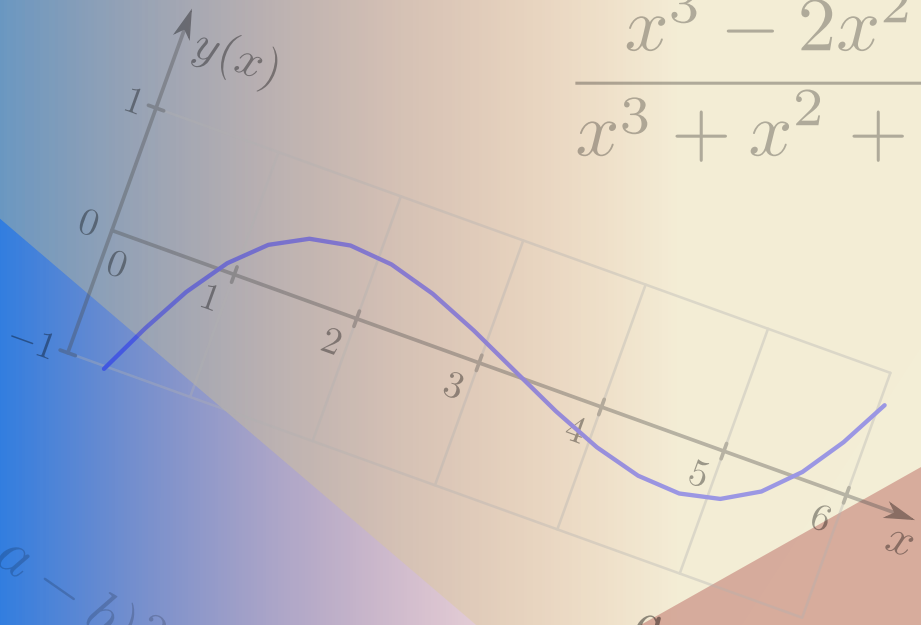
Ejercicios semanales

Matemática General

Preguntas conceptuales



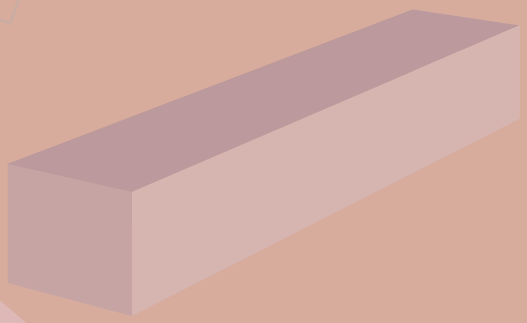
$$\frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^3 + x^2 + 9x + 9} = 0$$

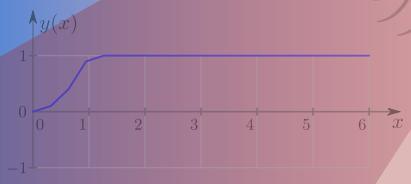
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -3 \\ x - 3 & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{a}{b}$$

$$(-a-b)^2 = ((-1)(a+b))^2 = (-1)^2(a+b)^2 = (a+b)^2$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$





$$-x^2 + 4x - 3 \leq 0$$

Instituto Tecnológico de Costa Rica

2019

Escuela de Matemática

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Prof. Reiman Acuña C. (Editor)

Ejercicios semanales

Matemática General

Ejercicios con respuestas para la metodología de **Instrucción entre pares**

I Semestre, 2019

Compartir

https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/

Revista digital

Matemática, Educación e Internet. (https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).

Índice general

1 Números Reales — Página 6

Semana 1 — Página 6

1.1 Operaciones básicas y definiciones 6

2 Expresiones Algebraicas — Página 8

Semana 2 — Página 8

2.1 Operaciones con polinomios 8

Semana 3 — Página 11

2.2 Factorización 11

Semana 4 — Página 15

2.3 Operaciones Combinadas y Racionalización 15

3 Ecuaciones — Página 18

Semana 5 — **Página 18**
3.1 Ecuaciones 18

4 Inecuaciones — **Página 21**

Semana 6 — **Página 21**
4.1 Inecuaciones 21

5 Valor Absoluto — **Página 24**

Semana 7 — **Página 24**
5.1 Valor Absoluto 24

6 Funciones — **Página 28**

Semana 8 — **Página 28**
6.1 Funciones: Conceptos y Dominio Máximo 28

Semana 9 — **Página 32**
6.2 Operaciones con funciones y Función lineal 32

Semana 10 — **Página 36**
6.3 Funciones Cuadraticas, Inyectivas, Sobreyectivas, Biyectivas e Inversas 36

7 Trigonometría — **Página 39**

SEMANA 11 ____ **PÁGINA 39**
7.1 Razones, Funciones y Propiedades Trigonométricas 39

SEMANA 12 ____ **PÁGINA 43**
7.2 Identidades y Funciones Inversas 43

SEMANA 13 ____ **PÁGINA 46**
7.3 Ecuaciones Trigonométricas 46

SEMANA 14 ____ **PÁGINA 48**
7.4 Aplicaciones de la Trigonometría 48

8 FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA. ECUACIONES Y PROBLEMAS ____ **PÁGINA 52**

SEMANA 15 ____ **PÁGINA 52**
8.1 Función Exponencial y Logarítmica 52

SEMANA 16 ____ **PÁGINA 55**
8.2 Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas. Problemas 55

BIBLIOGRAFÍA ____ **PÁGINA 57**

9 SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS ____ **PÁGINA 59**

Créditos

Esta práctica es una edición de ejercicios para la cátedra de Matemática General durante el primer semestre del 2019. Los mismos han estado sujetos a revisiones por parte de diferentes compañeros. La idea es un material sugerente en la creación de **preguntas conceptuales o de calentamiento** dentro la metodología **Instrucción entre pares** con base en la teoría respectiva. Utilice el símbolo 👁 para ir a las soluciones de cada ejercicio o devolverse.

Reiman Acuña C. (editor)

Profesores Colaboradores:

Reiman Acuña (coordinador)
Erick Chacón
Nuria Figueroa
Grettel Gutiérrez
Mario Marín
Marcela Marrero
Carlos Monge
Cristhian Paéz
Juan Pablo Prendas
Lourdes Quesada
Bryan Rodríguez (coordinador)
Zuleyka Suárez

Este material se distribuye bajo licencia Craetive Commons "Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional" (CC BY-NC-ND 4.0) (ver; https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es)

Citar como:

Acuña Chacón Reiman (ed.). "Ejercicios Semanales Matemática General. Preguntas Conceptuales" Revista digital, Matemática, Educación e Internet.
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/practicas/

Sobre la metodología de instrucción entre pares

De acuerdo con Mazur y Watkins (2010) ([4]), la tutoría entre pares es una técnica interactiva que promueve la discusión en pequeños grupos de estudiantes sobre un tema en desarrollo, favoreciendo de este modo el aprendizaje entre pares y la discusión entre sujetos que están en un mismo nivel de aprendizaje.

La tutoría entre pares promueve que los estudiantes desarrollen el pensamiento crítico, pues deben argumentar sus respuestas frente a otros miembros del grupo lo cual repercute en mejorar la buena comunicación e interacción efectiva, además de ser un buen mecanismo para evaluar (formativa o cuantitativamente) por parte del docente, la comprensión de conceptos matemáticos en clase. De esta forma, se aumenta la participación de los estudiantes y se logran identificar dificultades en la comprensión de conceptos matemáticos durante la sesión presencial.

Tal vez el aspecto más importante de la instrucción entre pares es la discusión de los educandos, donde el hecho de convencer al compañero genera más retroalimentación que la propia explicación del docente.

En estudios realizados en otros países, se ha comprobado que con esta metodología:

1) Hubo un alto índice de aprobación en los cursos.

2) Los estudiantes mostraron una percepción muy favorable en cuanto a clases más dinámicas, mayor motivación, buen ambiente de aprendizaje y mayor participación.

3) Se produjo un mejoramiento en el aprendizaje de conceptos cuando los estudiantes contestaban las preguntas en “pares” que cuando lo hacían individualmente.

Por argumentos como los anteriores, es que se quiere poner en práctica esta metodología en el curso de Matemática General pues históricamente ha presentado altos índices de deserción y reprobación estudiantil.

Zuleyka Suárez

Sobre el pensamiento matemático en el curso de Matemática General y sus conductas

El pensamiento matemático es sin duda una de las herramientas más importantes que se deben desarrollar para un adecuado desempeño tanto para el estudiante como para el futuro profesional. Científicos, ingenieros y en general todos los profesionales deben estar familiarizados con ideas y procedimientos matemáticos. Algunas disciplinas requieren más matemática y otras no tanto, pero al final, una buena formación en esta disciplina incide en mejores condiciones para el desempeño profesional.

En el curso de Matemática General nos hemos propuesto redoblar esfuerzos para fomentar que los y las estudiantes desarrollen con mayor profundidad destrezas matemáticas fundamentales y con ello contribuir con un mejor entendimiento de los conceptos que tendrán que aprender a lo largo de su formación profesional dentro del TEC.

Lo primero que hay que aclarar es que por pensamiento matemático entendemos una capacidad manifiesta de las personas para abordar con actitud adecuada la resolución de algunos problemas. Queremos decir con esto que la persona tiene predisposición, una actitud constructiva y herramientas para abordar y encontrar soluciones a problemas.

Las herramientas matemáticas se pueden dividir en dos grandes segmentos. Por un lado los algoritmos, las fórmulas o en general esquemas de aplicación. Solemos aplicar estos esquemas al atender una situación en la que identificamos que una fórmula es apropiada, por ejemplo fórmula general o ley de senos. Si bien saber estas fórmulas es fundamental para poder resolver con éxito distintos problemas, lo cierto es que conocerlas sin un contexto apropiado del concepto detrás de ellas las hace menos eficientes en la resolución de problemas. Por otro lado está el conocimiento conceptual, ese conocimiento de los principios o ideas matemáticas que han dado origen a las fórmulas y que son necesarios para una comprensión integral de los conceptos.

En el curso de Matemática General buscamos contribuir con una mejor formación básica en los estudiantes a través de un esquema formación que integre de manera sistemática el uso adecuado de fórmulas o esquemas con el análisis y la reflexión basados en el dominio de los conceptos fundamentales.

Proponemos actividades que le permiten al estudiante mejorar el dominio de la técnica y a la vez explorar y profundizar en los conceptos generales que subyacen a los contenidos. También se proponen actividades que estimulan habilidades cognitivas importantes en los cursos de matemática y de ciencias en general.

Para cerrar estas ideas es necesario que el estudiante reconozca que en matemática,

al igual que en casi todas las disciplinas, el trabajo, la dedicación y la persistencia son los mejores aliados para lograr el éxito. Los animamos a utilizar este material con dedicación y esmero, sabiendo que la clave del éxito en la resolución de problemas es anteponer el pensamiento al procedimiento. La manera más productiva de resolver un problema de matemática empieza por invertir un tiempo prudente en reconocer los elementos en el problema, es decir, los datos y relaciones relevantes que puedo descubrir para luego, a partir de conocimientos y análisis, decidir cómo se va a resolver.

Mario Marín

Capítulo 1

Números Reales

Semana 1

1.1 Operaciones básicas y definiciones

1.1.1 ¿En qué se diferencian las expresiones $c \times b + d$, $c + b \times d$ y $(c + b) \times d$? Calcule los valores $5 \times 4 + 3$, $5 + 4 \times 3$ y $(5 + 4) \times 3$.

1.1.2 Considere la expresión $3 + \dfrac{10}{b}$ donde b es un número entero. ¿qué valores puede tomar b para que esta expresión sea entera?

1.1.3 Considere la expresión $\dfrac{2n + 12}{n}$ en la cual n es un valor entero. ¿Qué valores de n hacen que esta expresión sea entera?

1.1.4 Un valor a se eleva al cuadrado y el resultado de eleva al cubo, si se obtiene el valor 729, ¿cuál es el valor de a?

1.1.5 Mario debe realizar la operación $\dfrac{7}{3} + \left(2 - \dfrac{1}{3}\right) \times 3$ pero se equivoca y obtiene por respuesta 12, ¿cuál es un posible error que comete Mario?

1.1.6 Silvia tiene dos hojas rectangulares de 8 por 11 pulgadas. Primero, recorta tres partes iguales a lo largo de una de las hojas y luego

recorta a la mitad (a lo ancho) una de esas partes para obtener un rectángulo que pinta de rojo. Posteriormente, hace lo mismo con la otra hoja pero empezando el proceso a lo ancho (lado más corto) y pinta de morado el rectángulo que resulta. ¿Cuál de los rectángulos posee mayor área?

1.1.7 Una vaca come gran cantidad de alimento. Cada vez que llega come el 10% de lo que hay. El dueño, sabiendo de esta situción, después de que la vaca se marcha llega y repone el 10% del peso que queda. Sin embargo, después de cinco ciclos (llegadas de la vaca y reposiciones de alimento), el dueño descubre que la cantidad de alimento ha disminuido. Encuentre la explicación a esta situación.

1.1.8 Una parcela de tierra se reparte así: la primera persona recibe la mitad del total, la segunda persona recibe un tercio del total y la tercera persona recibe lo que queda (que corresponde a 1000 metros cuadrados). ¿Cuánto medía la propiedad orginalmente?

1.1.9 Lucía toma un número y lo eleva a la cuarta potencia; Marco toma el mismo número y lo eleva a la quinta potencia. Analiza ¿cuál de ellos obtendrá el valor más grande?

1.1.10 Sean a y b números reales, tales que $0 < a < b$. ¿Se cumple que $|a - b| = a - b$?

Capítulo 2

Expresiones Algebraicas

Semana 2

2.1 Operaciones con polinomios

2.1.1 Pablo divide un monomio entre un monomio. Pablo sugiere que el resultado es otro monomio. ¿Está Pablo en lo correcto? Justifique.

2.1.2 Al multiplicar los polinomios $3x + 5z + 8k$ y $4l - 3m - 4p$ se obtiene otro polinomio con 9 monomios ¿Es correcta esta afirmación? Justifique.

2.1.3 Considere la siguiente expresión

$$(a+b)^2 = (-a-b)^2$$

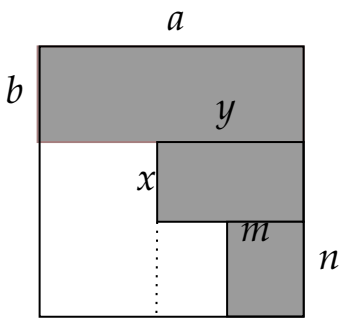
¿Es válida la igualdad propuesta? Justifique.

2.1.4 Considere la siguiente expresión

$$(4x + 2mn)^3$$

¿Cuál es el coeficiente numérico que acompaña al término mnx^2? Justifique.

2.1.5 Considere la siguiente figura



Si se sabe que $y = \frac{a}{2}$ y $m = \frac{y}{2}$, ¿se puede afirmar que $a(b+x+n) - y(x+n) - nm = ab + xy + mn$?

2.1.6 Para una tarea de matemática general, Sofía debe simplificar la expresión $\sqrt{(x-1)^2} + x$, con $x < 1$. Por lo que ha realizado tres procedimientos distintos:

Procedimiento 1	Procedimiento 2	Procedimiento 3
$\sqrt{(x-1)^2} + x$	$\sqrt{(x-1)^2} + x$	$\sqrt{(x-1)^2} + x$
$= \lvert x-1 \rvert + x$	$= (x-1) + x$	$= \sqrt{x^2 - 2x + 1} + x$
$= -(x-1) + x$	$= 2x - 1$	$= x + \sqrt{-2x+1} + x$
$= -x + 1 + x$		$= 2x + \sqrt{-2x+1}$
$= 1$		

Indique cuál de esto es el procedimiento correcto que Sofía debe presentar al profesor.

2.1.7 En una división de polinomios el cociente es $4x^2 - x + 1$, el divisor es $-x + 1$ y el residuo es cero. ¿Cuál es el dividendo?

2.1.8 Si el grado del polinomio $P(x)$ es 5 y el grado del polinomio $Q(x)$ es 4, con certeza se puede afirmar que el grado del polinomio $P(x)+Q(x)$ es 5. ¿Falso o verdadero?

2.1.9 Al realizar el primer paso para el desarrollo de la expresión $(2x-y)^2-(2x+y)^2$ se obtiene

a) $4x^2-y^2-(4x^2+y^2)$

b) $4x^2-y^2-4x^2+y^2$

c) $4x^2-2xy+y^2-(4x^2+2xy+y^2)$

d) $4x^2-4xy+y^2-(4x^2+4xy+y^2)$

2.1.10 Ernesto simplificó una operación y obtuvo el siguiente resultado

$$a^{10}$$

¿Se puede asegurar que $(\sqrt{a\sqrt[3]{a}})^{12}=a^{10}$?

Semana 3

2.2 Factorización

Resuelva cada una de las siguientes situaciones

2.2.1 Juan divide divide el polinomio $x^3 - 3x^2 + 2$ entre $x - a$. ¿Cuál debe ser el valor de a para que el cociente sea $x^2 + x + 4$?

2.2.2 Al factorizar $3x^3 + 4x^2 + 4x + 1$ se puede asegurar que

a) Hay 2 factores

b) Hay 3 factores

c) Hay 4 factores

d) No hay factores

2.2.3 Una expresión que posee al menos 3 ceros reales distintos es la siguiente

a) $x^4 - 1$

b) $x^4 + 3x^2 + 2$

c) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4$

d) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$

2.2.4 Bryan tiene la siguiente expresión

$$3x^3 - 2x^2 - 3xy^2 + 2y^2$$

Y desea factorizarla. Para esto, ha realizado los siguientes procedimientos

Procedimiento 1

$$3x^3 - 2x^2 - 3xy^2 + 2y^2$$

$$= \left(3x^3 - 2x^2\right)\left(2y^2 - 3xy^2\right)$$

$$= x^2(3x-2)y^2(2-3x)$$

$$= x^2(3x-2)\left(-y^2\right)(-2+3x)$$

$$= (3x-2)\left(x^2\right)\left(-y^2\right)$$

Procedimiento 2

$$3x^3 - 2x^2 - 3xy^2 + 2y^2$$

$$= \left(3x^3 - 2x^2\right) + \left(2y^2 - 3xy^2\right)$$

$$= x^2(3x-2) + y^2(2-3x)$$

$$= x^2(3x-2) - y^2(-2+3x)$$

$$= (3x-2)\left(x^2 - y^2\right)$$

$$= (3x-2)(x-y)(x+y)$$

¿Cuál de estos procedimientos es el correcto? Justifique

2.2.5 El residuo al dividir un polinomio entre $(x+1)$ es 6. ¿Se puede asegurar que el polinomio buscado es $x^{100} - x^{99} + 4$?

2.2.6 Si sabe que $(x-1)$ es un factor de un polinomio de grado 3, ¿se puede asegurar que $x^3 - x^2 + 8x - 8$ es un polinomio que puede tener este factor?

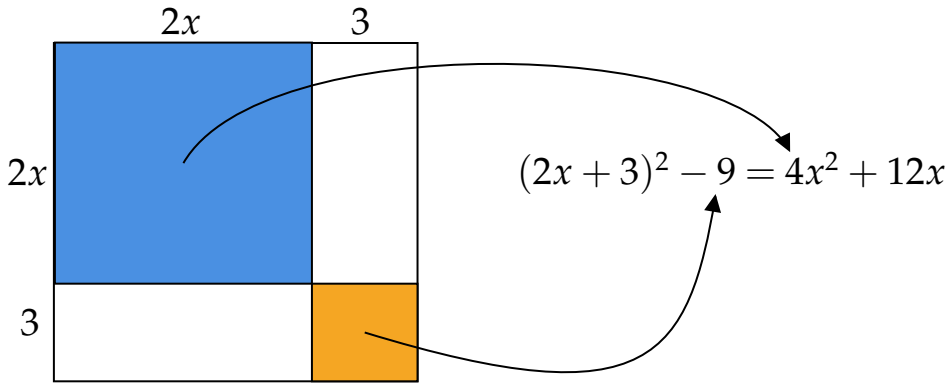
2.2.7 El siguiente es un polinomio que no se puede factorizar

a) $x^2 + 1$

b) $x^3 + 1$

c) $x^5 + 1$

2.2.8 De acuerdo con la siguiente figura



¿Permite la figura justificar la igualdad que se presenta al lado derecho?

2.2.9 Melissa quiere realizar la factorización completa del polinomio $5xa-4by-5xb+4ay$. Para esto, utiliza diversas técnicas, y llega al siguiente proceso.

Procedimiento

$$5xa-4by-5xb+4ay$$
$$=(5xa-4by)+(-5xb+4ay)$$
$$=(5xa-4by)-(5xb-4ay)$$
$$=(5x-4y)(a-b)$$

El tutor de Melissa le indica que, según sus anotaciones, la respuesta correcta es $(5x+4y)(a-b)$. Con esto, ella piensa que su error está en un signo. ¿Puede indicar cuál fue el verdadero error? Justifique.

2.2.10 Al factorizar el polinomio $x^3 - 3x - 2$, se obtiene el resultado

a) $(x-2)(x+1)^2$

b) $(x-2)^2(x+1)$

c) $(x-2)(x+1)$

d) $(x-2)^2(x+1)^2$

Semana 4

2.3 Operaciones Combinadas y Racionalización

2.3.1 Carlos simplifica la expresión $\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}$ como $\left(1+\frac{3}{x}\right)$. ¿Es correcta el resultado de Carlos? ¿Qué debe considerar para que la expresión esté bien definida?

2.3.2 Julián simplifica la expresión $\frac{x^2-a^2}{(x-a)a^2}$ como $\frac{x^2}{(x-a)}$. ¿Es correcta el resultado si se sabe que $x \neq a$?

2.3.3 El primer paso al desarrollar la operación

$$\frac{3y^{-2}-y^{-1}}{\frac{3}{y}-\frac{y}{3}}$$

es

a) $\dfrac{\frac{1}{3y^2}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{y}-\frac{y}{3}}$

b) $\dfrac{\left(\frac{3}{y}\right)^2-\frac{1}{y}}{\frac{3}{y}-\frac{y}{3}}$

c) $\dfrac{\frac{3}{y^2}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{y}-\frac{y}{3}}$

2.3.4 La expresión

$$\frac{x}{x^2-1}+\frac{x-1}{x(x+1)}+\frac{x-1}{(x+1)^2}$$

tiene por mínimo común múltiplo para los denominadores

a) $(x-1)(x+1)$

b) $x(x-1)(x+1)$

c) $x(x-1)(x+1)^2$

d) $(x-1)(x+1)^2$

2.3.5 ¿Bajo qué condiciones se cumple que las expresiones algebraicas presentes son iguales?

$$\begin{aligned}\frac{x^2-1}{x^3-1} &= \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\\ &= \frac{x+1}{x^2+x+1}\end{aligned}$$

2.3.6 ¿Cuál igualdad es correcta?

a) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{-1} \div 3x+y = \left(x+\frac{1}{x}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{3x}+y$

b) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{-1} \div 3x+y = \left(x+\frac{1}{x}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot x+y$

c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{-1} \div 3x+y = \left(x+\frac{1}{x}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot 3+y$

d) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{-1} \div 3x+y = \left(x+\frac{1}{x}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{3x+y}$

2.3.7 Lourdes racionaliza la expresión $\dfrac{x}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}$ y obtiene como resultado

$$\frac{-x(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})}{4}$$

¿Está ella en lo correcto?

2.3.8 Sea $a>0$ ¿Cuál de las siguientes igualdades es la que permite racionalizar el denominador de la expresión de la izquierda?

a) $\dfrac{x}{\sqrt[50]{a^{12}}}=\dfrac{x}{\sqrt[50]{a^{12}}}\cdot\dfrac{\sqrt[50]{a^{38}}}{\sqrt[50]{a^{38}}}$

b) $\dfrac{x}{\sqrt[50]{a^{12}}}=\dfrac{x}{\sqrt[50]{a^{12}}}\cdot\dfrac{\sqrt[50]{a^{50}}}{\sqrt[50]{a^{50}}}$

c) $\dfrac{x}{\sqrt[50]{a^{12}}}=\dfrac{x}{\sqrt[50]{a^{12}}}\cdot\dfrac{\sqrt[50]{a}}{\sqrt[50]{a}}$

d) $\dfrac{x}{\sqrt[50]{a^{12}}}=\dfrac{x}{\sqrt[50]{a^{12}}}\cdot\dfrac{\sqrt[50]{a^{12}}}{\sqrt[50]{a^{12}}}$

2.3.9 Andrés racionalizó la expresión la expresión

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$$

utilizando como neutro multiplicativo la expresión

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$$

pues el asegura que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$$

¿Esta Andrés en lo correcto?

2.3.10 ¿Es correcta la siguiente igualdad?

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{x-1+2\sqrt{x}}{x-1}$$

Capítulo 3

Ecuaciones

Semana 5

3.1 Ecuaciones

3.1.1 ¿Cuál es la diferencia entre una ecuación y una identidad?

3.1.2 Pedro dice que $(x+1)^2 - 2x = x^2 + 1$ es una identidad. ¿Está Pedro en lo correcto?

3.1.3 La siguiente pareja de ecuaciones tiene el mismo conjunto solución

$$81x^4 + 108x^3 + 54x^2 + 12x + 1 = 0 \text{ y } 3x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

a) Verdadero

b) Falso

3.1.4 La ecuación que tiene por solución el conjunto $S = \{-2,2\}$ es:

a) $\sqrt{y-2} = 2-y$

b) $\sqrt{y^2-4} = 2-y$

c) $\sqrt{y^2-4} = y^2-4$

d) $\sqrt{y^2-4} = 0$

3.1.5 Pedro resuelve la ecuación

$$\frac{x^3-2x^2-3x}{x^3+x2+9x+9} = 0$$

y concluye que su conjunto solución es $S = \{-1,3,0\}$ ¿Está Pedro en lo correcto?

3.1.6 Juan tiene un perro. Actualmente su perro tiene 12 años menos que él. Dentro de 4 años, Juan tendrá el triple de la edad de su perro.¿Cuál es la edad de Juan y su perro?[1]

3.1.7 La familia Verdana tiene una huerta con 90 plantas de tomates. El número de plantas de cada fila excede en 3 al doble del número de filas. Determinar el número de filas y el número de plantas por fila.[2]

3.1.8 Un parque posee forma rectangular. Se sabe que el largo del parque es el triple del ancho. Además, un camino trazado en su diagonal tiene nueve veces el valor del ancho disminuido en 355 metros. Determine el largo del parque.

3.1.9 Hay que repartir \$60.000 entre cierto número de amigos, presentes en una reunión, en partes iguales. Alguien nota que si hubieran dos amigos menos, a cada uno le correspondería \$2.500 más. ¿Cuántos son los amigos presentes y cuánto le corresponde a cada uno?[3]

[1] Recuperado de [6] [2] Recuperado de [6] [3] Recuperado de [6]

3.1.10 Lucía dice que los sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x+2y &= 1 \\ x+y &= 2 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} 3x+2y &= 1 \\ 7x+5y &= 4 \end{cases}$$

son equivalentes. ¿Está Lucía en lo correcto?

Capítulo 4

Inecuaciones

Semana 6

4.1 Inecuaciones

4.1.1 ¿Cuál es la diferencia entre una inecuación y una ecuación?

4.1.2 Jessica indica que para $-1 < x < 2$ se cumple que $0 < 3x + 3 < 9$ y que $-6 < 2x - 4 < 0$ ¿Está Jessica en lo correcto?

4.1.3 ¿Cuál es el signo del polinomio $(1 - 2x)^5$?

4.1.4 Pablo indica que la inecuación $-3x+1>0$ se resuelve con alguno de los siguientes procedimientos

Procedimiento 1

$$\begin{aligned} -3x+1 &> 0 \\ -3x &> -1 \\ x &> \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Procedimiento 2

$$\begin{aligned} -3x+1 &> 0 \\ -3x &> -1 \\ x &< \frac{1}{3} \end{aligned}$$

¿Cuál de los procedimientos es el correcto?

4.1.5 Lourdes considera que $x^2+9>0$ y $x^2+10>0$ para cualquier número real. ¿Está Lourdes en lo correcto?

a) Verdadero

b) Falso

4.1.6 Marvin quiere conocer el signo de la expresión

$$-3(x-a)(x-b)$$

Donde a y b son constantes reales tales que $b<0<a$. ¿Cómo lo hace?

4.1.7 La inecuación que tiene por solución el conjunto $S=[1,3]$ es:

a) $-x^2+4x-3\leq 0$

b) $-x^2+4x-3\geq 0$

c) $-x^2+4x-3>0$

d) $-x^2+4x-3<0$

4.1.8 Leonardo desea resolver la inecuación

$$\frac{(x-1)^2(3-x)(x+1)}{(x^2+3)(x+1)^3} \leq 0$$

y concluye que su conjunto solución es $S = [3, \infty[$ ¿Está Leonardo en lo correcto?

4.1.9 Una tabla de signos posee la siguiente descripción

	$-\infty$		a		b		c		∞
$a(x)$	$-$	0	$+$	$+$		$+$		$+$	
$b(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		
$c(x)$	$+$		$+$		$+$	0	$+$		
$d(x)$	$-$		$-$		$-$		$-$		
$p(x)$	$-$		$+$		$-$		$-$		

¿Cuál de las siguientes inecuaciones se ajusta a la tabla si se desea que la solución a la inecuación sea el intervalo $]a, b]$?

a) $\dfrac{(x-b)(-x^2-1)}{(x-a)(x-c)^2} \geq 0$

b) $\dfrac{(x-b)(-x^2-1)}{(x-a)(x-c)^2} \leq 0$

c) $\dfrac{(x-b)(-x^2-1)}{(x-a)(x-c)^2} > 0$

d) $\dfrac{(x-b)(-x^2-1)}{(x-a)(x-c)^2} < 0$

4.1.10 Bryan considera que $\dfrac{x^2(-x^2-9)}{100} \geq 0$ tiene por solución $S = \emptyset$. ¿Está Bryan en lo correcto?

Capítulo 5

Valor Absoluto

Semana 7

5.1 Valor Absoluto

5.1.1 Marco indica que $|x+1|=0$ y $|x-1|=0$ generan las mismas soluciones. ¿Está Marco en lo correcto?

5.1.2 Jorge indica que $|2x-1|=1$ y $2-|1-2x|=1$ generan las mismas soluciones. ¿Está Jorge en lo correcto?

5.1.3 ¿Cuál es la solución de la ecuación $|3x+1|=-2$?

5.1.4 Escriba un ejemplo de una ecuación con valor absoluto que tenga por conjunto solución

$$S=\{-5,5\}$$

5.1.5 Escriba un ejemplo de una ecuación con valor absoluto que tenga por conjunto solución

$$S=\mathbb{R}$$

5.1.6 José indica que la inecuación $|6x+1|<0$ tiene por solución el conjunto de todos los números reales. ¿Está José en lo correcto?

5.1.7 José, ahora indica que la inecuación $|6x+1|\leq 0$ tiene por solución solo el número $x=-\frac{1}{6}$. ¿Está José ahora en lo correcto?

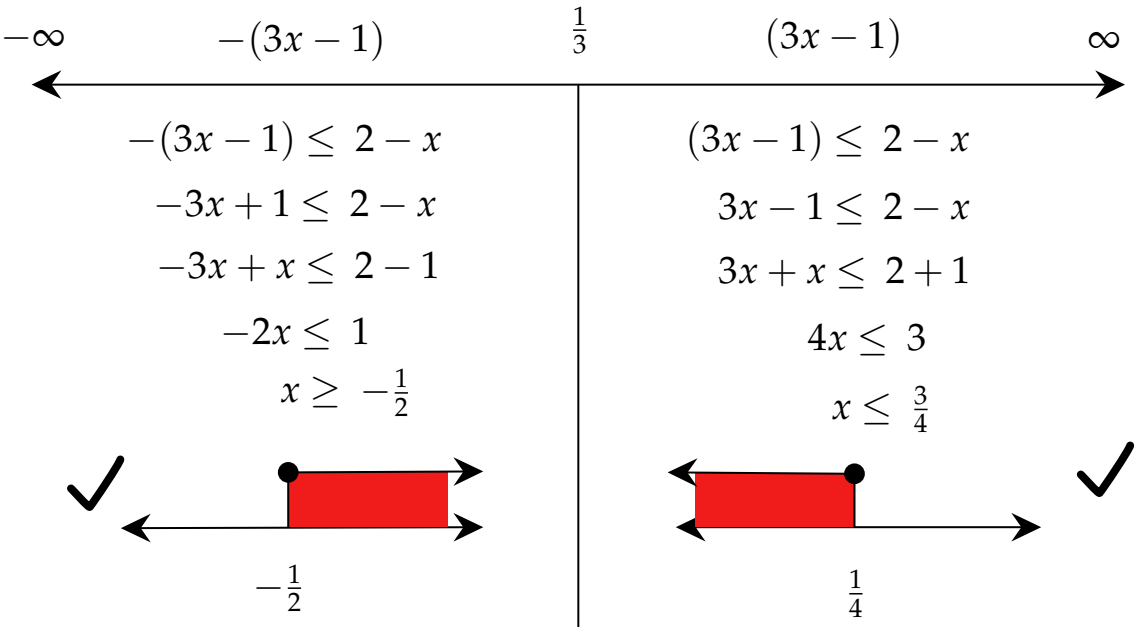
5.1.8 Por último, José ahora indica que la inecuación $|6x+1|>0$ tiene por solución el conjunto de los números reales. ¿Está José en lo correcto?

5.1.9 Reiman resuelve la inecuación

$$|1-3x|+x\leq 2$$

con los siguientes procedimientos

$$|1-3x|+x\leq 2 \iff |3x-1|+x\leq 2 \iff |3x-1|\leq 2-x$$



$$-(3x-1)\leq 2-x$$
$$-3x+1\leq 2-x$$
$$-3x+x\leq 2-1$$
$$-2x\leq 1$$
$$x\geq -\frac{1}{2}$$

$$S_1=\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right[$$

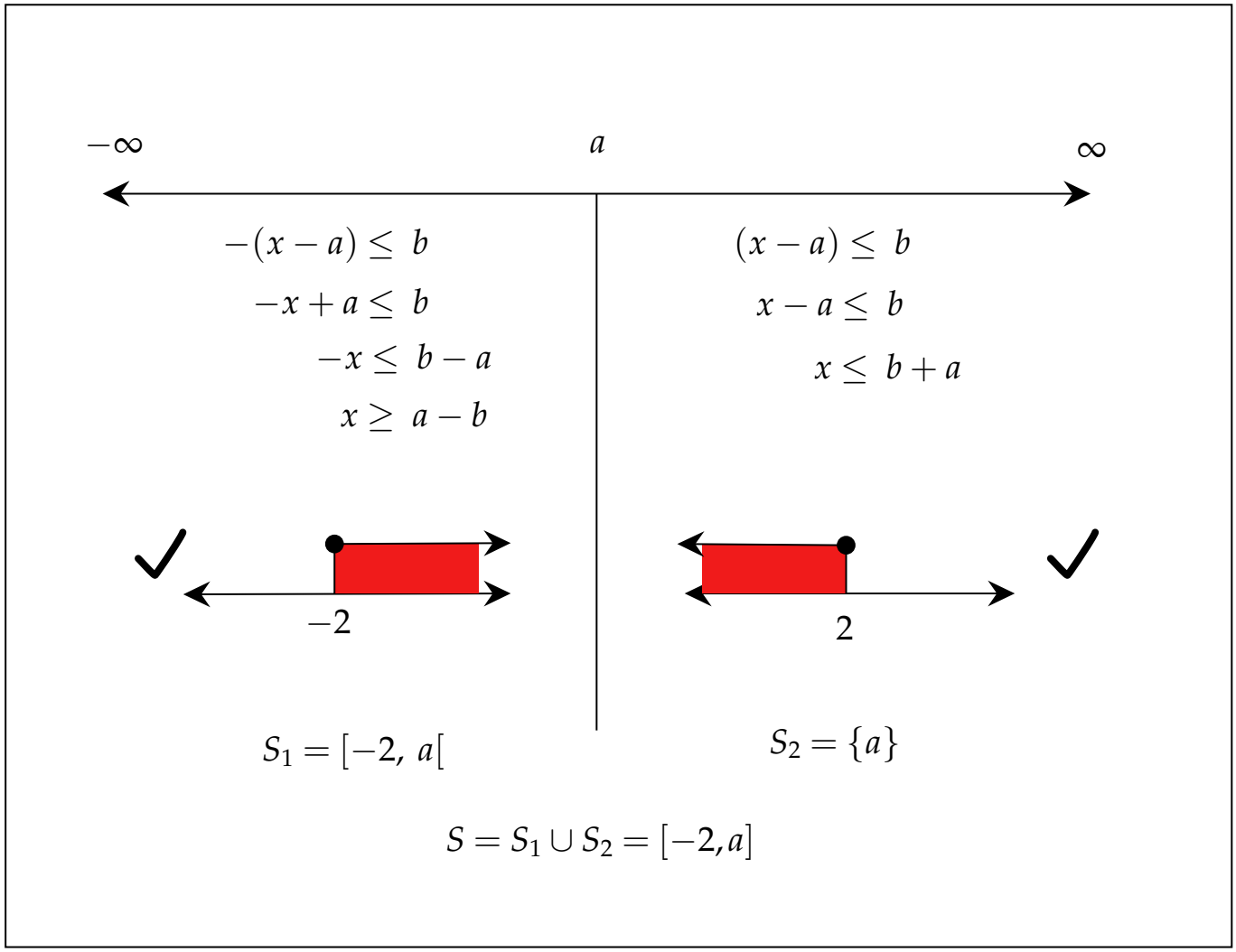
$$(3x-1)\leq 2-x$$
$$3x-1\leq 2-x$$
$$3x+x\leq 2+1$$
$$4x\leq 3$$
$$x\leq \frac{3}{4}$$

$$S_1=\left[-\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right[$$

$$S=S_1\cup S_2=\left]-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right[$$

¿Está Reiman en lo correcto?

5.1.10 Considere el siguiente procedimiento



¿Cuál es el valor de a y b para que el procedimiento expuesto tenga sentido?

Capítulo 6

Funciones

Semana 8

6.1 Funciones: Conceptos y Dominio Máximo

6.1.1 ¿Cuál es la diferencia entre una función y una relación?

6.1.2 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos representa el gráfico de una función?

a) $G_f = \{(1,2),(1,3),(2,5)\}$

b) $G_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = x - 1\}$

c) $G_j = \{(1,2),(2,3),(3,4),(1,1)\}$

6.1.3 Arnoldo indica que las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x}, \; g(x) = -x$$

son funciones decrecientes en el intervalo $[1,10]$. ¿Está Arnoldo en lo correcto?

6.1.4 Sea

$$f(x) = \frac{-x}{(x+3)(x-3)^2}$$

Determine cuando el signo de esta función:

a) Es positivo.

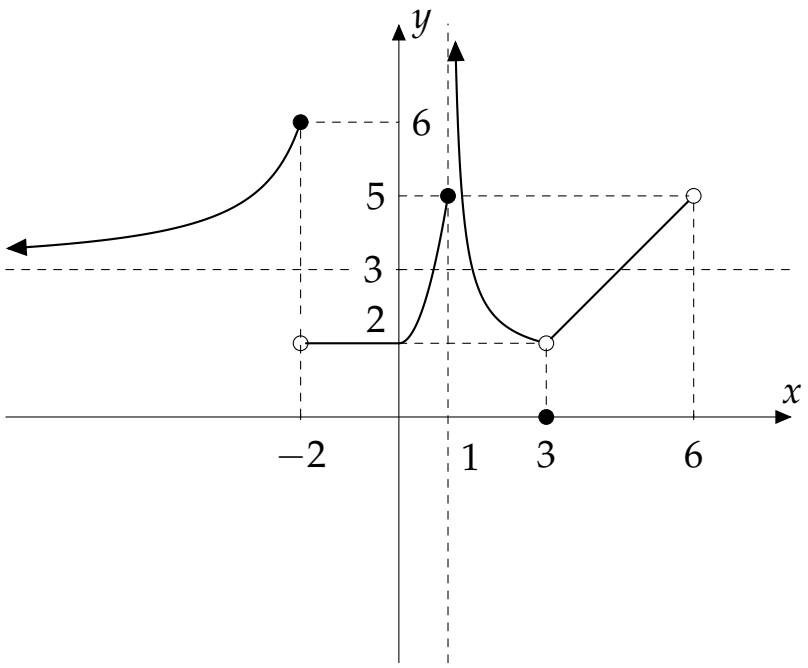
b) Es negativo.

6.1.5 Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -3 \\ x-3 & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

¿Cuál es el resultado de $\dfrac{f(-100)+f(5)}{y+1}$ si se sabe que y es preimagen de 0?

6.1.6 Considere la gráfica adjunta correspondiente a una función g:



Determine:

a) El dominio de g

b) El ámbito de g

c) La o las preimágenes de 2

d) La imagen de 3.

e) ¿Cuántas preimágenes tiene 4?

6.1.7 Ricardo indica que las funciones

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2},\ g(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$$

poseen el mismo dominio máximo. ¿Está Ricardo en lo correcto?

6.1.8 Esteban indica que las funciones

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1\\ 8 & \text{si } x=1\end{cases},\ g(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

poseen el mismo dominio máximo. ¿Está Esteban en lo correcto?

6.1.9 Pablo indica que las funciones

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1\\ 3 & \text{si } x=1\end{cases},\ g(x)=x^2+x+1$$

poseen el mismo dominio máximo y que son la misma función ¿Está Pablo en lo correcto?

6.1.10 Carlos insiste que es posible aplicar la siguiente propiedad para todo $x\in\mathbb{R}$

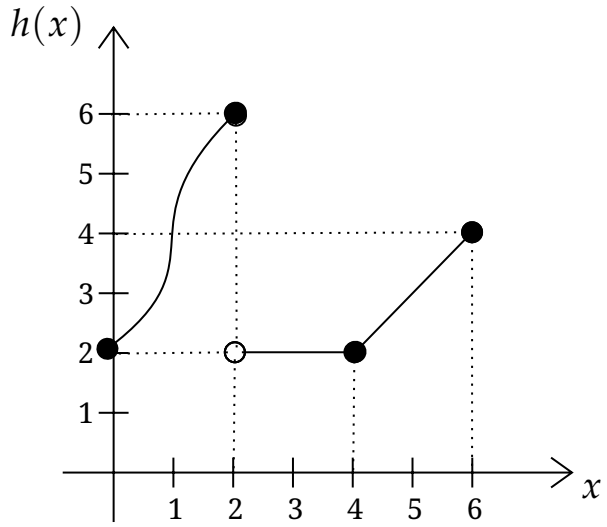
$$\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$$

¿Está Carlos en lo correcto?

Semana 9

6.2 Operaciones con funciones y Función lineal

6.2.1 Considere la siguiente gráfica de una función $h(x)$



¿Cuál es el resultado de $(f \circ f \circ f)(3)$?

6.2.2 Suponga que f y g son funciones bien definidas. Si $(g \circ f)(x) = 6x - 1$ y $g(x) = 3x - 1$, determine $f(x)$.

6.2.3 Raquel indica que el dominio máximo de la operación de funciones $f \cdot g$ corresponde al intervalo $]-2,2[$ cuando

$$f(n) = \sqrt{n+2} \text{ y } g(n) = \sqrt{2-n}$$

¿Está Raquel en lo correcto?

6.2.4 Carlos indica que el dominio máximo de la operación de funciones $\frac{f}{g}$ corresponde al intervalo $]1,3[$ cuando

$$f(t) = \frac{t-2}{\sqrt{t-1}} \text{ y } g(t) = \frac{t-2}{\sqrt{3-t}}$$

¿Está Carlos en lo correcto?

6.2.5 Considere el siguiente enunciado

> Una función lineal es una función polinómica de primer grado, es decir, una función cuya representación en el plano cartesiano es una línea recta. Esta función se puede escribir como:
>
> $$f(x) = mx + b$$
>
> donde m y b son constantes reales y x es una variable real. La constante b determina la pendiente o inclinación de la recta, y la constante m determina el punto de corte de la recta con el eje vertical y.

¿Es correcto lo que se enuncia?

6.2.6 Pedro indica que las funciones

$$f(t) = t - 5,\ g(t) = -t + 3$$

se intersecan en $(4, -1)$. ¿Está Pedro en lo correcto?

6.2.7 Si $5x + 2ky - 3 = 0$ y $4k^2x + 3y + 1 = 0$ son las ecuaciones que definen dos rectas perpendiculares, entonces k es igual a

a) $-\frac{10}{3}$

b) $-\frac{3}{10}$

c) $\frac{3}{10}$

d) $\frac{10}{3}$

6.2.8 Las rectas definidas por $5x + 3y = 4$ y $7x + ky = 1$ son paralelas entonces k es igual a

a) $-\frac{35}{3}$

b) $-\frac{5}{3}$

c) $\frac{21}{5}$

d) $\frac{35}{3}$

6.2.9 Bryan quiere imprimir su novela y pide presupuesto a una papelería. Le dicen que el costo de impresión por cada libro sería

a) \$ 7 si imprime un máximo de 100 libros.

b) \$ 5 si imprime una cantidad de libros superior a 100 e inferior a 300.

c) \$ 3 si imprime una cantidad mínima de 300 libros.

¿Cuánto debe pagar Bryan si imprime 60 libros? ¿Y si imprime 220 libros? ¿Y si imprime 400 libros? Grafique esta función. [1]

[1] Adaptado de [2]

6.2.10 El oso panda de un zoológico pesó 3,5kg al nacer. Sabiendo que los ejemplares de su especie aumentan una media de 2,5kg cada mes durante los primeros 3 años de vida, determine:

a) La función que proporciona el peso del oso en función de su edad (en número de meses). Indica el dominio de la función.

b) ¿A qué edad el oso sobrepasará los 80kg de peso?[2]

[2] Recuperado de [2]

Semana 10

6.3 Funciones Cuadraticas, Inyectivas, Sobreyectivas, Biyectivas e Inversas

6.3.1 Considere el siguiente enunciado

> Una función cuadrática es aquella que puede escribirse como una ecuación de la forma:
>
> $$f(x) = ax^2 + bx + c$$
>
> donde a , b y c (llamados términos) son números reales cualesquiera y a es distinto de cero (puede ser mayor o menor que cero, pero no igual que cero). El valor de b y de c sí puede ser cero.

¿Es correcto lo que se enuncia?

6.3.2 Si la gráfica de $f(x) = (a-2)x^2 + 3x + 6$ es una parábola cóncava hacia arriba entonces se puede garantizar que a debe pertenecer al conjunto

a) $]-\infty, 2[$

b) $]2, \infty[$

c) $]-\infty, -2[$

d) $]-2, \infty[$

6.3.3 Si $f(x) = 2x^2 + 4kx - 2$ y la coordenada en x del vértice es 16 entonces el valor de k es

a) -16

b) -4

c) 4

d) 16

6.3.4 Si $h(x) = 2x^2 + bx + c$ y la gráfica de h interseca al eje x en $-\frac{3}{2}$ y 2 entonces:

a) $h(x) = 2x^2 + 2x - \frac{3}{2}$

b) $h(x) = 2x^2 - x - 6$

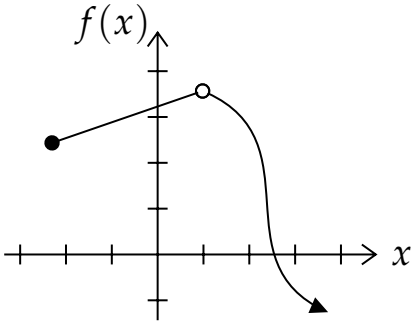
c) $h(x) = 2x^2 + x - 6$

d) $h(x) = \frac{2x^2 + x - 6}{2}$

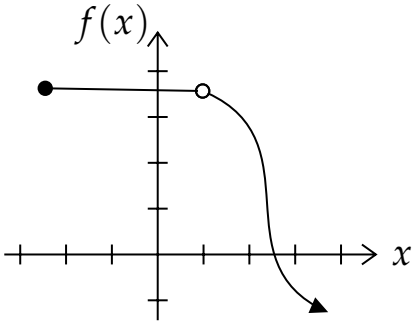
6.3.5 Juan indica que la recta $y = -x + 1$ y la parábola $y = x^2 + 2x + 1$ se intersecan en los puntos $(0,1)$ y $(-3,4)$ ¿Es correcto lo que afirma Juan?

6.3.6 ¿Cuál de las siguientes gráficas de una función f representa una función inyectiva?

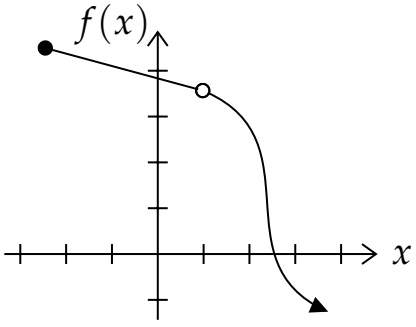
a)



b)



c)



6.3.7 Erick indica que un ejemplo de una función sobreyectiva es $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $g(z)=z^2$. ¿Está Erick en lo correcto?

6.3.8 Un ejemplo de una función biyectiva es $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $h(y)=y^3$ pues a cada imagen se le asigna una única preimagen y el ámbito de h coincide con el codominio de h (que es $\mathbb{R}$). ¿Es esta afirmación correcta?

6.3.9 ¿Cuál de las siguientes funciones es biyectiva?

a) $f:\mathbb{R}\to[1,\infty[, f(x)=(x-1)^2+1$

b) $f:]-\infty,1]\to[1,\infty[, f(x)=(x-1)^2+1$

c) $f:]-\infty,1]\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)^2+1$

d) $f:]-\infty,1[\to[1,\infty[, f(x)=(x-1)^2+1$

6.3.10 Marcela indica que la inversa de la función $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{2\}$ con criterio

$$f(x)=\frac{1}{x-2}+2$$

es $f^{-1}:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{2\}$ con criterio

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{x-2}+2$$

¿Está Marcela en lo correcto?

Capítulo 7

Trigonometría

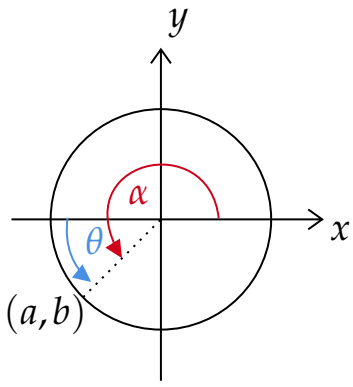
Semana 11

7.1 Razones, Funciones y Propiedades Trigonométricas

7.1.1 Mario indica que 3 radianes equivalen a 171 grados sexagesimales. ¿Esta Mario en lo correcto?

7.1.2 ¿El punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ se encuentra sobre el círculo trigonométrico?

7.1.3 Considere el punto (a,b) sobre el círculo trigonométrico, donde α es un ángulo en posición estándar y θ es el ángulo de referencia.



De acuerdo con la información brindada, ¿se cumple que $\operatorname{sen}(\alpha) = -\operatorname{sen}(\theta)$?

7.1.4 En un triángulo rectángulo se tiene

$$\tan(\theta) = \frac{m}{n}$$

Donde θ es uno de los ángulos agudos de dicho triángulo. Por ende, se tiene con certeza que

a) $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}$

b) $\cos(\theta) = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$

c) $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$

d) $\cos(\theta) = \dfrac{n}{\sqrt{m^2-n^2}}$

7.1.5 En un triángulo rectángulo se tiene

$$\csc(\theta) = \frac{a}{b}$$

Donde θ es uno de los ángulos agudos de dicho triángulo. Por ende, se tiene con certeza que

a) $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

b) $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

c) $\tan(\theta) = \dfrac{b}{a}$

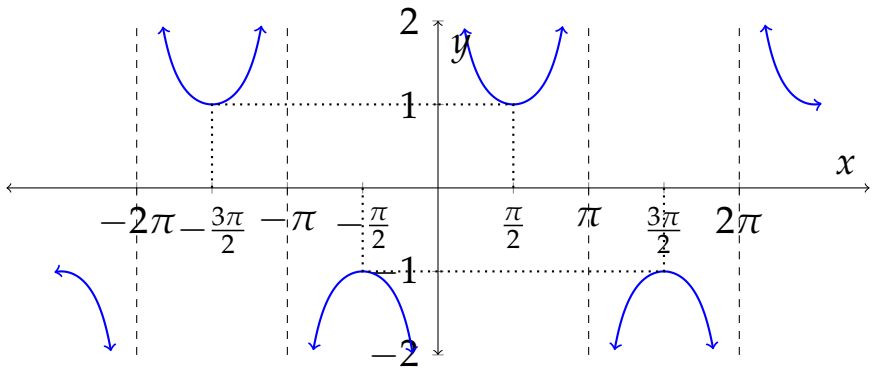
d) $\sec(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

7.1.6 Leonardo indica que una de las características de la función seno es que el ámbito de dicha función es el intervalo $[-1,1]$. ¿Está Leonardo en lo correcto?

7.1.7 Nuria indica que una de las características de la función coseno es que el dominio máximo de dicha función es el intervalo $[-1,1]$. ¿Está Nuria en lo correcto?

7.1.8 Zuleyka indica que una de las características de la función tangente es que corta al eje x en los puntos $(k\pi,0)$, con $k \in \mathbb{Z}$ ¿Está Zuleyka en lo correcto?

7.1.9 Considere la gráfica de la función cosecante



$\longleftrightarrow y = \csc(x)$

¿Se puede asegurar que $\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec\left(\frac{9\pi}{4}\right)$?

7.1.10 Grettel explica a uno de sus compañeros que la función cotangente es impar. ¿Está Grettel en lo correcto?

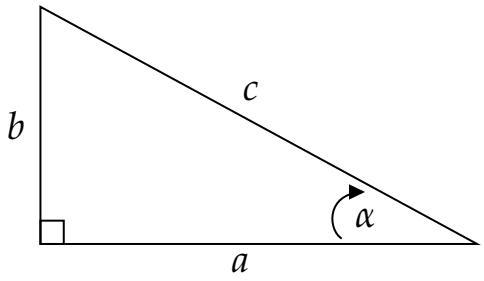
Semana 12

7.2 Identidades y Funciones Inversas

7.2.1 Reiman indica que la identidad

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

se puede deducir del siguiente triángulo rectángulo

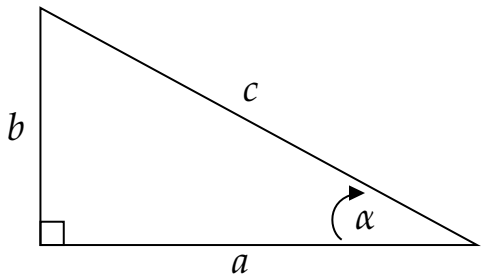


¿Está Reiman en lo correcto?

7.2.2 Bryan indica que la identidad

$$\cot(\alpha) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

se puede deducir del siguiente triángulo rectángulo



¿Está Bryan en lo correcto?

7.2.3 ¿Cómo se puede explicar, utilizando el círculo trigonométrico, que

$$\cot(\alpha)^2 + 1 = \csc^2(\alpha)$$

y que

$$\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$$

son identidades trigonométricas?

7.2.4 A partir de las identidades

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$
$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

¿Cuáles de las siguientes igualdades corresponden a identidades?

a) $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta)$

b) $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)$

c) $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)$

d) $\cos(2\theta) = \operatorname{sen}^2(\theta) - \cos^2(\theta)$

7.2.5 Patricia indica que la igualdad

$$\frac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x} = \operatorname{sen}^2 x$$

es una identidad trigonométrica. ¿Es cierto lo que indica Patricia?

7.2.6 Ana indica que la igualdad

$$\frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos(2x)} = \tan(2x)$$

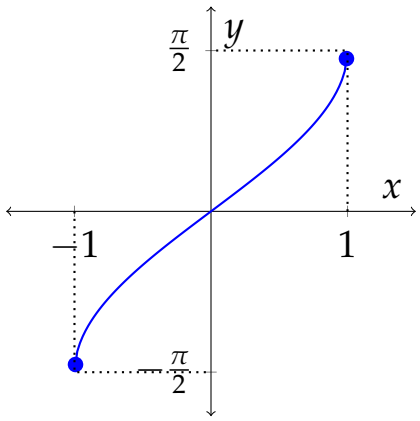
es una identidad trigonométrica. ¿Es cierto lo que indica Ana?

7.2.7 ¿Es cierta la siguiente propiedad?

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+\arctan(x)=\frac{\pi}{2}$$

7.2.8 Ingrid indica que si $x=\operatorname{arccos}(2)$ entonces $\cos(x)=2$, ya que ambas son funciones son inversas entre sí. ¿Está Ingrid en lo correcto?

7.2.9 Considere la gráfica de la función arcoseno



$y=\operatorname{arcsen}(x)$

¿Se puede asegurar que $-\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{4}\right)=\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{4}\right)$?

7.2.10 Sea $\cos(x)>0$. Ester indica que

$$\cos(\arctan(x))=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

¿Está Ester en lo correcto?

Semana 13

7.3 Ecuaciones Trigonométricas

7.3.1 Pablo indica que la ecuación

$$\operatorname{sen}(\alpha) = 2$$

tiene solución. ¿Está Pablo en lo correcto?

7.3.2 Lucas indica que la ecuación

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{4}$$

tiene solución. ¿Está Lucas en lo correcto?

7.3.3 Allan indica que la ecuación

$$\tan(\alpha) = -25$$

tiene solución. ¿Está Allan en lo correcto?

7.3.4 ¿Cuál es la solución a la ecuación $\sec(x) = 1$?

7.3.5 ¿Cuál es la solución a la ecuación $\csc(x) = 1$?

7.3.6 ¿El conjunto solución de la ecuación trigonométrica

$$\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = 0$$

es el mismo que el de $\cos^2(x) + 4\cos(x) + 3 = 0$?

7.3.7 En el intervalo $[-\pi,\pi]$, la ecuación $\tan(2x)=2$ tiene

a) 1 solución

b) 2 soluciones

c) 3 soluciones

d) 4 soluciones

7.3.8 En el intervalo $[-7\pi,-6\pi]$, la ecuación $\operatorname{sen}(3x)=0.5$ tiene

a) 1 solución

b) 2 soluciones

c) 3 soluciones

d) 4 soluciones

7.3.9 En el intervalo $[2\pi,4\pi]$, la ecuación $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0.90$ tiene

a) 1 solución

b) 2 soluciones

c) 3 soluciones

d) 4 soluciones

7.3.10 Karla indica que la ecuación

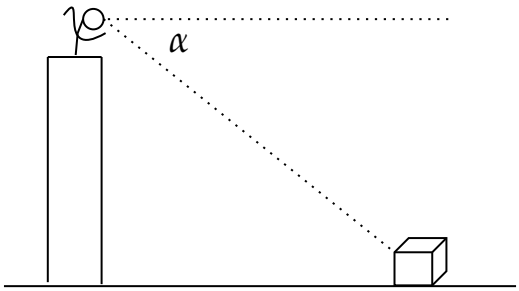
$$\operatorname{sen}^2(x)-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)+\cos^2(x)=1$$

no tiene soluciones. ¿Está Karla en lo correcto?

Semana 14

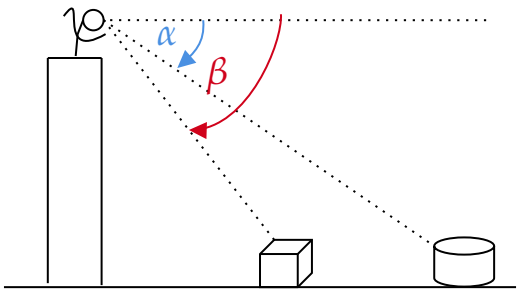
7.4 Aplicaciones de la Trigonometría

7.4.1 Considere la siguiente figura



Si la persona observa la caja con un ángulo α. ¿Es este un ángulo de elevación?

7.4.2 Considere la siguiente figura



De acuerdo con la imagen, considere las siguientes afirmaciones

I) Objetos distantes se relacionan con un menor ángulo de elevación.

II) Objetos cercanos se relacionan con un mayor ángulo de depresión.

III) A mayor distancia de separación entre los objetos, los ángulo de depresión aumentan.

Son correctas las afirmaciones

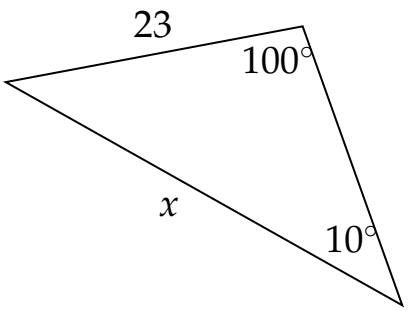
a) Solo III

b) I y II

c) Solo II

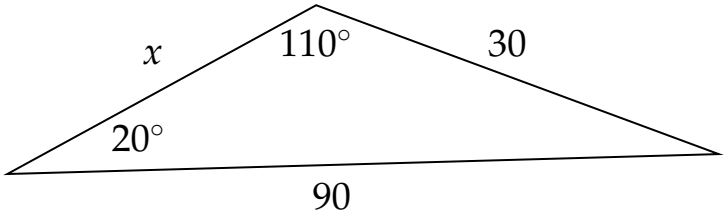
d) II Y III

7.4.3 Considere el siguiente triángulo



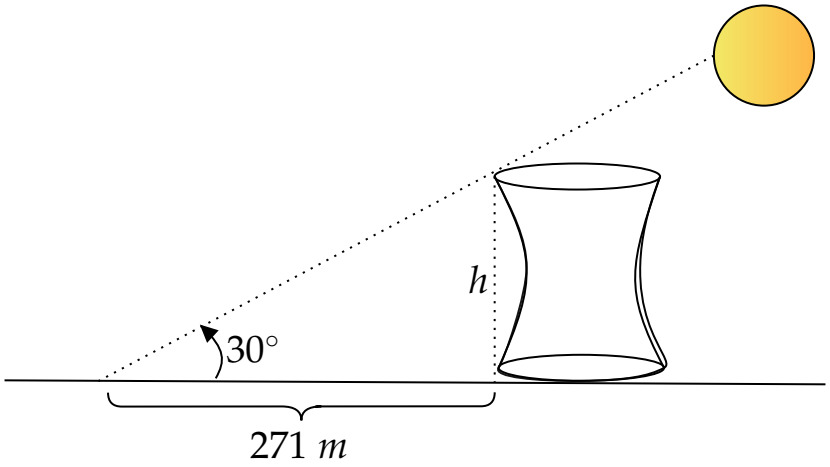
¿Cuál es el valor de x en la figura anterior?

7.4.4 Considere el siguiente triángulo



¿Cuál es el valor de x en la figura anterior?

7.4.5 Considere la siguiente figura



A partir del dibujo, calcule la altura de la torre de refrigeración de una central nuclear si se sabe que su sombra mide 271 metros cuando los rayos solares forman un ángulo de elevación de $30°$ con respecto al suelo.[1]

7.4.6 En dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km, son recibidas señales que manda un barco B. Si consideramos el triángulo de vértices A, B y C, el ángulo en A es de $65°$ y el ángulo en C es de $80°$. ¿A qué distancia se encuentra el barco de cada una de las dos estaciones de radio?[2]

7.4.7 Al observar desde el suelo el punto más alto de un árbol, el ángulo de elevación es de $50°$. Desde 12 m más atrás, el ángulo de elevación es de $35°$. Calcule la altura del árbol.

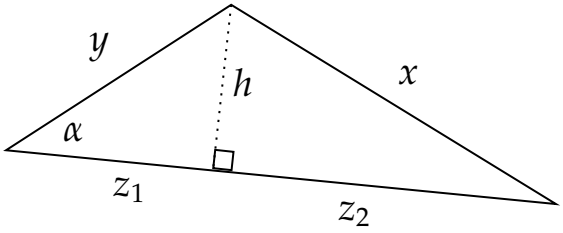
7.4.8 Dos observadores A y B, separados 250 m cada uno, ven un globo estático situado entre ellos con ángulo de elevación de $85°$ y $72°$ respectivamente. ¿A qué altura se encuentra el globo?[3]

7.4.9 Dos barcos salen de un puerto a las 10:00 a.m.. con una rapidez de 40 km/h y 60 km/h respectivamente. Si las rutas forman un ángulo de

[1] Recuperado de [3] [2] Recuperado de [7] [3] Consulta de un foro en https://brainly.lat/tarea/8997932

$76°$, ¿A qué distancia se encuentran a las 11:30 a.m. uno del otro?

7.4.10 Considere la siguiente figura



¿Es cierto que el área de triángulo es

$$A = \frac{zy \operatorname{sen} \alpha}{2}$$

para $z = z_1 + z_2$?

Capítulo 8

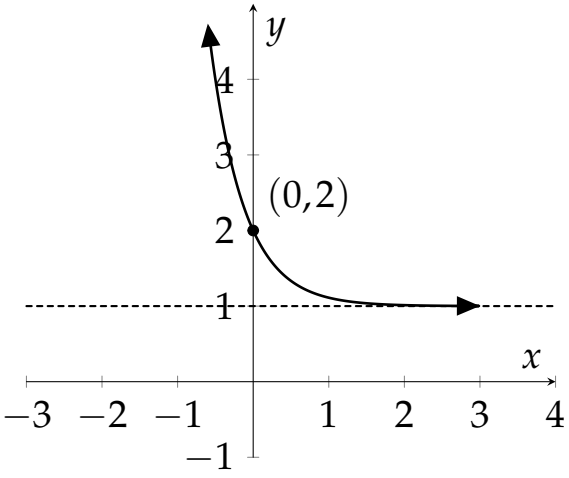
Funciones Exponencial y Logarítmica. Ecuaciones y Problemas

Semana 15

8.1 Función Exponencial y Logarítmica

8.1.1 Claudio indica que $f(x) = a^x$ representa el criterio de una función exponencial creciente si $a > 1$. ¿Está Claudio en lo correcto?

8.1.2 Cristina indica que la gráfica de la función con criterio $f(x) = 3^{-2x} + 1$ es la que se muestra en la imagen



¿Está Cristina en lo correcto?

8.1.3 Fabio indica que $f(x) = \log_a x$ representa el criterio de una función logarítmica que interseca al eje x en $(0,1)$. ¿Está Fabio en lo correcto?

8.1.4 Considere el criterio de la función

$$h(x) = \frac{1}{\ln(2x-5)} + e^{\sqrt{5-x}}$$

¿Cuál es el dominio máximo de esta función?

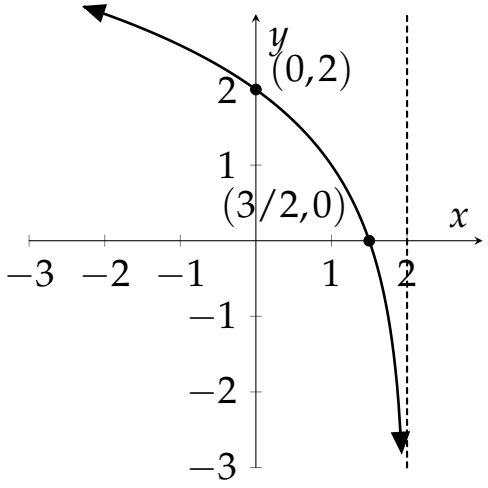
8.1.5 Suponiendo que $a > b > 0$ ¿Es cierto que

$$\frac{\log_{a-b}\sqrt{\dfrac{1}{a-b}} + \log_{\frac{a}{b}}\dfrac{b}{a}}{\log_{a+b}\sqrt{a+b}}$$

es igual 3?

8.1.6 Sea e el número de Neper. Si $e^x = p$ entonces $\ln p = x$. ¿Es esto correcto?

8.1.7 Considere la gráfica de una función logarítmica



¿Cuál de los siguientes criterios corresponde a la gráfica anterior?

a) $f(x) = \log_2(2-x)+1$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2-x)+1$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)+1$

d) $f(x) = \log_2(x-2)+1$

8.1.8 Ana indica que si $7^{x+2}+1 = y$ entonces $x = (\log_7(y-1))-2$ siempre que $x, y \in \mathbb{R}$. ¿Está Ana en lo correcto?

8.1.9 Suponiendo que x y y son valores positivos y que $\log(x)+\log(y) \neq 0$ ¿Es cierto que $\dfrac{\log(x^2)+\log(y^2)}{\log(x)+\log(y)} = 2$?

8.1.10 Suponiendo que a, b y c son valores positivos y que $\ln a \neq 0$ ¿Es cierto que $\log_{a^4}(b^2c^3) = \dfrac{2\ln b + 3\ln c}{4\ln a}$?

Semana 16

8.2 Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas. Problemas

8.2.1 Pablo indica que la ecuación $7^{3x+1} = 4$ se resuelve con alguno de los siguientes procedimientos

Procedimiento 1

$$\begin{aligned} 7^{3x+1} &= 4 \\ \ln 7^{3x+1} &= \ln 4 \\ (3x+1)\ln 7 &= \ln 4 \\ 3x+1 &= \frac{\ln 4}{\ln 7} \\ 3x &= \frac{\ln 4}{\ln 7} - 1 \\ x &= \frac{1}{3}\left(\frac{\ln 4}{\ln 7} - 1\right) \end{aligned}$$

Procedimiento 2

$$\begin{aligned} 7^{3x+1} &= 4 \\ \log_7 4 &= 3x+1 \\ (\log_7 4) - 1 &= 3x \\ \frac{1}{3}((\log_7 4) - 1) &= x \end{aligned}$$

¿Cuál de los procedimientos es el correcto?

8.2.2 Graciela indica que la ecuación $\log_2(3x-1) = 4$ se resuelve con alguno de los siguientes procedimientos

Procedimiento 1

$$\begin{aligned} \log_2(3x-1) &= 4 \\ 2^{\log_2(3x-1)} &= 2^4 \\ 3x-1 &= 16 \\ 3x &= 17 \\ x &= \frac{17}{3} \end{aligned}$$

Procedimiento 2

$$\begin{aligned} \log_2(3x-1) &= 4 \\ 4^2 &= 3x-1 \\ 16 &= 3x-1 \\ 17 &= 3x \\ x &= \frac{17}{3} \end{aligned}$$

¿Cuál de los procedimientos es el correcto?

8.2.3 En $\mathbb{R}$ la ecuación $e^x(\log^2 x + \log x - 6) = 0$ tiene

a) 1 solución

b) 2 soluciones

c) 3 soluciones

d) 4 soluciones

8.2.4 En $\mathbb{R}$ la ecuación $\log_\pi x(3^{4x} + 2 \cdot 3^{2x} + 1) = 0$ tiene

a) 1 solución

b) 2 soluciones

c) 3 soluciones

d) 4 soluciones

8.2.5 Al resolver la ecuación $7^{x-1} = 5^{x+1}$, Marta indica que la solución es

$$S = \left\{ \frac{\ln 5 - \ln 7}{\ln 7 + \ln 5} \right\}$$

¿Está Marta en lo correcto?

8.2.6 Al resolver la ecuación $(e^{x-1} - 1)(\log_2(x-2) - 1) = 0$, Jorge indica que que la solución es

$$S = \{4\}$$

¿Está Jorge en lo correcto?

8.2.7 Una población de bacterias está compuesta inicialmente por 100 individuos. Cada tres horas, esta población se duplica. De este modo, una función que modela la cantidad de ejemplares después de t horas es

$$N(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$$

¿Cuántas horas deben pasar para que existan 50000 ejemplares?[1]

[1] Recuperado de [5]

8.2.8 La vida media del estroncio 90 es de 25 años. Si una muestra de estroncio 90 tiene una masa de 24 mg ,

a) Encuentre la masa restante cuando hayan pasado 40 años, si se sabe que la función asociada es

$$m(t) = 24 \cdot 2^{-\frac{t}{25}}$$

donde $m(t)$ es la masa restante después de t años.

b) ¿Cuántos años deben pasar para que tener 1 mg de la muestra? [2]

8.2.9 El nivel de ruido de determinado lugar se puede medir utilizando la fórmula

$$S(I) = 10 \cdot (\log I + 12)$$

donde S es la sensación de sonoridad, medida en decibelios, e I es la intensidad del sonido medida en vatios/m^2. ¿Cuál es la intensidad del sonido en el interior de una discoteca si se han medido 120 decibelios?

8.2.10 Existen diversas escalas para medir la intensidad de los terremotos. La medida apropiada debería ser la energía liberada. Sin embargo esta medida se escapa de la noción intuitiva del desastre. El terremoto de mayor intensidad ha liberado una energía aproximada 2×10^{17} Julios, esto es grande comparado con un ligero movimiento. Se ha convenido en estandarizar la energía por $E_0 = 10^{4.4}$ Julios, que corresponde a la energía liberada por un leve movimiento. Específicamente, la magnitud M en la **escala de Richter** se define como

$$M(E) = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

A partir de esto, ¿cuál fue la magnitud en la escala de Ritcher del terremoto más intenso?ben pasar para que tener 1 mg de la muestra? [3]

[2] Recuperado de [5] [3] Recuperado de [1]

Bibliografía

[1] Barrionuevo, B & Langhoff, A. (2015) *Una experiencia de enseñanza de la logaritmación en el contexto escolar*. Recuperado de: https://rdu.unc.edu.ar/bitstream/handle/11086/3552/IF%20PM%20Barrionuevo-%20Langhoff.pdf?sequence=1

[2] MatesFacil. (4 de junio de 2019) *Problemas de Funciones*. Recuperado de: https://www.matesfacil.com/ESO/funciones/problemas-resueltos-funciones-concepto-dominio-codominio-imagen-grafica.html

[3] MatesFacil. (28 de junio de 2019) *Problemas de Trigonometría (seno y coseno)*. Recuperado de: https://www.matesfacil.com/ESO/geometria_plana/trigonometria/problemas-resueltos-trigonometria-secundaria-seno-coseno-triangulo-angulo.html

[4] Mazur, E. & Watkins, J. (2010) *Using Just-in-Time Teaching with Peer Instruction*. Recuperado de: http://mazur.harvard.edu/publications.php?function=display&rowid=634

[5] SlideShare. (28 de junio del 2019) *Funciones Expoenciales y Funciones Logarítmicas*. Recuperado de: https://es.slideshare.net/guest79929af/problemas-resueltos-de-aplicacin-de-funciones-exponenciales

[6] StudyLib. (4 de junio del 2019) *Ejercicios Resueltos*. Recuperado de: https://studylib.es/doc/4962026/ecuaciones-problemas-ejercicios-resueltos-1.-en-el-siguies

[7] Xunta de Galicia. Consellería de Educación, Universidade e Formacion Profesional. (28 de junio de 2019) *Trigonometría*. Recuperado de: https://www.edu.xunta.gal/centros/iesisaacdiazpardo/aulavirtual2/pluginfile.php/1515/mod_resource/content/0/Tema5._Trigonometria.pdf

Capítulo 9

Solución de los ejercicios

Soluciones del Capítulo 1

1.1. Operaciones básicas y definiciones

1.1.1 **Conducta o habilidad:** Repasar prioridad de operaciones en los reales.

Solución: Todas las operaciones indicadas deben realizarse respetando un orden o prioridad. Las dos primeras de ellas obligan a realizar primeramente los productos y luego las sumas, en la tercera los paréntesis hacen variar el orden. Es decir en $c \times b + d$ se hace primero el producto de c por b y luego ese resultado se suma con d, de manera similar en la segunda se hace primero el producto de b por d y luego se suma ese resultado con c. Finalmente, la tercera opereación obliga a hacer primero la suma de c con b y luego multiplicar ese resultado por d.

1.1.2 **Conducta o habilidad:** Analizar conceptos relacionados con fracciones y divisores de un número.

Solución: Para que la expresión sea entera se requiere que el valor b sea un divisor de 10, las posibilidades para b son 8: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$.

1.1.3 **Conducta o habilidad:** Agrega concepto de distributividad al caso anterior.

Solución: $\dfrac{2n+12}{n} = \dfrac{2n}{n} + \dfrac{12}{n} = 2 + \dfrac{12}{n}$, y los valores para n son $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$.

1.1.4 **Conducta o habilidad:** Revisión de conceptos de potencias.

Solución: Dado que $(a^n)^m = a^{nm}$ y $\left(a^2\right)^3 = a^6 = 729 = 3^6 = (-3)^6$, entonces los valores de a son 3 y -3.

1.1.5 **Conducta o habilidad:** Reforzar operaciones básicas.

Solución: Mario pareciera ignorar que luego del paréntesis debe multiplicar (suma antes de multiplicar). Debió hacer, por ejemplo, un procedimiento como el siguiente $\frac{7}{3}+\left(2-\frac{1}{3}\right)\times 3=\frac{7}{3}+\frac{5}{3}\times 3=\frac{7}{3}+5=\frac{22}{3}$. Hay otras opciones, como por ejemplo aplicar distributividad de la multiplicación con respecto a la adición.

1.1.6 **Conducta o habilidad:** Reforzar producto de fracciones, puede ser un problema muy geométrico o muy algebraico.

Solución: En el primer procedimieto el rectángulo rojo queda de $\frac{11}{2}\times\frac{8}{3}$ y, en el segundo procedimiento, el rectángulo morado queda de $\frac{8}{2}\times\frac{11}{3}$. Por lo que ambos rectángulos quedan de igual área, $\frac{88}{6}$. Una interrogante interesante es qué ocurre con el perímetro.

1.1.7 **Conducta o habilidad:** Operaciones básicas con porcentajes.

Solución: Nótese que en cada ciclo (llegada de la vaca y reposición de alimento) se pierde 1% de lo que había; por ejemplo, en el primer ciclo, del 100% que puso el dueño la vaca come 10% (dejando 90% de lo que originalmente había), al reponer el dueño el 10% de lo que queda repondrá un 10% del 90%, es decir, 9% y esta situación se repite en cada uno de los cinco ciclos. Una pregunta interesante es qué cantidad queda después de los cinco ciclos.

1.1.8 **Conducta o habilidad:** Operaciones con fracciones.

Solución: Entre las dos primeras personas reciben $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ del total, de esa manera el último recibe $\frac{1}{6}$ de la propiedad que corresponde con 1000 metros cuadrados; es decir, la propiedad medía 6000 metros cuadrados.

1.1.9 **Conducta o habilidad:** Potencias y análisis.

Solución: Se debe considerar que elevar un número a una potencia positiva puede aumentarlo o disminuirlo. Si el número a es mayor que uno, entonces al elevarlo a la cuarta potencia es menor que al elevarlo a la quinta potencia. Si en número a está entre 0 y 1, entonces la cuarta potencia es superior que la quinta potencia. Si el número es 0 o 1 ambos quedan iguales. Por último, si el número es menor que cero, entonces siempre la quinta potencia será negativa y la cuarta potencia será positiva, por lo que será mayor.

1.1.10 **Conducta o habilidad:** Definición de valor absoluto.

Solución: Dado que b es mayor que a entonces $a-b<0$ y $|a-b|=-(a-b)=b-a$. Por lo que la respuesta a la pregunta es no.

Soluciones del Capítulo 2

2.1. Operaciones con polinomios

2.1.1 **Conducta:** Repasar definición de monomio

Solución: Se puede implementar un contraejemplo.

$$\frac{7xy}{6xym}=\frac{1}{m}$$

En este caso, el resultado no es un monomio

2.1.2 **Conducta:** Repasar definición y producto de polinomios

Solución: Se puede realizar el cálculo de de la multiplicación y contabilizar la cantidad de términos, o bien, clarificar mediante la ley distributiva que se obtienen 9 términos. Es importante indicar que esto sucede porque los términos resultantes en esta multiplicación no son semejantes entre sí, por lo que no se pueden sumar o restar.

2.1.3 **Conducta:** Repasar fórmulas notables.

Solución: Se utiliza ley distributiva y propiedad de potencias

$$(-a-b)^2=((-1)(a+b))^2=(-1)^2(a+b)^2=(a+b)^2$$

2.1.4 **Conducta:** Repasar fórmulas notables y definición de polinomios.

Solución: Al desarrollar la fórmula notable se obtiene como resultado

$$8m^3n^3+48m^2n^2x+96mnx^2+64x^3$$

De aquí el coeficiente numérico buscado es 96.

2.1.5 **Conducta:** Repasar producto y suma de polinomios.

Solución: Al desarrollar el lado izquierdo se tiene que

$$\begin{aligned}
a(b+x+n)-y(x+n)-nm =& ab+ax+an-yx-yn-nm\\
=& ab+ax+an-\left(\frac{a}{2}\right)x-yn-n\left(\frac{y}{2}\right)\\
=& ab+ax+an-\frac{ax}{2}-yn-\frac{ny}{2}\\
=& ab+\frac{ax}{2}+an-\frac{3ny}{2}\\
=& ab+\left(\frac{a}{2}\right)x+an-\frac{3n(y)}{2}\\
=& ab+yx+(a)n-\frac{3n(2m)}{2}\\
=& ab+yx+(2y)n-3mn\\
=& ab+yx+(2(2m))n-3mn\\
=& ab+yx+4mn-3mn\\
=& ab+yx+mn
\end{aligned}$$

2.1.6 **Conducta:** Repasar el uso del valor absoluto

Solución: Solo el procedimiento número 1 cumple los pasos correctos

2.1.7 **Conducta:** Repasar la definición de división de polinomios

Solución: Recuerde que cuando se lleva a cabo una división de polinomios donde $P(x)$ es el dividendo y $Q(x)$ es el divisor, se tiene que:

$$P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x)$$

donde $C(x)$ es el cociente y $R(x)$ es el residuo.
Por lo tanto, en este ejercicio se tiene que averiguar $P(x)$, donde $Q(x)=-x+1$, $C(x)=4x^2-x+1$ y $R(x)=0$. Así, realizando la multiplicación $Q(x)\cdot C(x)$, se obtiene que el dividendo solicitado es $-4x^3+5x^2-2x+1$.

2.1.8 **Conducta:** Repasar la definición de división de polinomios

Solución: Es verdadero. El polinomio $(P(x)+Q(x))$ es de grado 5, pues el término del polinomio $P(x)$ cuyo factor literal es x^5 no puede operarse con ningún término del polinomio $Q(x)$.

2.1.9 **Conducta:** Repasar la definición de operaciones con polinomios

Solución: Si se aplican correctamente las fórmulas notables, la opción es la $d)$

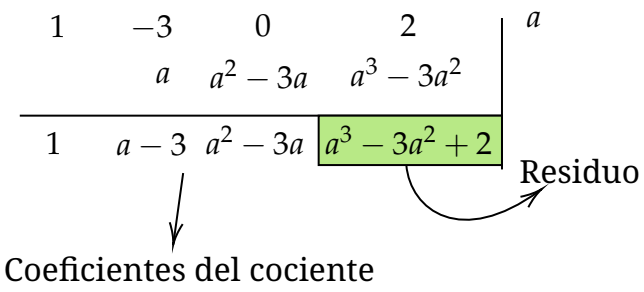
2.1.10 **Conducta:** Repasar la definición de operaciones con expresiones algebraicas

Solución: No es válida la igualdad propuesta. Note que $a\sqrt[3]{a}$ se puede convertir en $\sqrt[3]{a^4}$. Además, $\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}$ es equivalente con $\sqrt[6]{a^4}$. Finalmente, si se se eleva a la 12, el resultado corresponde a a^8, por leyes de potencias

2.2. Factorización

2.2.1 **Conducta:** Repasar división sintética

Solución: Al realizar la división sintética se obtiene el siguiente diagrama



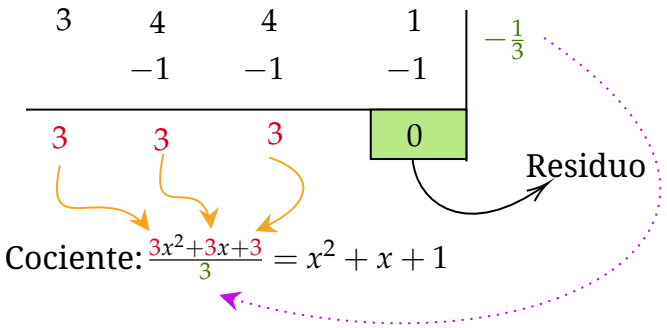
Observamos que el cociente resultante es $x^2+(a-3)x+(a^2-3a)$ y debe suceder que

$$x^2+(a-3)x+(a^2-3a)=x^2+x+4$$

La única posibilidad de que esto suceda es que $a-3=1$ y que $a^2-3a=4$. De la primera ecuación se sigue que $a=4$ y lo comprobamos en la segunda ecuación, donde $4^2-3\cdot 4=16-12=4$. De esta forma, $a=4$.

2.2.2 **Conducta:** Repasar el tema de factorización

Solución: Al realizar la división sintética con $x = -\frac{1}{3}$ se obtiene que el residuo es cero. En efecto



De esta forma la expresión dada se factoriza como

$$3x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x^2 + x + 1) = (3x + 1)(x^2 + x + 1)$$

pero como la expresión $x^2 + x + 1$ tiene discriminante negativo $(\Delta = -3)$, significa que no se puede factorizar más. Por ende, solo hay dos factores y corresponde a la opción a)

Alternativa de factorización: En el diagrama realizado también se pudo realizar la siguiente factorización

$$3x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = \left(x + \frac{1}{3}\right)(3x^2 + 3x + 3) = \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot 3(x^2 + x + 1) = (3x + 1)(x^2 + x + 1)$$

2.2.3 **Conducta:** Repasar el tema de factorización

Solución: La única solución es la d) ya que al factorizar la expresión dada mediante el método de división sintética obtenemos que

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

Para el resto de las expresiones se verifica que

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$$

$$x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$$

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4 = (x - 1)(x - 2)(x^2 + 2)$$

2.2.4 **Conducta:** Repasar el tema de factorización

Solución: En este caso el procedimiento 2 es el correcto, ya que en el primero se comete el error, en el segundo paso, de olvidar la suma.

2.2.5 **Conducta:** Repasar Teorema del Residuo

Solución: En tal caso, mediante el teorema del residuo sabemos que si $p(x) = x^{100} - x^{99} + 4$ entonces

$$p(-1) = (-1)^{100} - (-1)^{99} + 4 = 1 + 1 + 4 = 6$$

Con lo cual es el residuo, en efecto, es 6.

2.2.6 **Conducta:** Repasar Teorema del Factor

Solución: En efecto, ya que por teorema del factor se puede verificar que si $p(x) = x^3 - x^2 + 8x - 8$, entonces

$$p(1) = (1)^3 - (1)^2 + 8 \cdot (1) - 8 = 1 - 1 + 8 - 8 = 0$$

Lo cual indica que $(x - 1)$ es un factor de dicho polinomio.

2.2.7 **Conducta:** Repasar tema de factorización

Solución: El único polinomio que no se puede factorizar es $x^2 + 1$ ya que el discriminate es negativo ($\Delta = -4$). En el caso de $x^3 + 1$ se puede factorizar como $(x + 1)(x^2 + x + 1)$ y en el de $x^5 + 1$ como $(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$.

2.2.8 **Conducta:** Repasar completación de cuadrados

Solución: En efecto, si lo hace. La idea se basa en que se puede explicar $4x^2 + 12x$ como el área de un cuadrado de lado $(2x + 3)$ al cual se le resta el cuadrado de lado 3

2.2.9 textbfConducta: Repasar agrupación.

Solución: El error principal radica en la agrupación. Esta no conduce a un factor común para factorizar todo el polinomio. Además, una vez que escoge la agrupación, otro error es que “fuerza” el ejercicio al final, pues no aplica correctamente el factor común.

2.2.10 **Conducta:** Repasar división sintética

Solución: Se puede encontrar fácilmente que $x = -1$ es un cero del polinomio propuesto. Aplicando División Sintética:

1	0	-3	-2	-1
	-1	1	2	
1	-1	-2	0	

Así, $x^3 - 3x - 2 = (x+1)\left(x^2 - x - 2\right)$, donde este último se puede factorizar por Inspección, lo que conduce a $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Finalmente se puede corroborar que la respuesta correcta es la $a)$.

2.3. Operaciones Combinadas y Racionalización

2.3.1 **Conducta:** Repasar operaciones combinadas

Solución: El resultado es incorrecto. Carlos debía haber hecho lo siguiente

$$\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3+x}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{3+x}\right)$$

siempre y cuando $x \neq -3$.

2.3.2 **Conducta:** Repasar operaciones combinadas y factorización

Solución: El resultado es incorrecto. Julián debía haber hecho lo siguiente

$$\frac{x^2 - a^2}{a^2} = \frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)a^2} = \frac{x+a}{a^2}$$

siempre y cuando $x \neq a$.

2.3.3 **Conducta:** Repasar el tema de operaciones combinadas

Solución: La opción correcta es la $c)$ ya que el resto son errores comunes.

2.3.4 **Conducta:** Repasar el tema operaciones combinadas

Solución: La única respuesta es la c), dado que para generar el mínimo común múltiplo (mcm) es necesario factorizar todos los denominadores. De esta forma se tiene

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)} + \frac{x-1}{x(x+1)} + \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

La construcción del mcm se forma con la multiplicación de los factores de cada denominador sin repetir. Si alguno se repite, se toma la expresión que tiene mayor grado. Así:

$$mcm = x(x-1)(x+1)^2$$

2.3.5 **Conducta:** Repasar el tema de factorización y sustitución numérica

Solución: En este caso, las expresiones algebraicas presentes son iguales si $x \neq 1$.

2.3.6 **Conducta:** Repasar operaciones combinadas

Solución: En tal caso, la única igualdad válida es la b). Los demás son errores comunes que se cometen cuando los paréntesis están ausentes.

2.3.7 **Conducta:** Repasar el tema de racionalización

Solución: En efecto, el resultado es correcto

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}} &= \frac{x}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}} \\
&= \frac{x(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})} \\
&= \frac{x(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x-2})^2-(\sqrt{x+2})^2} \\
&= \frac{x(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})}{(x-2)-(x+2)} \\
&= \frac{x(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})}{x-2-x-2} \\
&= \frac{x(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})}{-4} \\
&= \frac{-x(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})}{4}
\end{aligned}$$

2.3.8 **Conducta:** Repasar tema de racionalización

Solución: En este caso, la respuesta correcta es la a), ya que

$$\frac{x}{\sqrt[50]{a^{12}}} = \frac{x}{\sqrt[50]{a^{12}}} \cdot \frac{\sqrt[50]{a^{38}}}{\sqrt[50]{a^{38}}} = \frac{x\sqrt[50]{a^{38}}}{\sqrt[50]{a^{12}} \cdot \sqrt[50]{a^{38}}} = \frac{x\sqrt[50]{a^{38}}}{\sqrt[50]{a^{12}a^{38}}} = \frac{x\sqrt[50]{a^{38}}}{\sqrt[50]{a^{50}}} = \frac{x\sqrt[50]{a^{38}}}{|a|} = \frac{x\sqrt[50]{a^{38}}}{a}$$

Lo cual permite racionalizar la expresión.

2.3.9 **Conducta:** Repasar racionalización

Solución: En efecto, note que

$$(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}) =$$

$$\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}) - \sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}) =$$

$$\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}) - \sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}) =$$

$$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{y}\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y}\sqrt[3]{xy} - \sqrt[3]{y}\sqrt[3]{y^2} =$$

$$\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2} - \sqrt[3]{yx^2} - \sqrt[3]{xy^2} - \sqrt[3]{y^3} =$$

$$\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{y^3} =$$

$$x - y$$

2.3.10 **Conducta:** Repasar tema de racionalización

Solución: En este caso, la respuesta es incorrecta, ya que

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x})^2-(1)^2} = \frac{(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}+1}{x-1} = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} = \frac{x+1+2\sqrt{x}}{x-1}$$

Soluciones del Capítulo 3

3.1. Ecuaciones

3.1.1 **Conducta:** Repasar definición de ecuaciones
Solución: Una ecuación es una igualdad de dos expresiones algebraicas, que depende de una o más variables, en la cual, uno o más valores satisfacen dicha igualdad al sutituir por la o las variables. La diferencia con la identidad es que ésta admite cualquier valor en el conjunto de los números reales

3.1.2 **Conducta:** Repasar definición de ecuaciones
Solución: En efecto, si se resuelve como ecuación, note que

$$\begin{aligned}(x+1)^2-2x=x^2+1 &\Leftrightarrow (x+1)^2-2x=x^2+1\\ &\Leftrightarrow (x^2+2x+1)-2x=x^2+1\\ &\Leftrightarrow x^2+1=x^2+1\\ &\Leftrightarrow 0=0\end{aligned}$$

Con lo cual, $S=\mathbb{R}$. De esta forma lo que tenemos es una identidad.

3.1.3 **Conducta:** Repasar resolución de ecuaciones polinómicas

Solución: En efecto, es verdadero, ya que la primera ecuación se puede factorizar como

$$(3x+1)^4=0$$

con lo cual la solución de la ecuación es $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$. Luego, la segunda ecuación se puede factorizar como

$$(3x+1)(x^2+x+1)$$

De donde se obtiene la misma solución anterior

3.1.4 **Conducta:** Repasar ecuaciones con radicales

Solución: La única respuesta es la d), dado que la primera y segunda opción tienen por solución $S=\{2\}$ y la tercera opción genera el conjunto solución $S=\{2,-2,-\sqrt{5},\sqrt{5}\}$.

3.1.5 **Conducta:** Repasar ecuaciones fraccionarias

Solución: En este caso, la ecuación dada se puede reescribir como

$$\frac{(x+1)(x-3)x}{(x+1)(x^2+9)}=0$$

De aquí, la ecuación tiene solución cuando $x=3$ o $x=0$ pero no cuando $x=-1$, ya que es una reestricción dada. De esta forma, Pedro **no** tiene razón al decir que $S=\{-1,3,0\}$.

3.1.6 **Conducta:** Repasar resolución de problemas (Ecuación polinómica)
Solución: Sea x la edad actual de Juan. Ordenemos la información entregada en este problema en la siguiente tabla:

	Hoy	En cuatro años
Juan	x	$x+4$
su perro	$x-12$	$(x-12)+4=x-8$

Luego, la ecuación que modela este problema es:

$$x+4=3(x-8)$$

Lo cual, al resolver la ecuación, ofrecer por solución que $x=14$. Por lo tanto, la edad de Juan es 14 años y la edad de su perro es 2 años.

3.1.7 **Conducta:** Repasar resolución de problemas (Ecuación polinómica)

Solución: Sea x el número de filas. Ordenemos la información entregada en este problema en la siguiente tabla:

Número de filas	Números de plantas en cada fila	Total de plantas
x	$2x+3$	$x(2x+3)$

Luego, la ecuación que modela este problema es:

$$x(2x+3)=90$$

Lo cual, al resolver la ecuación, ofrecer por solución que $x=6$ o $x=-\frac{15}{2}$. Ya que, el número de filas debe ser un número entero positivo, se elimina el último resultado. Por ende, en la huerta hay 6 filas, y en cada fila hay $2\cdot 6+3=15$ plantas de tomates.

3.1.8 **Conducta:** Repasar resolución de problemas (Ecuación con radicales)

Solución: Sea x el ancho del parque. Ordenemos la información entregada en este problema en la siguiente tabla:

	Expresión Algebraica
Ancho	x
Largo	$3x$
Diagonal	$9x-355$

Luego, la ecuación que modela este problema es:

$$\sqrt{(x)^2+(3x)^2}=(9x-355)$$

Lo cual, al resolver la ecuación, ofrecer por solución que $x=45+5\sqrt{10}\approx 60.811$ o $x=45-5\sqrt{10}\approx 29.188$. Al probar valores, el segundo no funciona en la ecuación original. Por ende, el ancho del parque es de 60.811 metros aproximadamente y el largo del mismo es de 182,433 metros aproximadamente.

3.1.9 **Conducta:** Repasar resolución de problemas (Ecuación fraccionaria)

Solución: Sea x el número de amigos del grupo original.Ordenemos la información entregada en este problema en la siguiente tabla:

Número de amigos	Cantidad a pagar, por persona
x	$\frac{60000}{x}$
$x-2$	$\frac{60000}{x-2}$

Luego, la ecuación que modela este problema es:

$$\frac{60000}{x-2}=\frac{60000}{x}+2500$$

Lo cual, al resolver la ecuación, ofrecer por solución que $x=8$ o $x=-6$. Ya que, el número de amigos debe ser un número entero positivo, se elimina el último resultado. Por ende, el grupo original estaba conformado por 8 amigos.

3.1.10 **Conducta:** Repasar sistema de ecuaciones lineales

Solución: En efecto, ambos sistemas son equivalentes porque ofrecen el mismo conjunto solución

$$S=\{(-3,5)\}$$

Soluciones del Capítulo 4

4.1. Inecuaciones

4.1.1 **Conducta:** Repasar definición de inecuación

Solución: la diferencia más esencial entre ecuaciones e inecuaciones, es que mientras que las ecuaciones calculan puntos como hemos dicho antes, las inecuaciones calculan semiplanos (o lo que es lo mismo, trozos de plano).

4.1.2 **Conducta:** Repasar solución de inecuaciones lineales

Solución: La resolución de la primera inecuación es la siguiente:

$$\begin{aligned} 0 < 3x + 3 < 9 &\Leftrightarrow 0 - 3 < 3x + 3 - 3 < 9 - 3 \\ &\Leftrightarrow -3 < 3x < 6 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{6}{3} \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 2 \end{aligned}$$

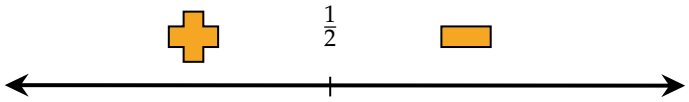
Y en el caso de la segunda

$$\begin{aligned} -6 < 2x - 4 < 0 &\Leftrightarrow -6 + 4 < 2x - 4 + 4 < 0 + 4 \\ &\Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{4}{2} \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 2 \end{aligned}$$

Por ende, Jessica está en lo correcto.

4.1.3 **Conducta:** Repasar signo de un factor

Solución: En este caso, notamos que $1-2x=0$ cuando $\frac{1}{2}=x$. Luego, nos damos cuenta que si los valores son mayores que $\frac{1}{2}$, tenemos resultados negativos. Si los valores son menores que $\frac{1}{2}$, tenemos resultados positivos.



El análisis consecuente es que un número positivo o negativo elevados a una potencia impar preservan el signo original (por la ley de signos) con lo cual, el signo de $(1-2x)^5$ es positivo si los valores son menores que $\frac{1}{2}$ y negativo en caso contrario.

4.1.4 **Conducta:** Repasar resolución de inecuaciones lineales

Solución: En este caso, el procedimiento correcto es el 2, ya que se está considerando el cambio de signo con la propiedad

$$a>b \Rightarrow c\cdot a<c\cdot b$$

cuando $c<0$.

4.1.5 **Conducta:** Repasar resolución de inecuaciones cuadráticas

Solución: En efecto, Lourdes está en lo correcto. El discriminante de ambas expresiones cuadráticas es negativo, lo cual indica, junto al coeficiente de x^2 en ambos polinomios (es postivo), que la desigualdades propuestas son verdaderas.

4.1.6 **Conducta:** Repasar la solución de inecuaciones cuadráticas

Solución: En este caso, Marvin construye una tabla de signos como la siguiente

	$-\infty$		b		a		∞
-3	$-$		$-$		$-$		
$x-a$	$-$		$-$	0	$+$		
$x-b$	$-$	0	$+$		$+$		
$p(x)$	$-$		$+$		$-$		

Con

$$p(x) = -3(x-a)(x-b)$$

Con dicha información, Marvin sabe que

1) $p(x)$ es positiva cuando $x \in]b,a[$.

2) $p(x)$ es negativa cuando $x \in]-\infty,b[\cup]a,\infty[$.

4.1.7 **Conducta:** Repasar inecuaciones polinómicas

Solución: El trinomio dado se puede factorizar como

$$p(x) = -x^2 + 4x - 3 = -(x-3)(x-1)$$

Luego, mediante una tabla de signos, nos damos cuenta que

	$-\infty$		1		3		∞
-1	$-$		$-$		$-$		
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$		
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		
$p(x)$	$-$		$+$		$-$		

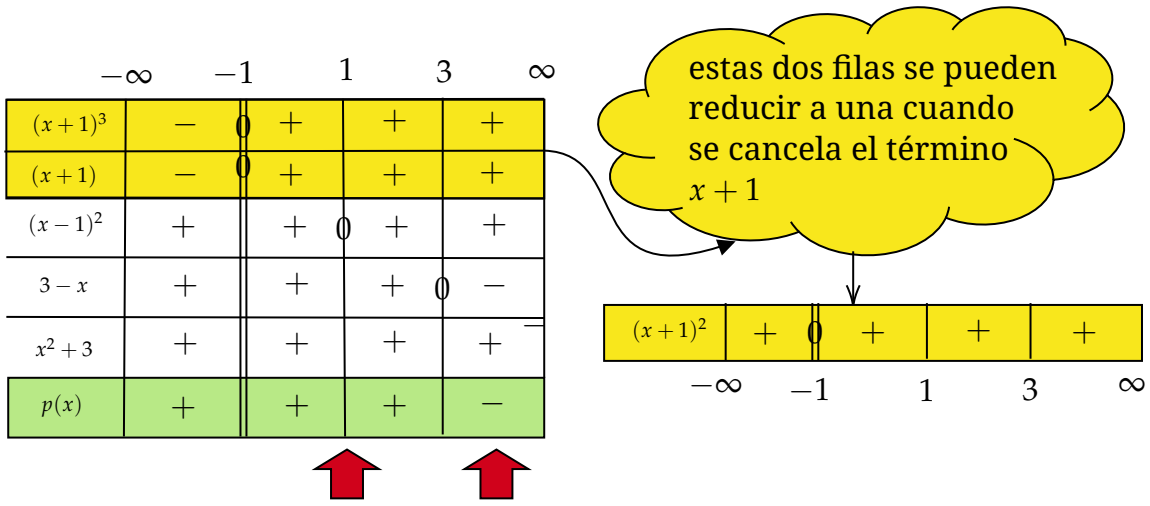
Lo cual indica que la expresión es positiva cuando x está entre 1 y 3. No obstante, como la solución incluye los extremos del intervalo, la inecuación que se ajusta a la solución es $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ es decir, la respuesta b).

4.1.8 **Conducta:** Repasar inecuaciones fraccionarias

Solución: En este caso, la inecuación dada se puede nombrar por

$$p(x) = \frac{(x-1)^2(3-x)(x+1)}{(x^2+3)(x+1)^3} \leq 0$$

Luego, mediante una tabla de signos, nos damos cuenta que



Las flechas en rojo indican cuando se cumple la desigualdad, por ende Leonardo debía escribir por respuesta que la solución buscada es

$$S = \{1\} \cup [3, \infty[$$

Ojo que el 1 se incluye porque tenemos la posibilidad de incluir valores que anulen la expresión. La sustitución directa de $x = 1$ en la inecuación nos lleva a que $0 \leq 0$. Lo recomendable siempre, en estos casos, es verificar sustituyendo por los valores indicados en las rayas verticales.

4.1.9 **Conducta:** Repasar resolución de inecuaciones fraccionarias

Solución: En este caso, la única solución es la opción a), ya que permite incluir a b en el intervalo solución y el resto de factores se ajustan a la naturaleza de la tabla. La opción b) tiene el problema que ofrece por solución al complemento de $]a,b]$ en $\mathbb{R}$, es decir, $]-\infty, a[\cup[b,c[\cup]c,\infty[$. La opción c) tiene por respuesta $]a,b[$ y la opción d) $]-\infty, a[\cup]b,c[\cup]c,\infty[$.

4.1.10 **Conducta:** Repasar resolución de inecuaciones fraccionarias

Solución: Bryan está equivocado. Si nos fijamos bien, el valor de $x = 0$ satisface la inecuación, por lo que la solución está dada por

$$S = \{0\}$$

Soluciones del Capítulo 5

5.1. Valor Absoluto

5.1.1 **Conducta:** Repasar la solución de una ecuación lineal con valor absoluto

Solución: En este caso, Marco está equivocado, ya que la ecuación $|x+1|=0$ genera por solución $x=-1$, mientras que la otra ecuación, $|x-1|=0$, genera por solución $x=1$.

5.1.2 **Conducta:** Repasar la solución de una ecuación lineal con valor absoluto

Solución: En este caso, Jorge está en lo correcto, ya que independiente de las soluciones,

$$2-|1-2x|=1 \Leftrightarrow 2=1+|1-2x| \Leftrightarrow 2-1=|1-2x| \Leftrightarrow 1=|1-2x|$$

Dado que $|1-2x|=|2x-1|$ se tiene la equivalencia de ambas ecuaciones.

5.1.3 **Conducta:** Repasar la solución de una ecuación lineal con valor absoluto

Solución: En tal caso, esta ecuación lineal no tiene solución, ya que por definición $|3x+1|\geq 0$ y por ende, no existe un valor en el conjunto de los números reales que satisfaga la igualdad propuesta.

5.1.4 **Conducta:** Repasar la solución de una ecuación lineal con valor absoluto

Solución: En tal caso, se puede pensar en la ecuación

$$|x|=5$$

ya que para ambos valores propuestos, se satisface la ecuación indicada

5.1.5 **Conducta:** Repasar la solución de una ecuación lineal con valor absoluto

Solución: En tal caso, se puede usar una propiedad del valor absoluto que funciona como identidad. Por ejemplo

$$|3x-1|=\sqrt{(3x-1)^2}$$

5.1.6 **Conducta:** Repasar la solución de inecuaciones lineales con valor absoluto

Solución: En este caso, José no está en lo correcto, ya que, por definición, el valor absoluto siempre es positivo y lo expuesto nunca es posible. Por ende,

$$S=\emptyset$$

5.1.7 **Conducta:** Repasar la solución de inecuaciones lineales con valor absoluto
Solución: En este caso, José si está en lo correcto, ya que, por definición, el valor absoluto siempre es positivo y lo expuesto solo es posible cuando $|6x+1|=0$, lo cual sucede cuando

$$x=-\frac{1}{6}$$

5.1.8 **Conducta:** Repasar la solución de inecuaciones lineales con valor absoluto

Solución: En este caso, José no está en lo correcto, ya que, cuando $x=-\frac{1}{6}$ tendremos que se cumple que

$$0>0$$

Y esto es falso. Por ende, la solución a esta inecuación es

$$S=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{6}\right\}$$

5.1.9 **Conducta:** Repasar la solución de inecuaciones lineales con valor absoluto

Solución: En este caso, Reiman no está en lo correcto, ya que, al final, los paréntesis deben estar cerrados porque se pueden incluir los extremos del intervalo. Así, lo correcto es

$$S=\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$$

5.1.10 **Conducta:** Repasar la solución de inecuaciones lineales con valor absoluto

Solución: En este caso, de acuerdo con la información brindada, se debe resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a-b= & -2 \\ b+a= & 2 \end{cases}$$

El cual genera por solución los valores de $a=0$ y $b=2$. Estos valores cumplen a cabalidad el procedimiento expuesto

Soluciones del Capítulo 6

6.1. Funciones: Conceptos y Dominio Máximo

6.1.1 **Conducta:** Repasar la definición de función

Solución: Una relación es cualquier conjunto de pares ordenados o cualquier correspondencia entre conjuntos previamente estipulados, mientras que una función es la que da exactamente un valor a la variable dependiente (y) para cada valor de la variable independiente (x) en el dominio.

6.1.2 **Conducta:** Repasar la definición de función

Solución: En tal caso, la opción correcta es la b), ya que a una preimagen le corresponde una imagen. Los demás casos son ejemplos de relaciones, donde vemos que no se aplica la definición de función entre los elementos. Por ejemplo, en G_f tenemos que 1 se relaciona con el 2 y el 3. En G_j, tenemos que 1 se relaciona con 2 y con 1.

6.1.3 **Conducta:** Repasar la monotonía de una función

Solución: Podemos utilizar una tabla de signos para ir verificando el comportamiento de la función. Es claro que la tabla no permite demostrar el comportamiento, pero nos da una idea de lo que pasa.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	1	0.5	0.33	0.25	0.2	0.16	0.14	0.125	0.111	0.10
$g(x)$	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10

Observando la tabla, podemos indicar que Arnoldo tiene razón. Ambas funciones son decrecientes en el intervalo dado.

6.1.4 Con base en la función dada, elaboramos una tabla de signos

	$-\infty$		-3		0		3		∞
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$		$+$		$+$	
x	$-$		$-$	0	$+$	$+$		$+$	
$(x-3)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$	$+$	
-1	$-$		$-$		$-$		$-$	$-$	
$f(x)$	$-$		$+$		$-$		$-$		

De esta forma, tenemos que

a) f es positiva cuando $x \in]-3,0[$.

b) f es negativa cuando $x \in]-\infty,-3[\cup]0,3[\cup]3,\infty[$.

6.1.5 **Conducta:** Repasar el cálculo de imágenes y preimágenes

Solución: En este caso, tenemos que

$$f(-100) = 2, f(5) = 25$$

Luego la preimagen de cero es cero. Con lo cual

$$\frac{f(-100)+f(5)}{0+1} = \frac{2+25}{0+1} = 27$$

6.1.6 **Conducta:** Repasar el análisis de una función

Solución:

a) $D_g =]-\infty,6[$

b) $A_g = [2,+\infty[\cup\{0\}$

c) $x \in]-2,0[$

d) $f(3) = 0$

e) 4 tiene 4 preimágenes.

6.1.7 **Conducta:** Repasar el dominio máximo de una función
Solución: En tal caso, Ricardo no está en lo correcto, ya que mientras que el dominio máximo de f es $\mathbb{R} - \{2\}$, en el de g es $\mathbb{R} - \{-2,2\}$. Si cancelamos el $x+2$ factorizando el denominador de g, tenemos que anticipar que x debe ser diferente de -2.

6.1.8 **Conducta:** Repasar el dominio máximo de una función

Solución: En tal caso, Esteban sí está en lo correcto, ya que el dominio máximo de f y g es $\mathbb{R}$ en ambos casos.

6.1.9 **Conducta:** Repasar el dominio máximo de una función

Solución: En tal caso, Pablo si está en lo correcto, ya que el dominio máximo de f y g es $\mathbb{R}$ en ambos casos, y la factorización y simplificación de la primera función coincide con la segunda. Es necesario ver que la imagen de 1 en ambas casos es 3.

6.1.10 **Conducta:** Repasar el dominio máximo de una función

Solución: En este caso, Carlos no está en lo correcto, pues debe determinar que el dominio máximo de ambas expresiones sean iguales, o bien, para que la propiedad sea cierta, se deben tomar la intersección de ambos dominios máximos. De esta forma

1) Sea $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$. Para que esta función esté bien definida debe cumplirse que

$$\frac{x-1}{x+2}\geq 0$$

Mediante un tabla se signos verificamos que

	$-\infty$		-2		1		∞
$x-1$	$-$		$-$		0	$+$	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		
$f(x)$	$+$		$-$		$+$		

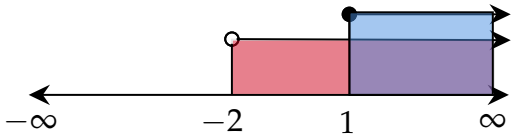
$f(x)$ es mayor o igual que cero en el intervalo $]-\infty,-2[\cup[1,\infty[$, es decir,

$$D_f=]-\infty,-2[\cup[1,\infty[$$

2) Sea $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$. Para que esta función esté bien definida debe cumplirse que

$$x-1\geq 0 \text{ y } x+2>0$$

de manera simultánea. Esto sucede cuando $x\geq 1$ y $x>-2$. En el diagrama esto se representa como sigue:



$g(x)$ es mayor o igual en la intersección de ambos intervalos. Así

$$D_g=[1,\infty[$$

Con base en ambos dominios, la igualdad presente está bien definida en la intersección de los dos dominios considerados. Esto es,

$$D_f\cap D_g=[1,\infty[$$

Luego Carlos no está en lo correcto.

6.2. Operaciones con funciones y Función lineal

6.2.1 **Conducta:** Repasar la composición de funciones

Solución: En este caso, utilizando la definición de composición de funciones, tendremos que

$$f(f(f(3))) = f(f(2)) = f(6) = 4$$

6.2.2 **Conducta:** Repasar la composición de funciones

Solución: En este caso, utilizando la definición de composición de funciones, tendremos que

$$g(f(x)) = 3f(x) - 1$$

Con base en la información brindada, y por transitividad, debe suceder que

$$3f(x) - 1 = 6x - 1$$

o bien

$$f(x) = 2x$$

6.2.3 **Conducta:** Repasar el cálculo del dominio máximo en la operación de funciones

Solución: En tal caso, el dominio máximo para la función f corresponde a

$$[-2, \infty[$$

Luego, el dominio máximo para la función g corresponde a

$$]-\infty, 2]$$

Luego, el dominio máximo para una multiplicación de funciones corresponde a la intersección de los dominios de ambas funciones. Así:

$$D_{f \cdot g} = ([-2, \infty[\cap]-\infty, 2]) = [-2, 2]$$

Con lo cual, Raquel da una respuesta incorrecta.

6.2.4 **Conducta:** Repasar el cálculo del dominio máximo en la operación de funciones

Solución: En tal caso, el dominio máximo para la función f corresponde a

$$]1,\infty[$$

Luego, el dominio máximo para la función g corresponde a

$$]-\infty,3[$$

Por otro lado, la función g se anula cuando $t-2=0$, es decir, cuando $t=2$. Luego, el dominio máximo para una división de funciones corresponde a la intersección de los dominios de ambas funciones, exceptuando los lugares donde g (la función en el denominador) se anula. Así:

$$D_{\frac{f}{g}} = (]1,\infty[\cap]-\infty,3[) - \{2\} =]1,3[-\{2\}$$

Con lo cual, Carlos no está en lo correcto.

6.2.5 **Conducta:** Repasar el concepto de función lineal

Solución: Lo que se enuncia es incorrecto, debe entenderse que

> ...La constante m determina la pendiente o inclinación de la recta, y la constante b determina el punto de corte de la recta con el eje vertical y.

6.2.6 **Conducta:** Repasar el estudio sobre intersección de dos rectas

Solución: En tal caso, ambas rectas se intersecan cuando

$$t-5=-t+3 \Leftrightarrow 2t=3+5$$

O bien cuando

$$t=4$$

Luego, $f(4)=4-5=-1=-4+3=g(4)$, es decir, la imagen de 4 en ambas funciones es -1, por lo cual, ambas rectas se intersecan en el punto $(4,-1)$. Por ende, Pedro está en lo correcto.

6.2.7 **Conducta:** Repasar las condiciones para que dos rectas sean perpendiculares

Solución: Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1. En este caso, dada una recta en su forma

$$ax + by + c = 0$$

Tendremos que su pendiente es $-\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$. Luego, para ambas rectas se debe cumplir que

$$-\frac{5}{2k} \cdot -\frac{4k^2}{3} = -1$$

O bien

$$\frac{20k^2}{6k} = -1$$

De aquí

$$\begin{aligned} \frac{20k^2 + 6k}{6k} = 0 &\Rightarrow 20k^2 + 6k = 0; k \neq 0 \\ &\Rightarrow 2k(10k + 3) = 0; k \neq 0 \\ &\Rightarrow 10k + 3 = 0 \\ &\Rightarrow k = -\frac{3}{10} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la opción $b)$ es la correcta.

6.2.8 **Conducta:** Repasar las condiciones para que dos rectas sean paralelas

Solución: Las rectas dadas se pueden escribir de la forma

$$5x + 3y - 4 = 0 \text{ y } 7x + ky - 1 = 0$$

Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales. En este caso, dada una recta en su forma

$$ax + by + c = 0$$

Tendremos que su pendiente es $-\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$. Luego, para ambas rectas se debe cumplir que

$$\begin{aligned} -\frac{5}{3} = -\frac{7}{k} \Leftrightarrow \frac{5}{3} = \frac{7}{k} \Leftrightarrow \frac{5}{3} - \frac{7}{k} = 0 \Leftrightarrow \frac{5k - 21}{3k} = 0 \\ \Rightarrow 5k - 21 = 0; k \neq 0 \\ \Rightarrow k = \frac{21}{5}; k \neq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la opción $c)$ es la correcta.

6.2.9 **Conducta:** Resolver problemas que involucren la función lineal

Solución: Se trata de una función definida a trozos, es decir

$$f(x) = \begin{cases} 7x & \text{si } 0 \leq x \leq 100 \\ 5x & \text{si } 100 < x < 300 \\ 3x & \text{si } 300 \leq x \end{cases}$$

De esta forma, si Bryan imprime 60 libros, el costo total será de $ 420, ya que

$$f(60) = 7 \cdot 60 = 420$$

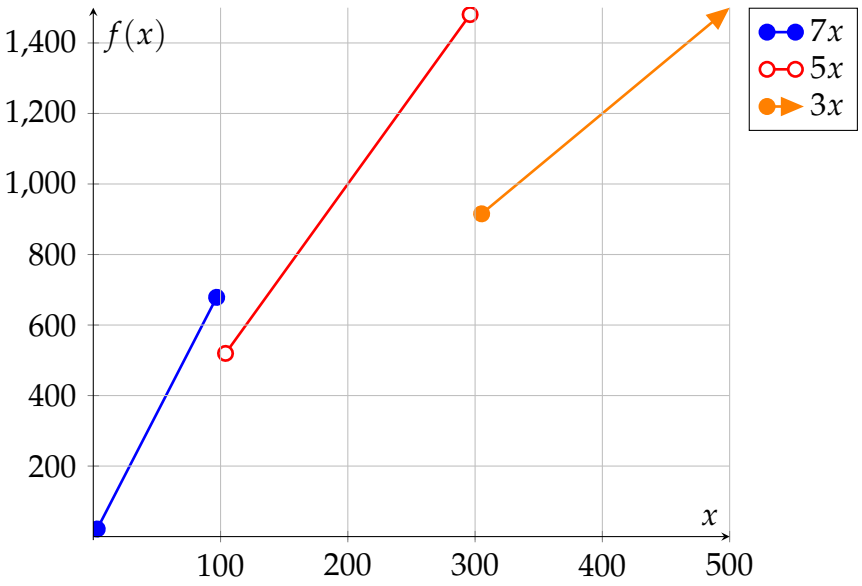
si Bryan imprime 220 libros, el costo total será de $ 1100, ya que

$$f(220) = 5 \cdot 220 = 1100$$

Y si Bryan imprime 400 libros, el costo total será de $ 1200, ya que

$$f(400) = 3 \cdot 400 = 1200$$

Por último, la gráfica de esta función es



6.2.10 **Conducta:** Resolver problemas que involucren la función lineal

Solución:

a) La función del peso $f(x)$ es función del número de meses x del panda. Como el panda aumenta 2,5kg al mes, en x meses, aumentará $2{,}5 \cdot x$. Pero hay que tener en cuenta el que panda nació pesando 3,5kg. La función del peso del panda es

$$f(x) = 2.5x + 3.5$$

El dominio es el conjunto de números que puede tomar x. Como los datos son para los 3 primeros años (36 meses), el dominio es

$$D_f = [0,36]$$

Otra forma de obtener esta función lineal es utilizando la información de dos puntos. En este caso, $(0,3.5)$ y $(1,6)$ son dos puntos de la recta asociada a esta función. El primer punto indica que en el mes cero, el panda pesa 3,5 kg. El segundo punto indica que en el primer mes el panda pesa 6 kg. Luego

$$m = \frac{6 - 3.5}{1 - 0} = \frac{2.5}{1} = 2.5$$

y

$$b = 3.5$$

Luego $f(x) = y = 2.5x + 3.5$ es el criterio antes encontrado.

b) Para este punto debemos sustituir el peso que queremos obtener en la función y resolver la ecuación

$$2.5x + 3.5 = 80$$

De la cual

$$= 30.6$$

Por tanto, el oso sobrepasará los 80 kilos cuando tenga más de 30,6 meses, es decir, cuando tenga más de 2,55 años. Otra respuesta es que aproximadamente a las 31 meses (si se busca un valor entero) el oso sobrepasará los 80 kilos.

6.3. Funciones Cuadraticas, Inyectivas, Sobreyectivas, Biyectivas e Inversas

6.3.1 **Conducta:** Repasar el concepto de función cuadrática

Solución: Lo que se enuncia es correcto.

6.3.2 **Conducta:** Repasar la características de la función cuadrática

Solución: Como nos indican que la función es cóncava hacia arriba, debe cumplirse que el coeficiente númerico del término cuadrático debe ser positivo. Esto es que $a-2>0$, o bien, $a>2$. Por lo tanto, $a\in]2,\infty[$, lo cual corresponde a la respuesta b).

6.3.3 **Conducta:** Repasar las características de la función cuadrática

Solución: La coordenada en x del vértice se puede determinar mediante la fórmula

$$x=-\frac{b}{2a}$$

para $f(x)=ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$. En tal caso

$$x=\frac{-4k}{2\cdot 2}=-k$$

Y como este resultado debe ser igual a 16, se tiene que $k=-16$, lo cual corresponde a la respuesta a).

6.3.4 **Conducta:** Repasar las características de la función cuadrática

Solución: Como la gráfica de h interseca al eje$x$ en $-\frac{3}{2}$ y 2, se cumple que

$$h\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{3}{2}\right) + c = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}b + c = 0$$

o bien

$$9 - 3b + 2c = 0 \tag{1}$$

De igual forma

$$h(2) = 2(2)^2 + b(2) + c = 8 + 2b + c = 0$$

o bien

$$8 + 2b + c = 0 \tag{2}$$

Con base en (1) y (2) formamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -3b + 2c &= -9 \\ 2b + c &= -8 \end{cases}$$

De donde $b = 1$ y $c = -6$. Por lo tanto, el criterio de la función buscada es

$$h(x) = 2x^2 + x - 6$$

la cual es la opción c).

6.3.5 **Conducta:** Repasar el cálculo de intersección de funciones

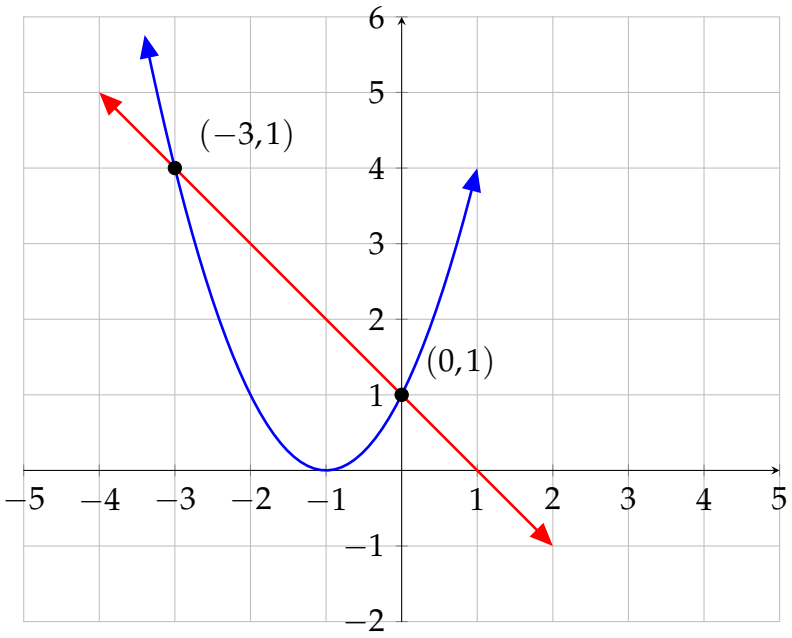
Solución: Lo que dice Juan es cierto. En efecto, iguale ambas ecuaciones para obtener

$$-x+1=x^2+2x+1$$

De donde

$$0=x^2+3x=x(x+3)$$

De aquí se tiene que $x=0$ o $x=-3$. Si $x=0$ entonces $y=1$, y si $x=-3$ entonces $y=4$, al sustituir estos valores en cualquier de la ecuaciones dadas. Por lo tanto $(0,1)$ y $(-3,4)$ son los lugares donde ambas gráficas se intersecan.



6.3.6 **Conducta:** Repasar las características de una función inyectiva

Solución: De las gráficas de las tres funciones brindadas, solo la opción c) representa la gráfica de una función inyectiva, dado que es estrictamente decreciente, situación que no sucede con el resto de gráficas.

6.3.7 **Conducta:** Repasar las características de una función sobreyectiva

Solución: Erick está en una situación incorrecta, ya que hay valores como -3 en el codominio de esta función que no forman parte del ámbito de g, pues no es posible resolver la ecuación $-3=z^2$ en el conjunto de los números reales. En síntesis, el ámbito de g es diferente al codominio de g. $([0,\infty[\neq\mathbb{R})$

6.3.8 **Conducta:** Repasar las características de una función biyectiva

Solución: En efecto, esta afirmación es correcta pues se puede verificar que si existieran dos imágenes iguales $(h(a) = h(b))$ debe ocurrir que sus preimágenes son iguales ($a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$). Por otro lado, dado cualquier elemento en el codomino, por ejemplo l, existe siempre $\sqrt[3]{l}$ tal que $h(\sqrt[3]{l}) = (\sqrt[3]{l})^3 = l$. Esto indica que la función es biyectiva.

6.3.9 **Conducta:** Repasar las características de una función biyectiva

Solución: En este caso, la respuesta es la opción b) ya que es la única que define una función inyectiva (solo se toma la parte estrictamente decreciente de la parábola) y sobreyectiva (el ámbito de esta función corresponde con el codominio de f)

6.3.10 **Conducta:** Repasar las características de una función inversa

Solución: Se puede corroborar que Marcela está en lo correcto realizando la composición de los criterios de ambas funciones y que el resultado debe ser la identidad. En efecto:

$$\begin{aligned}
(f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) \\
&= f\left(\frac{1}{x-2} + 2\right) \\
&= f\left(\frac{1}{x-2} + \frac{2x-4}{x-2}\right) \\
&= f\left(\frac{2x-3}{x-2}\right) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{2x-3}{x-2}\right) - 2} + 2 \\
&= \frac{1}{\left(\frac{2x-3}{x-2}\right) + \frac{-2x+4}{x-2}} + 2 \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{x-2}\right)} + 2 \\
&= (x-2) + 2 \\
&= x
\end{aligned}$$

Soluciones del Capítulo 7

7.1. Razones, Funciones y Propiedades Trigonométricas

7.1.1 **Conducta:** Repasar la conversión de radianes a grados

Solución: En tal caso recordamos que $180°$ equivalen a π radianes. Suponemos entonces que queremos convertir 3 radianes a x grados, con lo cual π es a $180°$, como 3 es a x. Mediante regla de tres tendremos que

$$\frac{\pi}{180°} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x \cdot \pi = 180° \cdot 3 \Leftrightarrow x = \frac{180° \cdot 3}{\pi} \approx 171.88$$

De esta manera Mario está en lo incorrecto, ya que deben ser $171,88$ grados aproximadamente, pues no es un valor exacto.

7.1.2 **Conducta:** Repasar la características del círculo trigonométrico

Solución: En efecto, ya que se cumple que

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

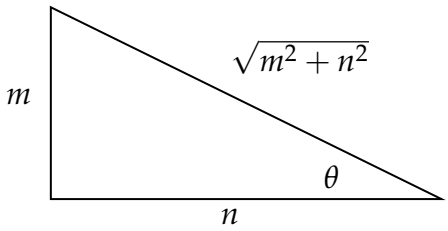
Lo cual indica que satisface la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = 1$.

7.1.3 **Conducta:** Repasar la características del círculo trigonométrico

Solución: En efecto, en el tercer cuadrante, la razón trigonométrica seno es negativa cuando se encuentra vinculada a su ángulo de referencia.

7.1.4 **Conducta:** Repasar la características del círculo trigonométrico

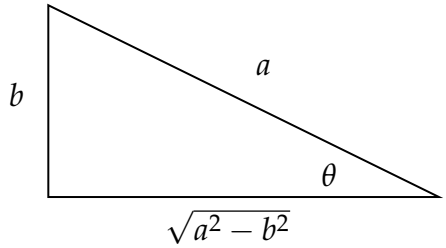
Solución: De acuerdo con la definición de la razón trigonométrica tangente, consideramos el siguiente triángulo rectángulo con la información de los catetos y la hipotenusa en términos de m y n



La única opción correcta es la c), pues es la que coincide con la definición de la razón trigonométrica seno.

7.1.5 **Conducta:** Repasar la características del círculo trigonométrico

Solución: De acuerdo con la definición de la razón trigonométrica tangente, consideramos el siguiente triángulo rectángulo con la información de los catetos y la hipotenusa en términos de m y n



La única opción correcta es la a), pues es la que coincide con la definición de la razón trigonométrica coseno.

7.1.6 **Conducta:** Repasar las características de las funciones trigonométricas

Solución: Leonardo está en lo correcto, pues parte de la definición de la función seno es que todas las imágenes están contenidas en el intervalo indicado.

7.1.7 **Conducta:** Repasar las características de las funciones trigonométricas

Solución: Nuria no está en lo correcto, pues parte de la definición de la función coseno es que esta no posee restricciones, por ende, su dominio máximo es el conjunto de todos los números reales.

7.1.8 **Conducta:** Repasar las características de las funciones trigonométricas

Solución: Zuleyka está en lo correcto, pues

$$\tan(k\pi) = 0$$

cuando k es entero.

7.1.9 **Conducta:** Repasar las características de las funciones trigonométricas

Solución: En efecto, ya que la función secante tiene período 2π, igual que su recíproca: la función coseno. De esta forma

$$\sec\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \sec\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

7.1.10 **Conducta:** Repasar las características de las funciones trigonométricas

Solución: En efecto, Grettel está en lo correcto. Se debe recordar que la función seno es impar y la función coseno es par. Por lo tanto eso implica que

$$\cot(-x) = \frac{\cos(-x)}{\operatorname{sen}(-x)} = \frac{\cos(x)}{-\operatorname{sen}(x)} = -\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = -\cot(x)$$

7.2. Identidades y Funciones Inversas

7.2.1 **Conducta:** Repasar el uso de identidades trigonométricas

Solución: En este caso, Reiman está en lo correcto, ya que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{b}{c}$$

y

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{b}{c}$$

Con lo cual

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

7.2.2 **Conducta:** Repasar el uso de identidades trigonométricas

Solución: En este caso, Reiman está en lo correcto, ya que

$$\cot(\alpha) = \frac{a}{b}$$

y

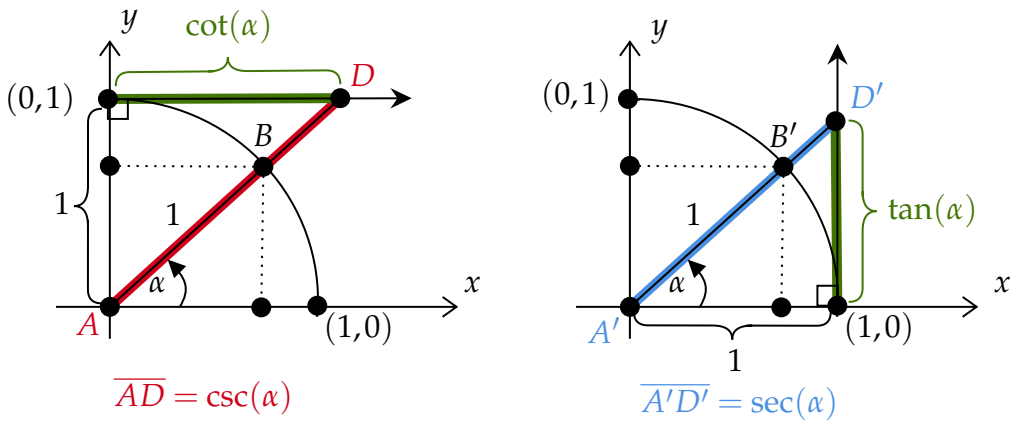
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{a}{b}$$

Con lo cual

$$\cot(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

7.2.3 **Conducta:** Repasar el uso de identidades trigonométricas

Solución: Para explicar la certeza de esta identidades, se toman en cuenta las siguientes figuras



En ambas se aprecian la cosecante y secante como la hipotenusa de los triángulos rectángulos EAD y E'A'D' respectivamente, donde E y E' corresponden a los puntos (0,1) y (1,0) respectivamente. Luego, por el Teorema de Pitágoras se sigue que

$$\overline{EA}^2 + \overline{ED}^2 = \overline{AD}^2 \Leftrightarrow 1 + \cot^2(\alpha) = \csc^2(\alpha)$$

y

$$\overline{E'A'}^2 + \overline{E'D'}^2 = \overline{A'D'}^2 \Leftrightarrow 1 + \tan^2(\alpha) = \sec^2(\alpha)$$

7.2.4 **Conducta:** Repasar el uso de identidades trigonométricas

Solución: La única opción correcta es la b), pues al cambiar α y β por θ en la identidad

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

se obtiene que

$$\begin{gathered}\operatorname{sen}(\theta+\theta)=\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)+\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\Leftrightarrow\\ \operatorname{sen}(2\theta)=\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\Leftrightarrow\\ \operatorname{sen}(2\theta)=2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\end{gathered}$$

7.2.5 **Conducta:** Repasar el uso de identidades trigonométricas

Solución: En efecto. Note que

$$\begin{aligned}\frac{\sec^2 x-1}{\sec^2 x}=&\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{\frac{1}{\cos^2 x}}\\ =&\frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cancel{\cos^2 x}}}{\frac{1}{\cancel{\cos^2 x}}}\\ =&1-\cos^2 x\\ =&\operatorname{sen}^2 x\end{aligned}$$

Aquí se han usado las identidades trigonométricas $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$ y $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$

7.2.6 **Conducta:** Repasar el uso de identidades trigonométricas

Solución: En este caso note que

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos(2x)} &= \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{1+\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)}\\ &= \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{1-\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)}\\ &= \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cos^2(x)+\cos^2(x)}\\ &= \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{2\cos^2(x)}\\ &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\\ &= \tan(x)\end{aligned}$$

Por lo cual, Ana no está en lo correcto. Aquí se han usado las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$

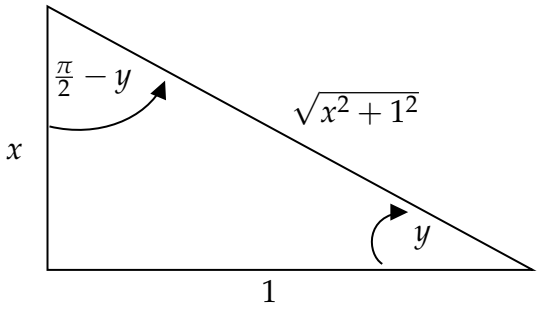
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

7.2.7 **Conducta:** Repasar las características de las funciones trigonométricas inversas

Solución: En efecto, para ello considere el siguiente triángulo rectángulo



$$\arctan(x) = y \Leftrightarrow \tan(y) = x$$

En este, podemos suponer que y es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo. Podemos observar en el mismo que

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{1}{x}$$

De donde

$$\frac{\pi}{2} - y = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{\pi}{2} = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + y$$

Y como $y = \tan(x)$ se sigue que

$$\frac{\pi}{2} = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \tan(x)$$

Como se quería mostrar.

Nota: Recordamos que la función arcotangente tiene por dominio $\mathbb{R}$ y ámbito el intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, con lo cual, $x \in \mathbb{R}$ pero $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Para efectos del triángulo dado, $y, (\frac{\pi}{2} - y) \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

7.2.8 **Conducta:** Repasar las características de las funciones trigonométricas inversas

Solución: En este caso Ingrid no está en lo correcto, ya que 2 no pertenece al dominio de la función arcocoseno, el cual es el intervalo $[-1,1]$.

7.2.9 **Conducta:** Repasar las características de las funciones trigonométricas inversas

Solución: En efecto, ya que la función arcoseno es impar, es decir

$$\operatorname{arcsen}(-x) = -\operatorname{arcsen}(x)$$

lo cual es cierto para todo valor en el intervalo $[-1,1]$ (dominio del arcoseno).

7.2.10 **Conducta:** Repasar las características de las funciones trigonométricas inversas

Solución: Ester está en lo correcto, ya que utilizando la identidad trigonométrica

$$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$$

Deducimos que

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$$

En particular

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Dado que tangente y arcotangente son funciones inversas.

7.3. Ecuaciones Trigonométricas

7.3.1 **Conducta:** Repasar la solución de ecuaciones trigonométricas

Solución: En este caso, Pablo no está en lo correcto, ya que 2 no pertenece al intervalo $[-1,1]$ para el cual está definido la función seno.

7.3.2 **Conducta:** Repasar la solución de ecuaciones trigonométricas

Solución: En este caso, Lucas está en lo correcto, ya que $\frac{1}{4}$ pertenece al intervalo $[-1,1]$ para el cual está definido la función coseno.

7.3.3 **Conducta:** Repasar la solución de ecuaciones trigonométricas

Solución: En este caso, Allan está en lo correcto, ya que -25 pertenece a $\mathbb{R}$, conjunto para el cual está definido la función tangente.

7.3.4 **Conducta:** Repasar la solución de ecuaciones trigonométricas

Solución: En este caso tenemos que

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

A partir de esto, se resuelve la ecuación

$$\cos(x) = 1$$

De aquí,

$$\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto

$$S = \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$$

7.3.5 **Conducta:** Repasar la solución de ecuaciones trigonométricas

Solución: En este caso tenemos que

$$\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

A partir de esto, se resuelve la ecuación

$$\operatorname{sen}(x) = 1$$

De aquí,

$$\operatorname{sen}(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

7.3.6 **Conducta:** Repasar la solución de ecuaciones trigonométricas

Solución: Estas ecuaciones son equivalentes, ya que $\cos^2(x)+2\cos(x)+1=0$ se puede rescribir como $(\cos(x)+1)^2=0$ y esta tiene solución cuando $\cos(x)=-1$, es decir

$$S=\{\pi+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\}$$

Por otro lado, $\cos^2(x)+4\cos(x)+3=0$ se puede rescribir como $(\cos(x)+1)(\cos(x)+3)=0$ y esta tiene soluciòn cuando $\cos(x)=-1$ o $\cos(x)=-3$. Pero esta última ecuación no tiene solución, ya que $3\notin[-1,1]$ (como ya se había explicado), por lo tanto, la solución es

$$S=\{\pi+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\}$$

Los cuales son conjuntos iguales.

7.3.7 **Conducta:** Repasar la solución de ecuaciones trigonométricas

Solución: En este caso, la respuesta correcta es la d) ya que al resolver dicha ecuación tenemos[1] que

$$\begin{aligned}\tan(2x)=2 \Rightarrow & 2x=\arctan(2)+k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ \Rightarrow & x=\frac{\arctan(2)}{2}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Luego, las soluciones deseadas en el intervalo deben cumplir que

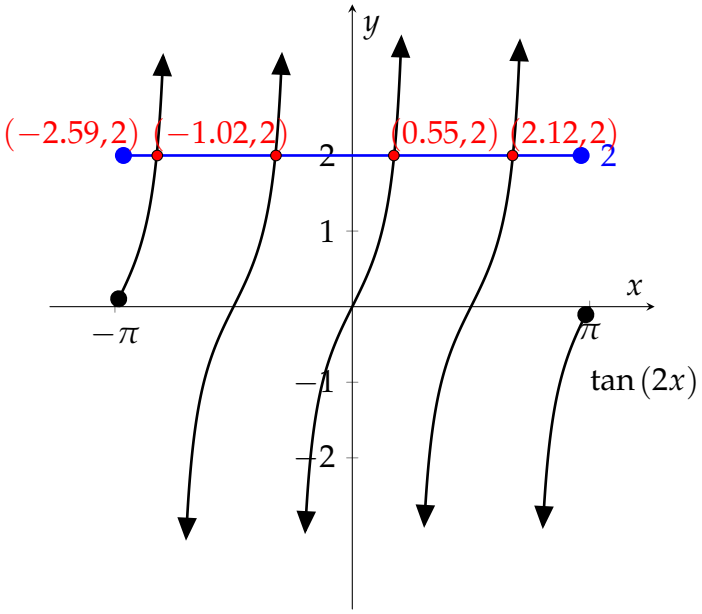
$$\begin{aligned}-\pi\leq\frac{\arctan(2)}{2}+\frac{k\pi}{2}&\leq\pi\\ -2\pi\leq\arctan(2)+k\pi&\leq 2\pi\\ -2\pi-\arctan(2)\leq k\pi&\leq 2\pi-\arctan(2)\\ \frac{-2\pi-\arctan(2)}{\pi}\leq k&\leq\frac{2\pi-\arctan(2)}{\pi}\\ -2.35\leq k&\leq 1.64\end{aligned}$$

Como k es entero, se sigue que los únicos valores viables son $-2,-1,0$ y 1 en el intervalo dado, lo cual genera las soluciones

$$S=\left\{\frac{\arctan(2)}{2}-\pi,\frac{\arctan(2)}{2}-\frac{\pi}{2},\frac{\arctan(2)}{2},\frac{\arctan(2)}{2}+\frac{\pi}{2}\right\}$$

Es decir, hay cuatro soluciones. Gráficamente

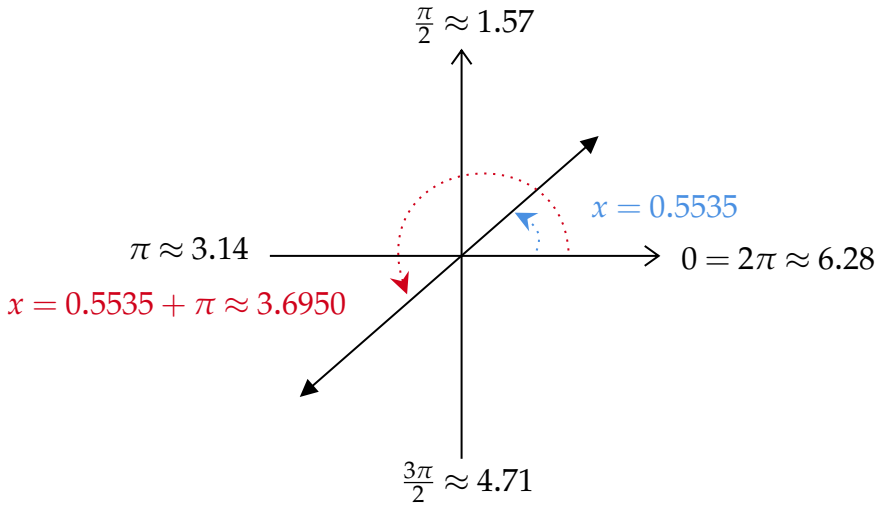
[1] Dado que el periódo de la función tangente es π.



Una alternativa a esta solución es econtrando el valor que se ofrece en la calculadora directamente. En este caso

$$x = \frac{\arctan(2)}{2} \approx 0.5535$$

La ecuación original indica que la tangente es positiva, con lo cual tenemos soluciones en el I y III cuadrante, como se muestra en la figura



Como el ángulo que tenemos está duplicado, esto significa que cada $\frac{\pi}{2}$ radianes (el período de la función tangente entre dos) econtraremos una solución restando o sumando a cada uno de los ángulos encontrados.

7.3.8 **Conducta:** Repasar la solución de ecuaciones trigonométricas

Solución: En este caso, la respuesta correcta es la b) ya que al resolver dicha ecuación, en el primer cuadrante, tenemos[2] que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(3x) = 0.5 \Rightarrow & 3x = \operatorname{arcsen}(0.5) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow & x = \frac{\operatorname{arcsen}(0.5)}{3} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Luego, las soluciones deseadas en el intervalo deben cumplir que

$$-7\pi \leq \frac{\operatorname{arcsen}(0.5)}{3} + \frac{2\pi k}{3} \leq -6\pi$$

$$-21\pi \leq \operatorname{arcsen}(0.5) + 2\pi k \leq -18\pi$$

$$-21\pi - \operatorname{arcsen}(0.5) \leq 2\pi k \leq -18\pi - \operatorname{arcsen}(0.5)$$

$$\frac{-21\pi - \operatorname{arcsen}(0.5)}{2\pi} \leq k \leq \frac{-18\pi - \operatorname{arcsen}(0.5)}{2\pi}$$

$$-10.58 \leq k \leq -9.08$$

Como k es entero, se sigue que el único valor viable es -10 en el intervalo dado, lo cual genera una solución.

$$S_1 = \left\{ \frac{\operatorname{arcsen}(0.5)}{3} - \frac{20\pi}{3} \right\}$$

Por otro lado, para el segundo cuadrante tenemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(3x) = 0.5 \Rightarrow & 3x = \pi - \operatorname{arcsen}(0.5) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow & x = \frac{\pi - \operatorname{arcsen}(0.5)}{3} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Luego, las soluciones deseadas en el intervalo deben cumplir que

$$-7\pi \leq \frac{\pi - \operatorname{arcsen}(0.5)}{3} + \frac{2\pi k}{3} \leq -6\pi$$

$$-21\pi \leq \pi - \operatorname{arcsen}(0.5) + 2\pi k \leq -18\pi$$

$$-21\pi + \operatorname{arcsen}(0.5) - \pi \leq 2\pi k \leq -18\pi + \operatorname{arcsen}(0.5) - \pi$$

$$\frac{-22\pi + \operatorname{arcsen}(0.5)}{2\pi} \leq k \leq \frac{-19\pi + \operatorname{arcsen}(0.5)}{2\pi}$$

$$-10.91 \leq k \leq -9.41$$

[2] Dado que el periódo de la función seno es 2π.

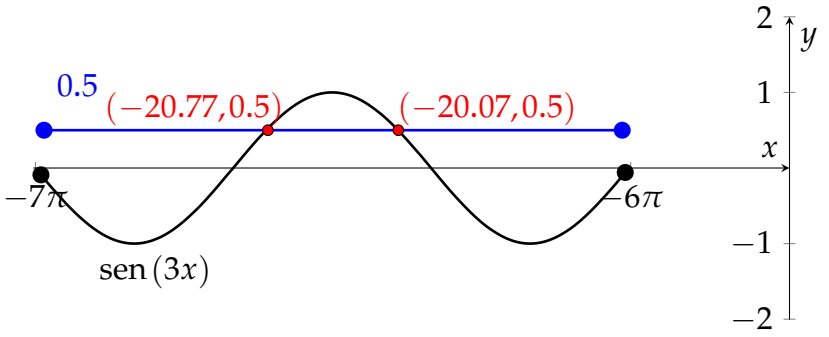
Como k es entero, se sigue el único valor viable es -10 en el intervalo dado, lo cual genera una solución.

$$S_2 = \left\{ \frac{\operatorname{arcsen}(0.5) - \pi}{3} - \frac{20\pi}{3} \right\}$$

De esta forma existen 2 soluciones, las cuales son

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{ \frac{\operatorname{arcsen}(0.5)}{3} - \frac{20\pi}{3}, \frac{\operatorname{arcsen}(0.5) - \pi}{3} - \frac{20\pi}{3} \right\}$$

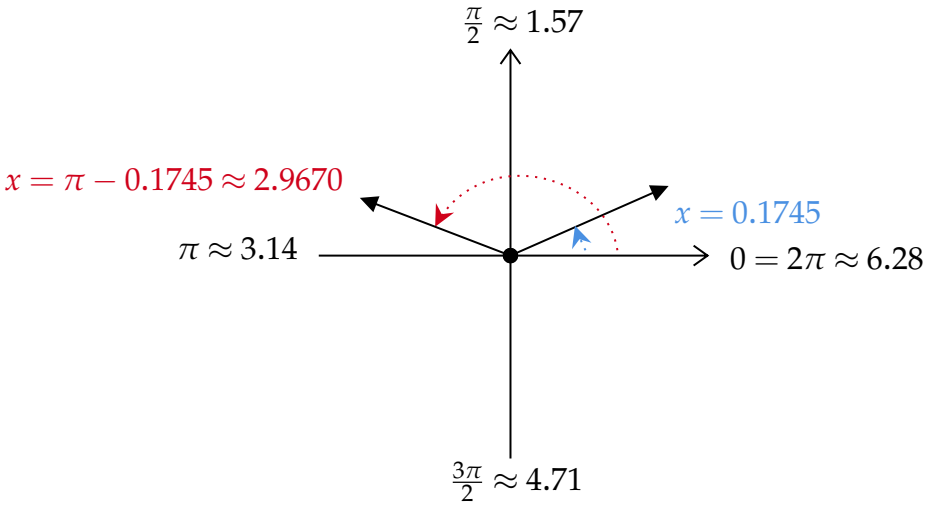
Gráficamente



Una alternativa a esta solución es econtrando el valor que se ofrece en la calculadora directamente. En este caso

$$x = \frac{\operatorname{arcsen}(0.5)}{3} \approx 0.1745$$

La ecuación original indica que el seno es positivo, con lo cual tenemos soluciones en el I y II cuadrante, como se muestra en la figura



Como el ángulo que tenemos está triplicado, esto significa que cada $\frac{2\pi}{3}$ radianes (el período de la función seno entre tres) econtraremos una solución restando o sumando a cada uno de los ángulos encontrados.

7.3.9 **Conducta:** Repasar la solución de ecuaciones trigonométricas

Solución: En este caso, la respuesta correcta es la a) ya que al resolver dicha ecuación tenemos en el primer cuadrante[3] que

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0.9 &\Rightarrow \frac{x}{2}=\arccos(0.9)+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\\ &\Rightarrow x=2\arccos(0.9)+4\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Luego, las soluciones deseadas en el intervalo deben cumplir que

$$2\pi \leq 2\arccos(0.9)+4\pi k \leq 4\pi$$

$$\pi \leq \arccos(0.9)+2\pi k \leq 2\pi$$

$$\pi-\arccos(0.9) \leq 2\pi k \leq 2\pi-\arccos(0.9)$$

$$\frac{\pi-\arccos(0.9)}{2\pi} \leq k \leq \frac{2\pi-\arccos(0.9)}{2\pi}$$

$$0.42 \leq k \leq 0.92$$

Como k es entero, se sigue que no hay soluciones en este intervalo, con lo cual

$$S_1=\emptyset$$

Por otro lado, para el cuarto cuadrante tenemos que

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0.9 &\Rightarrow \frac{x}{2}=2\pi-\arccos(0.9)+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\\ &\Rightarrow x=4\pi-2\arccos(0.9)+4\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Luego, las soluciones deseadas en el intervalo deben cumplir que

$$2\pi \leq 4\pi-2\arccos(0.9)+4\pi k \leq 4\pi$$

$$\pi \leq 2\pi-\arccos(0.9)+2\pi k \leq 2\pi$$

$$\pi+\arccos(0.9)-2\pi \leq 2\pi k \leq 2\pi+\arccos(0.9)-2\pi$$

$$\frac{-\pi+\arccos(0.9)}{2\pi} \leq k \leq \frac{\arccos(0.9)}{2\pi}$$

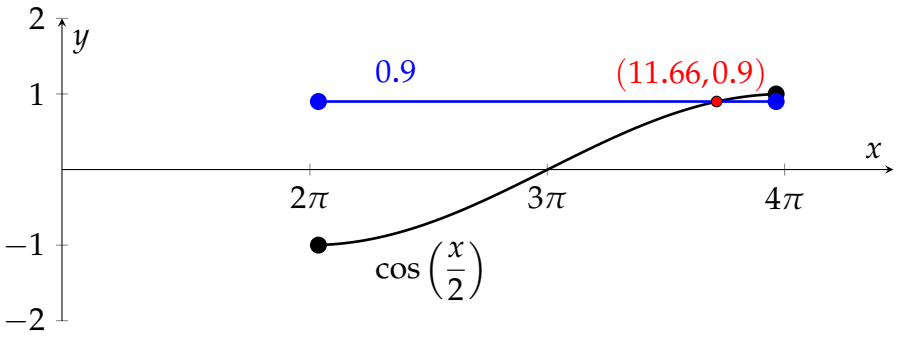
$$-0.42 \leq k \leq 0.07$$

Como k es entero, se sigue el único valor viable es 0 en el intervalo dado, lo cual genera una solución.

$$S_2=\{4\pi-2\arccos(0.9)\approx 11.66\}$$

Es decir, hay una solución. Gráficamente

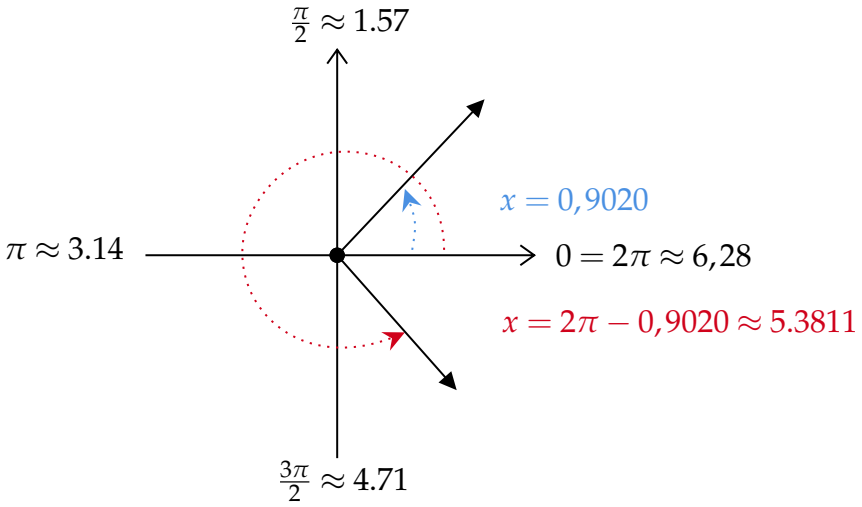
[3] Dado que el periódo de la función coseno es 2π.



Una alternativa a esta solución es econtrando el valor que se ofrece en la calculadora directamente. En este caso

$$x = 2\arccos(0.9) \approx 0.9020$$

La ecuación original indica que el coseno es positivo, con lo cual tenemos soluciones en el I y IV cuadrante, como se muestra en la figura



Como el ángulo que tenemos está partido a la mitad, esto significa que cada 4π radianes (el periódo de la función coseno por dos) econtraremos una solución restando o sumando a cada uno de los ángulos encontrados.

7.3.10 **Conducta:** Repasar la solución de ecuaciones trigonométricas

Solución: En tal caso Karla no tiene razón, ya que la ecuación dada se puede convertir en

$$\underbrace{1-\cos^2(x)}_{\operatorname{sen}^2(x)} - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$1 - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = 1$$

$$1 - \underbrace{\operatorname{sen}(2x)}_{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = 1$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 0$$

De donde

$$S = \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

la cual posee infinitas soluciones.

7.4. Aplicaciones de la Trigonometría

7.4.1 **Conducta:** Repasar la definición de ángulo de elevación y depresión

Solución: No. Lo que se tiene es un ángulo de depresión, ya que se observa la caja en un ángulo por debajo de la línea de horizonte.

7.4.2 **Conducta:** Repasar la definición de ángulo de elevación y depresión

Solución: Lo único verdadero se presenta en la afirmación II.

7.4.3 **Conducta:** Repasar el uso de la ley de senos

Solución: En este caso, mediante la ley de senos, se tiene que

$$\frac{x}{\operatorname{sen}(100^\circ)} = \frac{23}{\operatorname{sen}(10^\circ)}$$

O bien

$$x = \frac{23\operatorname{sen}(100^\circ)}{\operatorname{sen}(10^\circ)} \approx 130.4$$

7.4.4 **Conducta:** Repasar el uso de la ley de cosenos

Solución: En este caso, mediante la ley de cosenos, se tiene que

$$x^2 = 90^2 + 30^2 - 2(90)(30)\cos(50^\circ)$$

(Note que el ángulo opuesto al lado x vale 50°)O bien

$$x \approx 74.36$$

7.4.5 **Conducta:** Repasar la resolución de problemas que involucran la trigonometría

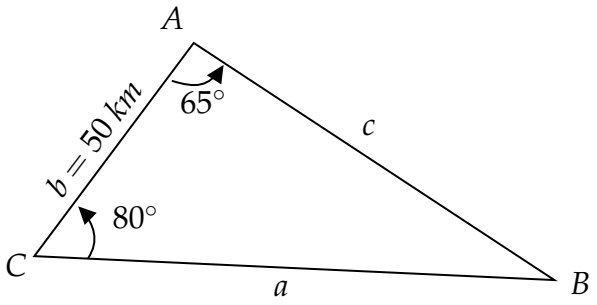
Solución: En tal caso, utilizando la razón tangente tendremos que

$$\tan(30^\circ) = \frac{h}{271} \Rightarrow 271 \cdot \tan(30^\circ) = h \Rightarrow h \approx 156.5$$

Por lo tanto, la atura de la altura de la torre de refrigeración de la central nuclear es de 156.5 metros aproximadamente.

7.4.6 **Conducta:** Repasar la resolución de problemas que involucran la trigonometría

Solución: Consideremos la siguiente figura



A partir de esta, podemos deducir que el valor del ángulo en el vértice B es de 35°.. Luego, mediante la ley de senos se tiene que

$$\frac{50}{\text{sen}(35^\circ)} = \frac{a}{\text{sen}(65^\circ)} \text{ y } \frac{50}{\text{sen}(35^\circ)} = \frac{c}{\text{sen}(80^\circ)}$$

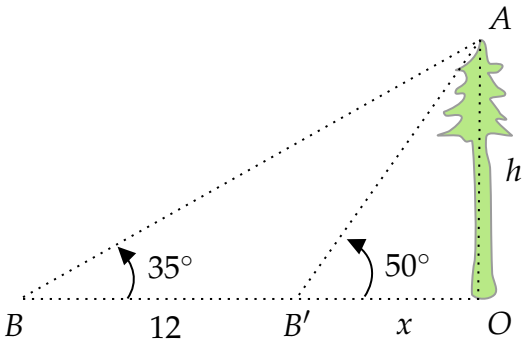
O bien

$$a = \frac{50\,\text{sen}(65^\circ)}{\text{sen}(35^\circ)} \approx 79 \text{ y } b = \frac{50\,\text{sen}(80^\circ)}{\text{sen}(35^\circ)} \approx 85.85$$

Por tanto, el barco está a 79 km de la estación C y a 85.85 km de la estación A.

7.4.7 **Conducta:** Repasar la resolución de problemas que involucran la trigonometría

Solución: Consideremos la siguiente figura



Sea x la medida del segmento $B'O$ y sea h la medida del segmento AO (altura del árbol). Observamos que

$$\tan 50^\circ = \frac{h}{x} \Leftrightarrow x = \frac{h}{\tan 50^\circ} \tag{1}$$

Por otro lado

$$\tan 35^\circ = \frac{h}{12+x} \Leftrightarrow (12+x)\tan 35^\circ = h \tag{2}$$

Sustituyendo (1) en (2) tendremos que

$$\left(12 + \frac{h}{\tan 50^\circ}\right)\tan 35^\circ = h \Leftrightarrow$$

$$12\tan 35^\circ + h\frac{\tan 35^\circ}{\tan 50^\circ} = h \Leftrightarrow$$

$$12\tan 35^\circ = h - h\frac{\tan 35^\circ}{\tan 50^\circ} \Leftrightarrow$$

$$12\tan 35^\circ = h\left(1 - \frac{\tan 35^\circ}{\tan 50^\circ}\right) \Leftrightarrow$$

$$12\tan 35^\circ = h\left(\frac{\tan 50^\circ - \tan 35^\circ}{\tan 50^\circ}\right) \Leftrightarrow$$

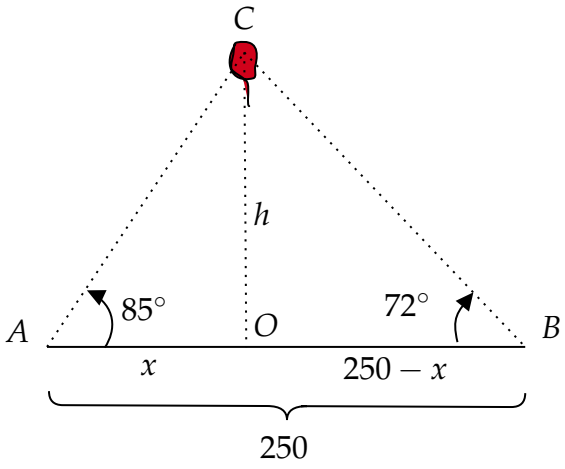
$$12\tan 35^\circ \cdot \left(\frac{\tan 50^\circ}{\tan 50^\circ - \tan 35^\circ}\right) = h \Leftrightarrow$$

$$\frac{12\tan 35^\circ \tan 50^\circ}{\tan 50^\circ - \tan 35^\circ} = h \approx 20.4$$

De esta forma, el árbol tiene una altura de 20.4 metros aproximadamente.

7.4.8 **Conducta:** Repasar la resolución de problemas que involucran la trigonometría

Solución: Consideremos la siguiente figura



Sea x la medida del segmento AO y sea h la medida del segmento OC (altura del globo). Observamos que

$$\tan 85^\circ = \frac{h}{x} \Leftrightarrow x = \frac{h}{\tan 85^\circ} \tag{1}$$

Por otro lado

$$\tan 72^\circ = \frac{h}{250 - x} \Leftrightarrow (250 - x)\tan 72^\circ = h \tag{2}$$

Sustituyendo (1) en (2) tendremos que

$$\left(250 - \frac{h}{\tan 85^\circ}\right)\tan 72^\circ = h \Leftrightarrow$$

$$250\tan 72^\circ - h\frac{\tan 72^\circ}{\tan 85^\circ} = h \Leftrightarrow$$

$$250\tan 72^\circ = h + h\frac{\tan 72^\circ}{\tan 85^\circ} \Leftrightarrow$$

$$250\tan 72^\circ = h\left(1 + \frac{\tan 72^\circ}{\tan 85^\circ}\right) \Leftrightarrow$$

$$250\tan 72^\circ = h\left(\frac{\tan 85^\circ + \tan 72^\circ}{\tan 85^\circ}\right) \Leftrightarrow$$

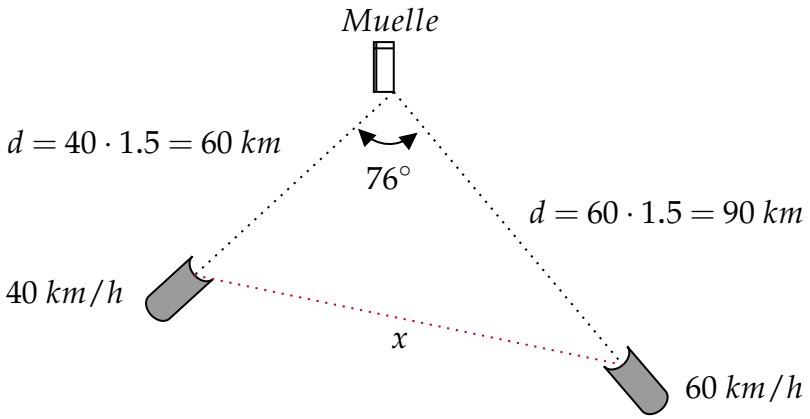
$$250\tan 72^\circ \cdot \left(\frac{\tan 85^\circ}{\tan 85^\circ + \tan 72^\circ}\right) = h \Leftrightarrow$$

$$\frac{250\tan 72^\circ \tan 85^\circ}{\tan 85^\circ + \tan 72^\circ} = h \approx 606.2$$

De esta forma, el globo se encuentra a una altura de 602.2 metros aproximadamente.

7.4.9 **Conducta:** Repasar la resolución de problemas que involucran la trigonometría

Solución: Consideremos la siguiente figura



En tal caso, note que desde las 10:00 a.m. hasta las 11:30 a. ha pasado hora y media, por lo tanto, cada rapidez se multiplica por 1.5 para calcular la distancia recorrida. (Los cálculos se muestran en el dibujo). Luego, mediante la ley de cosenos se tiene que

$$x^2 = 60^2 + 90^2 - 2(60)(90)\cos(76^\circ) \Rightarrow x \approx 95.33$$

De esta manera a las 11:30 am. los barcos se encuentran separados a una distancia de 95.33 km aproximadamente.

7.4.10 **Conducta:** Repasar la resolución de problemas que involucran la trigonometría

Solución: En efecto, note que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{y} \Rightarrow y\operatorname{sen}\alpha = h$$

Luego el área del triángulo está dado por

$$A = \frac{(z_1 + z_2)h}{2} = \frac{zh}{2} = \frac{z(y\operatorname{sen}\alpha)}{2} = \frac{zy\operatorname{sen}\alpha}{2}$$

Como se proponía.

Soluciones del Capítulo 8

8.1. Función Exponencial y Logarítmica

8.1.1 **Conducta:** Repasar las propiedades de la función exponencial

Solución: En efecto, una de las características de una función exponencial creciente es que la base (en este caso a) debe ser mayor que la unidad.

8.1.2 **Conducta:** Repasar las propiedades de la función exponencial

Solución: En efecto, notemos que

$$f(x) = 3^{-2x} + 1 = (3^{-2})^x + 1 = \left(\frac{1}{9}\right)^x + 1$$

Esto corresponde a una función decreciente, la cual tiene una asíntota horizontal en $y = 1$ porque al criterio se le ha sumado una unidad.

8.1.3 **Conducta:** Repasar las propiedades de la función logarítmica

Solución: Fabio indica una respuesta incorrecta, ya que el dominio de dicha función es $]0,\infty[$ (el argumento del logaritmo debe ser positivo), por lo cual 0 como preimagen no es permitible. (No está en el dominio de la función f aquí presentada)

8.1.4 **Conducta:** Repasar el cálculo del dominio máximo con funciones exponenciales y logarítmicas

Solución: Para que la función esté bien definida es necesario que

$$2x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \tag{1}$$

(El argumento del logaritmo natural esté bien definido) Además, es necesario que $\ln(2x - 5) \neq 0$, o bien

$$2x - 5 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3 \tag{2}$$

Por último, se necesita que $5 - x \geq 0$, esto es que

$$5 \geq x \tag{3}$$

(La raíz del exponente de e debe estar bien definida) Con base en (1), (2) y (3) se sigue que

$$D_h = \left]\frac{5}{2}, 5\right] - \{3\}$$

8.1.5 **Conducta:** Repasar las identidades de los logaritmos

Solución: No es cierto ya que

$$\begin{aligned}\frac{\log_{a-b}\sqrt{\frac{1}{a-b}}+\log_{\frac{a}{b}}\frac{b}{a}}{\log_{a+b}\sqrt{a+b}} &= \frac{\log_{a-b}(a-b)^{-\frac{1}{2}}+\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}}{\log_{a+b}(a+b)^{\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{-1/2+-1}{1/2}\\ &= \frac{-3/2}{1/2}\\ &= -3\end{aligned}$$

8.1.6 **Conducta:** Repasar las propiedades de la función logarítmica y exponencial

Solución: Para $b>0$ y $b\neq 1$, se tiene que la relación

$$b^x = y \Leftrightarrow \log_b y = x$$

es verdadera. En particular, si $b=e$ y $y=p$ se tiene que

$$e^x = p \Leftrightarrow \log_e p = x$$

Por definición, $\log_e p = \ln e$, por lo tanto

$$e^x = p \Leftrightarrow \ln p = x$$

8.1.7 **Conducta:** Repasar las propiedades de la función logarítmica

Solución: Notemos que la gráfica tiene por dominio el intervalo $]-\infty,2[$ y que ésta es decreciente. La única opción que coinicide con estas características es la función con criterio

$$f(x) = \log_2(2-x)+1$$

es decir la opción a). Además se cumple que

$$f(0) = \log_2(2-0)+1 = 1+1 = 2 \Rightarrow (0,2)\in G_f$$

$$0 = \log_2(2-x)+1 \Rightarrow x = 3/2 \Rightarrow (3/2,0)\in G_f$$

8.1.8 **Conducta:** Repasar las propiedades de la función logarítmica y exponencial

Solución: Analíticamente, no es correcto lo que indica Ana. Por un lado

$$\begin{aligned} 7^{x+2}+1=y \Leftrightarrow & 7^{x+2}=y-1 \\ \Leftrightarrow & x+2=\log_7(y-1) \\ \Leftrightarrow & x=(\log_7(y-1))-2 \end{aligned}$$

Pero esto es cierto cuando $y-1>0$, es decir, $y>1$. Para que lo anterior sea cierto es necesario indicar que $x\in\mathbb{R}$ y $y\in]1,\infty]$.

8.1.9 **Conducta:** Repasar las identidades de los logaritmos

Solución: En efecto

$$\begin{aligned} \frac{\log(x^2)+\log(y^2)}{\log(x)+\log(y)} =& \frac{\log(x^2y^2)}{\log(xy)} \\ =& \frac{\log((xy)^2)}{\log(xy)} \\ =& 2\frac{\log(xy)}{\log(xy)} \\ =& 2 \end{aligned}$$

8.1.10 **Conducta:** Repasar las identidades de los logaritmos

Solución: En efecto

$$\begin{aligned} \frac{2\ln b+3\ln c}{4\ln a} =& \frac{\ln b^2+\ln c^3}{\ln a^4} \\ =& \frac{\ln(b^2c^3)}{\ln a^4} \\ =& \frac{\log_e(b^2c^3)}{\log_e a^4} \\ =& \log_{a^4}(b^2c^3) \end{aligned}$$

Note que se aplicó la propiedad de cambio de base

8.2. Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas. Problemas

8.2.1 **Conducta:** Repasar la resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Solución: En este caso tenemos que ambos procedimientos son correctos, ya que por la propiedad de cambio de base se tiene que

$$\frac{\ln 4}{\ln 7} = \log_7 4$$

con lo cual

$$\frac{1}{3}((\log_7 4) - 1) = \frac{1}{3}\left(\frac{\ln 4}{\ln 7} - 1\right)$$

8.2.2 **Conducta:** Repasar la resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Solución: En este caso tendremos que solo el procedimiento 1 es correcto, ya que en el paso de $\log_2(3x-1) = 2^4$ a $4^2 = 3x-1$ en el procedimiento 2, lo correcto es tener $2^4 = 3x-1$. Note que se obtienen los mismos resultados, pero algebraicamente no se opera de manera correcta.

8.2.3 **Conducta:** Repasar la resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Solución: En este caso, la ecuación dada se puede descomponer en dos ecuaciones

$$e^x = 0 \text{ y } \log^2 x + \log x - 6 = 0$$

La primera ecuación no es resolubre en $\mathbb{R}$, ya que $e^x > 0$ por la forma en que está definida. En el caso de la segunda ecuación se puede hacer la sustitución $u = \log x$, con lo cual

$$\log^2 x + \log x - 6 = 0 \Leftrightarrow u^2 + u - 6 = 0 \Leftrightarrow (u-2)(u+3) \Rightarrow \begin{cases} u &= 2 \\ u &= -3 \end{cases}$$

- Cuando $u = 2$ se tiene que $\log x = 2$, o bien, $100 = x$.
- Cuando $u = -3$ se tiene que $\log x = -3$, o bien, $\frac{1}{1000} = x$.

Haciendo las debidas comprobaciones, tenemos dos soluciones a la ecuación original (opción b)) y así

$$S = \left\{100, \frac{1}{1000}\right\}$$

8.2.4 **Conducta:** Repasar la resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Solución: En este caso, la ecuación dada se puede descomponer en dos ecuaciones

$$\log_\pi x \text{ y } 3^{4x} + 2 \cdot 3^{2x} + 1 = 0$$

La primera ecuación tiene por solución $x = 1$, ya que por propiedades de los logaritmos se cumple que

$$\log_\pi 1 = 0$$

En el caso de la segunda ecuación se puede hacer la sutitución $a = 3^{2x}$, con lo cual

$$3^{4x} + 2 \cdot 3^{2x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (3^{2x})^2 + 2 \cdot (3^{2x}) + 1 = 0 \Leftrightarrow u^2 + 2u + 1 = 0 \Leftrightarrow (u+1)^2 \Rightarrow u = -1$$

- Cuando $u = -1$ se tiene que $3^{2x} = -1$, pero esta ecuación no es resolubre en $\mathbb{R}$, ya que $3^{2x} > 0$ por la forma en que está definida.

Haciendo las debidas comprobaciones, tenemos una solución a la ecuación original (opción a)) y así

$$S = \{1\}$$

8.2.5 **Conducta:** Repasar la resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Solución: En este caso, Marta está equivocada, ya que al resolver la ecuación dada se tiene que

$$\begin{aligned} 7^{x-1} = 5^{x+1} &\Rightarrow \ln 7^{x-1} = \ln 5^{x+1} \\ &\Rightarrow (x-1)\ln 7 = (x+1)\ln 5 \\ &\Rightarrow x\ln 7 - \ln 7 = x\ln 5 + \ln 5 \\ &\Rightarrow x\ln 7 - x\ln 5 = \ln 5 + \ln 7 \\ &\Rightarrow x(\ln 7 - \ln 5) = \ln 5 + \ln 7 \\ &\Rightarrow x = \frac{\ln 5 + \ln 7}{\ln 7 - \ln 5} \end{aligned}$$

Con lo cual, la solución correcta es

$$S = \left\{ \frac{\ln 5 + \ln 7}{\ln 7 - \ln 5} \right\}$$

8.2.6 **Conducta:** Repasar la resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Solución: En este caso, Jorge tiene razón, ya que al resolver la ecuación dada se tiene que

$$(e^{x-1}-1)(\log_2(x-2)-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} e^{x-1}-1=0 & \Rightarrow e^{x-1}=1 \\ \log_2(x-2)-1=0 & \Rightarrow \log_2(x-2)=1 \end{cases}$$

De la primera ecuación se tiene que

$$e^{x-1}=1 \Rightarrow x-1=\ln 1 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

Pero, esta no puede ser solución ya que

$$\underbrace{(e^{1-1}-1)}_{0}\underbrace{(\log_2(1-2)-1)}_{\text{No existe}}$$

De la segunda ecuación se tiene que

$$\log_2(x-2)=1 \Rightarrow x-2=2 \Rightarrow x=2+2 \Rightarrow x=4$$

Y esta puede ser solución ya que

$$\underbrace{(e^{4-1}-1)}_{e^3-1}\underbrace{(\log_2(4-2)-1)}_{0}=0$$

Con lo cual, la solución correcta es

$$S=\{4\}$$

8.2.7 **Conducta:** Resolver situaciones que involucran aplicaciones sobre las funciones exponenciales o logarítmicas.

Solución: Para que existan 50000 ejemplares debe resolver la ecuación

$$100 \cdot 2^{\frac{t}{3}} = 50000$$

De donde

$$\begin{aligned} 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}} = 50000 &\Leftrightarrow 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}} = 50000 \\ &\Leftrightarrow 2^{\frac{t}{3}} = 500 \\ &\Rightarrow \frac{t}{3} = \log_2 500 \\ &\Rightarrow t = 3\log_2 500 \\ &\Rightarrow t \approx 26.89 \end{aligned}$$

Deben pasar 26.89 horas aproximadamente (más de un día) para que la cantidad de bacterias sea de 50000 ejemplares.

8.2.8 **Conducta:** Resolver situaciones que involucran aplicaciones sobre las funciones exponenciales o logarítmicas.

Solución:

a) En tal caso, la masa restante será de

$$m(40) = 24 \cdot 2^{-\frac{40}{25}} \approx 7.92$$

Es decir, la masa restante después de 40 años es de 7.92 mg.

b) Para tener 1 mg de estroncio 90 debe resolverse la ecuación

$$24 \cdot 2^{-\frac{t}{25}} = 1$$

De donde

$$\begin{aligned} 24 \cdot 2^{-\frac{t}{25}} = 1 \Leftrightarrow 2^{-\frac{t}{25}} &= \frac{1}{24} \\ \Rightarrow -\frac{t}{25} &= \log_2\left(\frac{1}{24}\right) \\ \Rightarrow t &= -25\log_2\left(\frac{1}{24}\right) \\ \Rightarrow t &\approx 114.62 \end{aligned}$$

Es decir, deben pasar 114.62 años aproximadamente para para tener 1 mg de estroncio 90.

8.2.9 **Conducta:** Resolver situaciones que involucran resolver aplicaciones sobre las funciones exponenciales o logarítmicas.

Solución: Para medir 120 decibelios debe resolverse la ecuación

$$120 = 10 \cdot (\log I + 12)$$

De donde

$$\begin{aligned} 120 = 10 \cdot (\log I + 12) &\Leftrightarrow 12 = \log I + 12 \\ &\Rightarrow 0 = \log I \\ &\Rightarrow 1 = I \end{aligned}$$

Es decir, con una intensidad de 1 vatios/m^2 se produce una sensación de sonoridad de 120 decibelios.

8.2.10 **Conducta:** Resolver situaciones que involucran aplicaciones sobre las funciones exponenciales o logarítmicas.

Solución: En tal caso, la magnitud del terremoto fue de

$$M(2 \times 10^{17}) = \frac{2}{3} \log \left(\frac{2 \times 10^{17}}{10^{4.4}} \right) \approx 8.6$$

Es decir, de 8.6 grados en la escala de Ritcher.