta el número original. Un ejemplo de esto último es por supuesto la prueba de Chika.

Toda esta revisión bibliográfica y materiales en línea conllevó a un análisis del test de Chika, el cual me gustó por su innovación y el uso de una forma muy simple de comprobación. De manera que lo que Chika vio en miniatura (es decir, para un solo número) pudo visualizarse como algo muy grande. En efecto, quiero presentar las suposiciones e ideas que permitieron desarrollar el criterio general de divisibilidad, las cuales constituyen prácticamente la metodología de trabajo seguida para el desarrollo de este artículo.

6.2. Primer supuesto

Partiendo del hecho de que el test de Chika convierte a $10a+b$ en un número de la forma $a+5b$, donde $a+5b$ sería un numero simbólico o representativo del original, en el cual 5 sería el pivote del divisor 7. Cabría preguntarse lo siguiente: si 5 es el "pivote de división (PD)" para el 7 ¿entonces todo número primo posee un pivote al ser divisor de manera que siempre puede expresarse cada número $10a+b$ como un "número simbólico de la forma general $a+(PD)b$"?

6.3. Pivotes de división para cada divisor

Un pivote de división para un divisor $(PD(D))$ (puede hallarse para cualquier divisor terminado en dígito 1, 3, 7 o 9) es una constante o número por el cual se debe multiplicar las unidades del número original (b) para que dicho producto sumado con el resto del número (a) se obtenga un número simbólico (que es representativo del número original y que va disminuyendo progresivamente sus dígitos a medida que se usa repetitivamente el mecanismo) que sea también divisible entre ese divisor, lo que garantiza que el número original inicial también es divisible entre el mismo divisor.

Para ejemplificar se pueden tomar algunos múltiplos de la tabla del 13 (de dos hasta 10 dígitos), es decir, se puede tomar arbitrariamente la lista 39, 156, 1612, 22568, 812448, 2437344, 17873856, 107243136, 1608647040. (sin embargo, amigo lector pudieras tomar números de 50, 100, 1000, 32546, 800000 e infinita cantidad de dígitos y usando el pivote de divisibilidad del trece iterar sucesivamente hasta llegar desde la cantidad de dígitos original a un número simbólico final con igual o un dígito más que el divisor).

A manera de ejemplo, el pivote del divisor 13 es $PD(13) = 1 \cdot 3 + 1 = 4$, entonces para cada número de los antes enlistados se obtendrán sucesivamente los números simbólicos hasta llegar a 2 o 3 dígitos, ya que 13 tiene 2 dígitos lo cual es presentado en la tabla 1.

Tabla 1: Algunas pruebas con el pivote de división 4 (división entre 13). Elaboración propia.

Numero	*Iteraciones con números simbólicos* *Números simbólicos $a+4b$*
39	$3+4(6)=39$ 39 es divisible entre 13.
156	$15+4(6)=39$ 39 es divisible entre 13. También 156.
1612	$161+4(2)=169$ $16+4(9)=52$ 52, 169 y 1612 son divisibles entre 13.

22568	$2256 + 4(8) = 2288$ $228 + 4(8) = 260$ $26 + 4(0) = 26$ 26, 260, 2288 y 22568 son divisibles entre 13.
812448	$81244 + 4(8) = 81276$ $8127 + 4(6) = 8151$ $815 + 4(1) = 819$ $81 + 4(9) = 117$ $11 + 4(7) = 39$ 39, 117, 819, 8151, 81276 y 812448 son divisibles entre 13.
2427344	$242734 + 4(4) = 242750$ $24275 + 4(0) = 24275$ $2427 + 4(5) = 2447$ $244 + 4(7) = 272$ $27 + 4(2) = 35$ 35 no es divisible entre 13, tampoco lo son los números: 272, 2447, 24275, 242750, 2427344. Nota: no es error del método creado sino de copia de los autores, ya que el número arriba es 2437344.
17873856	son divisibles entre 13
107243136	son divisibles entre 13
1608647040	son divisibles entre 13

El lector puede verificar las tres filas que se dejan incompletas como una forma propia de verificación del criterio expuesto para los pivotes de división.

6.4. Eficiencia de los pivotes de división

La eficiencia del método de los pivotes de división de divisores $PD(D)$ se basa en que cada uno de ellos se halla de la misma tabla de cada divisor.

El lector puede apreciar que para el divisor 7 que lo podemos escribir 07 según lo hecho intuitivamente por Chika el $PD(07) = 0 \cdot 7 + 5 = 5$ y esa forma la presentan todos los pivotes de división de los divisores de la forma $PD(A/7) = A \cdot 7 + 5 = 7A + 5$ para cualquier valor de A.

Por ejemplo, para el número 3517 sus primeros múltiplos son los números siguientes:

$$3517, 7034, 10551, 14068, 17585, 21102, 24619, 28136, 31653, 35170, \ldots, 3517n \text{ ®}$$

Para el primer número de ellos 3517 que es divisor de todos los otros y los que siguen hasta infinito que no se indican es el número a partir del cual se obtienen el pivote de división es $PD(3517) =$

$351 \cdot 7 + 5 = 2462$. Para los primeros números de la lista se tiene que:

3517 genera $351 + 2462 \cdot 7 = 17585$ que está en ®
7034 genera $703 + 2462 \cdot 4 = 10551$ que está en ®
10551 genera $1055 + 2462 \cdot 1 = 3517$ que está en ®
14068 genera $1406 + 2462 \cdot 8 = 21102$ que está en ®

Se vio previamente que para 13 el $PD(13) = 1 \cdot 3 + 1 = 4$ y lo mismo sucede para cualquier número de la forma $A/3$, es decir, $PD(A/3) = A \cdot 3 + 1$. Por ejemplo, para 123 se tiene que sus primeros múltiplos son:

$$123, 246, 369, 492, 615, 738, 861, 984, 1107, 1230, 1353, 1476, \ldots, 123n \ (s)$$

Además, $PD(123) = 12 \cdot 3 + 1 = 37$ y para los primeros números de la lista se tiene que:

123 genera $12 + 37 \cdot 3 = 123$ que está en (s)
246 genera $24 + 37 \cdot 6 = 246$ que está en (s)
369 genera $36 + 37 \cdot 9 = 369$ que está en (s)
492 genera $49 + 37 \cdot 2 = 123$ que está en (s)
615 genera $61 + 37 \cdot 5 = 246$ que está en (s)

Y así sucesivamente se van repitiendo siempre números de la tabla de múltiplos de 123.

6.5. La clave de los pivotes de división y su validez es esta

Si se busca el pivote de división de un divisor cualquiera terminado en $1, 3, 7, 9$ y se quiere conocer su efectividad, el mismo es tal que si se toma el divisor que lo genera como un número ab o de la forma $10a + b$ y se busca su número simbólico este da el divisor o un múltiplo de dicho divisor. Eso es muy parecido a decir que la suma de naturales da otro número natural, es decir, la operación de buscar pivotes de división de un divisor es cerrada en relación al mismo divisor y sus múltiplos. Esto es, que, si se trata al divisor y sus múltiplos hasta infinito como un conjunto, entonces los números simbólicos que se obtengan siempre serán números contenidos en el conjunto que se establece. Esto hace que dichas operaciones brinden la plena seguridad de la divisibilidad de cualquier número múltiplo del conjunto entre el divisor o garantiza su inminente fallo si se trabaja con un número cualquiera que no esté dentro del conjunto, ya que los pivotes de división son exclusivos de un divisor (digamos un primo cualquiera o el primer compuesto de una tabla de multiplicar, como para el 21) y sus múltiplos.

6.6. Números simbólicos

El número simbólico es el que se obtiene luego de separar las unidades del número original usando el pivote de división $PD(D)$. Cada número simbólico es de la forma $a + PD(D)b$ y se obtiene de un número ab o de la forma $10a+b$, el cual si es divisible entre el divisor D de turno indica que el número original es también divisible entre el mismo número. Arriba, cuando se trató de los pivotes de división se pudo apreciar que todos los números múltiplos de 3517 y 123 al buscar números simbólicos vuelven a caer en múltiplos del mismo número y eso pasa así para cada número terminado en $1, 3, 7, 9$.

La obtención de los pivotes de división y el surgimiento de la teoría de los números simbólicos de un número original surgen del estudio para cada primo y esto fue verificado para los primeros primos desde 2 hasta 97 y mucho más allá. Pero se fundamenta en un método inductivo- deductivo, es decir, se basa en el estudio de ciertos casos individuales en los números para llegar a una aplicación de un alcance más general, ya que en efecto, puede apreciarse arriba que funciona para números 3517 y 123 y el conjunto de sus múltiplos que implica avances hacia un método práctico, iterativo, fácilmente entendible y programable y de uso muy amplio en cuanto a su aplicabilidad en el área de la divisibilidad.

A continuación, se presenta como se determinaron los pivotes de división para números primos entre 2 y 13 (solo para evitar aumentar la extensión de este artículo en cuanto a su número de páginas).

Según "el juego numérico de Chika" para el caso de divisibilidad entre 7 sería tomar un número AB (original) y al expresarlo en la forma $A+5B$ (número simbólico) comprobar que 7 divide tanto a AB como a $A+5B$.

Sin embargo, se debe comprobar si existe PD que ocupe la posición del 5. Para ello tomo números divisibles entre el primo escogido y verifico si existe un mismo valor de PD de manera que sea divisible en todos los casos el número.

Para el 2

$$\begin{aligned} &ab \to a + PD(2)\cdot b\\ &22 \to 2 + PD(2)\cdot 2\\ &32 \to 3 + PD(2)\cdot 2\\ &128 \to 12 + PD(2)\cdot 8 \end{aligned}$$

Se puede apreciar que no hay un único $PD(2)$ tal que las expresiones sean todas divisibles entre 2, es decir, para el divisor 2 no hay tal pivote. El lector puede ver que en la línea del 32 daría siempre un impar y eso pasaría si el valor de a es cualquier impar para todo valor de $PD(2)$ y los impares no son en ningún caso divisibles entre 2. En tal sentido, la suposición de existencia de un pivote de división es falsa en el caso del 2. Sin embargo, para los números pares en general se cumple que si b es par entonces es divisible entre 2.

Para el 3

$$\begin{aligned} &ab \to a + PD(3)\cdot b\\ &18 \to 1 + PD(3)\cdot 8\\ &24 \to 2 + PD(3)\cdot 4\\ &126 \to 12 + PD(3)\cdot 6 \end{aligned}$$

Se puede ver que si $PD(3) = 1$ en cada caso la expresión luego de la flecha es divisible entre 3. En efecto, $1 + (1)8 = 9$, $2 + (1)4 = 6$, $12 + (1)6 = 18$. Por lo tanto, el $PD(3) = 1$.

Para el 5

$$\begin{aligned} &ab \to a + PD(5)\cdot b\\ &20 \to 2 + PD(5)\cdot 0 = 2\\ &25 \to 2 + PD(5)\cdot 5\\ &45 \to 4 + PD(5)\cdot 5 \end{aligned}$$

Para 20 ocurre que $PD(5)$ puede tomar cualquier valor y resulta 2 que no es divisible entre 5. Para 25 ningún valor de $PD(5)$ entero genera divisibilidad entre 5 y para 45 sucede lo mismo que para 25. Entonces se cumple que no existe pivote de división para el 5, es decir, no existe $PD(5)$. sin embargo, es ampliamente conocido que todo número cuyo último dígito termine en 5 o 0 es divisible entre 5.

Para el 7

Según Chika $PD(7) = 5$ lo cual ya ha sido verificado

Para el 11

$$33 \to 3 + PD(11) \cdot 3$$
$$66 \to 6 + PD(11) \cdot 6$$
$$132 \to 13 + PD(11) \cdot 2$$

El valor de $PD(11) = 10$ genera los números originales en los 2 primeros casos y 33 en el tercer caso, por lo cual existe pivote de división para el 11, ya que 33 y 66 son divisibles entre 11.

Para el 13

$$26 \to 2 + PD(13) \cdot 6$$
$$156 \to 15 + PD(13) \cdot 6$$
$$312 \to 31 + PD(13) \cdot 2$$

Con $PD(13) = 4$ se obtiene que en el caso de 26 se replica 26 y en los otros 2 casos se genera 39. Como 26 y 39 son divisibles entre 13 entonces $P.D(13) = 4$.

Nota: Hasta ahora se ha descrito una forma de cálculo que resultó de ensayo y error como fue expresado en el resumen de este artículo. Sin embargo, posteriormente se explica una forma ideal en la cual determinar los $PD(D)$ de cada divisor D terminado en 1, 3, 7 y 9 con mucha efectividad, lo cual no deja lugar a posibles dudas.

Cuando se desarrollan los cálculos en forma similar a lo anterior desde 2 hasta 97 se obtiene la tabla 2.

Tabla 2: Números primos desde 2 hasta 97 y sus pivotes de división. Elaboración propia.

div	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97
PD (div)	no	1	no	5	10	4	12	2	7	3	28	26	37	13	33	16	6	55	47	64	22	8	25	9	68

Encontrar dichos pivotes permitió comprender que si es posible obtener números simbólicos para cada divisor primo o compuesto terminados en 1, 3, 7 y 9. Por poner varios ejemplos:

- Si $10a + b$ es divisible entre 3 también lo es $a + b$
- Si $10a + b$ es divisible entre 7 también lo es $a + 5b$ (test de Chika)
- Si $10a + b$ es divisible entre 11 también lo es $a + 10b$
- Si $10a + b$ es divisible entre 37 también lo es $a + 26b$
- Si $10a + b$ es divisible entre 79 también lo es $a + 8b$
- Si $10a + b$ es divisible entre 113 también lo es $a + 34b$
- Si $10a + b$ es divisible entre 377 también lo es $a + 264b$
- Si $10a + b$ es divisible entre 7929 también lo es $a + 793b$
- Si $10a + b$ es divisible entre 79299 también lo es $a + 7930b$

- Si $10a + b$ es divisible entre 37411 también lo es $a + 33670b$
- Si $10a + b$ es divisible entre 793549 también lo es $a + 79355b$
- Si $10a + b$ es divisible entre 1138753 también lo es $a + 341626b$
- Si $10a + b$ es divisible entre 37777777 también lo es $a + 264444444b$

Nota: Aquí no se verificó si todos los divisores son números primos o compuestos.

6.7. Segundo supuesto

Si esto de los pivotes de división $PD(D)$ para cada divisor D y los números simbólicos es verdad entonces ¿Es posible encontrar la representación para todos los primos?, ¿hay una forma única de representación de los $PD(D)$. a pesar de la falta de orden que muestran?, ¿cómo se rompe con la tendencia "aparentemente" desordenada de los $PD(D)$?

De analizar lo antes planteado se hizo importante proceder a ordenar los valores obtenidos de los $PD(D)$ de acuerdo a su valor en orden creciente (desde el menor hasta el mayor valor) como es presentado en la tabla 3.

Tabla 3: Pivotes de división ordenados en forma creciente. Elaboración propia.

Primo (n)	3	19	29	13	7	59	23	79	89	11	17	43	53	73	83	37	31	47	41	67	61	71	97
PD (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13	16	22	25	26	28	33	37	47	55	64	68

6.8. Métodos para calcular los pivotes de división

De las tablas 2 y 3 se pueden establecer dos formas de cómo resolver el problema de hallar un orden o forma de calcular los pivotes de división, que surgieron de mi interés por comprender que pasaba con dichos números y como hallar una forma de comprensión y de representación de los mismos, los cuales presento a continuación.

6.8.1. Método 1: Al estilo de Chika

Para mejorar los procesos el ensayo y error característico del procedimiento de trabajo usado por Chika se pueden encontrar los pivotes de división de una forma más efectiva si se aplican dos pasos previos. Así, si se quieren calcular pivotes de división rápidamente se debe aplicar lo siguiente:

Paso 1: Si se quiere dividir entre un primo particular entonces:

1. Si termina en 1 lo dejo igual (multiplico por 1) por ejemplo: para $11, 21, 51$ uso directamente $11, 21$ y 51 respectivamente. Es decir, que dado que los números terminan en 1 no hace falta practicar ningún cambio en ellos.
2. Si termina en 3 (multiplico por 7) por ejemplo para 3 uso 21, para 13 uso 91, para 23 uso 161
3. Si termina en 7 (multiplico por 3) por ejemplo para 7 uso 21, para 17 uso 51 y par 37 uso 111

4. Si termina en 9 (multiplico por 9) por ejemplo para 19 uso 171, para 29 uso 261 y para 59 uso 531

Paso 2: Expresar el número nuevo $a|b$ o $10a + b$ en la forma $a + PD(p) \cdot b = p$ para cada p primo y de allí despejo $PD(p)$. Como en todos los casos queda $b = 1$ luego de llevar a un número terminado en 1 es muy fácil resolver la ecuación $a + PD(p) = p$ y verificar siempre es fácil obtener $PD(p) = a - p$.

Para 11 uso 11 entonces: $11 = 1 + (P.D) \cdot 1 \quad \rightarrow 1 + P.D(11) = 11 \quad \rightarrow P.D = 10$

Para 31 uso 31 entonces: $31 = 3 + (P.D) \cdot 1 \quad \rightarrow 3 + P.D(31) = 31 \quad \rightarrow P.D = 28$

Para 7 uso $7 \cdot 3 = 21$ entonces: $21 = 2 + (P.D) \cdot 1 \quad \rightarrow 2 + P.D(7) = 7 \quad \rightarrow P.D = 5$

Para 17 uso $17 \cdot 3 = 51$ entonces $51 = 5 + (P.D) \cdot 1 \quad \rightarrow 5 + P.D(17) = 17 \quad \rightarrow P.D = 12$

Para 19 uso $19 \cdot 9 = 171$ entonces $171 = 17 + (P.D) \cdot 1 \quad \rightarrow 17 + P.D(19) = 19 \quad \rightarrow P.D = 2$

Para 13 uso $13 \cdot 7 = 91$ entonces $91 = 9 + (P.D) \cdot 1 \quad \rightarrow 9 + PD = 13 \quad \rightarrow P.D = 4$

Nota: Hacer que cada primo p se lleve a un número terminado en 1 permite expresar el número simbólico en términos de $PD(p)$ e igualarlo al primo p con lo cual el cálculo de los $PD(p)$ es directo. De esta manera se sale del ensayo y el error. Además, se debo aclarar que lo hecho en el caso de los números compuestos que se muestran como 21, 51, 171, 91 son consecuencia de la apreciación del hecho de que trabajar con números terminados en 1 es definitivamente más provechoso que usar los primos, ya que se facilita la búsqueda de los $PD(p)$. Sin embargo, se puede ver en los incisos del paso 1, que, en cada terminación numérica en 1, 3, 7, 9 el número con el que inicio el análisis es siempre un número primo.

Sin embargo, si decido usar un número compuesto cualquiera terminado en 1, 3, 7 y 9 como divisor, igualmente al llegar a un número terminado en 1 se obtendrá su respectivo pivote de división con lo cual se le da el ámbito de generalización a este método.

6.8.2. Método 2: Según los dígitos del número primo

De hacer un estudio y consideración de las tablas 2 y 3 surgen los siguientes criterios de elección de los pivotes de división:

En la tabla 4 se muestran los primos terminados en 9 con pivotes de división.

Tabla 4: Números primos terminados en 9 menores que 100 y sus pivotes de división. Elaboración propia.

$N = Ai\|9$	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
$PD(N)$		2	3			6		8	9	

Como puede apreciarse el $PD(Ai|9)$ siempre es una unidad mayor que Ai, de lo cual puede escribirse que para los primos terminados en 9 tendríamos:

$$PD(Ai|9) = Ai + 1. \quad (1)$$

El lector debe apreciar que en los espacios faltantes si se consideran los números 09, 39, 49, 69, 99 faltarían debajo de manera que haya un orden los números 1, 4, 5, 7, 10. Es decir, que si se hace correspondencia 1 a 1 entre los valores anteriores quedaría $PD(09) = 1$, $PD(39) = 4$, $PD(49) = 5$, $PD(69) = 7$ y $PD(99) = 10$

Al hacer estas apreciaciones la tabla 4 quedaría tal y como se muestra en la tabla 5.

Tabla 5: Números terminados en 9 menores que 100 y sus pivotes de división. Elaboración propia.

$N = Ai\|9$	09	19	29	39	49	59	69	79	89	99
$PD(N)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Un lector detallista puede apreciar en el caso que los números insertados son los compuestos faltantes entre los primos citados previamente. Para ellos se cumplen que:

$PD(09) = 1$ y se verifica que $a = 0, b = 9$ entonces $a + PD(09) \cdot b = 0 + 1 \cdot 9 = 9$
$PD(39) = 4$ y se verifica que $a = 3, b = 9$ entonces $a + PD(09) \cdot b = 3 + 4 \cdot 9 = 39$
$PD(49) = 5$ y se verifica que $a = 4, b = 9$ entonces $a + PD(09) \cdot b = 4 + 5 \cdot 9 = 49$
$PD(69) = 7$ y se verifica que $a = 6, b = 9$ entonces $a + PD(09) \cdot b = 6 + 7 \cdot 9 = 69$
$PD(99) = 10$ y se verifica que $a = 9, b = 9$ entonces $a + PD(09) \cdot b = 9 + 10 \cdot 9 = 99$

Al buscar el pivote de división de 1949 que es primo, según la fórmula sencilla presentada en la ecuación 1 tenemos que:

$PD(194|9) = 194 + 1 = 195$

$PD(1949) = 195$ y se verifica que $a = |194$, $b = 9$ entonces $a + PD(1949) \cdot b = 194 + 9 \cdot 195 = 1949$

El lector puede verificar el cumplimiento de dicha fórmula que se deduce en una manera obvia de la tabla anterior, por lo cual no se requiere presentar una demostración de ello. En efecto, es muy fácil apreciar (para cualquiera con los conocimientos mínimos de matemáticas) que si se siguen aumentando los divisores de 10 en 10 sus pivotes aumentan de 1 en 1 como es presentado en la tabla 5. Es decir, la sucesión de divisores es una sucesión aritmética de primer término 9 y de razón 10 y la sucesión de los pivotes de división es la sucesión de los números naturales. Es evidente que, si hay un comportamiento así, en los primeros primos y compuestos eso seguirá siendo así para los demás números al usarse como divisores hasta infinito.

Para los números terminados en 7, 3 y 1 se hace una revisión de la tabla 3 donde fueron ordenados los valores de los pivotes de división. Se deberían hacer las mismas comprobaciones que se hicieron para los números terminados en 9, es decir, completación de la tabla para los compuestos faltantes, en el caso de los terminados en 7 ir de 7 en 7 en los pivotes, en el caso de los divisores terminados en 3 ir de 3 en 3 en los pivotes y en el caso de los terminados en 1 ir de 9 en 9, lo cual llevaría a caer desde una perspectiva propia en vanas repeticiones que extenderían demasiado el número de páginas del presente artículo.

Para los primos terminados en 7 con sus pivotes de división obtenemos la tabla 6

Tabla 6: Números primos terminados en 7 menores que 100 y sus pivotes de división. Elaboración propia.

$N = Ai\|7$	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
$PD(N)$	5	12		26	33		47			68

Como puede apreciarse en todos los números se cumple que el $P.D$ es siempre el producto de los elementos del primo aumentado en 5. En el caso del 7 se tendría $P.D(7) = P.D(07) = 0 \cdot 7 + 5 = 5$, $P.D(17) = 1 \cdot 7 + 5 = 12$, $P.D(37) = 3 \cdot 7 + 5 = 26$, $P.D(47) = 4 \cdot 7 + 5 = 33$ y así en lo sucesivo.

$$P.D(Ai|7) = Ai \cdot 7 + 5. \tag{2}$$

Si enlistamos los primos terminados en 3 con sus pivotes se genera la siguiente tabla 7

Tabla 7: Números primos terminados en 3 menores que 100 y sus pivotes de división. Elaboración propia.

$N = Ai\|3$	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
$PD(N)$	1	4	7		13	16		22	25	

Similarmente al caso de los primos terminados en 7 puede apreciarse en todos los números que se cumple que el $P.D$ es siempre el producto de los elementos del primo aumentado en 1. En el caso del 3 se tendría $PD(3) = PD(03) = 0 \cdot 3 + 1 = 1$, $PD(13) = 1 \cdot 3 + 1 = 4$, $PD(23) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, $P.D(43) = 4 \cdot 3 + 1 = 13$ y así sucesivamente.

$$P.D(Ai|3) = Ai \cdot 3 + 1. \tag{3}$$

Tabla 8: Números primos terminados en 1 menores que 100 y sus pivotes de división. Elaboración propia.

$N = Ai\|1$	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
$PD(N)$		10		28	37		55	64		

Puede apreciarse en la tabla anterior que siempre el $P.D.$ es la resta del primo menos la cantidad antes del último dígito es decir Ai

$$P.D(Ai|1) = Ai1 - Ai. \tag{4}$$

Nota: como puede apreciarse en las tablas desde la 3 a la 7 se puede ver que indico los números primos y dejo espacios en blanco que corresponderían a los números compuestos que terminarían en los dígitos $9, 7, 3$ y 1. Es fácil apreciar algo sumamente significativo (que queda tácito y aparentemente oculto) en cada una de las tablas y es el hecho de que los números compuestos y primos forman sucesiones numéricas ordenadas. En efecto, puede explicarse esto de la siguiente manera: Si hacemos las inserciones de los números compuestos y tomamos el orden de las sucesiones se tendría una tabla más general que dejaremos indicada hasta el 99 pero que se extiende hasta infinito. (Recordando a Fermat "como este artículo es muy pequeño no puedo colocar todos los números de la demostración en esta página)", pero presento la siguiente tabla 9

Tabla 9: Primos y compuestos hasta 99 terminados en 1, 3, 7 y 9 y sus pivotes de división. Elaboración propia.

$N = Ai\|9$	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
$P.D$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N = Ai\|7$	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
$P.D$	5	12	19	26	33	40	47	54	61	68
$N = Ai\|3$	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
$P.D$	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
$N = Ai\|1$	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
$P.D$	1	10	19	28	37	46	55	64	73	82

Nota: La sucesión de valores sigue cumpliéndose por medio de fórmulas fijas para todos los números hasta infinito, lo cual permite apreciar la eficiencia de este criterio de divisibilidad.

6.8.3. Consecuencias del método 2

Esta forma de calcular los PD. permite tener fórmulas generales para trabajar en la determinación de los pivotes de división y permite hallar los números simbólicos posteriormente. Por otra parte, permite evidenciar un aspecto de gran importancia y es el hecho de que los números primos terminados en un mismo número forman parte de una sucesión que es diferente para el final de cada primo.

- De la tabla 4 se aprecia que los que terminan en 9 forman parte de la sucesión $n + 1$ para todo $n > 0$.
- De la tabla 6 se aprecia que los que terminan en 7 se encuentran en la sucesión $7n + 5$ para todo $n \geq 0$.
- De la tabla 7 se observa que los que terminan en 3 están en la sucesión $3n + 1$ para todo $n \geq 0$.
- De la tabla 8 se puede ver que los de cifra final 1 pertenecen a $10 + 9n$ con $n \geq 0$.
- Los aspectos ante indicados pueden apreciarse con mayor amplitud en la tabla 9 y en cada caso antes descrito es importante señalar que n es el resto del número antes de las unidades. Por ejemplo, para 13 se tiene $n = 1$, para 127 tenemos $n = 12$ y para 1231 tenemos $n = 123$.

Además, hace evidente algo sobre los compuestos que terminan en 1, 3, 7, 9 y es el hecho de que los mismos también poseen $PD(D)$. según lo mostrado en las tablas

Por ejemplo, en la tabla 4 es apreciable que: $PD(9) = 1, PD(39) = 4, PD(69) = 7, PD(99) = 10$

Comprobando por el método 1:

Para el 9 se usa $9 \cdot 9 = 81$ entonces 81	$\rightarrow 8 + PD(9) \cdot 1 = 9$	$\rightarrow PD(09) = 1$
Para el 39 se usa $39 \cdot 9 = 351$ entonces 351	$\rightarrow 35 + PD(39) \cdot 1 = 39$	$\rightarrow PD(39) = 4$
Para el 69 se usa $69 \cdot 9 = 621$ entonces 81	$\rightarrow 62 + PD(69) \cdot 1 = 69$	$\rightarrow PD(69) = 7$
Para el 99 se usa $99 \cdot 9 = 891$ entonces 81	$\rightarrow 89 + PD(99) \cdot 1 = 99$	$\rightarrow PD(99) = 10$

Vea que por el método 2 tenemos que en 9 $n = 0$ y entonces $PD(9) = 0 + 1 = 1$, de forma similar en 39, $n = 3$ y $PD(39) = 3 + 1 = 4$, luego para 69 tenemos $n = 6$ y $PD(69) = 6 + 1 = 7$ y en el caso de 99 ocurre que $n = 9$ y $PD(99) = 10$.

En la tabla 6 se puede ver que $PD(27) = 19, PD(57) = 40, PD(77) = 54, PD(87) = 61$.

Comprobando por el método 1:

Para el 27 se usa $27 \cdot 3 = 81$ entonces 81 $\rightarrow 8 + PD(27) \cdot 1 = 27$ $\rightarrow PD(27) = 19$
Para el 57 se usa $57 \cdot 3 = 171$ entonces 351 $\rightarrow 17 + PD(57) \cdot 1 = 57$ $\rightarrow PD(57) = 40$
Para el 77 se usa $77 \cdot 3 = 231$ entonces 81 $\rightarrow 23 + PD(77) \cdot 1 = 77$ $\rightarrow PD(77) = 54$
Para el 87 se usa $87 \cdot 3 = 261$ entonces 81 $\rightarrow 26 + PD(87) \cdot 1 = 87$ $\rightarrow PD(87) = 61$

Lo anterior cuadra perfectamente con el método 2, ya que el mismo establece que se multiplica n por 7 y se le suman 5.

Para 27 tenemos que $PD(27) = 2 \cdot 7 + 5 = 14 + 5 = 19$
Para 57 tenemos que $PD(57) = 5 \cdot 7 + 5 = 35 + 5 = 40$
Para 77 tenemos que $PD(77) = 7 \cdot 7 + 5 = 49 + 5 = 54$
Para 87 tenemos que $PD(87) = 8 \cdot 7 + 5 = 56 + 5 = 61$

En la tabla 7 se puede observar que $PD(33) = 10, PD(63) = 19, PD(93) = 28$.

Comprobando por el método 1:

Para el 33 se usa $33 \cdot 7 = 231$ entonces 231 $\rightarrow 23 + PD(33) \cdot 1 = 33$ $\rightarrow PD(33) = 10$
Para el 63 se usa $63 \cdot 7 = 441$ entonces 441 $\rightarrow 44 + PD(63) \cdot 1 = 63$ $\rightarrow PD(63) = 19$
Para el 93 se usa $93 \cdot 7 = 651$ entonces 651 $\rightarrow 65 + PD(93) \cdot 1 = 93$ $\rightarrow PD(93) = 28$

En efecto, por el método 2 se verifican los resultados anteriores ya que para números terminados en 3 basta multiplicar n por 3 y sumar 1 entonces:

Para 33 tenemos que $PD(33) = 3 \cdot 3 + 1 = 9 + 1 = 10$
Para 63 tenemos que $PD(27) = 6 \cdot 3 + 1 = 18 + 1 = 19$
Para 93 tenemos que $PD(27) = 9 \cdot 3 + 1 = 27 + 1 = 28$

En la tabla 8 se puede ver que $PD(21) = 19, PD(51) = 46, PD(81) = 73$ y $PD(91) = 82$.

Para el 21 queda 21 $\rightarrow 2 + PD(21) \cdot 1 = 21$ $\rightarrow PD(21) = 19$
Para el 51 queda 51 $\rightarrow 5 + PD(51) \cdot 1 = 51$ $\rightarrow PD(51) = 46$
Para el 81 queda 81 $\rightarrow 8 + PD(81) \cdot 1 = 81$ $\rightarrow PD(81) = 73$
Para el 91 queda 91 $\rightarrow 9 + PD(91) \cdot 1 = 91$ $\rightarrow PD(91) = 82$

Por el método 2 se pueden obtener los valores de los pivotes de división considerando que en el caso de números terminados en 1 se resta el número original menos el valor de n, que es el resto del número que acompaña a las unidades.

Para 21 tenemos que $PD(21) = 21 - 2 = 19$
Para 51 tenemos que $PD(51) = 51 - 5 = 46$
Para 81 tenemos que $PD(81) = 81 - 8 = 73$
Para 91 tenemos que $PD(91) = 91 - 9 = 82$

7. Propiedades de los pivotes de división

Los PD de los números compuestos tienen tres posibles comportamientos:

1. El $PD(n)$ es coincidente con los pivotes de algún primo que es factor del número n

   Ejemplo 3

   Para 9 se obtiene $PD(9) = PD(3) = 1$
   Para 33 se obtiene $PD(33) = PD(11) = 10$

   Esta situación se da en muchos casos entre números que son divisibles. Puede suceder que si se tienen a y b suceda que "a divide a b" o que "b divide a a". Cuando ocurre que no se da división sucede que los dos números tienen el mismo pivote de división dado que los números son divisibles entre un mismo número primo.

2. En otros casos hay dos números compuestos o uno de ellos es primo y el otro compuesto, pero se cumple que uno es múltiplo del otro y sucede que:

   $$PD(Compuesto) = PD(Primo) + k \cdot (Primo)$$

   Ejemplo 4

   Para 21 se obtiene $PD(21) = 19$ y $PD(7) = 5$ se cumple que: $5 + 2 \cdot 7 = 5 + 14 = 19$
   Para 27 se obtiene $PD(27) = 19$ y $PD(3) = 1$ se cumple que: $1 + 6 \cdot 3 = 1 + 18 = 19$

3. Los pivotes de división no cumplen con la propiedad multiplicativa,

   Si $c = a \cdot b$ no siempre se verifica que: $P.D(c) = P.D(a) \cdot P.D(b)$

4. Luego de estudiar los pivotes de división y las posibilidades que ofrecen se puede apreciar que los pivotes de división no son únicos como es revelado en los diversos métodos presentados en el desarrollo de contenido. De hecho, cada pivote de división aquí indicado es el mínimo pivote de división. Esto quiere decir, que si por ejemplo, se cumple que $P.D(7) = 5$ entonces hay una familia de pivotes de división denotado por $F(P.D(N))$ que permiten la división entre 7 que se puede indicar por medio de la sucesión:

   $$F(PD(D)) = PD\text{mín}(D) \pm k \cdot D \text{ con } k \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

   Estas familias de pivotes de división son muy útiles cuando se tienen números con gran cantidad de dígitos en los cuales se puede tomar un valor de k (y el signo negativo) que simplifique la aplicación de iteraciones, ya que en dicho caso usar el valor directo del pivote implica muchísimas iteraciones.

5. En muchos casos cuando se trabaja con un cierto divisor D y se halla su pivote de división $PD(D)$ y se buscan números simbólicos respectivos puede suceder que el número en vez de disminuir tienda a crecer como sucede en el caso de 3517, para el cual dicho divisor y sus múltiplos generan números simbólicos mayores al número original que se considera. Allí se hace pertinente en vez de usar como número simbólico expresiones de la forma

   $$NS1 = a + PD(D) \cdot b \tag{6}$$

   una forma de números simbólicos que haga que el número original tienda a disminuir como

   $$NS2 = a + (PD(D) - D) \cdot b \tag{7}$$

Para ver lo que pasa con las ecuaciones 6 y 7 es importante citar algunos ejemplos:

Ejemplo 5

En el caso de número como 31 se ha dicho que $PD(31) = 28$ de manera que el numero simbólico puede escribirse como $NS1 = a + 28b$, pero según los criterios de divisibilidad, al tratar la división entre 31 puede usarse como número simbólico $NS2 = a + (28 - 31)b = a - 3b$. para 31 donde $a = 3$ y $b = 1$ sucede que $NS1 = a + 28b = 3 + 28(1) = 31$ y $NS2 = 3 - 3(1) = 0$. En este caso la ecuación $NS1$ mantiene una igualdad con el original, pero $NS2$, logra un descenso y de una vez al 0, lo cual es garantía indiscutible de divisibilidad.

Ejemplo 6

En el caso de 17 se ha dicho que $PD(17) = 12$ de manera que el numero simbólico es $NS1 = a + 12b$, pero según los criterios de divisibilidad al tratar la división entre 17 puede usarse como número simbólico $NS2 = a + (12 - 17)b = a - 5b$. así para 17 donde $a = 1$ y $b = 7$ sucede que $NS1 = a + 12b = 1 + 12(7) = 85$ y $NS2 = 1 - 5(7) = -34$. En este caso la ecuación $NS1$ da $85 > 17$, pero $NS2$ da como resultado $-34 < 17$, es decir que mientras $NS1$ aumenta $NS2$ logra un descenso.

Los ejemplos llevan a la posibilidad de poder usar ecuación 6 o la ecuación 7 tomando a $PD(D)$ como $PD\text{mín}(N)$ lo cual lleva a entender la propiedad 4 con mucha más claridad ya que el valor k indica que se puede usar un múltiplo grande según la cantidad de dígitos del número original e igualmente se obtendrían números simbólicos en la tabla del mismo divisor con el que se trabaje que pueden ser como ya se vio positivos o negativos.

Teorema 1 (Teorema general de divisibilidad)

Sea ab un número natural en el cual tenemos que a es el número truncado (es decir todo el número, pero sin las unidades o el último dígito) y b es el número correspondiente a las unidades entonces:

$$ab \text{ es divisible entre } \begin{cases} 2 \text{ si } b \text{ es un número par } 2,4,6,8,0 \quad (\mathbf{1}) \\ 5 \text{ si } b \text{ es } 5 \text{ ó } 0 \quad (\mathbf{2}) \\ \text{Un número terminado en 1 (digamos } n1) \\ \text{si ocurre que el número en la forma} \\ a + (n1 - n) \cdot b \text{ es divisible entre } n1 \quad (\mathbf{3}) \\ \text{Un número terminado en 3 (digamos } n3) \\ \text{si ocurre que el número en la forma} \\ a + (n \cdot 3 + 1) \cdot b \text{ es divisible entre } n3 \quad (\mathbf{4}) \\ \text{Un número terminado en 7 (digamos } n7) \\ \text{si ocurre que el número en la forma} \\ a + (n \cdot 7 + 5) \cdot b \text{ es divisible entre } n7 \quad (\mathbf{5}) \\ \text{Un número terminado en 9 (digamos } n9) \\ \text{si ocurre que el número en la forma} \\ a + (n + 1) \cdot b \text{ es divisible entre } n9 \quad (\mathbf{6}) \end{cases} \tag{8}$$

Demostración. En el teorema planteado es obvio que los incisos (1) y (2) son de conocimiento general, por lo cual no hace falta su demostración. Entonces quedan por demostrar los incisos (3), (4), (5) y

(6).

Para demostrar el teorema general de divisibilidad es necesario considerar que en la forma 1 de la demostración del test de Chika por parte de Simón Ellis se usa $N = 10a+b$ como número a comprobar, la diferencia entre 10 y el divisor, es decir, $(10-7)$ y el número simbólico respectivo al que llega Chika, es decir, $Ns = a + 5b$. En este caso a los diferentes divisores se denotarán por $D(n)$ y a los pivotes de división se representarán por $PD(n)$ de manera para las diferentes pruebas o demostraciones de divisibilidad serán expresadas en términos de congruencia en la forma general dada por:

$$N - (10 - D(n))Ns \equiv 0 \bmod D(n), \forall n \geq 1 \tag{9}$$

Al sustituir, $N = 10a + b$ y $Ns = a + PD(n) \cdot b$ de lo anterior nos queda:

$$10a + b - (10 - D(n))(a + PD(n) \cdot b) \equiv 0 \bmod D(n), \forall n \geq 1 \tag{10}$$

□

7.1. Generalización de los tipos de divisores y de sus pivotes de división

El hecho de generalizar es sumamente práctico, ya que así como se estudia la convergencia de una sumatoria o serie cualquiera o se estudian sucesiones en base a un término enésimo o general y en base a dicho término se pueden hacer generalizaciones de su comportamiento sin estudiar elementos particulares y mucho menos uno a uno.

Dado que no se prueba la división o divisibilidad entre un solo número como en el caso de Chika, sino entre 4 clases de números generales de acuerdo a su dígito final, es pertinente hacer una generalización de tres elementos importantes para cada tipo de número como lo son: el tipo de divisor, la forma del pivote de división de ese divisor y la diferencia (Resto) entre esos dos valores partiendo de la consideración de la forma de cada uno de ellos, por medio de sucesiones representativas de dichas formas numéricas, lo cual se presenta en la tabla 10.

Tabla 10: Generalización de divisores y pivotes de división. Elaboración propia.

Tipo de divisor	Terminado en 1	Terminado en 3	Terminado en 7	Terminado en 9
Forma de divisor $D(n)$	$D(n) = 10n + 1$	$D(n) = 10n - 7$	$D(n) = 10n - 3$	$D(n) = 10n - 1$
Forma del pivote de división $PD(n)$	$PD(n) = 9n + 1$	$PD(n) = 3n - 2$	$PD(n) = 7n - 2$	$PD(n) = n$
Resto $R(n) = D(n) - PD(n)$	$R(n) = n$	$R(n) = 7n - 5$	$R(n) = 3n - 1$	$R(n) = 9n - 1$

La importancia de la generalización realizada en la tabla anterior constituye un artificio fundamental en la demostración del teorema, ya que todos los divisores de acuerdo a su cifra final (1, 3, 7, 9) se puede expresar en una sucesión representativa con lo que se reduce el comportamiento de cada clase de divisores (terminados en 1, terminados en 3, terminados en 7 y terminados en 9) en un único divisor, un único pivote de división y un único resto en cada caso que corresponde a los términos enésimos de las sucesiones enlistadas en la tabla. Entendiéndose desde este planteamiento que la demostración que se hace para el término enésimo o general de las sucesiones tomadas hace evidente el cumplimiento de los casos particulares (método deductivo-inductivo) y la inclusión de valores de desde $n = 1$ y hasta infinito.

Como se necesita verificar que la ecuación 10 garantiza la divisibilidad entre los diferentes $D(n)$ se hace necesario en la misma tener una expresión que dependa únicamente de esa variable, para lo cual la ecuación 10 será convertida en una expresión en términos de $D(n)$ al hacer $PD(n) = D(n) - R(n)$.

Reducción de la ecuación 10

Podemos reescribir la ecuación 10 usando la sustitución de $PD(n) = D(n) - R(n)$ en la forma:

$$10a + b - (10 - D(n))(a + [D(n) - R(n)] \cdot b) \equiv 0 \bmod D(n), \forall n \geq 1$$

Al aplicar distributividad puede expresarse lo anterior en la forma:

$$10a + b - 10(a + [D(n) - R(n)] \cdot b) + D(n)(a + [D(n) - R(n)] \cdot b) \equiv 0 \bmod D(n), \forall n \geq 1$$

Y al desarrollar la primera distributividad y no hacerla donde aparece $D(n)$ queda:

$$10a + b - 10a - 10D(n) + 10R(n)b + D(n)(a + [D(n) - R(n)] \cdot b) \equiv 0 \bmod D(n), \forall n \geq 1$$

Se puede apreciar que los términos con $10a$ pueden eliminarse y además por conocimientos de congruencia, de aritmética modular y de divisibilidad si un término tiene al divisor, en este caso a $D(n)$ la expresión de la izquierda puede expresarse solo en aquellos términos sin $D(n)$, ya que obviamente los términos con $D(n)$ son divisibles y de esa forma solo queda una expresión muy simplificada del tipo:

$$b + 10R(n)b \equiv 0 \bmod D(n), \forall n \geq 1$$

lo anterior puede simplificarse aun más sacando a b como factor común. Al hacerlo la ecuación anterior puede ser llevada a la forma:

$$b(1 + 10R(n)) \equiv 0 \bmod D(n), \forall n \geq 1 \tag{11}$$

Es por ello que en la tabla 10 se decidió encontrar en cada caso el resto $R(n)$ que es la diferencia entre el respectivo divisor y el pivote de división respectivo.

Demostración del inciso (3) *del teorema.* Se procede a verificar la división entre números terminados en 1.

Según la tabla 9 para números terminados en 1 se tiene que $D(n) = 10n + 1$ y $R(n) = n$. al sustituir en la ecuación 11 se obtiene:

$$b(1 + 10n) \equiv 0 mod(1 + 10n), \forall n \geq 1 \tag{12}$$

Entonces como el lado izquierdo de la ecuación 9 tiene al divisor de la derecha se cumple la divisibilidad para toda n, es decir, para $11, 21, 31, 41, \ldots, 10n + 1$, es decir, queda demostrado el inciso 3. □

Demostración del inciso (4) *del teorema.* Se procede a verificar la división entre números terminados en 3.

Según la tabla 9 para números terminados en 3 se tiene que $D(n) = 10n - 7$ y $R(n) = 7n - 5$. al sustituir en la ecuación 11 se obtiene:

$$\begin{aligned} b(1 + 10(7n - 5)) &\equiv 0 \bmod (10n - 7), \forall n \geq 1 \\ b(1 + 70n - 50) &\equiv 0 \bmod (10n - 7), \forall n \geq 1 \\ b(70n - 49) &\equiv 0 \bmod (10n - 7), \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

$$7b(10n-7) \equiv 0 \bmod (10n-7), \forall n \geq 1 \tag{13}$$

Entonces como el lado izquierdo de la ecuación **??** tiene al divisor de la derecha se cumple la divisibilidad para toda n, es decir, para $3, 13, 23, 33, 43, \ldots, 10n-7$, es decir, queda demostrado el inciso 4. □

Demostración del inciso (5) *del teorema.* Se procede a verificar la división entre números terminados en 7.

Según la tabla 9 para números terminados en 7 se tiene que $D(n) = 10n-3$ y $R(n) = 3n-1$. al sustituir en la ecuación 11 se obtiene:

$$\begin{aligned} b(1+10(3n-1) &\equiv 0 \bmod (10n-3), \forall n \geq 1 \\ 3(1+70n-10) &\equiv 0 \bmod (10n-3), \forall n \geq 1 \\ b(30n-9) &\equiv 0 \bmod (10n-3), \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

$$3b(10n-3) \equiv 0 \bmod (10n-3), \forall n \geq 1 \tag{14}$$

Entonces como el lado izquierdo de la ecuación 11 tiene al divisor de la derecha se cumple la divisibilidad para toda n, es decir, para $7, 17, 27, 37, 47, \ldots, 10n-3$, es decir, queda demostrado el inciso 5. □

Demostración del inciso (6) *del teorema.* Se procede a verificar la división entre números terminados en 9.

Según la tabla 9 para números terminados en 9 se tiene que $D(n) = 10n-1$ y $R(n) = 9n-1$. al sustituir en la ecuación 11 se obtiene:

$$\begin{aligned} b(1+10(9n-1) &\equiv 0 \bmod (10n-1), \forall n \geq 1 \\ 3(1+90n-10) &\equiv 0 \bmod (10n-1), \forall n \geq 1 \\ b(90n-9) &\equiv 0 \bmod (10n13), \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

$$9b(10n-1) \equiv 0 \bmod (10n-1), \forall n \geq 1 \tag{15}$$

Entonces como el lado izquierdo de la ecuación 11 tiene al divisor de la derecha se cumple la divisibilidad para toda n, es decir, para $9, 19, 29, 39, 49, \ldots, 10n-1$, es decir, queda demostrado el inciso 5. □

Con las demostraciones de los incisos 3 al 6 del teorema por medio del hallazgo de las ecuaciones desde la ecuación 12 hasta la ecuación 15 se puede concluir que queda demostrada la veracidad del teorema general de divisibilidad.

Corolario 1 En este teorema se cumple la iterabilidad de los números que terminan en 1, 3, 7 y 9. De manera que se debe reducir el número original por medio de números simbólicos intermedios conservando siempre el mismo pivote de división hasta llegar a un numero simbólico con igual cantidad de dígitos que el supuesto divisor y si ocurre que el último número simbólico es divisible entre el número divisor (con el que se pruebe o con el que se trabaje) entonces ocurre que todos los números intermedios también lo son. En caso contrario el número original ni los intermedios son divisibles ya que el número simbólico final tampoco lo es.
Otro aspecto importante es que aparte de que el teorema abarca a todos los primos también incluye a todos los números compuestos terminados en 1, 3, 7 y 9, es decir, puede aplicarse para probar la división entre todos esos compuestos. Algo sumamente importante en relación a los números compuestos, es que se pueden considerar para lograr la divisibilidad algunos de los criterios parciales anteriores, entre ellos los que aplican truncamiento del dígito nas a la derecha multiplicación por dicho número y suma o resta con el numero restante a la izquierda. Sin embargo, hecha por tierra otros criterios antes expuestos, es decir, este teorema sirve para probar la división entre 21, en forma directa (sin especificar que es divisible entre 21 si es divisible entre 3 y entre 7) ni usa criterios por separado sino que prueba la tendencia a divisibilidad de una vez.

A continuación se ejemplifica el uso de este teorema con algunos números:

Ejemplo 7 ¿Es 1642851 es divisible entre 21?

Forma 1 Uso de la ecuación 6.

Aquí $a = 164285,\ b = 1,\ n = 2,\ PD(21) = 21 - 2 = 19$

Usando los números simbólicos según ecuación 6:

$164285 + 1 \cdot 19 = 164304$	iteración 1
$16430 + 4 \cdot 19 = 16506$	iteración 2
$1650 + 6 \cdot 19 = 1764$	iteración 3
$176 + 4 \cdot 19 = 252$	iteración 4
$25 + 2 \cdot 19 = 63$	iteración 5

63 es divisible entre 21

Entonces 21 divide a 63, 252, 1764, 16506, 164304 y 1642851

Forma 2 Uso de la ecuación 7.

¿Pero que pasa si se usa la ecuación 7?

se obtendría $PD(D) - D = 19 - 21 = -2$

$164285 - 1 \cdot 2 = 164283$	iteración 1
$16428 - 3 \cdot 2 = 16422$	iteración 2
$1642 - 2 \cdot 2 = 1638$	iteración 3
$163 - 8 \cdot 2 = 147$	iteración 4
$14 - 7 \cdot 2 = 0$	iteración 5

0 es divisible entre 21

Entonces 21 divide a 0, 147, 1638, 16422, 164283 y 1642851

Por los dos tipos de números simbólicos se llega a la divisibilidad entre 21

Forma 3 Uso de la ecuación 5.

Pero qué pasa si usamos la segunda forma de número simbólico pero con un k

Aquí $a = 164285,\ b = 1,\ n = 2,\ PD(21) = 21 - 2 = 19$ usemos $k = 10$

Así el pivote de división sería $PD(21) = 19 - 10 \cdot 21 = -191$

Es decir los números simbólicos serian de la forma : $a - 191b$.

Al aplicarlo se obtiene

$$\begin{aligned} &164285 - 1 \cdot 191 = 164094 && \text{iteración 1} \\ &16409 - 4 \cdot 191 = 15645 && \text{iteración 2} \\ &1564 - 5 \cdot 191 = 609 && \text{iteración 3} \end{aligned}$$

Entonces 21 divide a 609, 15645, 164094,83 y 1642851

El lector puede apreciar que en las formas 1 y 2 de solución se generaron 5 iteraciones en cada caso y sin embargo en la forma 3 solo se generaron 3 iteraciones. La aplicación de la ecuación 5 con valores grandes de k es fundamental en la disminución del número de iteraciones y muy práctica para tratar los números de muchos dígitos, de manera que el proceso de verificación de la divisibilidad se lleva a cabo de una manera más acelerada e inclusive computacionalmente práctica.

Ejemplo 8 ¿17893044 es divisible entre 39?

Forma 1 Uso de la ecuación 6.

$a = 1789304,\ b = 4,\ n = 3$ y termina en 9 entonces $P.D(39) = 3 + 1 = 4$

$$\begin{aligned} &1789304 + 4 \cdot 4 = 1789320 \\ &178932 + 0 \cdot 4 = 178932 \\ &17893 + 2 \cdot 4 = 17901 \\ &1790 + 1 \cdot 4 = 1794 \\ &179 + 4 \cdot 4 = 195 \\ &19 + 5 \cdot 4 = 39 \end{aligned}$$

Entonces queda 39 que obviamente es divisible entre 39.

De esta forma 39, 195, 1794, 17901, 178932, 1789320, 1789304 y 17893044 son divisibles cada uno de ellos entre 39

Forma 2 Uso de la ecuación 7

¿Pero que pasa si se usa la ecuación 7?

$$PD(D) - D = 4 - 39 = -35$$

$$1789304 - 4 \cdot 35 = 1789164$$
$$178916 - 4 \cdot 35 = 178776$$
$$17877 - 6 \cdot 35 = 17667$$
$$1766 - 7 \cdot 35 = 1521$$
$$152 - 1 \cdot 35 = 117$$

Entonces queda 117 que obviamente es divisible entre 39.

De esta forma 117, 1521, 17667, 178776, 1789164 y 17893044 son divisibles cada uno de ellos entre 39

Forma 3 Uso de la ecuación 5

Pero qué pasa si usamos la segunda forma de numero simbólico pero con un k

Aquí $a = 1789304$, $b = 4$, $n = 3$, $PD(39) = 3 + 1 = 4$ usemos $k = 1000$

Así el pivote de división sería $PD(21) = 4 - 1000 * 39 = -3896$

Es decir los números simbólicos serían de la forma : $a - 3896b$.

Al aplicarlo se obtiene

$$1789304 - 4 \cdot 3896 = 1773720$$
$$177372 - 0 \cdot 3896 = 177372$$
$$17737 - 2 \cdot 3896 = 9945$$
$$994 - 5 \cdot 3896 = -18486$$

Entonces queda -18486 es divisible entre 39.

De esta forma -18486, 9945, 177372, 1773720 y 17893044 son divisibles cada uno de ellos entre 39

La ecuación 5 presenta en momentos el inconveniente de que conlleva a números negativos, pero ciertamente sirve para provocar un descenso acelerado de los números simbólicos. Sin embargo, dicha ecuación es útil, porque se pueden combinar el uso de las ecuaciones 5, 6 y 7 y así lograr hacer una aceleración del trabajo.
Para ejemplificar lo antes expresado se puede ver lo siguiente:
En los números simbólicos hallados en la forma 3 se llega a un número simbólico intermedio 9945 y se usará la forma 2 con ese número, es decir, implica usar la forma $a - 35b$ nuevamente, con $a = 994$ y $b = 5$. Así resulta que:

$$994 - 5(35) = 819$$

Ahora se usará la forma 1, es decir implica usar la ecuación 5 y el número simbólico $a + 4b$ así con $a = 81$ y $b = 9$, entonces se obtiene que:

$$81 + 9(4) = 117$$

Y se llega a un número más manejable según la tabla del 39 donde se ve la divisibilidad

8. Conclusión

Como se puede apreciar que la generación de los pivotes de división y de los números simbólicos unido a lo que llamo en este artículo familia de pivotes de división son conceptos novedosos y constituyen parte de un nuevo enfoque matemático respecto al tema de la divisibilidad. De hecho, la consideración de dichos elementos, así como la abundancia de ejemplos y verificaciones presentadas permiten evidenciar el surgimiento de un criterio de divisibilidad repetitivo o iterativo para todo divisor terminado en 1, 3, 7 y 9 (sea este compuesto o primo) que se basa en tres instancias, las cuales son:

1. la búsqueda del pivote de división del divisor que depende del divisor mismo

2. la generación de los números simbólicos sustitutos o intermedios que son iterables a partir del número original y

3. los procesos de verificación del número simbólico final, el cual si es divisible asegura al mismo tiempo que todos los números simbólicos intermedios también van a ser divisibles entre el divisor que se prueba

Por otra parte, las ecuaciones 5, 6 y 7 permiten poder utilizar tres formas diferentes de trabajar con el número original y poder usar un valor de k en relación al número de dígitos que puede ayudar a disminuir las iteraciones que se requieren de forma más acelerada para hacer de pocos dígitos al número original, en caso de ser posible.

Por otra parte, este criterio general de divisibilidad ofrece fórmulas para determinar los pivotes de división que se relacionan con la cifra final del número en una forma efectiva y que permite simplificar las divisiones para números pares entre (2) dividiendo entre el mismo mientras que el número obtenido siga siendo par, de dividir entre 5 cuando el número termina en 5 o en 0 y generaliza el hecho de dividir entre números primos y compuestos terminados en 1, 3, 7 y 9, aspecto que nunca se ha planteado antes en la historia de las matemáticas. Además, es obvio que cuando el número primo va aumentando también lo hace su respectivo pivote de división según lo indicado en las ecuaciones, en cuyo caso es útil no usar los pivotes de división de las tablas de la 3 a la **??** sino la ecuación 5 con un valor de k que multiplicado por N se aproxime a la cantidad de dígitos del número original. o la ecuación 7, ya que la ecuación 6 en momentos puede generar aumentos del número simbólico en relación al número original.

Respecto a este método, se considera de suma importancia su implementación (ya que es sencilla y fácilmente programable) en supercomputadoras, lo cual resolvería tomando números como los de las faltantes factorizaciones RSA para hallar sus soluciones e ir probando si la lista de los números primos va satisfaciendo el hecho de ser factor de los famosos números de RSA.

Por otra parte, podría programarse su utilización en lenguajes de amplio alcance numérico en supercomputadoras para descubrir las claves públicas y privadas de ciertos códigos en las informaciones que poseen encriptamiento de información.

La importancia de este criterio, es que una idea simple puede servir para resolver un problema de muchísimo tiempo que fue estudiado por muchos matemáticos en relación a la divisibilidad donde se puede generalizar que este proceso matemático no depende de la grandeza del número sino de un trabajo con el mismo divisor a partir de lo cual se puede hallar sus pivotes de división y aplicar un proceso sumamente sencillo para la determinación de la divisibilidad o de su fallo como divisor.

Se debe afirmar por último que disponer de este método evita el tedioso trabajo que se debería llevar a cabo para aprender las diversas estrategias o criterios de divisibilidad.

9. Dedicatoria

En honor a mi padre, José Francisco Villarroel Pérez, mi gran maestro de matemáticas, quien me enseñó como pensar de un enfoque divergente y tener picardía matemática.

10. Bibliografía

[1] Bodi Pascual, Samuel David (2008) Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales. Facultad de educación. Departamento de innovación y formación didáctica. Universidad de Alicante.

[2] Blancas Saavedra, A. E. et al (2020) sobre un criterio de divisibilidad entre 11/ Publicación Semestral Padi Vol. 8 No. 15 (2020) 72–76Apostol, T. M., 1976. Introduction to Analytic Number Theory. Springer Verlag, New York.

[3] Bogomolny, A., 2018. Divisibility by 7, 11, and 13. Ultimo acceso 10 de marzo de 2020. https://www.cut-the-knot.org/blue/div7-11-13.shtml

[4] Dickson, E., 2005. History of the Theory of Numbers. Divisibility and Primality. Vol. 1. Dover, New York.

[5] Glaser, A (1971) history of binary and other nondecimal numeration. Pensilvania: Tomash Publisher

[6] Graña, Matías et al. (2010) Los números: de los naturales a los complejos. Primera edición. - Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica, 2009. 200 p.: il.; 24x19 cm. (Las ciencias naturales y la matemática / juan Manuel Kirschenbaum.) ISBN 978-950-00-0748-1

[7] Kisacanin, B., 2002. Mathematical problems and proof. Combinatorics, number ˘ theory and geometry. Kluwer Academic Publisher, New York.

[8] McDowell, E. L., 2018. Divisibility tests: A history and user's guide. Convergence. DOI: 10.4169/convergence20180513

[9] Mora Flores, Walter. Introducción a la Teoría de Números. Ejemplos y algoritmos. 1ra ed. - Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica. 2010. 217 pp. ISBN Obra Independiente: 978-9968-641-11-1 1. Teoría de números. 2. Algoritmos 3. Programación

[10] Niven, I., Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L., 1991. An introduction to the theory of numbers. John Wiley & Sons Inc., New York.

[11] Niven I. y Zuckerman H. (1976) introducción a la teoría de números. Editorial Limusa. México.

[12] Ore, O., 1988. Number theory and its history. Dover, New York. Preneel, B., Rijmen, V., 1998. Cryptographic primitives for information authentication - state of the art. Lecture Notes in Computer Science 1528, 49–104.

[13] Osorio, K. E y Castañeda E. S. (2014) criterios de divisibilidad en diferentes bases. Asociado a grupo de investigación. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

[14] Renault, M., 2006. Stupid divisibility tricks. 101 ways to stupefy your friends. Math Horizons 14 (2), 18–42. DOI: 10.1080/10724117.2006.11974676

[15] Richmond, B., Richmond, T., 2004. A discrete transition to advanced mathematics. Vol. 3. Pure and Applied Undergraduate Texts. American Mathematical Society, Providence Rhode Island.

[16] Sepúlveda, A. y Tinoco, J. (2000) criterio de divisibilidad en los enteros. Revista Educación matemática. Vol. 12. No. 3. Pp. 82-93

[17] Singler, L., 2002. Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer, New York.

[18] Smith, F., 1971. Divisibility rules for the fifteen primes. The arithmetic teacher 18 (2), 85–87.

[19] Studio Kamada, 2020. Factorization of 11...11 (repunit). Ultimo acceso 10 de ´ marzo de 2020. URL: https://stdkmd.net/nrr/repunit/

[20] Varona Malumbres Juan Luis (2019) Recorridos por la Teoría de Números. Segunda Edición. Ediciones Electolibris, Real Sociedad Matemática Española (R.S.M.E.). 737 páginas

[21] Wells, D., 1986. The penguin dictionary of curious and interesting numbers. Penguin Books, Great Britain.