Propuesta sobre la enseñanza de la demostración de implicaciones

Geovany Sanabria Brenes

1 La enseñanza de la demostración

Durante el primer año de estudios en las carreras de matemática y enseñanza de matemática usualmente se estudia la enseñanza de la demostración, en donde se quiere ver la matemática, en su esencia y estructura, como una disciplina que se encarga de formular, estructurar y sintetizar modelos generales, con los cuales se pueden simular y representar diversos problemas para solucionarlos.

Las demostraciones, consideradas problemas de conclusión conocida, engendran en el estudiante una nueva concepción de matemática muy distinta a la presente en secundaria. En esta nueva concepción se introducen conceptos desconocidos en su mayoría: axiomas, teoremas, definiciones, ...; además se introduce la práctica de habilidades: conjeturar, realizar un contraejemplo, inducir, deducir, justificar y generalizar.

El éxito que tenga el estudiante en su carrera es, sin dudas, proporcional al apredizaje y desarrollo de estas habilidades. Por lo tanto, sería importante educar a los estudiantes en la forma de articular sus pensamientos para resolver un problema de conclusión conocida, y una forma de lograrlo es mediante una comprensión adecuada de los métodos de demostración. En este documento interesan los métodos de demostración de implicaciones.

Generalmente, la enseñanza de la demostración de una implicación se desarrolla de dos maneras:

1. **Desde la lógica matemática.**

   En este enfoque se abordan las conectivas lógicas, las tablas de verdad, las leyes de la lógica, las inferencias lógicas y posteriormente la demostración de proposiciones de la forma "$H \Longrightarrow C$". Usualmente los métodos de demostración de implicaciones se estudian por medio de la enseñanza de Teoría de Conjuntos o se recurre a la Teoría de Números, en proposiones como:

(a) Si $A \subseteq B$ entonces $A \cap B = A$.

(b) Si p es primo entonces $2^{p-1}(2^p - 1)$ es un número perfecto.

2. **Desde la lógica intuitiva.**

   Se recurre a una interpretación intuitiva del implica, en donde se le enseña al estudiante que para demostrar teoremas de la forma "$H \Longrightarrow C$", se asume la hipótesis H y se utiliza junto con axiomas, definiciones y teoremas demostrados para deducir la conclusión C. Aquí es común introducir la demostración junto con la estructura de campo totalmente ordenado de $\mathbb{R}$ ó con la Teoría de Conjuntos.

En ambas orientaciones, la enseñanza de los métodos de demostración de implicaciones es ligada con la enseñanza de una teoría de la matemática, esto genera ciertas dificultades, veamos:

1. La teoría suele tener muchas definiciones o axiomas, por lo que se enseña la demostración dentro de una estructura muy amplia. Así, al tener tantos elementos, la enseñanza de la demostración se puede complicar para el estudiante.

2. Se abordan dos objetos de enseñanza simultáneamente: la demostración y la teoría. El estudiante no puede concentrarse únicamente en desarrollar la habilidad de demostrar, debe aprender axiomas, definiciones y teoremas.

3. La demostración dependiente de una teoría. El estudiante tiene que desligar los métodos de demostración de la teoría y transponerlos a otra.

Antes de continuar, debe quedar claro que no se pretende criticar estas dificultades, recuerde que el proceso de enseñanza aprendizaje implica que el estudiante supere algunas dificultades.

Así, se propone simplemente un cambio de enfoque, enseñar los métodos de demostración de implicaciones por medio de pequeñas estructuras axiomáticas, evitando dichas dificultades.

Seguidamente se presentan los métodos de demostración y ejemplos acordes con lo propuesto. Dicha presentación se realizará desde la lógica matemática, por ello se utilizarán definiciones de la lógica (contingencia, falacia, Modus Ponens, ...) que en caso de duda el lector los puede encontrar en la mayoría de libros sobre este tema. Dicha presentación es fácilmente adaptable a la segunda orientación: la lógica intuitiva.

2 Propuesta: la demostración de implicaciones

2.1 ¿Cómo demostrar que $H \Longrightarrow C$ es verdadero?

Observe la tabla de verdad del implica:

H	**C**	**H $\Longrightarrow$ C**	
V	V	V	
V	F	F	(*)
F	V	V	
F	F	V	

Si se quiere que $(H \Longrightarrow C)$ sea verdadero, basta probar que el caso $(*)$ no se cumple. Es decir, es suficiente demostrar si H es verdadero entonces se puede deducir que C es verdadero y por lo tanto no se puede dar el caso en que $(H \Longrightarrow C)$ sea falso. De lo anterior, parece razonable denominar a H **hipótesis** (proposición cuyo valor de verdad se asume) y a C **conclusión** (proposición cuyo valor de verdad se desea averiguar. Si por el contrario a partir de H y de otras proposiciones verdaderas de la teoría se deduce $\neg C$, entonces $(H \Longrightarrow C)$ es una contingencia y no una falacia.

En uno proceso de demostración de $H \Longrightarrow C$ se utiliza además de H otras "hipótesis" que no son mencionadas, estas pueden ser axiomas o teoremas.

De esta manera, se concluye que para demostrar una implicación, debe asumirse la veracidad de la hipótesis y se deduce que la conclusión es verdadera. Esta conclusión se debe evidenciar en la demostración de implicaciones:

Teorema: $H \Longrightarrow C$

Prueba.
Hipótesis: H (se asume)
hqm: C (Se deduce)
DESARROLLO DE LA DEDUCCIÓN DE C
A PARTIR DE H

La manera en que se realice la deducción de C a partir de H obedece a un método de demostración, por el cuál entenderemos un modelo a seguir para resolver el problema de la demostración. Desde este enfoque no se considera a la contrapositiva como un método de demostración de implicaciones, sino como una herramienta que me permite transformar el problema. El uso de la contrapositiva en la demostración sigue el siguiente modelo:

Teorema: $H \Longrightarrow C$

Prueba.
Utilizando la contrapositiva el teorema es equivalente:
$$\neg\, C \Longrightarrow \neg\, H$$
Por lo tanto se procede a demostrar esta proposición.
Hipótesis: $\neg\, C$ (se asume)
hqm: $\neg\, H$ (Se deduce)
DESARROLLO DE LA DEDUCCIÓN DE $\neg\, H$
A PARTIR DE $\neg\, C$

Como se observa la contrapositiva transforma la implicación en otra implicación, donde la deducción de la conclusión a partir de la hipótesis se debe de realizar utilizando alguno de los métodos de demostración. Seguidamente se expondrán los métodos de demostración de implicaciones más comunes.

2.2 Primer método: Directo

En este método se parte de que H es verdadero y por medio de las reglas de inferencias, leyes de la lógica, axiomas, definiciones o teoremas, se deduce que C es verdadero. Un modelo para este método es:

Hipótesis: H
Hay que mostrar (hqm): C

	Supongamos H verdadero	H se asume verdadero
1)	$\Longrightarrow C_1$ es verdadero	(Por Teorema,Def,Axioma,...)
2)	$\Longrightarrow C_2$ es verdadero	(Por Teorema,Def,Axioma,...)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n)	$\Longrightarrow C_n$ es verdadero	(Por Teorema,Def,Axioma,...)
$n+1$)	$\Longrightarrow C$ es verdadero	(Por Teorema,Def,Axioma,...)
	$\therefore C$ verdadero	

Observaciones:

1. Note que en realidad a partir de los teoremas definiciones o axiomas, entre otros, se

tienen las siguientes implicaciones tautológicas:

$$\begin{array}{rc} 1) & H \Longrightarrow C_1 \\ 2) & (H \wedge C_1) \Longrightarrow C_2 \\ & \vdots \\ n+1) & (H \wedge C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_n) \Longrightarrow C \end{array}$$

Al asumir que H es verdadero, aplicando las reglas de inferencia (Modus Ponens y adjunción) se tiene que C es verdadero. En efecto, si

$$H \text{ es verdadero}, \qquad (*)$$

por Modus Ponens a $(*)$ y (1) se tiene que

$$C_1 \text{ es verdadero.}$$

Por adjunción, se tiene que

$$H \wedge C_1 \text{ es verdadero}, \qquad (**)$$

y nuevamente por Modus Ponens a $(**)$ y (2) se tiene que

$$C_2 \text{ es verdadero.}$$

El proceso de deducción continúa hasta llegar a que C es verdadero.

2. En el modelo, cada deducción es conveniente justificarla, indicando las premisas, reglas, axiomas o teoremas en que se basó.

Ejemplo 1 *Sea A un conjunto de números reales que cumple las siguientes proposiciones (axiomas):*

$$\begin{array}{lcll} \textit{Axioma } 1) & 3 & \in & A \\ \textit{Axioma } 2) & x & \in & A \Longrightarrow 3x+1 \in A \\ \textit{Axioma } 3) & x & \in & A \wedge y \in A \Longrightarrow (x+y) \in A \end{array}$$

Pruebe las siguientes proposiciones.
Teorema 1. *Si* $7 \in A$ *entonces* $25 \in A$.

Teorema 2. *Si* $2 \in A$ *entonces* $27 \in A$.

Prueba. *Utilizaremos el método directo para demostrarlos.*

Demostración del Teorema 1

Hipótesis: $7 \in A$

hqm: $25 \in A$

1)		$7 \in A$	
2)	$\Longrightarrow$	$3 \cdot 7 + 1 = 22 \in A$	*(Axioma 2)*
3)	$\Longrightarrow$	$22 \in A \wedge 3 \in A$	*(Adjunción del axioma* 1*)*
4)	$\Longrightarrow$	$25 \in A$	*(Axioma 3)*

Demostración del Teorema 2

Hipótesis: $2 \in A$

hqm: $27 \in A$

1)		$2 \in A$	
2)	$\Longrightarrow$	$3 \cdot 2 + 1 = 7 \in A$	*(Axioma 2)*
3)	$\Longrightarrow$	$25 \in A$	*(Teorema* 1*)*
4)	$\Longrightarrow$	$25 \in A \wedge 2 \in A$	*(Adjunción de* 1*)*
5)	$\Longrightarrow$	$27 \in A$	*(Axioma 3)*

2.3 Segundo método: Contradicción

Este método sigue el siguiente modelo:

Hipótesis: H (se asume verdadera pero no se usa)
Hay que mostrar (hqm): C
Supongamos por contradicción $\urcorner C$ es verdadero
Utilizando Axiomas, definiciones o Teoremas se obtienen
las siguientes deducciones:

$$\begin{array}{l} \urcorner C \text{ es verdadero} \\ \Longrightarrow I_1 \text{ es verdadero} \\ \Longrightarrow I_2 \text{ es verdadero} \\ \qquad\vdots \\ \Longrightarrow I_n \text{ es verdadero} \\ \Longrightarrow \urcorner H \text{ es verdadero} \end{array}$$

Por lo tanto se concluye:

$$\urcorner H \text{ es verdadero}$$

Pero H se asume verdadero, por lo que se llega a
una contradicción $\Longrightarrow\Longleftarrow$. Por lo tanto lo supuesto $(\urcorner C)$
es falso, es decir C es verdadero.

Ejemplo 2 *Sea A un conjunto de números reales que cumple las siguientes proposiciones* *(axiomas):*

$$\begin{array}{rcl} \textit{Axioma } 1) \quad 5 & \in & A \\ \textit{Axioma } 2) \quad x & \in & A \wedge y \in A \Longrightarrow (x+y) \in A \end{array}$$

Pruebe las siguientes proposiciones.
Teorema 1.*Se tiene que* $13 \notin A \Longrightarrow 4 \notin A$.

Teorema 2. *Si* $(3x-6) \notin A$ *entonces* $(x \notin A \vee -11 \notin A)$

Prueba. *Utilizaremos el método de la contradicción para demostrarlos.*

Demostración del Teorema 1

Hipótesis: $13 \notin A$
hqm: $4 \notin A$

Suponga por contradicción que: $4 \in A$

$$\begin{array}{llll} \textit{1)} & & 4 \in A & \\ \textit{2)} & \Longrightarrow & 4 \in A \wedge 4 \in A & \textit{(Idempotencia)} \\ \textit{3)} & & 4+4=8 \in A & \textit{(Axioma 2)} \\ \textit{4)} & \Longrightarrow & 8 \in A \wedge 5 \in A & \textit{(Adjunción del axioma } 1) \\ \textit{5)} & \Longrightarrow & 13 \in A & \textit{(Axioma 2)} \\ & & \Longrightarrow\Longleftarrow & \textit{Contradice la hipótesis} \end{array}$$

Por lo tanto lo supuesto es falso, es decir
$\therefore 4 \notin A$

Demostración del Teorema 2

Hipótesis: $(3x-6) \notin A$
hqm: $(x \notin A \vee -11 \notin A)$

Suponga por contradicción que: $x \in A \wedge -11 \in A$

$$\begin{array}{llll} 1) & & x \in A \wedge -11 \in A & \\ 2) & \Longrightarrow & 2x \in A \wedge -11 \in A & \textit{(Axioma } 2\textit{)} \\ 3) & \Longrightarrow & 3x \in A \wedge -11 \in A & \textit{(Axioma } 2:1 \textit{ y } 2\textit{)} \\ 4) & \Longrightarrow & (3x-11) \in A & \textit{(Axioma } 2\textit{)} \\ 5) & \Longrightarrow & (3x-11) \in A \wedge 5 \in A & \textit{(Adjunción del axioma } 1) \\ 6) & \Longrightarrow & (3x-6) \in A & \textit{(Axioma } 2\textit{)} \\ & & \Longrightarrow\Longleftarrow & \textit{Contradice la hipótesis} \end{array}$$

Por lo tanto lo supuesto es falso, es decir
$\therefore x \notin A \vee -11 \notin A$

2.4 Tercer método: Reducción al absurdo

Este método suele ser confundido con el método de contradicción. Cuando se realiza una prueba utilizando reducción al absurdo se suele seguir el siguiente modelo

Hipótesis: H (se asume verdadera y se usa)
Hay que mostrar $(hqm):$ C
Supongamos por contradicción $\neg C$ es verdadero
Entonces $\neg C \wedge H$ es verdadero (adjunción de la hipótesis)
Utilizando Axiomas, definiciones o Teoremas se obtienen
las siguientes deducciones:

$$\begin{array}{l} \neg C \wedge H \text{ es verdadero} \\ \Longrightarrow I_1 \text{ es verdadero} \\ \Longrightarrow I_2 \text{ es verdadero} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \Longrightarrow I_n \text{ es verdadero} \\ \Longrightarrow F_0 \text{ es verdadero } (F_0 \text{ es falsa}) \\ (\Longrightarrow\Longleftarrow). \end{array}$$

Note que el supuesto $(\neg C)$ me lleva a un absurdo
Por lo tanto lo supuesto $(\neg C)$ es falso, es decir:
C es verdadero.

La gran diferencia con el método de contradicción es que en este método se utiliza la hipótesis y la negación de la contradicción para llegar a un absurdo.

Ejemplo 3 *Sea B un conjunto de números reales que cumple las siguientes proposiciones (axiomas):*

$$\begin{array}{rrcl} \textit{Axioma } 1) & 3 & \in & B \\ \textit{Axioma } 2) & x & \in & B \wedge y \in B \Longrightarrow xy \in B \\ \textit{Axioma } 3) & 6 & \notin & B \end{array}$$

Pruebe las siguientes proposiciones.
Teorema 1. *Se cumple que:* $\dfrac{5}{2} \in B \Longrightarrow \dfrac{4}{5} \notin B$.

Teorema 2. *Si* $\dfrac{1}{x} \in B$ *entonces* $\sqrt{2}x \notin B$.

Prueba. *Utilizaremos el método de reducción al absurdo para demostrarlos.*

Demostración del Teorema 1

Hipótesis: $\frac{5}{2} \in B$

hqm: $\frac{4}{5} \notin B$

Suponga por contradicción que: $\frac{4}{5} \in B$

$$
\begin{array}{llll}
1) & & \frac{4}{5} \in B & \\
2) & \Longrightarrow & \frac{4}{5} \in B \wedge \frac{5}{2} \in B & \textit{(Adjunción de la hipótesis)} \\
3) & \Longrightarrow & \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2} = 2 \in B & \textit{(Axioma 2)} \\
4) & \Longrightarrow & 2 \in B \wedge 3 \in B & \textit{(Adjunción del axioma 1)} \\
5) & \Longrightarrow & 6 \in B & \textit{(Axioma 2)} \\
 & & \Longrightarrow\Longleftarrow & \textit{(Absurdo: contradice el axioma 3)}
\end{array}
$$

Por lo tanto lo supuesto es falso, es decir

$$\therefore \frac{4}{5} \notin B$$

Demostración del Teorema 2

Hipótesis: $\frac{1}{x} \in B$

hqm: $\sqrt{2}x \notin B$

Suponga por contradicción que: $\sqrt{2}x \in B$

$$
\begin{array}{llll}
1) & & \sqrt{2}x \in B & \\
2) & \Longrightarrow & \sqrt{2}x \in B \wedge \frac{1}{x} \in B & \textit{(Adjunción de la hipótesis)} \\
3) & \Longrightarrow & \sqrt{2}x \cdot \frac{1}{x} = \sqrt{2} \in B & \textit{(Axioma 2)} \\
4) & \Longrightarrow & \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in B & \textit{(Axioma 2)} \\
5) & \Longrightarrow & 2 \in B \wedge 3 \in B & \textit{(Adjunción del axioma 1)} \\
6) & \Longrightarrow & 6 \in B & \textit{(Axioma 2)} \\
 & & \Longrightarrow\Longleftarrow & \textit{(Absurdo: contradice el axioma 3)}
\end{array}
$$

Por lo tanto lo supuesto es falso, es decir

$$\therefore \sqrt{2}x \notin B$$

Finalmente, observemos un ejemplo de un estructura donde se combinan los métodos vistos para demostrar los teoremas.

Ejemplo 4 *Considere las siguientes proposiciones:*

Definición 1. Una palabra es invertible, si es permitida y la palabra que se obtiene al invertir el orden de sus letras es permitida.

Definición 2. Se dice que X es una palabra permitida, o simplemente que es permitida, si X es una sucesión de letras tomadas de $\{G, R, E\}$ que es permitida.

Axioma 1. GRE es permitida

Axioma 2. Si una palabra con dos E seguidas es permitida entonces la palabra que se obtiene al eliminar las dos E seguidas es permitida.

Axioma 3. Una palabra con una R es permitida si y solo si la palabra que se obtiene al cambiar la R por RE es permitida.

Axioma 4. Si X y Y son permitidas entonces la palabra XY es permitida.

Axioma 5. GRG no es permitida.

Pruebe los siguientes proposiciones.

Teorema 1. Se tiene que GR es permitida.

Teorema 2. Si $GERE$ es invertible $\Longrightarrow$ $GERRGGR$ es permitida.

Teorema 3. Teorema 3. Si $EGGE$ no es invertible $\Longrightarrow$ EGE no es permitida.

Teorema 4. Teorema 4. Si GE es permitida $\Longrightarrow$ GRE no es invertible.

Ejemplo 5 Prueba.

1. *Note que el Teorema* 1 *no es una implicación, sin embargo se puede considerar que es una implicación donde las hipótesis son los 5 axiomas y la conclusión es: GR es permitida.*

Demostración del Teorema 1

1)		*GRE es permitida*	*(Axioma 1)*
2)	$\Longrightarrow$	*GR es permitida*	*(Axioma 3)*

2. *El Teorema 2 se demostrará utilizando el método directo.*

Demostración del Teorema 2

Hipótesis: *GERE es invertible*

hqm: *GERRGGR es permitida.*

1)		*GERE es invertible*	
2)	$\Longrightarrow$	*GERE es permitida* $\wedge$ *EREG es permitida*	*(Definición 1)*
3)	$\Longrightarrow$	*GEREEREG es permitida*	*(Axioma 4)*
4)	$\Longrightarrow$	*GERREG es permitida*	*(Axioma 2)*
5)	$\Longrightarrow$	*GERRG es permitida*	*(Axioma 3)*
6)	$\Longrightarrow$	*GERRG es permitida* $\wedge$ *GR es permitida*	*(Adjunción teorema 1)*
7)	$\Longrightarrow$	*GERRGGR es permitida*	*(Axioma 4)*

3. *El Teorema 3 se demostrará utilizando el método de contradicción.*

Demostración del Teorema 3

Hipótesis: *EGGE no es invertible*

hqm: *EGE no es permitida.*

Suponga por contradicción que: EGE es permitida.

1)		*EGE es permitida*	
2)	$\Longrightarrow$	*EGE y EGE son permitidas*	*(Idempotencia)*
3)	$\Longrightarrow$	*EGEEGE es permitida*	*(Axioma 4)*
4)	$\Longrightarrow$	*EGGE es permitida*	*(Axioma 2)*
5)	$\Longrightarrow$	*EGGE es invertible*	*(Inversa de EGGE es ella misma)*
		$\Longrightarrow\Longleftarrow$	*Contradice la hipótesis*

Por lo tanto lo supuesto es falso, es decir

$\therefore$*EGE no es permitida.*

4. *El Teorema 4 se demostrará utilizando el método de reducción al absurdo.*

Demostración del Teorema 2

Hipótesis: *GE es permitida*

hqm: *GRE no es invertible.*

Suponga por contradicción que: GRE es invertible.

1)		*GRE es invertible*	
2)	$\Longrightarrow$	*GRE es invertible* $\wedge$ *GE es permitida*	*(Adjunción de la hipótesis)*
3)	$\Longrightarrow$	$\wedge$ *GE es permitida*	*(Definición 1)*
4)	$\Longrightarrow$	*GE es permitida* $\wedge$ *ERG es permitida*	*(Conmutatividad)*
5)	$\Longrightarrow$	*GEERG es permitida*	*(Axioma 4)*
6)	$\Longrightarrow$	*GRG es permitida*	*(Axioma 2)*
		$\Longrightarrow\Longleftarrow$	*(Absurdo: contradice el axioma 5)*

Por lo tanto lo supuesto es falso, es decir

$\therefore$ *GRE no es invertible.*

Esperamos que al lector le sea de ayuda estas notas.

3 Ejercicios

1. Sea A un conjunto de números reales que cumple las siguientes proposiciones (axiomas):

$$
\begin{array}{lrcl}
1) & 5 & \in & A \\
2) & x & \in & A \Longrightarrow 3x+2 \in A \\
3) & x & \in & A \wedge y \in A \Longrightarrow (x+y) \in A \\
4) & 7 & \notin & A
\end{array}
$$

Demuestre los siguientes teoremas utilizando el método indicado.

(a) $3 \in A \Longrightarrow 16 \in A.$ (directo)

(b) $4 \in A \Longrightarrow 23 \in A.$ (directo)

(c) $11 \in A \Longrightarrow (28 \in A \vee 31 \notin A).$ (directo)

(d) $3 \in A \wedge 11 \in A \Longrightarrow 51 \in A.$ (directo)

(e) $x \in A \wedge y \in A \Longrightarrow (3x + 2y + 17) \in A$ (directo)

(f) $x \in A \wedge y \in A \Longrightarrow (7x + 3y + 16) \in A$ (directo)

(g) $11 \notin A \Longrightarrow 3 \notin A$ (contradicción)

(h) $24 \notin A \Longrightarrow (4 \notin A \vee 12 \in A)$ (contradicción)

(i) $(3y + z + 7) \notin A \Longrightarrow \left(y \notin A \vee \frac{z}{2} \notin A\right)$ (contradicción)

(j) $(3y \notin A \wedge (z + 10) \notin A) \Longrightarrow (y \notin A \wedge z \notin A)$ (contradicción)

(k) $3 \in A \Longrightarrow 1 \notin A$ (reducción al absurdo)

(l) $21 \in A \Longrightarrow -31 \notin A$ (reducción al absurdo)

(m) $x \in A \wedge y \in A \Longrightarrow (-3 - 3x - y) \notin A$ (reducción al absurdo)

(n) $2 \notin A$

(o) $(\exists x \in A)\left(x^2 - 17x + 70 = 0\right)$

2. Sea A un conjunto de números reales que cumple (axioma):

$$(\forall n \in \mathbb{Z})\,[\, n \in A \Longrightarrow (n + 1) \in A]$$

Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Si son verdaderas demuéstrelas y si no, brinde un contraejemplo (indique un conjunto A que cumple las hipótesis pero no la conclusión). Nota: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

(a) $10 \in A \Longrightarrow 13 \in A.$

(b) $11 \in A \Longrightarrow 9 \in A.$

(c) $-9 \in A \Longrightarrow 9 \in A.$

(d) A puede ser el conjunto $\{4, 5, 6, 7, 8, ...\}$.

(e) A puede ser el conjunto $\left\{-1 + \sqrt{5}, 5, 6, 7, 8, ...\right\}$.

(f) A puede ser el conjunto $\left\{\sqrt{2}\right\}$

(g) $1 \in A \Longrightarrow A = \mathbb{N}.$

(h) $1 \in A \Longrightarrow \mathbb{N} \subseteq A.$

(i) $c \in A \wedge c \in \mathbb{N} \Longrightarrow (c+3) \in A$.

(j) $d \in A \Longrightarrow (d+1) \in A$

(k) $m \in A \Longrightarrow (\forall p \in \mathbb{N})\,[(n+p) \in A]$

(l) $-c \in A \wedge c \in \mathbb{N} \Longrightarrow c \in A$.

(m) $1 \in A \wedge A \subseteq \mathbb{N} \Longrightarrow A = \mathbb{N}$.

3. **Construcción del conjunto de los números naturales**.
La idea es construir formalmente este conjunto(suponga que no lo conoce) a partir de 5 axiomas (**Los Axiomas de Peano**):

Axioma 1. 1 es un numero natural.

Axioma 2. Para todo n numero natural, existe un único número natural n^+ llamado el sucesor de n.

Axioma 3. El número natural 1 no es sucesor de algún número natural.

Axioma 4. Si n y m son números naturales tales que $n^+ = m^+$ (el sucesor de n es igual al sucesor de m) entonces $n = m$

Axioma 5. Si A es un conjunto formado por números naturales que cumple:

$$\begin{array}{ll} 1) & 1 \in A \\ 2) & b \in A \Longrightarrow b^+ \in A \end{array}$$

entonces A es el conjunto de los números naturales, denotado por $\mathbb{N}$.

Se denota $1^+ := 2$ y $(1^+)^+ := 3$. Utilice estos axiomas para demostrar los siguientes teoremas.

(a) Pruebe que no existe un número natural a tal que $(a^+)^+ = 1^+$.

(b) Pruebe que

i. $2^+ = 3$

ii. $2 \neq 3$

iii. Si $a \neq 2$ entonces $a^+ \neq 3$.

iv. Si $c^+ = 2$ entonces $c = 1$.

(c) Pruebe que el conjunto $B = \{x \in \mathbb{N} | x \neq x^+\}$, cumple las condiciones del axioma 5 y por lo tanto $B = \mathbb{N}$, es decir, ningún número natural es igual a su sucesor.

(d) Se define la suma de números naturales como la operación $+$ que cumple:

$$\begin{cases} a + 1 = a^+ \\ a + b^+ = (a+b)^+ \end{cases}$$

Pruebe que

i. $1 + 2 = 3$

ii. $2 + 1 = 1 + 2$

iii. $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$

(e) Se define el producto de números naturales como la operación $\cdot$ que cumple:

$$\begin{cases} a \cdot 1 = a \\ a \cdot b^+ = a \cdot b + a \end{cases}$$

Pruebe que

i. $2 \cdot 2 = 3^+$

ii. $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$

iii. $(a \cdot b) \cdot 1 = a \cdot (b \cdot 1)$

iv. $2\,(1 + 2) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2$