Propuesta sobre la enseñanza de los números racionales

Geovany Sanabria Brenes

Una manera de abordar los números racionales es a través del conocimiento previo de razones. En la actualidad, las fracciones en primaria no son vistas como números sino como porciones de unidades y razones. Así, en la secundaria se debe madurar del concepto de fracción al concepto racional como número.

Los estudiantes en primaria manipulan las fracciones, las representan gráficamente, las ubican en la recta numérica y las escriben en notación decimal, además, conocen la noción de fracciones equivalentes. Todos estos conocimientos, que ya posee el estudiante, permiten abordar el concepto de número racional positivo con los cuadros gráfico y numérico.

En el cuadro gráfico, se puede partir del hecho que dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad. La idea es que antes de introducir los racionales, el estudiante manipule correctamente las fracciones. Así, se inicia considerando la fracción $\frac{a}{b}$, con a y b enteros positivos, como la porción que se obtiene al dividir cada unidad en "b" partes y tomar "a" de esas partes.

Si se define *la magnitud de una fracción* como la expansión decimal asociada a ella, se tiene que la magnitud es tan solo una de tantas características de la fracción.

Ejemplo 1

Jorge lanza la siguiente adivinanza: "Adivine la fracción que pienso sabiendo que su magnitud es $3,12$"

Es imposible matemáticamente precisar la fracción que piensa Juan, pues hay infinitas fracciones con esa característica, entre ellas $\dfrac{312}{100}$, $\dfrac{156}{50}$ y $\dfrac{78}{25}$.

Seguidamente se enumeran las ideas principales de una propuesta para abordar la enseñanza de los números racionales, a partir de la noción de fracción expuesta:

1. **Igualdad de fracciones.**

   Dos fracciones son iguales si son la misma, en todos sus aspectos, no solo en magnitud, es decir, denotando con $=_f$ la igualdad de fracciones, se tiene que

$$\text{Si} \quad \frac{a}{b} =_f \frac{c}{d} \quad \text{entonces} \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d,$$

ya que cada unidad debe ser dividida en el mismo número de partes.

Ejemplo 2

Note que no se cumple que $\dfrac{1}{2} =_f \dfrac{2}{4}$.

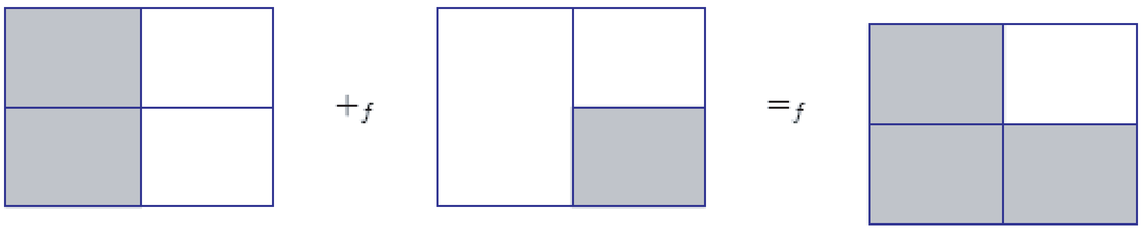
Ejemplo 3

Si $\dfrac{a}{b} =_f \dfrac{1+b}{a-b}$ entonces $a = 1 + b$ y $b = a - b$, de donde se obtiene que $b = 1$ y $a = 2$, por lo tanto $\dfrac{a}{b} =_f \dfrac{1}{2}$.

2. **Suma de fracciones homogéneas.**

   De acuerdo al cuadro gráfico, parece lógico definir en el cuadro numérico $\dfrac{a}{b} +_f \dfrac{c}{b} =_f \dfrac{a+c}{b}$, donde $+_f$ es la operación suma de fracciones.

Ejemplo 4

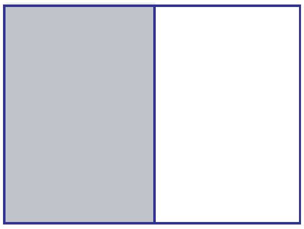


$$\frac{2}{4} \quad +_f \quad \frac{1}{4} \quad =_f \quad \frac{3}{4}$$

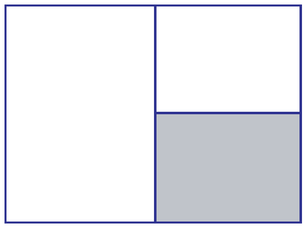
3. **Suma de fracciones heterogéneas solo gráficamente.**

   Si las fracciones son heterogéneas solo tiene sentido sumarlas gráficamente, puesto que tiene divisiones distintas de la unidad.

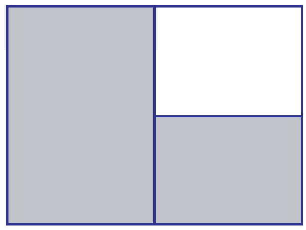
   Ejemplo 5



$+_f$



$=_f$



4. **Fracciones equivalentes.**

   De esta manera, la magnitud de la suma de fracciones heterogéneas establece la necesidad de las fracciones equivalentes. Utilizando a la vez un cuadro numérico, note que la definición tradicional de equivalencia es análoga a decir que dos fracciones son equivalentes si poseen la misma magnitud, es decir

$$\frac{a}{b} \text{ es } \textbf{equivalente} \text{ a } \frac{c}{d} \quad \text{si y solo si} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

   donde la igualdad " = " se refiere solo a la magnitud. A partir de esta definición se puede realizar las observaciones siguientes.

   Ejemplo 6

   Note que $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, sin embargo $\frac{1}{3} =_f \frac{2}{6}$ es falso.

5. **Propiedad de la equivalencia.**

La fracción $\frac{a}{b}$ es equivalente a la fracción $\frac{c}{d}$ si y solo si

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \quad \text{(las fracciones tiene igual magnitud)} \\ \iff ad &= cb \quad \text{(igualdad de enteros)} \end{aligned}$$

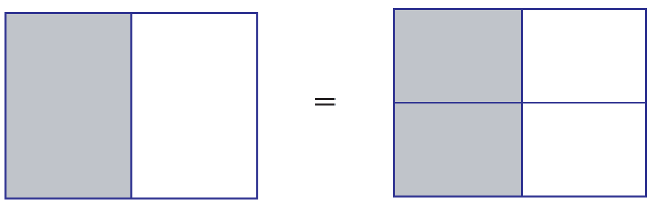
Ejemplo 7

Note que $\frac{4}{7}$ es equvalente $\frac{24}{42}$, pues $4 \cdot 42 = 7 \cdot 24$.

6. **Equivalencia y representación gráfica.**

Gráficamente la equivalencia de fracciones, consiste en porciones que indican la misma cantidad.

Ejemplo 8



$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

7. **Amplificación y simplificación.**

Un resultado importante es que si $\dfrac{a}{b}$ es equivalente a $\dfrac{c}{d}$, entonces $\dfrac{c}{d}$ se obtiene amplificando o simplificando la fracción $\dfrac{a}{b}$. Gráficamente se puede apreciar la amplificación o simplificación de fracciones.

Ejemplo 9

Si $\dfrac{a}{b}$ es amplificada por dos se obtiene una fracción que divide cada parte establecida por $\dfrac{a}{b}$ en dos y toma $2a$ partes.

8. **Conjunto de fracciones equivalentes o clases de equivalencia**.

Del punto anterior, se tiene que todas las fracciones equivalentes a $\dfrac{a}{b}$ se obtienen amplificando o simplificando $\dfrac{a}{b}$, así, si a y b son primos relativos el conjunto de fracciones equivalentes a $\dfrac{a}{b}$ es

$$\left\{\frac{ak}{bk},\ \ k\ \in\ \mathbb{N}\right\}.$$

Ejemplo 10

Como $\dfrac{2}{6}$ es equivalente a $\dfrac{1}{3}$, entonces la clase de equivalencia de $\dfrac{2}{6}$ es la misma que la clase de $\dfrac{1}{3}$, esta clase es $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, ...\right\}$.

9. **Definición de número racional positivo.**

Un racional no es una porción sino tan solo una magnitud, así, a cada racional x se le asocia una infinidad de fracciones, todas aquellas que tengan magnitud x. Es decir, si la fracción $\dfrac{a}{b}$ tiene expansión decimal x, entonces a x se le asocian todas las fracciones equivalentes a $\dfrac{a}{b}$. Así un racional es una característica de una fracción, sin embargo, hay varias fracciones que tendrán esa característica.

Ejemplo 11

El racional $0,5$ es la magnitud de las fracciones $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{4}$ y $\dfrac{3}{6}$, entre otras.

10. **Los números racionales y las clases de equivalencia.**

Así, de acuerdo a los puntos anteriores, a cada clase de equivalencia se le asocia un racional y a cada racional una clase de equivalencia, esto debido a que las fracciones de misma clase tienen igual magnitud.

Ejemplo 12

A la clase de equivalencia $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, ...\right\}$ se le asocia el racional $(1 \div 2) = 0,5\,;$ y al racional $1,\overline{3} = (4 \div 3)$ se le asocia la clase de equivalencia de $\dfrac{4}{3}$.

Aquí es un buen momento para ver el paso de notación decimal a notación fraccionaria.

11. **Notación fraccionaria de un racional.**

Dado que basta con tomar una fracción cualquiera del conjunto de fracciones equivalentes para determinar el número racional asociado a ese conjunto, entonces se puede utilizar cualquiera de la fracciones del conjunto para denotar el racional.

Ejemplo 13

El racional $\dfrac{3}{2}$ está asociado a la clase de equivalencia de la fracción $\dfrac{3}{2}$.

12. **Fracciones iguales y equivalentes.**

Si dos fracciones son iguales entonces son equivalentes, es decir,

$$\frac{a}{b} =_f \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

sin embargo el recíproco es falso. De acuerdo al púnto anterior, note que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se puede interpretar de dos formas: las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes o los racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales. Dichas interpretaciones son equivalentes.

Ejemplo 14

Note que $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}$, pues el racional $\frac{1}{2}$ es igual al racional $\frac{2}{4}$ y la fracción $\frac{2}{4}$ no es equivalente a la fracción $\frac{1}{4}$.

13. **Suma de magnitudes de fracciones (Suma de racionales en notación fraccionaria).**

Si las fracciones que denotan los racionales son homogéneas por el punto anterior, se obtiene el mismo algoritmo que para la suma de fracciones, pues

$$\text{si } \frac{a}{b} +_f \frac{c}{b} =_f \frac{a+c}{b} \text{ entonces } \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

En el caso de fracciones heterogéneas, el proceso de homogenizar puede ser visto como cambiar inteligentemente los representantes de los racionales por fracciones homogéneas.

Ejemplo 15

Realicemos la suma de racionales $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. En este caso, se tiene que

$$\text{al racional } \frac{1}{2} \text{ se le asocia la clase } \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{6}, \tfrac{4}{8}, ...\right\} \text{ y}$$

$$\text{al racional } \frac{1}{3} \text{ se le asocia la clase } \left\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{6}, \tfrac{3}{9}, \frac{4}{12}...\right\},$$

Entonces el racional $\frac{1}{2}$ será representado por $\frac{3}{6}$ y el otro por $\frac{2}{6}$, así

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}. \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Cambio de representantes de los}\\ \text{racionales}\end{array}\right)$$

Por otro lado: $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}.$ $\qquad \left(\text{Pues } \frac{3}{6}+\frac{2}{6}=_f \frac{5}{6}\right)$

Por lo tanto: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.$

Posteriormente se puede introducir el uso del mínimo común múltiplo para facilitar esa selección inteligente de los representantes y finalmente el algoritmo

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Luego se puede expender las definiciones y algoritmos a todos los racionales, positivos y negativos.

Así, se propone introducir los números racionales por medio de un juego de cuadros entre el cuadro gráfico (representación gráfica de las fracciones), el cuadro numérico (expansiones decimales) y el cuadro algebraico (clases de equivalencia).

Base de la propuesta presentada

La propuesta presentada se basa en el hecho que en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ la relación definida por

$$(a,b)\,R\,(c,d) \quad\Longleftrightarrow\quad ad=bc,$$

es una relación de equivalencia. Así se propuso llamarles a los elementos de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ **fracciones** y a los elementos del conjunto cociente $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/R$ **racionales**, es decir, cada clase de equivalencia es un racional.

Bajo esta óptica es incorrecto hablar de suma de fracciones, a no ser que se desarrolle desde un cuadro gráfico, de lo contrario, lo correcto es referirse a la suma de racionales.

Estas notas van dirigidas a los profesores de secundaria. Se espera que les sirva de ayuda para mejoras la enseñanza de los números racionales.