Problema 1

Determine la suma de todos los números naturales de dos dígitos que al dividirlos por 4 tienen residuo 1.

Solución: Los números son de la forma $4k+1$ con k entero, así, la suma pedida es

$$\sum_{k=3}^{24} 4k+1 = 4\sum_{k=3}^{24} k + \sum_{k=3}^{24} 1 = 4 \cdot 297 + 22 = 1210$$

Problema 2

Considere el siguiente **Juego**: con una cantidad inicial de 40 piedras, los jugadores pueden, en cada turno, quitar 1, 2, 3, 4 ó 5 piedras a su antojo y gana quien se lleve la última piedra. Si suponemos que juegan A y B y que le toca iniciar a A.

¿Cuál es la estrategia ganadora para A?

Nota: Un jugador tiene una estrategia ganadora si puede garantizar su victoria, sin importar como juegue su rival.

Solución: La estrategia de A consiste en dejar, siempre que pueda tomar todas la piedras que quedan y ganar, un número de piedras que sea múltiplo de 6. Una vez que A conoce la estrategia, no le hace falta hacer cuentas más que la primera vez que juega, en que quita 4 piedras, dejando 36. A partir de allí su táctica es sencilla: si B quita m, A quita $6-m$.

Problema 3

Se dispone de una balanza de dos platillos, que funciona correctamente, y de un juego de 13 pesas: una pesa de 1 gr, una de 3 grs, una de 9 grs, una de 27 grs, $\ldots$, y la última de 3^{12} grs.

1. Al colocar un peso de 1000 grs. en uno de los platillos ¿cuáles pesas se deben colocar en el otro para encontrar el equilibrio?

2. Si se coloca un peso de 100 grs. en uno de los platillos, ¿será posible encontrar la manera de colocar pesas en el otro platillo de manera que se mantenga el equilibrio?

3. Si se coloca un peso de 100 grs. en uno de los platillos y se permite que se coloquen pesas en ambos platillos, ¿cuáles pesas se deben colocar para encontrar el equilibrio?

Solución:

1. Basta ver que que $1000 = (1101001)_3$, así, se debe colocar una pesa de 1 grs., una pesa de 27 grs., una pesa de 243 grs. y una pesa de 729 grs.

2. No es posible pues $100 = (10201)_3$ y se necesitarían dos pesas de 9 gramos, pero se dispone de solo una de cada tipo.

2. Observe que $100 = 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^2 + 1 = 1 \cdot 3^4 + (3-1) \cdot 3^2 + 1 = 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 - 1 \cdot 3^2 + 1$, así, $100 + 1 \cdot 3^2 = 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1$. Es decir, se le agrega una pesa de 9 gramos al lado de los 100 gramos y del otro lado se coloca una pesa de 3^4, una de 3^3, y una de 1.