TEC | Tecnológico de Costa Rica

REPASO DE HABILIDADES DÉCIMO AÑO

TEMAS:
GEOMETRÍA, RELACIONES Y ÁLGEBRA

ELABORADO POR:
RICHARD CAMACHO ZAMORA
MICHELLE CHINCHILLA CHINCHILLA
ZULEYKA SUÁREZ VALDÉS-AYALA

2019

Índice

Como citar

Richard Camacho Zamora, Michelle Chinchilla Chinchilla y Zuleyka Suárez-Valdés Ayala. Repaso de habilidades décimo año. Geometría, Relaciones y Álgebra. Revista Digital matemática, educación e internet. Vol 20, No 2. Marzo-Agosto, 2020.

1. Introducción

Con este folleto buscamos contribuir con una mejor formación para los estudiantes de décimo año, tomando en cuenta las habilidades contempladas en el programa de Matemática vigente, según el Ministerio de Educación Pública en los temas de Geometría y Relaciones y Álgebra.

Los animamos a utilizar este material para reforzar las habilidades comprendidas en estos temas.

En cada uno de los temas se confeccionaron 25 preguntas: unas de selección única y otras de respuesta cerrada.

Al final se encuentran en forma detallada cada una de las soluciones a los ejercicios propuestos tomando en cuenta los conceptos que se requieren para una comprensión adecuada.

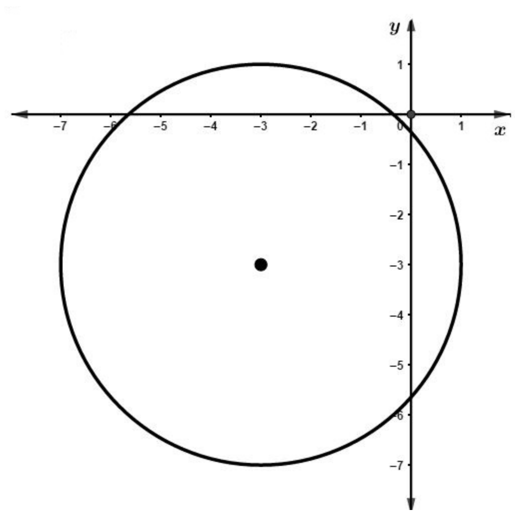
2. Agradecimientos

Se les agradece al Mag. Randall Blanco Benamburg y a la Lic. María Delfia Sigüenza Quintanilla por las sugerencias aportadas.

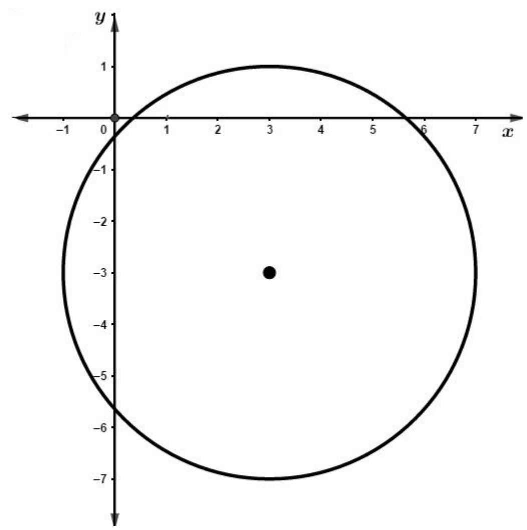
3. Geometría

Selección Única

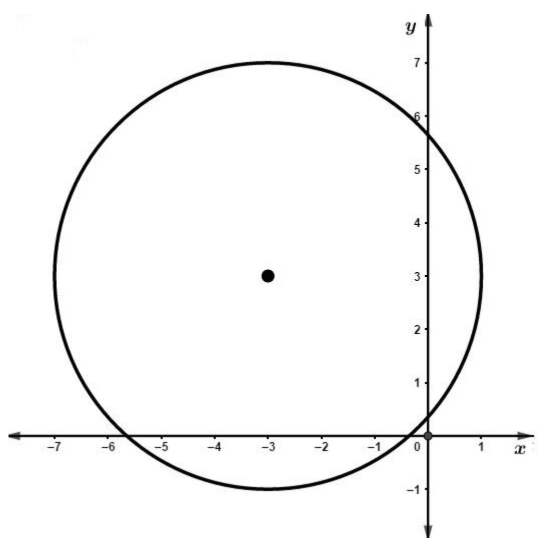
1. ¿Cuál de las siguientes representaciones es una circunferencia de radio 4 cm y centro $(-3, 3)$?



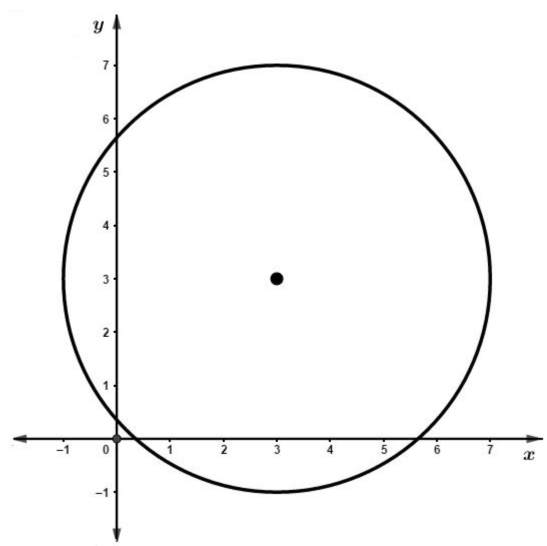
(a)



(c)



(b)



(d)

2. ¿Cuál de las siguientes opciones representa la ecuación de una circunferencia de centro $(5, -5)$ y radio 5?

   (a) $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 5$

   (b) $(x+5)^2 + (y-5)^2 = 5$

   (c) $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$

   (d) $(x+5)^2 + (y-5)^2 = 25$

3. Al trasladar 5 unidades al sur y 13 unidades al oeste la circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + y^2 = 16$ se tiene como resultado la ecuación

   (a) $(x-15)^2 + (y-5)^2 = 16$

   (b) $(x-11)^2 + (y-5)^2 = 16$

   (c) $(x+15)^2 + (y+5)^2 = 16$

   (d) $(x+11)^2 + (y+5)^2 = 16$

4. ¿Cuál de los siguientes puntos se encuentra sobre la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25$?

   (a) $(1, 4)$

   (b) $(5, 1)$

   (c) $(0, 5)$

   (d) $(-1, -5)$

5. ¿Cuál de las siguientes rectas es tangente a la circunferencia de centro $(2, -2)$ y radio 10 unidades?

   (a) $y = 12 + \dfrac{4x}{3}$

   (b) $x = 10$

   (c) $14x - 14y = 84$

   (d) $y = 10$

6. La recta $y = 3x$ es secante a la circunferencia de ecuación

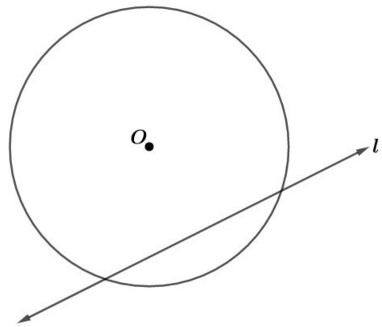
   (a) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 8$

   (b) $(x+8)^2 + (y+4)^2 = 40$

   (c) $x^2 + y^2 = 40$

   (d) $(x-4)^2 + (y-4)^2 6 = 4$

7. Observe la siguiente figura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Según la imagen anterior, la recta l es con respecto a la circunferencia de centro O

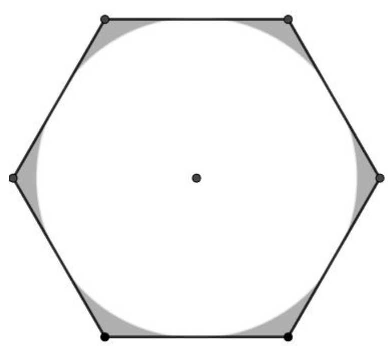
(a) interior.

(b) exterior.

(c) tangente.

(d) secante.

8. Observe la siguiente figura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Determine el área aproximada de la región sombreada de la figura anterior sabiendo que el diámetro del círculo es de 12 cm

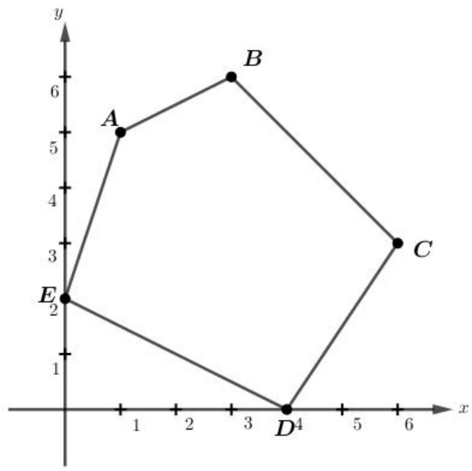
(a) 5,09 cm^2

(b) 11,64 cm^2

(c) 77,09 cm^2

(d) 385,73 cm^2

9. Observe la siguiente figura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



El área de la figura anterior corresponde a

(a) 17,72 cm^2

(b) 18,5 cm^2

(c) 21 cm^2

(d) 32 cm^2

10. ¿Cuál es la medida de la apotema de un triángulo equilátero sabiendo que está inscrito en una circunferencia de radio 6 cm?

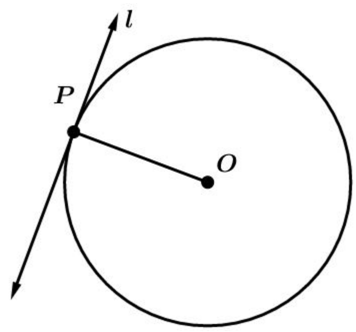
(a) 6 cm

(b) 3 cm

(c) 2 cm

(d) 1 cm

11. Observe la siguiente figura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita sabiendo que la recta l es tangente a la circunferencia de centro O.



Proposiciones

I. $l \perp \overline{OP}$.

II. $l \parallel \overline{OP}$.

III. l y $\overline{OP}$ son secantes.

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas tomando en cuenta que l es tangente a la circunferencia de centro O?

(a) I y II.

(b) II y III.

(c) I y III.

(d) Ninguna.

12. Dadas las rectas l_1 y l_2 de ecuaciones $l_1 : y = 3x + 2$ y $l_2 : 0 = \dfrac{-x}{3} - y$, se puede asegurar que las rectas

(a) son paralelas.

(b) son perpendiculares.

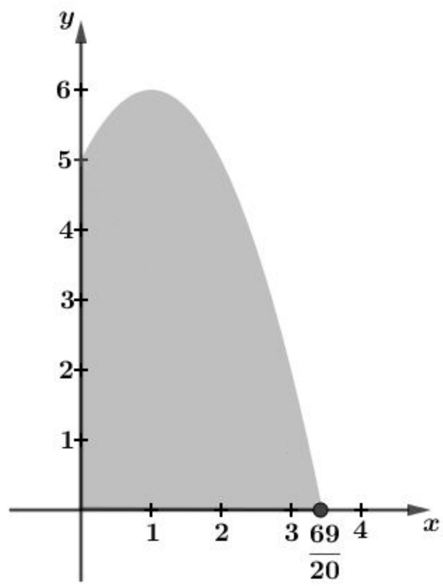
(c) se intersecan en el punto (0,0).

(d) no se intersecan.

Respuesta cerrada

13. Si se sabe que un pentágono de lado 8 cm y apotema 5,5 cm está inscrito en una circunferencia ¿Cuál es la medida del radio de la circunferencia?

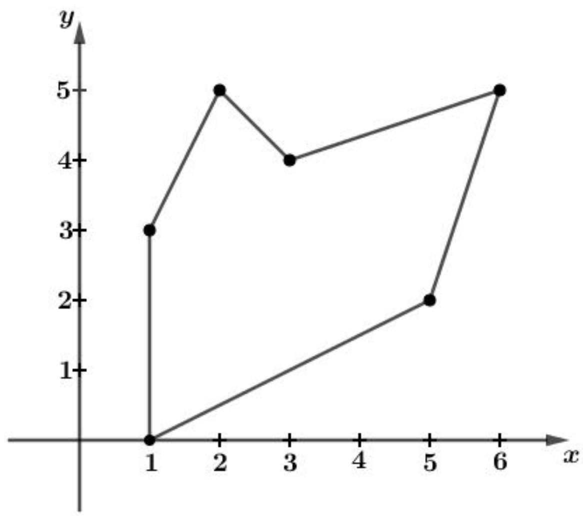
14. Observe la siguiente figura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



¿Cuál es el área aproximada de la figura anterior?

15. Dado un polígono regular de 18 lados, ¿cuál es la medida de un ángulo externo y la medida de un ángulo interno de este polígono?

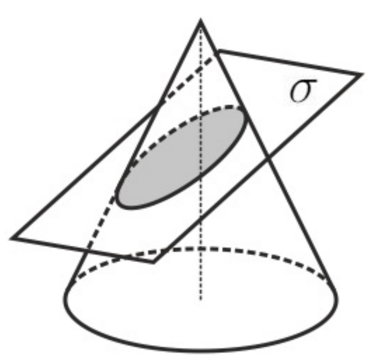
16. Observe la siguiente figura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



¿Cuál es aproximadamente el perímetro de la figura anterior?

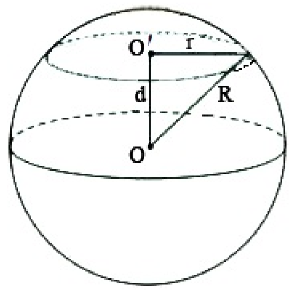
17. Si se sabe que la medida del ángulo externo de un polígono regular es de 40° y el lado del polígono mide 6 cm ¿Cuál es el perímetro de dicho polígono?

18. Observe la siguiente figura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



La figura que se forma al intersecar el cono anterior con el plano σ recibe el nombre de

19. Observe la siguiente figura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



¿Cuál es la medida del radio de la esfera sabiendo que $r = 7\,cm$ y que el corte se hizo a una distancia de $5\,cm$ del centro de la esfera?

20. ¿Cuál es el área de la figura que se forma al intersecar un cilindro con un plano π paralelo a sus bases sabiendo que el radio de la base mide $5\,cm$?

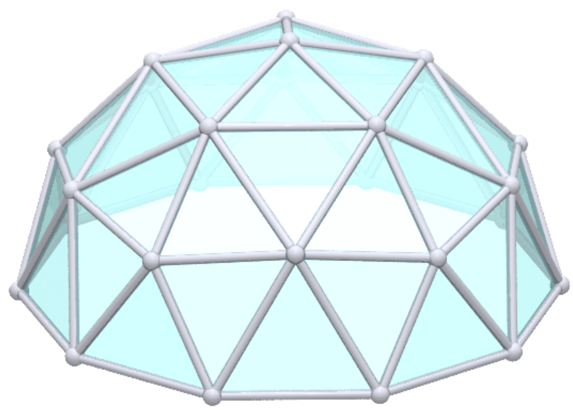
21. Si se tiene un cilindro de diámetro $14\,cm$ y altura $20\,cm$ al cual se le hace un corte perpendicular a la base pasando por el centro del cilindro. ¿Cuál es el perímetro de la superficie formada al hacer el corte?

22. Si se tiene una esfera de radio $9\,cm$ y se interseca con un plano δ, sabiendo que δ no pasa por el centro de la esfera, pero es secante a la esfera ¿qué figura se forma en dicha intersección?

23. Carlos quiere saber cuántas vueltas da la llanta de su bicicleta al recorrer 100 metros en una calle plana. Si se sabe que los rayos de la bicicleta miden $28\,cm$ cada uno, ¿cuántas vueltas da la llanta de la bicicleta de Carlos?

24. El Observatorio Vulcanológico y Sismológico de Costa Rica (OVSICORI) desea saber cuál es el área afectada después del temblor ocurrido en Puntarenas sabiendo que la onda de expansión fue en forma circular y que el epicentro fue en el centro de dicha provincia y la zona más lejana afectada según reportes fue Alajuela a $85\,km$ del epicentro. ¿Cuál es aproximadamente el área afectada por el temblor?

25. Observe la siguiente figura la cual muestra una cúpula geodésica y conteste lo que se le solicita.



El director del colegio desea pintar el exterior del vivero con forma de cúpula geodésica como se muestra en la figura anterior, si se sabe que se tienen 50 triángulos equiláteros de lado 50 cm formando completamente el techo del vivero y que un tarro de pintura alcanza para pintar $1000\,cm^2$. ¿Cuántos tarros de pintura se necesitan para pintar todo el vivero?

4. Relaciones y Álgebra

Selección Única

1. Considere los conjuntos $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y las siguientes proposiciones:

   I. $A \cap B \neq \varnothing$

   II. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

   De las proposiciones mencionadas anteriormente se puede afirmar que con certeza son verdaderas

   (a) solo la I.

   (b) solo la II.

   (c) ambas.

   (d) ninguna.

2. Considere el conjunto $M = \{2x + 3/x \in \mathbb{N}\ \}$ y las siguientes proposiciones:

   I. $6 \in M$

   II. $\{7, 9, 11\} \subseteq M$

   De las proposiciones mencionadas anteriormente se puede afirmar que con certeza son verdaderas

   (a) solo la I.

   (b) solo la II.

   (c) ambas.

   (d) ninguna.

3. Considere el conjunto $T = \{a + b/a, b \in \mathbb{N}\ \}$ y las siguientes proposiciones:

   I. $0 \in T$

   II. $\{-2, -1, 1, 2\} \subseteq T$

   De las proposiciones mencionadas anteriormente se puede afirmar que con certeza son verdaderas

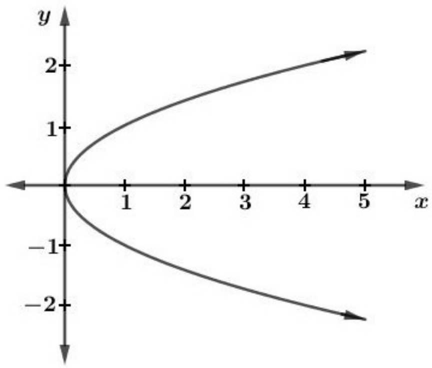
   (a) solo la I.

   (b) solo la II.

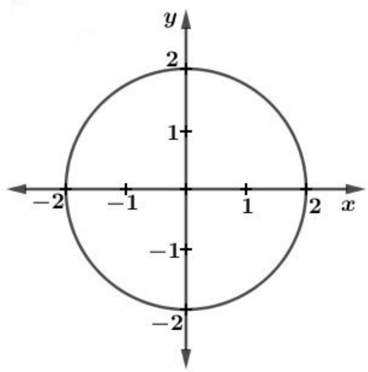
   (c) ambas.

   (d) ninguna.

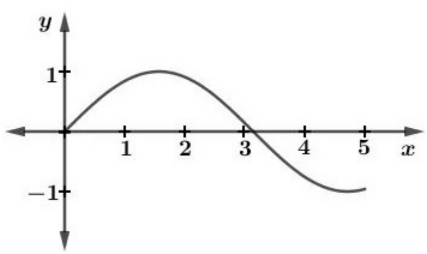
4. Observe las siguientes gráficas y de acuerdo con los datos de las mismas, conteste lo que se le solicita.



I.



II.



III.

De las gráficas mostradas anteriormente, se puede afirmar con certeza que no corresponden a una función

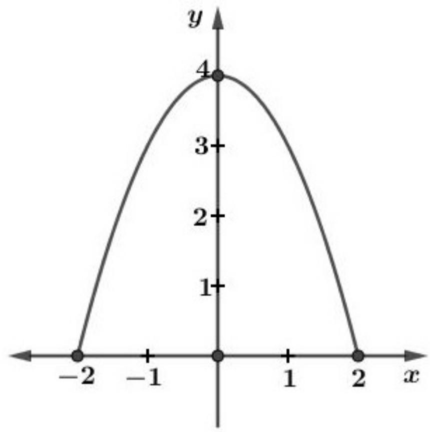
(a) solo la I y III.

(b) solo la I y II.

(c) solo la II y III.

(d) todas.

5. Observe la gráfica de la función $h : [-2, 2] \to [0, 4]$



Con base en la gráfica de la función h, un intervalo donde la función es creciente corresponde a

(a) $]0, 4[$

(b) $]-2, 4[$

(c) $]-2, 0[$

(d) $]0, 2[$

6. Observe la siguiente tabla de una relación y conteste lo que se le solicita.

x	2	3	4	4	5
$f(x)$	1	5	6	8	11

Con base en los datos de la tabla se puede afirmar que

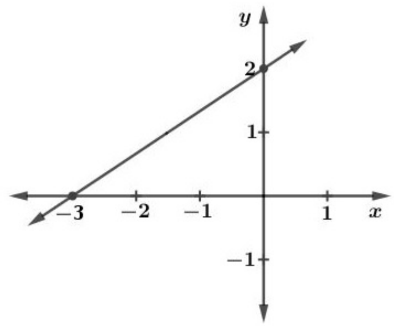
(a) la relación es una función.

(b) la relación no es una función.

(c) el 3 se relaciona con el 2.

(d) el 1 se relaciona con el 5.

7. Observe la siguiente gráfica y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Con los datos de la gráfica anterior la ecuación de la recta corresponde a

(a) $y = \dfrac{-2x}{3} + 2$

(b) $y = \dfrac{3x}{2} - 2$

(c) $y = \dfrac{-3x}{2} + 2$

(d) $y = \dfrac{2x}{3} + 2$

8. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 13x + 5y & = & 2 \\ 65x + 25y & = & 33 \end{cases}$$

Se puede afirmar que el sistema anterior

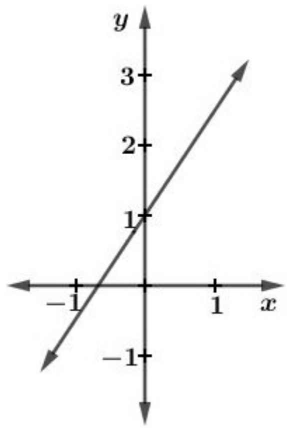
(a) tiene como solución a $\left\{ \left(\dfrac{23}{130}, \dfrac{3}{50} \right) \right\}$.

(b) tiene como solución a $\left\{ \left(\dfrac{3}{50}, \dfrac{23}{130} \right) \right\}$.

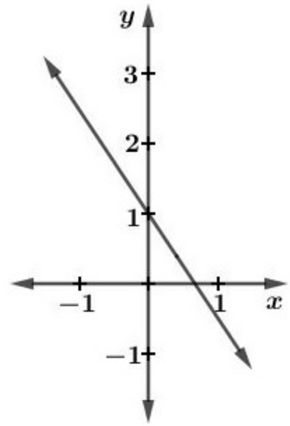
(c) tiene infinitas soluciones.

(d) no tiene solución.

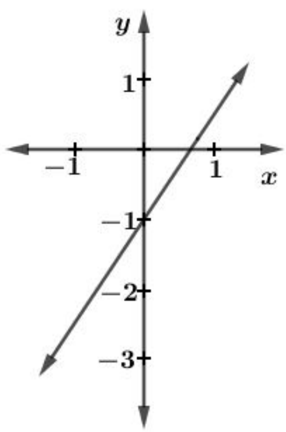
9. Considere la función f cuyo criterio es $f(x) = \dfrac{3x}{2} + 1$, la gráfica de f corresponde a



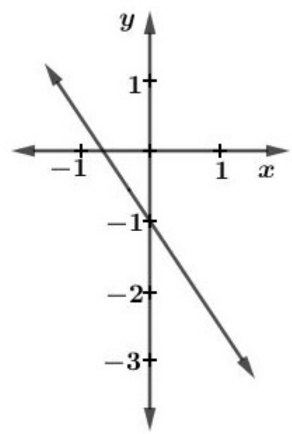
(a)



(c)



(b)



(d)

10. Considere la función $f(x) = x^2 + 4x - 18$ y las siguientes proposiciones:

    I. f es cóncava hacia abajo

    II. El eje de simetría de f está en la recta de ecuación $x = -2$

    De las proposiciones anteriores con certeza son verdaderas

    (a) solo la I.

    (b) solo la II.

    (c) todas.

    (d) ninguna.

11. Considere la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo criterio es $g(x) = 4x^2 - 15x - 12$ y las siguientes proposiciones:

    I. El $\triangle > 0$

    II. El intervalo donde g crece corresponde a $\left]-\infty, \dfrac{15}{8}\right[$

    De las proposiciones anteriores con certeza son verdaderas

    (a) solo la I.

    (b) solo la II.

    (c) todas.

    (d) ninguna.

12. Considere la función $f(x) = ax^2 + bx$ con $a, b > 0$ y las siguientes proposiciones:

    I. f alcanza el punto mínimo en $\left(\dfrac{-b}{2a}, 0\right)$

    II. f es cóncava hacia arriba

    De las proposiciones anteriores con certeza son verdaderas

    (a) solo la I.

    (b) solo la II.

    (c) todas.

    (d) ninguna.

13. En un supermercado las manzanas tienen un costo de 250 colones la unidad y las peras tienen un costo de 300 colones la unidad, si en total se compraron 30 frutas entre manzanas y peras y se pagaron 8350 colones. Con base en el problema anterior,un sistema de ecuaciones que permite encontrar la cantidad que se compró de cada fruta corresponde a

(a) $\begin{cases} 250x + 300y &= 30 \\ x + y &= 8350 \end{cases}$

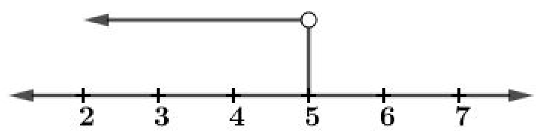
(b) $\begin{cases} 300x + 250y &= 8350 \\ x + y &= 30 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 30x + 30y &= 8350 \\ 250x + 300y &= 30 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 300x + 250y &= 8350 \\ 300x + 250y &= 30 \end{cases}$

Respuesta cerrada

14. Observe la siguiente imagen la cual corresponde a la representación gráfica de un conjunto y conteste lo que se le solicita.

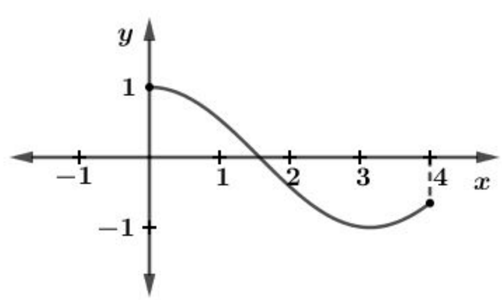


Según la imagen anterior una posible representación del conjunto en notación por comprensión corresponde a

15. Considere el conjunto $P = \{2x/x \in \mathbb{N}\}$ que contiene a todos los números pares. Si el universo es $\mathbb{R}$, el complemento del conjunto P en notación por comprensión corresponde a

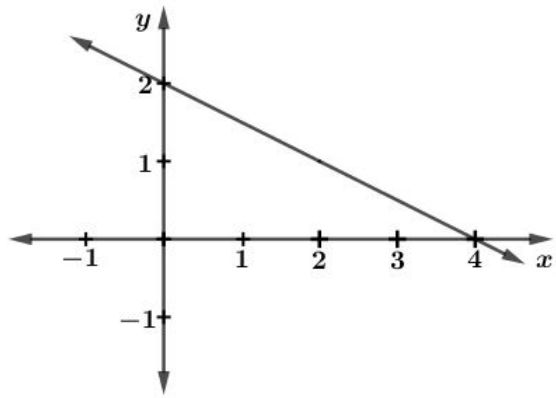
16. Considere la funcion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 4x - 1$, la preimagen de -2 corresponde a

17. Observe la gráfica de la función h y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Si el dominio de la función h es $[0, 4]$ el ámbito de la función corresponde a

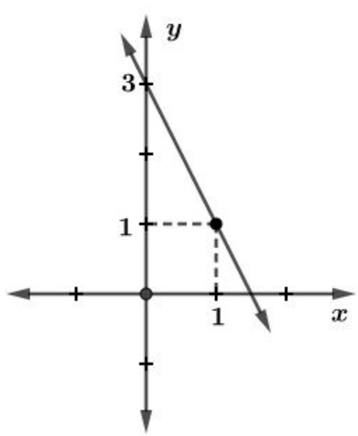
18. Observe la gráfica de la función g y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



La pendiente de la gráfica g corresponde a

19. Considere a las funciones g y f con $g(x) = \dfrac{x^2+3}{x}$ y $f(x) = 2x + 1$, la composición $(gof)(x)$ corresponde a

20. Observe la gráfica de la función h y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Con certeza se puede afirmar que la función h corta al eje x en el punto

21. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo criterio viene dado por $f(x) = x^2 - \dfrac{x}{2} - 5$, ¿en qué puntos la función f corta al eje de las ordenadas y al eje de las abscisas respectivamente?

22. El el TEC unos ingenieros lanzan desde el suelo un cohete, el mismo forma un movimiento parábolico representado por la siguiente función:

$$f(x) = -15x^2 + 60x$$

Donde x representa la cantidad recorrida en metros y $f(x)$ representa la altura del cohete durante su recorrido en metros. El cohete alcanza la altura máxima en el punto.

23. En la llantera "El éxito" se sabe que la ganancia (en miles de colones), en función de una cantidad x de llantas vendidas vienen dada por la fórmula:

$$h(x) = -2x^2 + 800x + 400$$

La cantidad de llantas que se necesitan vender para alcanzar la ganancia máxima corresponde a

24. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 8y & = & -12 \\ 7x + -12y & = & 4 \end{cases}$$

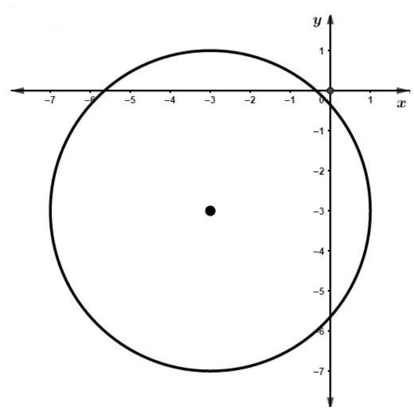
El conjunto de soluciones para el sistema anterior corresponde a

25. En el CTP Cartago el profesor de matemáticas fue a comprar marcadores de pizarra, cada marcador de tinta azul tiene un valor de 1250 colones y cada marcador de tinta negra tiene un valor de 1150 colones, en total pagó 18150 colones y se llevaron un total de 15 marcadores. Si A representa la cantidad de dinero pagada por los marcadores de tinta azul y N respresenta la cantidad de dinero pagada por los marcadores de tinta negra. La diferencia $A - N$ equivale a

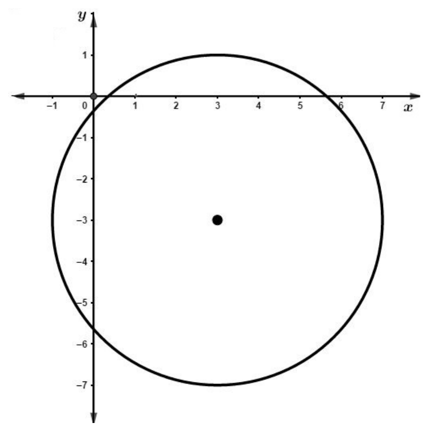
5. Solución de Geometría

Selección Única

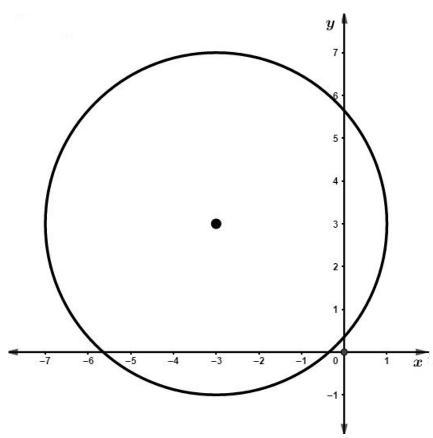
1. ¿Cuál de las siguientes representaciones es una circunferencia de radio 4 cm y centro $(-3, 3)$?



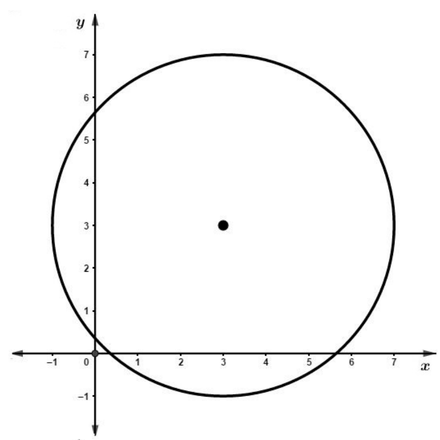
(a)



(c)



(b)



(d)

Solución:
Recordemos que las entradas de un par ordenado son (x, y) donde x corresponde al eje horizontal y y al eje vertical.
Como tenemos el par ordenado $(-3, 3)$, estamos ubicados en el segundo cuadrante por lo cual la respuenta correcta es la opción (b).

2. ¿Cuál de las siguientes opciones representa la ecuación de una circunferencia de centro $(5, -5)$ y radio 5?

(a) $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 5$
(b) $(x+5)^2 + (y-5)^2 = 5$
(c) $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$
(d) $(x+5)^2 + (y-5)^2 = 25$

Solución:
Recordemos que la ecuación canónica de una circunferencia es $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ donde (h, k) es el centro de la circunferencia y r es el radio de la circunferencia.
Al sustituir el centro y el radio en la ecuación tenemos que

$(x-5)^2 + (y--5)^2 = (5)^2$

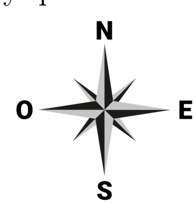
$\Rightarrow (x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (a).

3. Al trasladar 5 unidades al sur y 13 unidades al oeste la circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + y^2 = 16$ se tiene como resultado la ecuación

(a) $(x-15)^2 + (y-5)^2 = 16$
(b) $(x-11)^2 + (y-5)^2 = 16$
(c) $(x+15)^2 + (y+5)^2 = 16$
(d) $(x+11)^2 + (y+5)^2 = 16$

Solución:
De la ecuación sabemos que el centro de la circunferencia corresponde al punto $(2, 0)$ y que tiene un radio de 4 unidades, además, recordemos los puntos cardinales.



Como debemos trasladarnos 5 unidades al sur ubicándonos según los puntos cardinales, estaríamos moviéndonos 5 unidades hacia abajo lo cual nos dice que debemos restarle 5 a la coordenada y del centro, con lo que efectuaríamos la siguiente operación

$0 - 5 = -5$

Pero también nos estamos moviendo 13 unidades al oeste, ubicándonos según los puntos cardinales, estaríamos moviéndonos 13 unidades hacia la izquierda lo cual nos dice que debemos restarle 13 a la coordenada x del centro, con lo que efectuaríamos la siguiente operación

$2 - 13 = -11$

De lo cual podemos concluir que el centro de la Circunferencia trasladada es $(-11, -5)$

Note que como estamos trasladando la circunferencia, su radio no debe cambiar.

Finalmente sustituyendo en la fórmula canónica de la circunferencia tenemos

$(x - -11)^2 + (y - -5)^2 = 16$

$\Rightarrow (x + 11)^2 + (y + 5)^2 = 16$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (d).

4. ¿Cuál de los siguientes puntos se encuentra sobre la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25$?

(a) $(1, 4)$

(b) $(5, 1)$

(c) $(0, 5)$

(d) $(-1, -5)$

Solución:
Recordemos que para saber si un punto es interior a una circunferencia, la distancia del centro de la circunferencia al punto debe ser menor que el radio de la circunferencia, para que sea exterior, la distancia del centro de la circunferencia al punto debe ser mayor que el radio de la circunferencia y para que esté sobre la circunferencia, la distancia del centro de la circunferencia al punto debe ser igual al radio de la circunferencia. Como buscamos que el punto esté en la circunferencia, necesitamos que al evaluar los valores de x y de y la distancia sea igual al radio

Opción A:

Al sustituir el punto $(1, 4)$ tenemos

$(1)^2 + (4)^2 = 17$

Como $r^2 = 25$ y $17 < 25$ el punto es interior a la circunferencia

Opción B:

Al sustituir el punto $(5, 1)$ tenemos

$(5)^2 + (1)^2 = 26$

Como el $r^2 = 25$ y $25 < 26$ el punto es exterior a la circunferencia

Opción C:

Al sustituir el punto $(0, 5)$ tenemos

$(0)^2 + (5)^2 = 25$

Como el $r^2 = 25$ y $25 = 25$ el punto está en la circunferencia

Opción D:

Al sustituir el punto$(-1, -5)$ tenemos

$(-1)^2 + (-5)^2 = 26$

Como el $r^2 = 25$ y $25 < 26$ el punto es exterior a la circunferencia

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (c).

5. ¿Cuál de las siguientes rectas es tangente a la circunferencia de centro $(2, -2)$ y radio 10 unidades?

   (a) $y = 12 + \dfrac{4x}{3}$

   (b) $x = 10$

   (c) $14x - 14y = 84$

   (d) $y = 10$

   Solución:
   Recordemos que una recta es tangente a una circunferencia si al resolver el sistema de ecuaciones conformados por la ecuación de la recta y la ecuación de la circunferencia nos da una única solución , si al resolver el sistema de ecuaciones conformados por la ecuación de la recta y la ecuación de la circunferencia nos da dos soluciones es porque la recta es secante y si no tiene soluciones es porque la recta es exterior a la circunferencia.

   Además sabemos que el centro de la circunferencia es $(2, -2)$ y el radio es de 10 unidades, al sustituir en la ecuación tenemos

   $(x - 2)^2 + (y - -2)^2 = (10)^2$

   $\Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$

   Opción A:

   Al resolver el sistema de ecuaciones por el metódo de sustitución, se despejará la variable y en la ecuación de la recta $y = 12 + \dfrac{4x}{3}$ y se sustituirá en la ecuación de la circunferencia

   $(x - 2)^2 + \left(12 + \dfrac{4x}{3} + 2\right)^2 = 100$

   $\Rightarrow (x - 2)^2 + \left(\dfrac{4x}{3} + 14\right)^2 = 100$

   Desarrollando las fórmulas notables tenemos que

   $\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + \left(\dfrac{16x^2}{9} + \dfrac{112x}{3} + 196\right) = 100$

   $\Rightarrow \dfrac{25x^2}{9} + \dfrac{100x}{3} + 200 = 100$

   $\Rightarrow \dfrac{25x^2}{9} + \dfrac{100x}{3} + 200 - 100 = 0$

   $\Rightarrow \dfrac{25x^2}{9} + \dfrac{100x}{3} + 100 = 0$

   Para saber cuántas soluciones tiene se calcula el discriminante el cual debe cumplir lo siguiente:

   $\Delta < 0$ si la ecuación no tiene soluciones en el conjunto de los números reales

   $\Delta > 0$ si la ecuación tiene dos soluciones distintas en el conjunto de los números reales
   $\Delta = 0$ si la ecuación tiene una única solución en el conjunto de los números reales

Además, recuerde que $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = \left(\dfrac{100}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(\dfrac{25}{9}\right) \cdot (100)$

$= \dfrac{10000}{9} - \dfrac{10000}{9}$

$= 0$

Por lo tanto, la recta es tangente a la circunferencia

Opción B:

Al resolver el sistema de ecuaciones por el metódo de sustitución, se despejará la variable x en la ecuación de la recta $x = 10$ y se sustituirá en la ecuación de la circunferencia

$(10 - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$

$\Rightarrow (8)^2 + (y + 2)^2 = 100$

Desarrollando la fórmula notable tenemos

$\Rightarrow 64 + (y^2 + 4y + 4) = 100$

$\Rightarrow y^2 + 4y + 68 = 100$

$\Rightarrow y^2 + 4y + 68 - 100 = 0$

$\Rightarrow y^2 + 4y - 32 = 0$

$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-32)$

$= 16 + 128$

$= 144$

Por lo tanto, la recta es secante a la circunferencia

Opción C:

Al resolver el sistema de ecuaciones por el metódo de sustitución, se despejará la variable y en la ecuación de la recta $14x - 14y = 84$ y se sustituirá en la ecuación de la circunferencia

$14x - 14y = 84$

$\Rightarrow y = \dfrac{14x - 84}{14}$

$(x - 2)^2 + \left(\dfrac{14x - 84}{14} + 2\right)^2 = 100$

$\Rightarrow (x - 2)^2 + \left(\dfrac{14x - 112}{14}\right)^2 = 100$

$\Rightarrow (x - 2)^2 + \left(\dfrac{14(x - 8)}{14}\right)^2 = 100$

$\Rightarrow (x - 2)^2 + (x - 8)^2 = 100$

Desarrollando las fórmulas notables tenemos

$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + (x^2 - 16x + 64) = 100$

$\Rightarrow 2x^2 - 20x + 68 = 100$

$\Rightarrow 2x^2 - 20x + 68 - 100 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 20x - 32 = 0$

$\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (-32)$

$= 400 + 256$

$= 656$

Por lo tanto, la recta es secante a la circunferencia

Opción D:

Al resolver el sistema de ecuaciones por el metódo de sustitución, se despejará la variable y en la ecuación de la recta $y = 10$ y se sustituirá en la ecuación de la circunferencia

$(x - 2)^2 + (10 + 2)^2 = 100$

$\Rightarrow (x - 2)^2 + (12)^2 = 100$

Desarrollando la fórmula notable tenemos

$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + 144 = 100$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 148 = 100$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 144 - 100 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 44 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (44)$

$= 16 - 176$

$= -160$

Por lo tanto, la recta es exterior a la circunferencia

Por lo que, la respuesta correcta es la opción (a).

6. La recta $y = 3x$ es secante a la circunferencia de ecuación

(a) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 8$

(b) $(x + 8)^2 + (y + 4)^2 = 40$

(c) $x^2 + y^2 = 40$

(d) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$

Solución:

Para resolver esta pregunta se procederá a despejar la variable y de la ecuación de la recta y se sustituirá en la ecuación de la circunferencia, si al resolver esta ecuación se obtienen 2 soluciones, es porque la recta es secante a la circunferencia.

Opción A:

Al sustituir $y = 3x$ en la ecuación $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 8$ se tiene

$(x-4)^2 + (3x-2)^2 = 8$

Desarrollando las fórmulas notables se tiene

$\Rightarrow (x^2 - 4x + 16) + (9x^2 - 12x + 4) = 8$

$\Rightarrow 10x^2 - 16x + 20 = 8$

$\Rightarrow 10x^2 - 16x + 20 - 8 = 0$

$\Rightarrow 10x^2 - 16x + 12 = 0$

$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot (10) \cdot (12)$

$= 256 - 480$

-224

Por lo tanto, la recta es exterior a la circunferencia

Opción B:

Al sustituir $y = 3x$ en la ecuación $(x+8)^2 + (y+4)^2 = 40$ se tiene

$(x+8)^2 + (3x+4)^2 = 40$

Desarrollando las fórmulas notables se tiene

$\Rightarrow (x^2 + 16x + 64) + (9x^2 + 24x + 16) = 40$

$\Rightarrow 10^2 + 40x + 80 = 40$

$\Rightarrow 10^2 + 40x + 80 - 40 = 0$

$\Rightarrow 10^2 + 40x + 40 = 0$

$\Delta = (40)^2 - 4 \cdot (10) \cdot (40)$

$= 1600 - 1600$

$= 0$

Por lo tanto, la recta es tangente a la circunferencia

Opción C:

Al sustituir $y = 3x$ en la ecuación $x^2 + y^2 = 40$ se tiene

$x^2 + (3x)^2 = 40$

$\Rightarrow x^2 + (9x^2) = 40$

$\Rightarrow 10x^2 = 40$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{40}{10}$

$\Rightarrow x^2 - 4 = 0$

$\Delta = (0)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-4)$

$= 0 + 16$

$= 16$

Por lo tanto, la recta es secante a la circunferencia

Opción D:

Al sustituir $y = 3x$ en la ecuación $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 4$ se tiene

$(x-4)^2 + (3x-4)^2 = 4$

Dasarrollando las fórmulas notables se tiene

$\Rightarrow (x^2 + 8x + 16) + (9x^2 + 24x + 16) = 4$

$\Rightarrow 10^2 + 32x + 32 = 4$

$\Rightarrow 10^2 + 32x + 32 - 4 = 0$

$\Rightarrow 10^2 + 32x + 28 = 0$

$\Delta = (32)^2 - 4 \cdot (10) \cdot (28)$

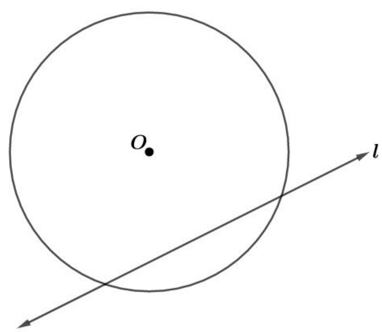
$= 1024 - 1120$

$= -96$

Por lo tanto, la recta es exterior a la circunferencia

Por lo que, la respuesta correcta es la opción (c).

7. Observe la siguiente figura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Según la imagen anterior, la recta l es con respecto a la circunferencia de centro O

(a) interior.

(b) exterior.

(c) tangente.

(d) secante.

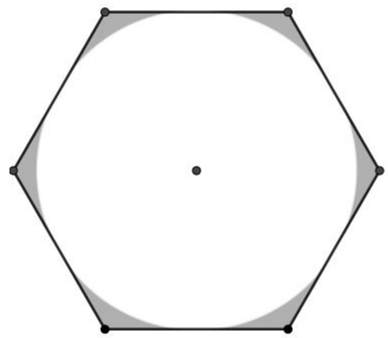
Solución:

Recordemos los conceptos de rectas secantes, tangentes y exteriores a una circunferencia.

- Secante: Una recta es secante a una circunferencia si la corta en dos puntos diferentes.
- Tangente: Una recta es tangente a una circunferencia si la corta en un único punto.
- Exterior: Una recta es exterior a una circunferencia si no corta a la circunferencia.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (d).

8. Observe la siguiente figura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Determine el área aproximada de la región sombreada de la figura anterior sabiendo que el diámetro del círculo es de 12 cm

(a) 5,09 cm^2

(b) 11,64 cm^2

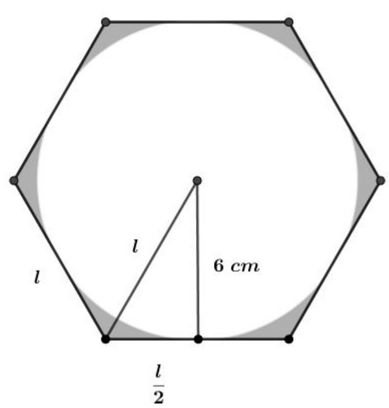
(c) 77,09 cm^2

(d) 385,73 cm^2

Solución:
Recordemos que en un hexágono regular la medida del radio es igual a la medida del lado, además, que la fórmula del área de un hexágono regular es $A = \dfrac{P \cdot a}{2}$.

Calculemos el lado del hexágono utilizando el teorema de Pitágoras, para ello entiendasé que si el diámetro es de 12 cm el radio será de 6 cm.

Observe la siguiente figura



Llamemos l a la medida del lado del polígono, pero como sabemos que una propiedad del hexágono regular es que su radio mide igual que su lado, el radio del hexágono va a medir l.

$\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 + 6^2 = l^2$

$\Rightarrow 6^2 = l^2 - \dfrac{l^2}{4}$

$\Rightarrow 36 = \dfrac{3l^2}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{36 \cdot 4}{3} = l^2$

$\Rightarrow \sqrt{48} = \sqrt{l^2}$

$\Rightarrow 4\sqrt{3} = l \approx 6,92$

Calculemos el perímetro del hexágono

$P = 6 \cdot l$

$P = 6 \cdot 6,93$

$P = 41,58$

Calculemos el área del hexágono, recordemos que como la circunferencia está inscrita en el hexágono entonces el radio de la circunferencia es igual a la apotema del hexágono.

$A = \dfrac{P \cdot a}{2}$

$A = \dfrac{(41,58) \cdot (6)}{2}$

$A = 124,74$

Ahora calculemos el área del círculo cuya fórmula viene dada por

$A_c = \pi r^2$

$A_c = \pi (6)^2$

$A_c = 36\pi$

$A_c = 113,10$

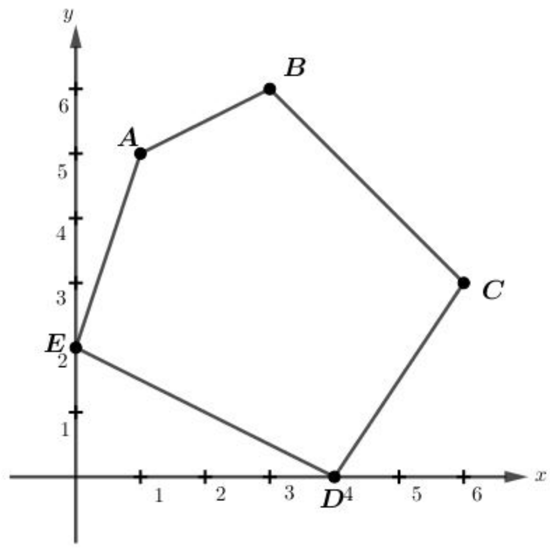
Para calcular el área de la región sombreada se debe hacer la resta del área del hexágono menos el área del círculo

$A_T = 124,74 - 113,10$

$A_T = 11,64$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (c).

9. Observe la siguiente figura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



El área de la figura anterior corresponde a

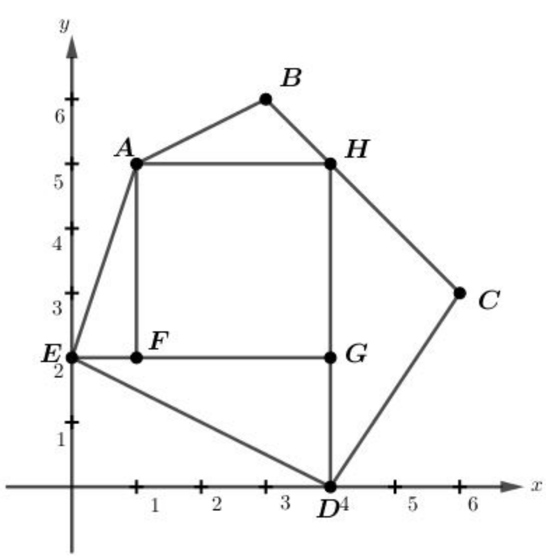
(a) 17,72 cm^2

(b) 18,5 cm^2

(c) 21 cm^2

(d) 32 cm^2

Solución:
La mejor manera de calcular el área de figuras no regulares es descomponiéndola en figuras que ya conozcamos y luego se suman sus áreas, una forma es como se muestra en la siguiente figura



$$A_1 = \triangle ABH$$
$$\Rightarrow A_1 = \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$A_2 = \triangle HDC$$
$$\Rightarrow A_2 = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$$
$$A_3 = \triangle EGD$$
$$\Rightarrow A_3 = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$$
$$A_4 = \triangle EFA$$
$$\Rightarrow A_4 = \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$A_5 = \square AHFG$$
$$\Rightarrow A_5 = 9$$

Por lo que le área de la figura es la suma de las áreas anteriores

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

$\Rightarrow A = \dfrac{3}{2} + 5 + 4 + \dfrac{3}{2} + 9$

$\Rightarrow A = 21cm^2$

Por lo que el área es de $21cm^2$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (c).

10. ¿Cuál es la medida de la apotema de un triángulo equilátero sabiendo que está inscrito en una circunferencia de radio 6 cm?

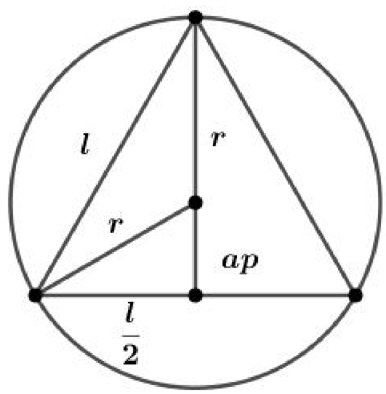
(a) $6\,cm$

(b) $3\,cm$

(c) $2\,cm$

(d) $1\,cm$

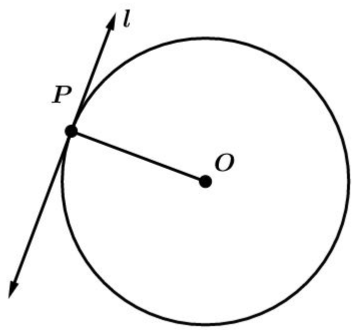
Solución:
La apotema de un triángulo equilátero mide la mitad del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero.



Por lo que, la apotema mide 3 cm.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (b).

11. Observe la siguiente figura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita sabiendo que la recta l es tangente a la circunferencia de centro O.



Proposiciones

I. $l \perp \overline{OP}$.

II. $l \parallel \overline{OP}$.

III. l y $\overline{OP}$ son secantes.

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas tomando en cuenta que l es tangente a la circunferencia de centro O?

(a) I y II.

(b) II y III.

(c) I y III.

(d) Ninguna.

Solución:
Recordemos que hay una propiedad que dice que el radio de una circunferencia es perpendicular a una recta tangente en su punto de tangencia por lo que la primera proposición es verdadera.
La segunda proposición es falsa debido a que l y $\overline{OP}$ son perpendiculares, por lo tanto, no pueden ser paralelas.
La definición de rectas secantes es que dos rectas distintas se cortan en algún punto, notemos que la recta l corta al segmento $\overline{OP}$ en el punto P por lo que la tercera proposición es verdadera.

Por lo anterior concluimos que, la respuesta correcta es la opción (c).

12. Dadas las rectas l_1 y l_2 de ecuaciones $l_1 : y = 3x + 2$ y $l_2 : 0 = \dfrac{-x}{3} - y$, se puede asegurar que las rectas

(a) son paralelas.

(b) son perpendiculares.

(c) se intersecan en el punto (0,0).

(d) no se intersecan.

Solución:
Recordemos que si dos rectas son paralelas tienen la misma pendiente y que no se intersecan, si dos rectas son perpendiculares se cumple que $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Despejando la segunda ecuación de la forma $y = mx + b$ la expresamos de la siguiente manera $y = \dfrac{-x}{3}$.

Por lo tanto, la pendiente de la primera recta es 3 y la pendiente de la segunda recta es $\dfrac{-1}{3}$.

Si multiplicamos las pendientes tenemos

$3 \cdot \dfrac{-1}{3} = \dfrac{-3}{3} = -1$ por lo tanto, las rectas son perpendiculares.

La opción d se descarta porque las rectas son perpendiculares, entonces las rectas sí se intersecan.

Probemos que las rectas no se intersecan en el (0,0)

Para saber si dos rectas se intersecan se debe resolver el sistema de ecuaciones generado por las dos ecuaciones de las rectas, se procederá por el metódo de sustitución despejando la variable y de la recta l_2 y sustituyendo en la ecuación de la recta l_1

$3x + 2 = \dfrac{-x}{3}$

$\Rightarrow 3(3x + 2) = -x$

$\Rightarrow 9x + 6 = -x$

$\Rightarrow 9x + x = -6$

$\Rightarrow 10x = -6$

$\Rightarrow x = \dfrac{-6}{10}$

$\Rightarrow x = \dfrac{-3}{5}$

Como tenemos que $x = \dfrac{-3}{5}$ evaluamos x en una de las ecuaciones y tenemos el valor de y

$\dfrac{-3}{5} + 2 = \dfrac{7}{5}$

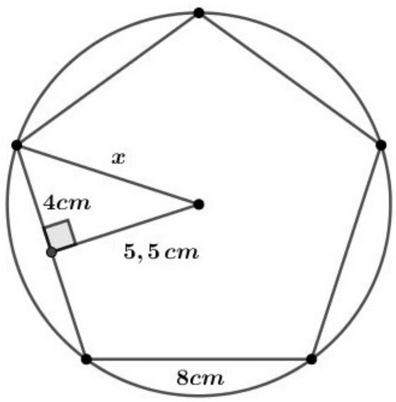
Por lo el punto de intersección de las dos rectas es $\left(\dfrac{-3}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$

Por lo anterior concluimos que, la respuesta correcta es la opción (b).

Respuesta cerrada

13. Si se sabe que un pentágono de lado 8 cm y apotema 5,5 cm está inscrito en una circunferencia ¿Cuál es la medida del radio de la circunferencia?

Solución:
Notemos que el pentágono está inscrito en la circunferencia como se muestra en la figura



Como se forma un triángulo rectángulo podemos aplicar el teorema de Pitágoras por lo que tenemos

$(4)^2 + (5,5)^2 = x^2$

$\Rightarrow 16 + 30,25 = x^2$

$\Rightarrow 46,25 = x^2$

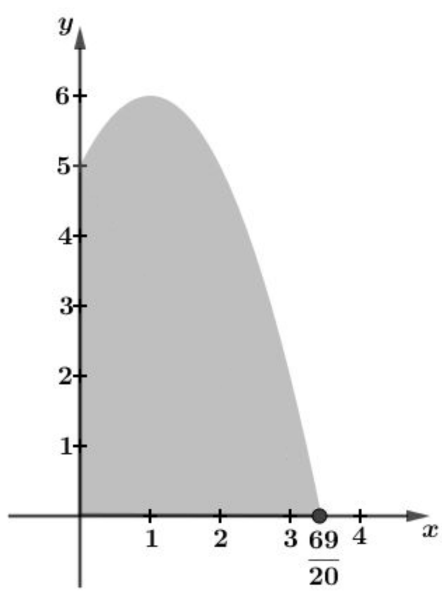
$\Rightarrow \sqrt{46,25} = \sqrt{x^2}$

$\Rightarrow \sqrt{46,25} = x$

Por lo que, el radio de la circunferencia es de $\sqrt{46,25} \approx 6{,}80\,cm$.

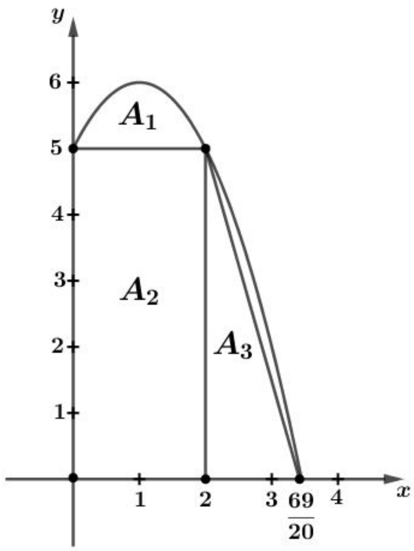
$$\boxed{\sqrt{46,25} \approx 6{,}80\,cm}$$

14. Observe la siguiente figura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



¿Cuál es el área aproximada de la figura anterior?

Solución:
La mejor forma de calcular el área de la figura es aproximarla descomponiéndola en figuras conocidas, una opción es la que se muestra a continuación.



A_1 es similar a la mitad de una circunferencia de radio 1 cm por lo que el área es

$A_1 = \pi r^2$

$\Rightarrow A_1 = \pi(1)^2 \approx 3{,}14\, cm^2$

A_2 es un rectángulo de lados 2 cm y 5 cm por lo que el área es

$A_2 = b \cdot h$

$\Rightarrow A_2 = 2 \cdot 5 = 10\, cm^2$

A_3 es un triángulo rectángulo de base 1,45 cm y 5 cm de altura

$A_3 = \dfrac{b \cdot h}{2}$

$\Rightarrow A_3 = \dfrac{1{,}45 \cdot 5}{2} = \dfrac{29}{8}\, cm^2$

Por lo que, el área aproximada de la figura es la suma de las áreas anteriores

$A = A_1 + A_2 + A_3$

$\Rightarrow A = 3,14 + 10 + \dfrac{29}{8}$

$\Rightarrow A = 16,76\, cm^2$

Por lo tanto, el área aproximada es de $16,76\, cm^2$.

$$\boxed{A \approx 16,76\, cm^2}$$

15. Dado un polígono regular de 18 lados, ¿cuál es la medida de un ángulo externo y la medida de un ángulo interno de este polígono?

Solución:
Recordemos que la fórmula de la medida de los ángulos externos de un polígono regular es $\dfrac{360}{n}$ donde n es el número de lados de la figura por lo que tenemos

$\dfrac{360}{18} = 20$

Por lo que, la medida del ángulo externo es de $20°$

Y para calcular el ángulo interno recordemos que el ángulo externo y el ángulo interno de un polígono son suplementarios por lo que la suma de las medidas de los ángulos es de 180°

$180 = 20 + x$ donde x es el ángulo interno del polígono

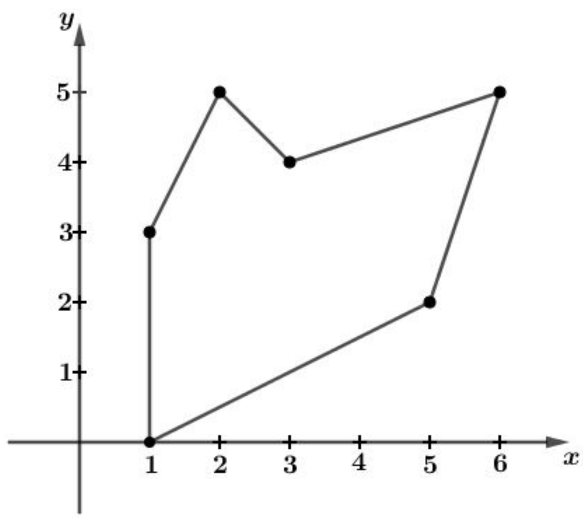
$\Rightarrow 180 - 20 = +x$

$\Rightarrow 160 = x$

Por lo tanto el ángulo interno del polígono es de 160°.

$$\boxed{\text{Un ángulo externo } 20° \text{ y un ángulo interno } 160°}$$

16. Observe la siguiente figura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



¿Cuál es aproximadamente el perímetro de la figura anterior?

Solución

Para calcular el perímetro de la figura anterior se debe conocer la medida de los lados, para eso se utiliza la fórmula de distancia entre puntos la cuál es

$d(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ donde $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$

Por lo que, los lados miden

$d(A,B) = \sqrt{(1-1)^2 + (0-3)^2} = 3$

$d(B,C) = \sqrt{(1-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$

$d(C,D) = \sqrt{(2-3)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

$d(D,E) = \sqrt{(3-6)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{10} \approx 3,16$

$d(E,F) = \sqrt{(6-5)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10} \approx 3,16$

$d(F,A) = \sqrt{(5-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$

Por lo tanto, el perímetro de la figura es la suma de las distancias anteriores

$P = d(A, B) + d(B, c) + d(C, D) + d(D, E) + d(E, F) + d(F, A)$

$\Rightarrow P \approx 3 + 2{,}24 + 1{,}41 + 3{,}16 + 3{,}16 + 4{,}47$

$\Rightarrow P \approx 17,44\,cm$

Por tanto, el perímetro aproximado de la figura es de $17,44\,cm$.

$$\boxed{P \approx 17,44\,cm}$$

17. Si se sabe que la medida del ángulo externo de un polígono regular es de $40°$ y el lado del polígono mide $6\,cm$ ¿Cuál es el perímetro de dicho polígono?

Solución:
Recordemos que la fórmula de la medida de los ángulos externos de un polígono regular es de $\dfrac{360}{n} = \alpha$ donde n es la cantidad de lados de un polígono y α la medida del ángulo por lo que tenemos

$\dfrac{360}{n} = 40$

$\Rightarrow \dfrac{360}{40} = n$

$\Rightarrow 9 = n$

Por lo que, el polígono regular tiene 9 lados y como cada lado mide $6\,cm$ se tiene

$P = l \cdot 9$

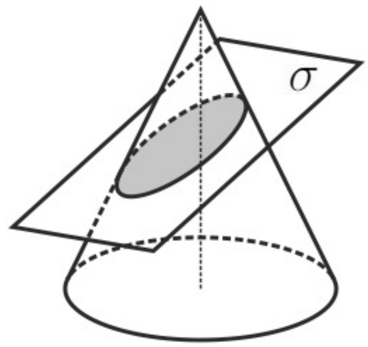
$\Rightarrow P = 6 \cdot 9$

$\Rightarrow 54$

Por lo tanto, el perímetro de este polígono regular mide 54 cm.

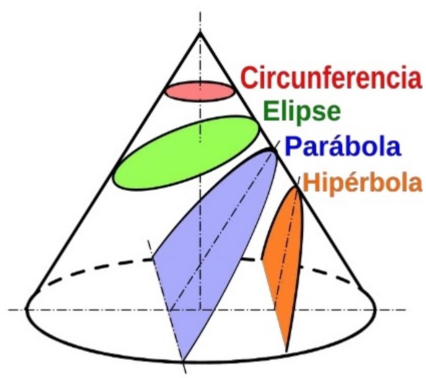
$$\boxed{54\,cm}$$

18. Observe la siguiente figura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



La figura que se forma al intersecar el cono anterior con el plano σ recibe el nombre de

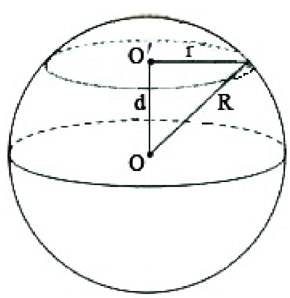
Solución:
Recordemos las diferentes intersecciones que pueden darse entre un plano y un cono



Como se muestra en la figura la intersección de la superficie del cono con el plano σ es una elipse.

$$\boxed{\text{elipse}}$$

19. Observe la siguiente figura y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



¿Cuál es la medida del radio de la esfera sabiendo que $r = 7\,cm$ y que el corte se hizo a una distancia de $5\,cm$ del centro de la esfera?

Solución:
Note que entre la distancia del corte y ambos radios se forma un triángulo rectángulo por lo que se cumple que

$d^2 + r^2 = R^2$ donde d es la distancia del centro al corte

$\Rightarrow (5)^2 + (7)^2 = R^2$

$\Rightarrow 25 + 49 = R^2$

$\Rightarrow 74 = R^2$

$\Rightarrow \sqrt{74} = \sqrt{R^2}$

$\Rightarrow \sqrt{74} = R$

Por lo que, $R = \sqrt{47} \approx 8{,}60\,cm$.

$$\boxed{R = \sqrt{47} \approx 8{,}60\,cm}$$

20. ¿Cuál es el área de la figura que se forma al intersecar un cilindro con un plano π paralelo a sus bases sabiendo que el radio de la base mide $5\,cm$?

Solución:
Note que la figura que se forma al interseca el plano π es un círculo que tiene las mismas dimensiones que sus bases por lo que tenemos

$A = \pi r^2$

$\Rightarrow A = \pi(5)^2$

$\Rightarrow A = 25\pi$

$\Rightarrow A \approx 78{,}54\,cm^2$

Por lo que, el área de la figura es de $78{,}54\,cm^2$ aproximadamente.

$$\boxed{A \approx 78{,}54\,cm^2}$$

21. Si se tiene un cilindro de diámetro $14\,cm$ y altura $20\,cm$ al cual se le hace un corte perpendicular a la base que pasa por el centro del cilindro. ¿Cuál es el perímetro de la superficie formada al hacer el corte?

Solución:
Note que al hacer el corte perpendicular a la base la figura que se forma es un rectángulo de lados $14\,cm$ de ancho y $20\,cm$ de largo por lo que el perímetro de esa superficie es

$P = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$

$\Rightarrow P = 14 + 14 + 20 + 20$

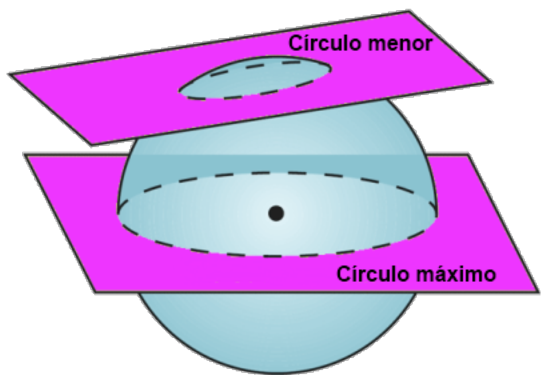
$\Rightarrow P = 68\,cm$

Por lo que, el perímetro de la superficie formada es de $68\,cm$.

$$68\,cm$$

22. Si se tiene una esfera de radio $9\,cm$ y se interseca con un plano δ, sabiendo que δ no pasa por el centro de la esfera, pero es secante a la esfera ¿qué figura se forma en dicha intersección?

Solución:
Recordemos que cuando un plano es secante a una esfera, la sección generada siempre será un círculo cuyo tamaño depende de su distancia al centro de la esfera.



Por lo que, la respuesta es un círculo.

círculo

23. Carlos quiere saber cuántas vueltas da la llanta de su bicicleta al recorrer 100 metros en una calle plana. Si se sabe que los rayos de la bicicleta miden $28\,cm$ cada uno, ¿cuántas vueltas da la llanta de la bicicleta de Carlos?

Solución:
Como Carlos quiere saber cuántas vueltas da la llanta de la bicicleta, debemos saber cual es el perímetro de la misma, por lo que tenemos

$P = 2 \cdot \pi \cdot r$

$\Rightarrow P = 2 \cdot 28 \cdot \pi$

$\Rightarrow P = 56\pi$

$\Rightarrow P \approx 175{,}92\,cm$

Como la distancia está definida en metros se hará una conversión para que quede en centímetros por lo que tenemos

$100\,m \rightarrow 10000\,cm$

Para saber la cantidad de vueltas que da la llanta de la bicicleta, se debe dividir la distancia entre el perímetro de la llanta por lo que tenemos

$\dfrac{10000}{175{,}92} \approx 56{,}84$

Por lo tanto, la llanta da 57 vueltas aproximadamente.

$$\boxed{57}$$

24. El Observatorio Vulcanológico y Sismológico de Costa Rica (OVSICORI) desea saber cuál es el área afectada después del temblor ocurrido en Puntarenas sabiendo que la onda de expansión fue en forma circular y que el epicentro fue en el centro de dicha provincia y la zona más lejana afectada según reportes fue Alajuela a 85 km del epicentro. ¿Cuál es aproximadamente el área afectada por el temblor?

    Solución:
    Como se sabe, la zona afectada tiene forma circular con un radio de 85 km y como debemos calcular el área tenemos

    $A = \pi r^2$

    $\Rightarrow A = \pi(85)^2$

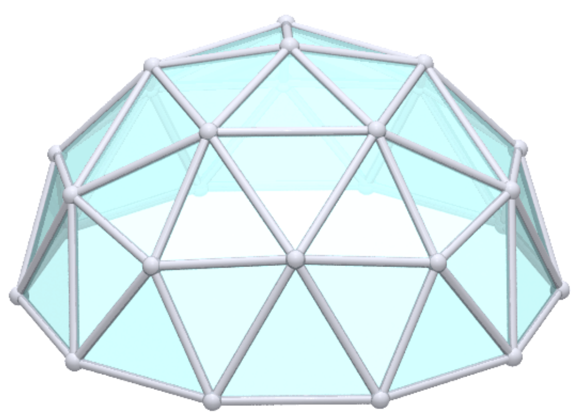
    $\Rightarrow A = 7225\pi$

    $\Rightarrow A \approx 22698\,km^2$

    Por lo que, el área afectada por el temblor es de $22698\,km^2$ aproximadamente.

$$\boxed{A \approx 22698\,km^2}$$

25. Observe la siguiente figura la cual muestra una cúpula geodésica y conteste lo que se le solicita.



El director del colegio desea pintar el exterior del vivero con forma de cúpula geodésica como se muestra en la figura anterior, si se sabe que se tienen 50 triángulos equiláteros de lado 50 cm formando completamente el techo del vivero y que un tarro de pintura alcanza para pintar $1000\,cm^2$. ¿Cuántos tarros de pintura se necesitan para pintar todo el vivero?

Solución:
Como ya se sabe, el vivero está formado por triángulos equiláteros, por lo cual calcularemos el área de uno de los triángulos.

Recordemos que la fórmula de la altura de un triángulo equilátero es $h = \dfrac{l \cdot \sqrt{3}}{2}$ por lo que la altura del triángulo es $25\sqrt{3}\, cm$.

Por lo tanto el área de uno de los triángulos corresponde a $\dfrac{50 \cdot 25\sqrt{3}}{2} cm^2 = 1082{,}53\, cm^2$

Pero como son 50 triángulos, debemos multiplicar el área obtenida por 50 obteniéndose $A_T = 50 \cdot 1082{,}53 = 54127\, cm^2$

Pero también sabemos que con un tarro de pintura se pueden pintar $1000\, cm^2$, por lo que hay que dividir el área total entre la cantidad que cubre un tarro de pintura,entonces tenemos
$\dfrac{54127}{1000} = 54,13$
Se necesitan 55 tarros de pintura aproximadamente.

55 tarros de pintura

6. Solución de Relaciones y Álgebra

Selección Única

1. Considere los conjuntos $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y las siguientes proposiciones:

   I. $A \cap B \neq \varnothing$

   II. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

   De las proposiciones mencionadas anteriormente se puede afirmar que con certeza son verdaderas

   (a) solo la I.

   (b) solo la II.

   (c) ambas.

   (d) ninguna.

   Solución:

   Para resolver este ejercicio es necesario recordar los conceptos de unión e intersección de conjuntos.

   La unión de dos o más conjuntos da como resultado un nuevo conjunto, siendo este último el que contiene a cada uno de los elementos de ambos conjuntos, en caso de tener elementos repetidos solo se coloca una única vez.

   En el ejercicio anterior tenemos el conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ y el conjunto $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, la unión de ambos conjuntos representada por $A \cup B$ da como resultado un nuevo conjunto que contiene todos los elementos de A y todos los elementos de B, por lo que $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Así, la proposición II es verdadera.

   La intersección de dos o más conjuntos da como resultado un nuevo conjunto el cual contiene únicamente a los elementos que tengan en común los conjuntos que se quieren intersecar.

   En el ejercicio anterior tenemos el conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ y el conjunto $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, la intersección de ambos conjuntos representada por $A \cap B$ da como resultado un nuevo conjunto que contiene todos los elementos comunes de los conjuntos A y B respectivamente, en este caso no tienen elementos en común por lo que la intesección es $\varnothing$, así $A \cap B = \varnothing$, y se concluye que la proposición I es falsa.

   Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (b).

2. Considere el conjunto $M = \{2x + 3/x \in \mathbb{N}\ \}$ y las siguientes proposiciones:

   I. $6 \in M$

   II. $\{7, 9, 11\} \subseteq M$

   De las proposiciones mencionadas anteriormente se puede afirmar que con certeza son verdaderas

   (a) solo la I.

   (b) solo la II.

   (c) ambas.

   (d) ninguna.

   Solución:

   Para resolver el ejercicio se requiere recordar los conceptos de pertenencia la cual se denota por $\in$, y de subconjunto el cual se representa por $\subseteq$.

   En el ejercicio anterior tenemos al conjunto $M = \{2x + 3/x \in \mathbb{N}\ \}$, para verificar si la proposición I es falsa o verdadera, habría que verificar si existe un número natural x que al multiplicarlo por 2 y sumarle 3 de como resultado 6, o bien resolver dicha ecuación y que el valor de x sea un número natural. Resolviendo la ecuación:

   $2x + 3 = 6$

   $\Rightarrow 2x = 6 - 3$

   $\Rightarrow 2x = 3$

   $\Rightarrow x = \frac{3}{2}$

   Así, tenemos que $x = \frac{3}{2}$ no está en el conjunto de los números naturales, por lo que se concluye que $6 \notin M$, teniendo como resultado que la proposición I es falsa.

   El concepto de subconjunto se suele relacionar con el término "está contenido en", es decir si queremos saber si un conjunto A es un subconjunto de B, habría que ver si A está contenido en B y esto se reduce a verificar si todos los elementos de A están en B.

   En el ejercicio anterior tenemos al conjunto $M = \{2x + 3/x \in \mathbb{N}\ \}$, para verificar si la proposición II es falsa o verdadera, habría que verificar si los elementos del conjunto $\{7, 9, 11\}$ están todos en el conjunto M.

   Como los valores que x puede tomar son solo números naturales, los valores que se pueden tomar serían, $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4....$, tomando esos primeros valores tenemos que los primeros elementos de M son:

   Si $x = 0$

   $M_1 = 2(0) + 3;\ M_1 = 3$

   Si $x = 1$

   $M_2 = 2(1) + 3;\ M_2 = 5$

   Si $x = 2$

   $M_3 = 2(2) + 3;\ M_3 = 7$

Si $x = 3$

$M_4 = 2(3) + 3$; $M_4 = 9$

Si $x = 4$

$M_5 = 2(4) + 3$; $M_5 = 11$

Así tenemos que los primeros elementos de M son $3, 5, 7, 9, 11$, por lo que al preguntarse si todos los elementos de $\{7, 9, 11\}$ están en M, la respuesta es sí, por lo que la proposición II es verdadera.

Nota: Esta segunda parte de subconjuntos puede probarse planteando una ecuación por cada elemento que se desea saber si pertenece o no a M, tal y como se hizo en la proposición I.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (b).

3. Considere el conjunto $T = \{a + b / a, b \in \mathbb{N} \wedge a \neq b\}$ y las siguientes proposiciones:

   I. $0 \in T$

   II. $\{-2, -1, 1, 2\} \subseteq T$

   De las proposiciones mencionadas anteriormente se puede afirmar que con certeza son verdaderas

   (a) solo la I.

   (b) solo la II.

   (c) ambas.

   (d) ninguna.

   Solución:

   Para esta pregunta se necesitan los conceptos de pertenencia y subconjuntos, los mismos dados en la pregunta anterior.

   Note que T es el conjunto de los números que pueden expresarse como suma de dos naturales, ambos diferentes.

   Los dos menores números naturales son 0 y 1, así que la menor suma posible es 1. Cualquier otro número natural se puede expresar como la suma de 0 con él mismo y como la suma de dos números naturales siempre es otro número natural, T es el conjunto de los números naturales excluyendo al 0.

   Razonando de la misma manera que en la pregunta anterior, si 0 pertenece a T tiene que suceder que:

   $a + b = 0$

   $\Rightarrow a = -b$

   Lo cual no puede suceder pues, si $b \in \mathbb{N} \Rightarrow -b \notin \mathbb{N}$, así la proposición I es falsa.

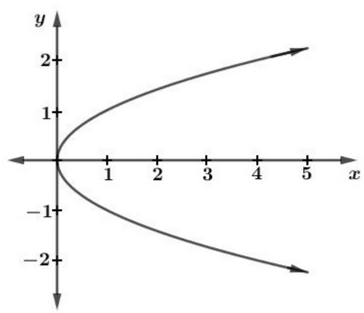
   De manera similar se probará si $\{-2, -1, 1, 2\}$ está contenido en T, tomando el primer elemento del conjunto, se tiene que:

$a + b = -2$, lo cual no puede suceder, ya que dado dos numeros positivos su suma da como resultado un número positivo, como $a, b \in \mathbb{N}$ son números positivos su suma tiene que dar un número positivo, no puede dar como resultado -2.

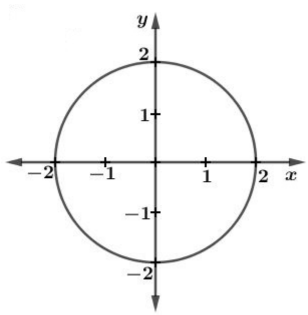
Con este resultado, se tiene que un elemento del conjunto $\{-2, -1, 1, 2\}$ no está contenido en T, así, como no se cumple la definición de subconjunto, se concluye que $\{-2, -1, 1, 2\} \nsubseteq T$, por lo que la proposición II es falsa.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (d).

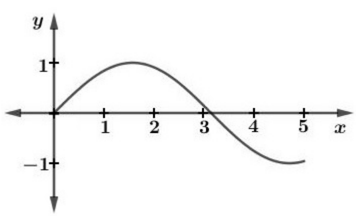
4. Observe las siguientes figuras y de acuerdo con los datos de las mismas, conteste lo que se le solicita.



I.



II.



III.

De las gráficas mostradas anteriormente, se puede afirmar con certeza que no corresponden a una función

(a) solo la I y III.

(b) solo la I y II.

(c) solo la II y III.

(d) todas.

Solución:

Para resolver este tipo de ejercicios se toman las gráficas una por una y se aplica el concepto de función el cual dice que una preimagen no puede tener más de una imagen, por lo tanto, si se trazan rectas verticales por los valores del dominio y alguna de ellas interseca a la gráfica más de una vez (o ninguna vez) entonces la gráfica no corresponde a una función.

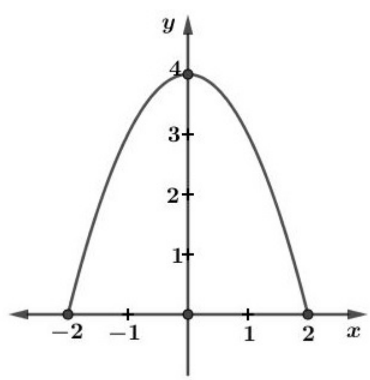
En el ejercicio anterior, en la gráfica I se logra observar que hay líneas verticales que cortan en 2 ocasiones a la función, por lo que la gráfica I no corresponde a una función.

De manera similar para la gráfica II, se concluye que la misma no corresponde a una función.

En la gráfica III se puede observar que por más que se tracen líneas verticales, las mismas nunca cortan en 2 ocasiones a la gráfica de la función, por lo que se concluye que la gráfica III es una función.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (b).

5. Observe la gráfica de la función $h : [-2, 2] \to [0, 4]$



Con base en la gráfica de la función h, un intervalo donde la función es creciente corresponde a

(a) $]0, 4[$

(b) $]-2, 4[$

(c) $]-2, 0[$

(d) $]0, 2[$

Solución:

Es importante recordar que el crecimiento o decrecimiento de una función se lee de izquierda a derecha, la respuesta será el intervalo en el eje x donde la función crece o de decrece según sea el caso.

En el ejercicio anterior debemos buscar donde la función es creciente, entonces de izquierda a derecha buscamos el intervalo correspondiente, el dominio de h es de [-2,2] el punto más a la izquierda del eje x que se puede tomar es x=-2, si se inicia desde ese punto se observa que de izquierda a derecha la función crece hasta el punto máximo, donde empieza a decrecer,este punto máximo corresponde a x=0 por lo que el intervalo de crecimiento viene dado por]-2,0[.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (c).

6. Observe la siguiente tabla de una relación y conteste lo que se le solicita.

x	2	3	4	4	5
$f(x)$	1	5	6	8	11

Con base en los datos de la tabla se puede afirmar que

(a) la relación es una función.

(b) la relación no es una función.

(c) el 3 se relaciona con el 2.

(d) el 1 se relaciona con el 5.

Solución:

Recuerde que x representa a cada una las preimágenes y $f(x)$ representa a la imagen de x.

Para que esta relación sea una función, ninguna preimagen puede tener 2 imágenes distintas, se revisan cada uno de los pares ordenados, $(2,1)$, $(3,5)$, $(4,6)$, $(4,8)$ y $(5,11)$.

Al observar la tabla se puede verificar que para el valor $x = 4$ existen dos valores de $f(x)$ diferentes, por lo que no cumple el concepto de función. Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (b).

Opción A:

Se descarta pues no puede suceder que una preimagen tenga 2 imágenes diferentes.

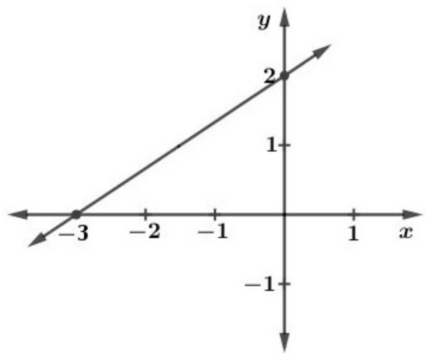
Opción C:

Note que en la relación dada, el 3 se relaciona con el 5 no con el 2.

Opción D:

Note que el 1 no está en el dominio.

7. Observe la siguiente gráfica y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Con los datos de la gráfica anterior la ecuación de la recta corresponde a

(a) $y = \dfrac{-2x}{3} + 2$

(b) $y = \dfrac{3x}{2} - 2$

(c) $y = \dfrac{-3x}{2} + 2$

(d) $y = \dfrac{2x}{3} + 2$

Solución:

Para este ejercicio es necesario recordar que dado dos puntos se puede trazar una única recta, además, se puede encontrar la ecuación de la misma la cual tiene la forma $y = mx + b$. Es decir dados los puntos P y Q en la recta, con $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, podemos determinar la pendiente $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ y la constante $b = y_1 - mx_1$ ó $b = y_2 - mx_2$.

En el enunciado anterior la gráfica de la función tiene los puntos $(-3, 0)$ y $(0, 2)$, así, se tiene que:

$m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$\Rightarrow m = \dfrac{0 - 2}{-3 - 0}$

$\Rightarrow m = \dfrac{2}{3}$

De la gráfica se observa que $b = 2$ pues el corte con el eje y es en el punto (0,2).

Por lo que la ecuación nos daría como resultado $y = \dfrac{2}{3}x + 2$.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (d).

Nota:

Es importante tener en cuenta que la pendiente es la diferencia entre los valores de y dividido por la diferencia entre los valores de x. Además, el valor de la constante b se puede hallar con cualquiera de los 2 puntos que pertenecen a la recta, en este caso se usó el primer par ordenado pero se puede usar el segundo par odenado y la respuesta sigue siendo la misma.

8. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 13x + 5y &= 2 \\ 65x + 25y &= 33 \end{cases}$$

Se puede afirmar que el sistema anterior

(a) tiene como solución a $\left\{\left(\dfrac{23}{130}, \dfrac{3}{50}\right)\right\}$.

(b) tiene como solución a $\left\{\left(\dfrac{3}{50}, \dfrac{23}{130}\right)\right\}$.

(c) tiene infinitas soluciones.

(d) no tiene solución.

Solución:

Para resolver esta pregunta es necesario recordar el concepto de sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Un sistema de ecuaciones puede tener una solución, infinitas soluciones o ninguna solución.

Para los casos de infinitas soluciones tiene que suceder que las rectas correspondientes a cada ecuación sean iguales, para que un sistema de ecuaciones no tenga ninguna solución tiene que suceder que ambas rectas sean paralelas y para que el sistema de ecuaciones tenga una solución debe suceder que las rectas sean oblicuas, es decir se corten una vez entre sí.

En el sistema anterior se tiene que:

$$\begin{cases} 13x + 5y &= 2 \\ 65x + 25y &= 33 \end{cases}$$

Si sacamos un 5 a factor común en el lado izquierdo de la segunda ecuación tenemos que:

$$\begin{cases} 13x + 5y &= 2 \\ 5(13x + 5y) &= 33 \end{cases}$$

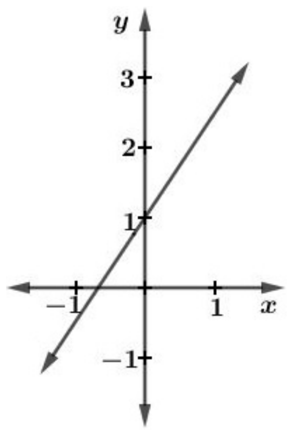
$$\Rightarrow \begin{cases} 13x + 5y &= 2 \\ 13x + 5y &= \frac{33}{5} \end{cases}$$

Así, se concluye que ambas rectas tienen la misma pendiente, falta verificar que el lado derecho de la igualdad sea igual en ambas ecuaciones o diferente. Si llegaran a ser iguales, se concluye que ambas rectas son la misma, por lo que el sistema tendría infinitas soluciones.

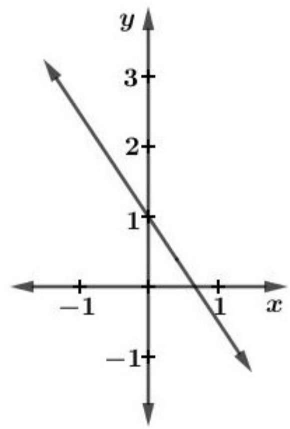
Si llegaran a ser diferentes, se concluye que las rectas son paralelas por lo que tendría solución vacía. En este caso se puede observar que las rectas son paralelas por lo que el sistema no tiene solución.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (d).

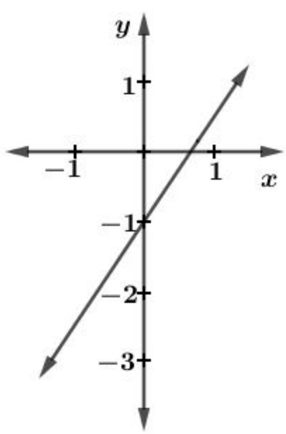
9. Considere la función f cuyo criterio es $f(x) = \dfrac{3x}{2} + 1$, la gráfica de f corresponde a



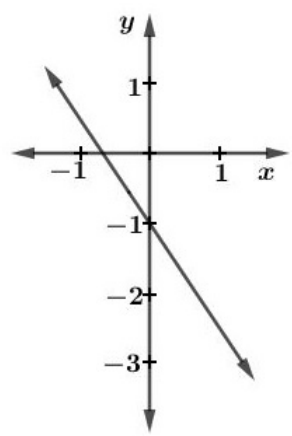
(a)



(c)



(b)



(d)

Solución:

Para esta pregunta se tienen que recordar los conceptos de crecimiento y decrecimiento de una función lineal y del corte con las abscisas y las ordenadas.

Una función lineal es creciente cuando su pendiente es positiva y es decreciente si su pendiente es negativa. La función lineal cuyo criterio es $y = mx + b$, corta al eje de las ordenadas en el punto $(0, b)$ y corta al eje de las abscisas en el punto $\left(\dfrac{-b}{m}, 0\right)$.

En el enunciado anterior tenemos que la función tiene como criterio $y = \dfrac{3x}{2} + 1$, por lo que es una función creciente pues su pendiente $m = \dfrac{3}{2}$ es positiva, además, corta al eje de las ordenadas en $(0, 1)$.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (a).

10. Considere la función $f(x) = x^2 + 4x - 18$ y las siguientes proposiciones:

    I. f es cóncava hacia abajo

    II. El eje de simetría de f está en la recta de ecuación $x = -2$

    De las proposiciones anteriores con certeza son verdaderas

    (a) solo la I.

    (b) solo la II.

    (c) todas.

    (d) ninguna.

    Solución:

    Para esta pregunta se requiere recordar los conceptos de concavidad de una función cuadrática.

    Una función cuadrática cuyo criterio es $f(x) = ax^2 + bx + c$ es cóncava hacia arriba si $a > 0$ y es cóncava hacia abajo si $a < 0$. El eje de simetría de la gráfica de la función viene dado por $x = \dfrac{-b}{2a}$.

    En el enunciado anterior se tiene la ecuación $x^2 + 4x - 18$ como el $a > 0$ se tiene que la función es cóncava hacia arriba por lo que la proposición I es falsa.

    El eje de simetría viene dado por:

    $x = \dfrac{-b}{2a}$

    $\Rightarrow x = \dfrac{-4}{2 \cdot 1}$

    $\Rightarrow x = -2.$

    Así la proposición II es verdadera.

    Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (b).

11. Considere la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo criterio es $g(x) = 4x^2 - 15x - 12$ y las siguientes proposiciones:

    I. El $\triangle > 0$

    II. El intervalo donde g crece corresponde a $\left]-\infty, \dfrac{15}{8}\right[$

    De las proposiciones anteriores con certeza son verdaderas

    (a) solo la I.

    (b) solo la II.

    (c) todas.

    (d) ninguna.

Solución:

Para este ejercicio se tienen que recordar los conceptos de discriminante de una función cuadrática, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función cuadrática.

El discriminante de una función cuadrática cuyo criterio es $y = ax^2 + bx + c$ está dado por la siguiente fórmula $\triangle = b^2 - 4ac$, el intervalo de crecimiento está dado según su concavidad, si la función es cóncava hacia abajo la función crece en el intervalo $]-\infty, \frac{-b}{2a}[$ y decrece en el intervalo $]\frac{-b}{2a}, +\infty[$, si la función es cóncava hacia arriba se invierten los intervalos.

En el enunciado anterior se tiene una función de ecuación: $g(x) = 4x^2 - 15x - 12$, aplicando la fórmula del discriminante se tiene que:

$\triangle = b^2 - 4ac$

$\Rightarrow \triangle = (-15)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -12$

$\Rightarrow \triangle = 225 + 192$

$\Rightarrow \triangle = 417$

Así, se puede concluir que la proposición I es verdadera.

Como la función es cóncava hacia arriba, pues, $a > 0$ la función crece en el intervalo $\left]\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$.

Calculemos $\frac{-b}{2a}$

$\Rightarrow \frac{-(-15)}{2 \cdot (4)}$

$\Rightarrow \frac{15}{8}$

Por lo que la función crece en el intervalo $\left]\frac{15}{8}, +\infty\right[$, así se puede concluir que la proposición II es falsa.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (a).

12. Considere la función $f(x) = ax^2 + bx$ con $a, b > 0$ y las siguientes proposiciones:

    I. f alcanza el punto mínimo en $\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$

    II. f es cóncava hacia arriba

    De las proposiciones anteriores con certeza son verdaderas

    (a) solo la I.

    (b) solo la II.

    (c) todas.

    (d) ninguna.

Solución:

En el enunciado anterior se tiene una función de ecuación $f(x) = ax^2 + bx$, con $a, b > 0$, así se tiene que la función tiene una gráfica cóncava hacia arriba, por lo que la proposición II es verdadera.

El punto mínimo de la función estaría dado por el vértice, el mismo es el punto $V = \left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$

Primero se calculará la coordenada en x, es decir se tiene que el valor de la coordenada en $x = \dfrac{-b}{2a}$

ahora $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$ es igual a:

$$y = a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow y = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a}$$

$$\Rightarrow y = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2ab^2 - 4ab^2}{8a^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-2ab^2}{8a^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-b^2}{4a}$$

Así el punto del vértice sería $V = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-b^2}{4a}\right)$, por lo que la proposición I es falsa.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (b).

13. En un supermercado las manzanas tienen un costo de 250 colones la unidad y las peras tienen un costo de 300 colones la unidad, si en total se compraron 30 frutas entre manzanas y peras y se pagaron 8350 colones. Con base en el problema anterior,un sistema de ecuaciones que permite encontrar la cantidad que se compró de cada fruta corresponde a

(a) $\begin{cases} 250x + 300y = 30 \\ x + y = 8350 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 300x + 250y = 8350 \\ x + y = 30 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 30x + 30y = 8350 \\ 250x + 300y = 30 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 300x + 250y = 8350 \\ 300x + 250y = 30 \end{cases}$

Solución:

Para formar un sistema de ecuaciones es necesario entender los datos que proporciona el problema, en esta ocasión los datos son:

a) precio de cada $manzana = 250\,colones$

b) precio de cada $pera = 300\,colones$

Si le asignamos la variable y a la cantidad de manzanas que se compran, y le asignamos la x a las peras, podemos plantear una de las ecuaciones:

$250y + 300x = 8350$, ya que los datos dicen que por el total de manzanas y peras se pagó un total de 8350 colones.

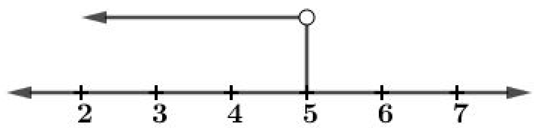
Si se lee con atención de nuevo el problema se puede obtener otra ecuación:

$x + y = 30$, ya que el problema dice que en total entre las manzanas y las peras se llevan 30.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (b).

Respuesta cerrada

14. Observe la siguiente imagen la cual corresponde a la representación gráfica de un conjunto y conteste lo que se le solicita.



Según la imagen anterior una posible representación del conjunto en notación por comprensión corresponde a

Solución:

La notación por comprensión de un conjunto viene dada por la escritura de una variable que tome todos los valores que estén en este conjunto, por ejemplo en el ejercicio anterior todos los números menores que 5 están en el conjunto, por lo tanto, la respuesta correcta corresponde a

$\{x < 5/x \in \mathbb{R}\}$

Nota:

Es importante ver qué elementos pertenecen al conjunto, en este caso el 5 no está en el conjunto, por lo que se escribe con un menor estricto.

$$\boxed{\{x < 5/x \in \mathbb{R}\}}$$

15. Considere el conjunto $P = \{2x/x \in \mathbb{N}\}$ que contiene a todos los números pares. Si el universo es $\mathbb{R}$, el complemento del conjunto P en notación por comprensión corresponde a

Solución:

Para responder a esta pregunta es necesario recordar el significado de complemento de un conjunto.

El complemento de un conjunto viene dado por todos los elementos del conjunto universo que no pertenecen al conjunto en el que se está trabajando. El complemento de un conjunto A viene representado por $\overline{A}$ ó A^c.

En este caso el ejercicio habla sobre un conjunto que contiene a todos los números pares, por lo que su complemento viene dado por todos los números impares. Para dar la respuesta, falta recordar como se puede escribir de manera general un número impar, lo cual se aprecia del enunciado del ejercicio, si un número par viene dado por $2x$ entonces un número impar viene dado por $2x + 1$.

Por lo tanto, la respuesta correcta corresponde a $\overline{P} = \{2x + 1/x \in \mathbb{N}\}$.

$$\boxed{\overline{P} = \{2x + 1/x \in \mathbb{N}\}}$$

16. Considere la funcion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 4x - 1$, la preimagen de -2 corresponde a

Solución:

Para esta pregunta es necesario recordar como obtener una preimagen a partir de un criterio dado.

Para calcular la imagen sustituye el valor de la variable por la correspondiente preimagen y resuelve la operación. En cambio una preimagen se obtiene al sustituir $f(x)$ en la ecuación por el valor que se da y despejar la incógnita. En esta ocasión el ejercicio pide que se averigüe la preimagen de -2 por lo que se sustituye $f(x)$ por -2 y se resuelve la ecuación.

$4x - 1 = -2$

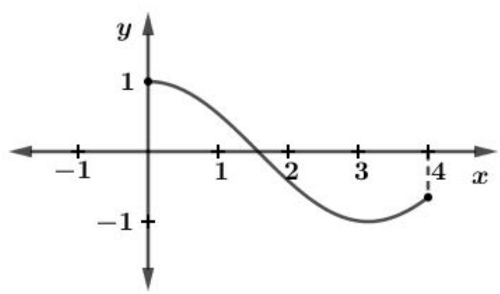
$\Rightarrow 4x = -2 + 1$

$\Rightarrow 4x = -1$

$\Rightarrow x = \dfrac{-1}{4}$ Por lo tanto, la preimagen de -2 corresponde a $\dfrac{-1}{4}$

$$\boxed{\text{La preimagen de -2 corresponde a } \dfrac{-1}{4}}$$

17. Observe la gráfica de la función h y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Si el dominio de la función h es $[0, 4]$ el ámbito de la función corresponde a

Solución:

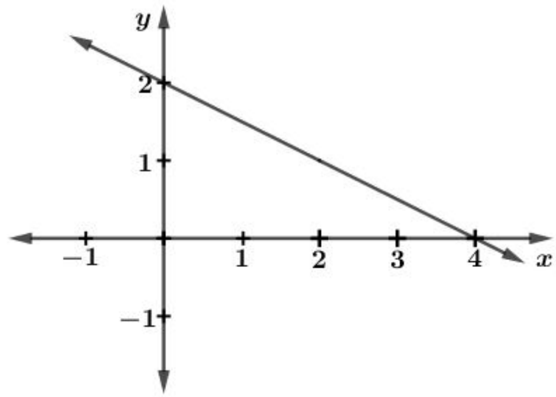
Para resolver esta pregunta es necesario recordar el concepto de ámbito de una función.

El ámbito de una función se lee de abajo hacia arriba en el eje de las ordenadas es decir el eje y, dicho de otra manera es observar en donde se encuentra el punto más bajo de la función con respecto al eje y y luego buscar el punto más alto donde llega la función con respecto al eje y. En caso de que la función no exista en ciertos intervalos del eje y se deben excluir estos del ámbito. Dicho de otra manera si la función no es continua en todo su dominio se deben quitar los intervalos en donde la función no esté definida.

En este caso si se observa la gráfica, la función es continua y está definida en el eje y en el intervalo $[-1, 1]$, por lo tanto ese sería el ámbito de la función.

$$\boxed{\text{Ámbito} = [-1, 1]}$$

18. Observe la gráfica de la función g y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



La pendiente de la gráfica g corresponde a

Solución:

Para resolver esta pregunta es necesario recordar el concepto de pendiente dado en la pregunta 7 de Relaciones y Álgebra.

Observando la gráfica, tenemos los puntos $(0, 2)$ y $(4, 0)$, así:

$$m = \frac{2-0}{0-4}$$

$$\Rightarrow m = \frac{-1}{2}$$

Por lo tanto, la pendiente es $\dfrac{-1}{2}$.

$$\boxed{\text{La pendiente es } \frac{-1}{2}}$$

19. Considere a las funciones g y f con $g(x) = \dfrac{x^2+3}{x}$ y $f(x) = 2x+1$, la composición $(gof)(x)$ corresponde a

Solución:

La composición de las funciones g y f viene dada por:

$(gof)(x) = g(f(x))$

$\Rightarrow g(f(x)) = g(2x+1)$

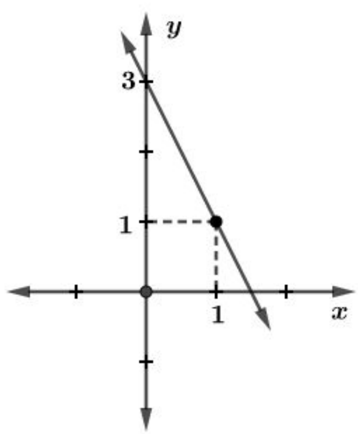
$\Rightarrow g(f(x)) = \dfrac{(2x+1)^2+3}{2x+1}$

Por lo tanto, la composición $(gof)(x)$ corresponde a:

$(gof)(x) = \dfrac{(2x+1)^2+3}{2x+1}$

$$\boxed{(gof)(x) = \frac{(2x+1)^2+3}{2x+1}}$$

20. Observe la gráfica de la función h y de acuerdo con los datos de la misma, conteste lo que se le solicita.



Con certeza se puede afirmar que la función h corta al eje x en el punto

Solución:

Para poder responder la pregunta primero es necesario obtener el criterio de la función, luego recordar que para hallar el corte con el eje x se debe igualar el criterio de la función a 0 y despejar la incógnita x.

Para hallar el criterio de la función se tienen los dos puntos que pertenecen a la recta: $(1,1)$ y $(0,3)$

Así se tiene que:

$m = \dfrac{3-1}{0-1}$

$\Rightarrow m = -2$

De manera similar se tiene que:

$b = 3 - 0(-2)$

$\Rightarrow b = 3$

Así el criterio de la función viene dado por:

$y = -2x + 3$

Para encontrar el corte con el eje x igualemos el criterio a 0

$0 = -2x + 3$

$\Rightarrow 2x = 3$

$\Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Así, se tiene como respuesta que el corte con las abscisas corresponde a $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

$$\boxed{\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)}$$

21. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo criterio viene dado por $f(x) = x^2 - \dfrac{x}{2} - 5$, ¿en qué puntos la función f corta al eje de las ordenadas y al eje de las abscisas respectivamente?

Solución:

Recordemos que una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ corta al eje de las ordenadas en el punto $(0, c)$ por lo que la respuesta a la primer pregunta es $(0, -5)$.

Para hallar los cortes con el eje de las abscisas es necesario igualar el criterio de la función a 0 y despejar la incógnita x. En este caso se resolverá utilizando la fórmula general.

Recordemos que dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ las soluciones por medio de la fórmula general vienen dadas por:

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} \quad \vee \quad x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}$, donde $\triangle = b^2 - 4ac$

En este ejercicio al igualar la función a 0 queda la ecuación cuadrática

$x^2 - \dfrac{x}{2} - 5 = 0$

Se averiguará $\triangle$

$\triangle = b^2 - 4ac$

$\Rightarrow \triangle = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -5$

$\Rightarrow \triangle = \dfrac{1}{4} + 20$

$\Rightarrow \triangle = \dfrac{81}{4}$

Sustituyendo los valores de las variables en las soluciones de la fórmula general se tiene que

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{81}{4}}}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{81}{4}}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{9}{2}}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{9}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\frac{10}{2}}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{\frac{-8}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{5}{2} \quad \vee \quad x_2 = -2$$

Por lo que los cortes con el eje de las abscisas son $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ y (-2,0).

> corte con el eje de las ordenadas $(0, -5)$ y el corte con el eje de las abscisas $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$,(-2,0)

22. El el TEC unos ingenieros lanzan desde el suelo un cohete, el mismo forma un movimiento parábolico representado por la siguiente función:

$$f(x) = -15x^2 + 60x$$

Donde x representa la cantidad recorrida en metros y $f(x)$ representa la altura del cohete durante su recorrido en metros. El cohete alcanza la altura máxima en el punto.

Solución:

Esta función representa a una parábola cóncava hacia abajo por lo tanto el punto máximo de la función se encuentra en el vértice que viene dado por $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Por lo que primero se procederá a hallar $\frac{-b}{2a}$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-60}{2 \cdot -15}$$

$$\Rightarrow \frac{-b}{2a} = 2$$

Así el punto máximo del cohete en la coordenada y viene dado por:

$$f(2) = -15(2)^2 + 60(2)$$

$$\Rightarrow f(2) = 60$$

Por lo tanto, el cohete alcanza la altura máxima en el punto $(2, 60)$.

> $(2, 60)$

23. En la llantera “El éxito” se sabe que la ganancia (en miles de colones), en función de una cantidad x de llantas vendidas vienen dada por la fórmula:

$$h(x) = -2x^2 + 800x + 400$$

La cantidad de llantas que se necesitan vender para alcanzar la ganancia máxima corresponde a

Solución:

De manera similar al ejercicio anterior se pide hallar el punto de la ganancia máxima, pero en este caso el problema solo pide hallar la cantidad de llantas que se necesitan vender, es decir la coordenada en x.

Así se busca hallar la solución de $\dfrac{-b}{2a}$.

$\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-800}{2 \cdot -2}$

$\Rightarrow \dfrac{-b}{2a} = 200$

Por lo tanto, se necesitan vender 200 llantas.

$\boxed{\text{200 llantas}}$

24. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 8y & = & -12 \\ 7x + -12y & = & 4 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones para el sistema anterior corresponde a

Solución:

Para resolver el sistema de ecuaciones hay múltiples maneras, se procederá con la más común que es sustitución, la cual consiste en despejar una de las ecuaciones y sustituir en la otra.

Se despejará en la primer ecuación la variable x, de manera que:

$x = \dfrac{-12 - 8y}{3}$, sustituyendo la x en la segunda ecuación se tiene que:

$7\dfrac{(-12 - 8y)}{3} - 12y = 4$

$\Rightarrow \dfrac{-84 - 56y}{3} - 12y = 4$

$\Rightarrow \dfrac{-84 - 56y - 36y}{3} = 4$

$\Rightarrow -84 - 92y = 12$

$\Rightarrow -92y = 96$

$\Rightarrow y = \dfrac{-96}{92}$

$\Rightarrow y = \dfrac{-24}{23}$

El paso a seguir es sustituir el valor de y en la ecuación que se despejó para obtener el valor de x. De esa manera se tiene lo siguiente

$x = \dfrac{-12 - 8y}{3}$

$\Rightarrow x = \dfrac{-12 - 8 \cdot \dfrac{-24}{23}}{3}$, al resolver la operación nos da como resultado que

$x = \dfrac{-28}{23}$

Por lo tanto, el conjunto de solución está dado por

$S = \left\{ \left(\dfrac{-28}{23}, \dfrac{-24}{23} \right) \right\}$

$$\boxed{S = \left\{ \left(\dfrac{-28}{23}, \dfrac{-24}{23} \right) \right\}}$$

25. En el CTP Cartago el profesor de matemáticas fue a comprar marcadores de pizarra, cada marcador de tinta azul tiene un valor de 1250 colones y cada marcador de tinta negra tiene un valor de 1150 colones, en total pagó 18150 colones y se llevaron un total de 15 marcadores. Si A representa la cantidad de dinero pagada por los marcadores de tinta azul y N respresenta la cantidad de dinero pagada por los marcadores de tinta negra. La diferencia $A - N$ equivale a

Solución:

Para resolver este problema, la manera óptima es creando un sistema de ecuaciones.

Siendo $x =$ cantidad de marcadores azules y $y =$ cantidad de marcadores negros, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1250x + 1150y &= 18150 \\ x + y &= 15 \end{cases}$$

Despejando la x de la segunda ecuación se tiene lo siguiente:

$x = 15 - y$, al sustituir x en la primera ecuación se tiene que:

$1250(15 - y) + 1150y = 18150$

$\Rightarrow 18750 - 1250y + 1150y = 18150$

$\Rightarrow -100y = -600$

$\Rightarrow y = 6$, luego se sustituye el valor de y en la ecuación que se despejó al inicio para obtener el valor de x.

Así:

$x = 15 - 6$

$\Rightarrow x = 9$

Como A representa la cantidad de dinero pagada por los marcadores de tinta azul se tiene que:

$A = 1250 \cdot 9$

$\Rightarrow A = 11250$

De manera similar como N representa la cantidad de dinero pagada por los marcadores de tinta negra se tiene que:

$N = 1150 \cdot 6$

$\Rightarrow N = 6900$

De esta manera se tiene que la diferencia $A - N$ corresponde a

$A - N = 11250 - 6900$

$\Rightarrow A - N = 4350$

$$\boxed{A - N = 4350}$$

7. Habilidades según el programa vigente de Matemática del Ministerio de Educación Pública

Geometría

1. Representar gráficamente una circunferencia dado su centro y su radio.
2. Representar algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio.
3. Aplicar traslaciones a una circunferencia.
4. Resolver problemas relacionados con la circunferencia y sus representaciones.
5. Determinar gráfica y algebraicamente si un punto se ubica en el interior o en el exterior de una circunferencia.
6. Determinar si una recta dada es secante, tangente o exterior a una circunferencia.
7. Representar gráfica y algebraicamente rectas secantes, tangentes y exteriores a una circunferencia.
8. Analizar geométrica y algebraicamente la posición relativa entre rectas en el plano desde el punto de vista del paralelismo y la perpendicularidad.
9. Aplicar la propiedad que establece que una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio de la circunferencia en el punto de tangencia.
10. Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos.
11. Determinar las medidas de los ángulos internos y externos de polígonos en diversos contextos.
12. Determinar la medida de la apotema y el radio de polígonos regulares y aplicarlo en diferentes contextos.
13. Calcular perímetros y áreas de polígonos no regulares utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.
14. Resolver problemas que involucren polígonos y sus diversos elementos.
15. Estimar perímetros y áreas de figuras planas no poligonales utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.
16. Identificar el radio y el diámetro de una esfera.
17. Identificar la superficie lateral, las bases, la altura, el radio y el diámetro de un cilindro circular recto.
18. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de una esfera o un cilindro y características métricas de ellas.
19. Reconocer elipses en diferentes contextos.

Relaciones y Álgebra

1. Analizar subconjuntos de los números reales.
2. Utilizar correctamente los símbolos de pertenencia y de subconjunto.
3. Representar intervalos numéricos en forma gráfica, simbólica y por comprensión.
4. Determinar la unión y la intersección de conjuntos numéricos.
5. Determinar el complemento de un conjunto numérico dado.
6. Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función.
7. Evaluar el valor de una función dada en forma gráfica o algebraica, en distintos puntos de su dominio.
8. Analizar una función a partir de sus representaciones.
9. Calcular la composición de dos funciones.
10. Representar gráficamente una función lineal.
11. Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica.
12. Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.
13. Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
14. Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.
15. Relacionar la representación gráfica con la algebraica.
16. Analizar sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
17. Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

8. Bibliografía

MEP. (2012). Programas de estudio de Matemática. San José, Costa Rica